修正后的合并方程推导与详细分析

2025 年 12 月 28 日

1 问题背景 (Problem Background)

用户指出在合并大方程时，涉及 S (散射) 和 T (变换) 矩阵的组合中存在符号疑问（“一个正一个负”）。本文档首先回顾基础的波函数变换，然后新增一章详细复现“合并大方程”的完整推导过程，以彻底澄清符号约定。

2 波函数展开与坐标变换 (Preliminaries)

2.1 平面波与柱面波的转换

在半空间问题中，我们需要在直角坐标系（平面波）和柱坐标系（柱面波）之间转换。

2.1.1 平面波 → 柱面波 (Transformation T_{PC})

平面波 $e^{i(k_x x-k_z z)}$ (向下传播) 在 (x, z) 坐标系中。洞室中心位于 $(0, h)$，即 $z' = z - h$。

$$e^{i(k_x x-k_z z)} = e^{ik_x x-ik_z(z'+h)} = e^{-ik_z h} \cdot e^{i(k_x x-k_z z')}$$

利用 Jacobi-Anger 展开：

$$e^{i(k_x x-k_z z')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in(\theta-\alpha)}$$

其中 $k_x = k \sin\alpha, k_z = k \cos\alpha$。因此，变换矩阵 T 中包含相位项：

$$\Phi_{trans} = e^{-ik_z h} \quad (\text{向下传播})$$

关键点：这里的指数符号取决于坐标轴定义和波传播方向。

2.1.2 柱面波 → 平面波 (Transformation T_{CP})

柱面散射波 $H_n^{(1)}(kr)e^{in\theta}$ 向上传播至自由表面 $z = 0$。利用 Sommerfeld 积分表示：

$$H_n^{(1)}(kr)e^{in\theta} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_x x+ik_z|z-h|}}{k_z}(\dots)dk_x$$

当波向上传播 $(z < h)$，相位项为 $e^{ik_z(h-z)}$。在表面 $z = 0$ 处，相位项为 $e^{ik_z h}$。

3 合并大方程详细推导 (Re-derivation of Combined Equation)

本节按照“合并大方程”的逻辑，分三步完整推导最终的矩阵方程。

3.1 第一步：散射矩阵 S (Local Scattering)

在洞室局部坐标系 (r, θ) 中，总波场由“外来入射波”和“洞室散射波”组成：

$$\Phi_{total} = \Phi_{inc}^{local} + \Phi_{scat} \tag{1}$$

在洞室表面 $r = R$ 处，需满足边界条件（如应力自由）：

$$\mathbf{T}_{stress}(\Phi_{scat}) = -\mathbf{T}_{stress}(\Phi_{inc}^{local})$$

对于每一个模态 n，我们得到线性关系：

$$E_{scat}^{(n)} \cdot b_n = -E_{inc}^{(n)} \cdot a_n$$

写成矩阵形式：

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{其中}\mathbf{S} = -[E_{scat}]^{-1}[E_{inc}]) \tag{2}$$

这里，$\mathbf{b}$ 是散射系数向量，$\mathbf{a}$ 是局部有效入射系数向量。

3.2 第二步：往返传播算子 T (Global Propagation)

这部分描述波从“发出”到“返回”的闭环过程：

1. ** 上行 **: 散射波 $\mathbf{b}$ 发出，传播距离 h 到达地表。相位累积 $e^{ik_z h}$。
2. ** 反射 **: 在地表发生反射，乘以反射系数 $\mathbf{R}$。
3. ** 下行 **: 反射波返回，传播距离 h 回到洞室。相位累积 $e^{ik_z h}$（或等价的几何路径相位）。

我们将这个“散射波 $\to$ 新的入射波”的过程定义为矩阵 $\mathbf{T}$：

$$\mathbf{a}_{refl} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b} \tag{3}$$

3.3 第三步：闭环合并 (Combined Loop)

洞室感受到的“总有效入射波”$\mathbf{a}$ 等于“原始外部入射波”加上“地表反射回来的波”：

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{inc}^{original} + \mathbf{a}_{refl} \tag{4}$$

将方程 (3) 和 (2) 代入：

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{inc}^{original} + \mathbf{T}\mathbf{b}$$

再结合散射方程 (2) $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$：

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a}_{inc}^{original} + \mathbf{T}\mathbf{b}) \tag{5}$$

3.4 “一正一负”符号分析

我们将方程 (5) 展开并移项:

$$\mathbf{b} - \mathbf{STb} = \mathbf{Sa}_{inc}^{original}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{ST})\mathbf{b} = \mathbf{Sa}_{inc}^{original}$$

这即是标准的求解方程。如果您关心的形式是左乘 $\mathbf{S}^{-1}$:

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{ST})\mathbf{b} = \mathbf{a}_{inc}^{original}$$

$$(\mathbf{S}^{-1} - \mathbf{T})\mathbf{b} = \mathbf{a}_{inc}^{original}$$

在此式中:

- $\mathbf{S}^{-1}$ 前为正号。
- $\mathbf{T}$ 前为负号（移项所致）。

这再次证明了符号的正确性。

4 结论

经过详细推导，我们确认:

1. 文档中的公式 $(\mathbf{S}^{-1} - \mathbf{T})$ 是正确的物理方程形式。
2. 之前的数值错误（10^8）通过我们的代码修正（得到 10^{-6}）已解决。
3. 建议采用我们代码中的方法（构建 **M** 矩阵），它在数值上等价于上述方程，但规避了显式计算 $\mathbf{S}^{-1}$（S 矩阵可能病态），这是一种更加稳健的做法。