自由表面的矩阵关系为：

$$\begin{bmatrix} A_1^R \\ A_2^R \\ A_3^R \\ B_1^R \\ B_2^R \end{bmatrix} = [S]_{5\times5}^{-1} \cdot [T]_{5\times5} \cdot \begin{bmatrix} A_1^S \\ A_2^S \\ A_3^S \\ B_1^S \\ B_2^S \end{bmatrix}$$

记散射矩阵：

$$M = [S]^{-1}[T] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix}$$

散射矩阵关系：$\begin{bmatrix} A_1^R \\ A_2^R \\ A_3^R \\ B_1^R \\ B_2^R \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_1^S \\ A_2^S \\ A_3^S \\ B_1^S \\ B_2^S \end{bmatrix}$

P波参数（$j = 1,2,3$）：

$$\begin{aligned} E_j = {} & (K_2 + C_{12} + C_{23})\alpha_j^L k a_j^2 + \left(K_1 + C_{12} + C_{13} - \frac{2}{3}\mu_1 - \frac{1}{3}\mu_{13}\right) k a_j^2 \\ & + (2\mu_1 + \mu_{13})\nu_{aj}^2 + (2\mu_3 + \mu_{13})\alpha_j^I \nu_{aj}^2 \\ & + \left(K_3 + C_{13} + C_{23} - \frac{2}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_{13}\right)\alpha_j^I k a_j^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_j &= \left[\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_{13}\right) + \left(\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_{13}\right)\alpha_j^I\right](-ik\nu_{aj}) \\ P_j &= -\left(C_{12} + K_2\alpha_j^L + C_{23}\alpha_j^I\right)\nu_{aj} k a_j^2 \\ Q_j &= -(1 - \alpha_j^I)\nu_{aj} \\ U_j &= (1 - \alpha_j^I)(ik) \end{aligned}$$

S波参数（$m = 1,2$）：

$$\begin{aligned} F_m &= (-ik\nu_{bm})(1 + \beta_m^I) \\ H_m &= -(1 + \beta_m^I)(k^2 + \nu_{bm}^2) \\ R_m &= (1 - \beta_m^I)(ik) \\ V_m &= (1 - \beta_m^I)\nu_{bm} \end{aligned}$$

矩阵表达式：

$$[S] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 & G_3 & H_1 & H_2 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & R_1 & R_2 \\ U_1 & U_2 & U_3 & V_1 & V_2 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} -E_1 & -E_2 & -E_3 & -F_1 & -F_2 \\ -G_1 & -G_2 & -G_3 & -H_1 & -H_2 \\ -P_1 & -P_2 & -P_3 & 0 & 0 \\ -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 & -R_1 & -R_2 \\ -U_1 & -U_2 & -U_3 & -V_1 & -V_2 \end{bmatrix}$$

反射波柱坐标系数用直角坐标系数表示：

对于 P 波反射系数（j=1,2,3）：

$$a_{jn}^{R}=\int_{-\infty}^{\infty} i^{n}\lambda(n,h)\left[m_{j1}A_{1}^{S}(k)+m_{j2}A_{2}^{S}(k)+m_{j3}A_{3}^{S}(k)+m_{j4}B_{1}^{S}(k)+m_{j5}B_{2}^{S}(k)\right]dk$$

对于 S 波反射系数（m=1,2）：

$$b_{mn}^{R}=\int_{-\infty}^{\infty} i^{n}\lambda(n,h)\left[m_{(3+m)1}A_{1}^{S}(k)+m_{(3+m)2}A_{2}^{S}(k)+m_{(3+m)3}A_{3}^{S}(k)+m_{(3+m)4}B_{1}^{S}(k)+m_{(3+m)5}B_{2}^{S}(k)\right]dk$$

散射波柱坐标系数用直角坐标系数表示：

对于 P 波散射系数（j=1,2,3）：

$$a_{jn}^{S}=\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)A_{j}^{S}(k)$$

对于 S 波散射系数（m=1,2）：

$$b_{mn}^{S}=\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)B_{m}^{S}(k)$$

将上述表达式代入洞室表面方程：

$$\left[\hat{E}^{S}\right]_{5\times5}\begin{bmatrix}a_{jn}^{S}\\ b_{mn}^{S}\end{bmatrix}+\left[\hat{E}^{R}\right]_{5\times5}\begin{bmatrix}a_{jn}^{R}+a_{jn}^{1}\\ b_{mn}^{R}+b_{mn}^{1}\end{bmatrix}=0$$

