3 问题的解

3.1 边界处理方法

Lin[38]在 Lamb[37]的线性积分法的基础上，引入 Hankel 函数积分变换法来解决单相介质半空间中洞室对平面 P 波的散射问题，展示了 Hankel 函数积分变换法在处理特定波动问题中的有效性。其中 Hankel 函数积分变换公式为：

$$\mathrm{H}_n(k_\alpha r_1)e^{in\theta_1}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{i^{-n}}{i\pi v_\alpha}\right)\left(\frac{k-v_\alpha}{k_\alpha}\right)^n e^{ikx_1-v_\alpha y_1}\right]dk\,, \qquad (19)$$

式中，$v_\alpha=\sqrt{k^2-k_\alpha^2}$，$k_\alpha$ 为介质中入射波的波数，k 为波数域。

本文使用此方法将饱和冻土中洞室周围的散射波势函数从极坐标系 (r_1,θ_1) 转换到直角坐标系 (x,y) 中。将式(19)代入式(10)，对洞室周围的散射波进行坐标变换：

$$\varphi_j^s=\int_{-\infty}^{\infty}A_j^S(k)e^{ikx-v_{\alpha j}y}dk(j=1,2,3)\,, \qquad (20a)$$

$$\psi^s{}_{\mathrm{m}}=\int_{-\infty}^{\infty}B_m^s(k)e^{ikx-v_\beta y)}dk \quad (\mathrm{m}=1,2), \qquad (20b)$$

式中，$A_j^s(k)$ 和$B_i^s(k)$分别为直角坐标系(x,y)下洞室附近散射 P_j 和 $\mathrm{S_m}$ 波的波幅系数，与柱坐标系下的波幅系数 a_{jn}^s 和b_{mn}^s之间的关系可表示为

$$\begin{bmatrix}A_j^s(k)\\B_m^s(k)\end{bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)\begin{bmatrix}a_{jn}^s\\b_{mn}^s\end{bmatrix},\quad (21)$$

其中，$\zeta(n,h)=\begin{bmatrix}\zeta_{\alpha j,n}(h)/v_{\alpha j}(j=1,2,3)\\ \zeta_{\beta m,n}(h)/v_{\beta m}(m=1,2)\end{bmatrix}$，$\zeta_{\alpha j,n}(h)=\left(\frac{k-v_{\alpha j}}{k_{\alpha j}}\right)^n e^{-v_{\alpha j}h}(j=1,2,3)$，$\zeta_{\beta m,n}(h)=\left(\frac{k-v_{\beta m}}{k_\beta \mathrm{m}}\right)^n e^{-v_{\beta m}h}$。

地下洞室和半空间表面存在时会产生额外的散射和反射波，在直角坐标系(x, y)下表示为：

$$\varphi_j^R=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_{jn}^R J_n(k_{\alpha j}r_1)\right]e^{in\theta_{\alpha,j}}(j=1,2,3)\,, \qquad (22a)$$

$$\psi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{R}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[b_{mn}^R J_n(k_{\beta m}r_1)\right]e^{in\theta_{\beta m}}, \qquad (22b)$$

利用公式 $e^{ikr\cos\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^n J_n(kr)e^{in\theta}$ [39]，半空间表面处散射波可变换为式(11)。

从式(11)、式(22)中可以发现，

$$\begin{bmatrix}a_{jn}^R\\b_{mn}^R\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{\infty}i^n\lambda(n,h)\begin{bmatrix}A_j^R(k)\\B_{\mathrm{m}}^R(k)\end{bmatrix}dk。 \qquad (23)$$

其中，$\lambda(n,h)=\begin{bmatrix}\zeta_{\alpha j,n}(h)(j=1,2,3)\\ \zeta_{\beta,n}(h)\end{bmatrix}\lambda(n,h)=\begin{bmatrix}\zeta_{\alpha j,n}(h)(j=1,2,3)\\ \zeta_{\beta m,n}(h)(m=1,2)\end{bmatrix}$。