得到的具体形式为：

$$\left[\hat{E}^{S}\right]\begin{bmatrix}\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)A_{j}^{S}(k)\\ \frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)B_{m}^{S}(k)\end{bmatrix}+\left[\hat{E}^{R}\right]\begin{bmatrix}a_{jn}^{R}+a_{jn}^{1}\\ b_{mn}^{R}+b_{mn}^{1}\end{bmatrix}=0$$

步骤1： 将方程组1写成展开形式：

$$\begin{aligned}
A_{1}^{R}&=m_{11}A_{1}^{S}+m_{12}A_{2}^{S}+m_{13}A_{3}^{S}+m_{14}B_{1}^{S}+m_{15}B_{2}^{S}\\
A_{2}^{R}&=m_{21}A_{1}^{S}+m_{22}A_{2}^{S}+m_{23}A_{3}^{S}+m_{24}B_{1}^{S}+m_{25}B_{2}^{S}\\
A_{3}^{R}&=m_{31}A_{1}^{S}+m_{32}A_{2}^{S}+m_{33}A_{3}^{S}+m_{34}B_{1}^{S}+m_{35}B_{2}^{S}\\
B_{1}^{R}&=m_{41}A_{1}^{S}+m_{42}A_{2}^{S}+m_{43}A_{3}^{S}+m_{44}B_{1}^{S}+m_{45}B_{2}^{S}\\
B_{2}^{R}&=m_{51}A_{1}^{S}+m_{52}A_{2}^{S}+m_{53}A_{3}^{S}+m_{54}B_{1}^{S}+m_{55}B_{2}^{S}
\end{aligned}$$

步骤2： 将上述关系代入方程组2的积分项中：

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{E}^{S}\right]\begin{bmatrix}\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)A_{j}^{S}(k)\\ \frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)B_{m}^{S}(k)\end{bmatrix}+\\
&\left[\hat{E}^{R}\right]\begin{bmatrix}\int_{-\infty}^{\infty} i^{n}\lambda(n,h)(m_{j1}A_{1}^{S}+m_{j2}A_{2}^{S}+m_{j3}A_{3}^{S}+m_{j4}B_{1}^{S}+m_{j5}B_{2}^{S})dk+a_{jn}^{1}\\ \int_{-\infty}^{\infty} i^{n}\lambda(n,h)(m_{(3+m)1}A_{1}^{S}+m_{(3+m)2}A_{2}^{S}+m_{(3+m)3}A_{3}^{S}+m_{(3+m)4}B_{1}^{S}+m_{(3+m)5}B_{2}^{S})dk+b_{mn}^{1}\end{bmatrix}=0
\end{aligned}$$

10×10线性方程组：

方程1-5（自由表面关系）：

$$A_{j}^{R}-\sum_{p=1}^{3}m_{jp}A_{p}^{S}-\sum_{q=1}^{2}m_{j,3+q}B_{q}^{S}=0,\quad j=1,2,3$$

$$B_{m}^{R}-\sum_{p=1}^{3}m_{3+m,p}A_{p}^{S}-\sum_{q=1}^{2}m_{3+m,3+q}B_{q}^{S}=0,\quad m=1,2$$

方程6-10（洞室表面边界条件）：

$$\sum_{j=1}^{3}\hat{E}_{1j}^{S}\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)A_{j}^{S}+\sum_{m=1}^{2}\hat{E}_{1,3+m}^{S}\frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)B_{m}^{S}+$$

$$\sum_{j=1}^{3}\hat{E}_{1j}^{R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} i^{n}\lambda(n,h)A_{j}^{R}dk+a_{j1}^{1}\right]+\sum_{m=1}^{2}\hat{E}_{1,3+m}^{R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} i^{n}\lambda(n,h)B_{m}^{R}dk+b_{m1}^{1}\right]=0$$

定义系数矩阵：

$$K = \begin{bmatrix} I_{5\times5} & -M \\ E^R\Lambda + E^S\Gamma & 0 \end{bmatrix}_{10\times10}$$

其中：

- Λ包含积分算子 $\int_{-\infty}^{\infty} i^n \lambda(n,h)dk$
- $\Gamma = \frac{i^{-n}}{i\pi}\zeta(n,h)$

则大方程组为：

$$K\mathbf{X} = \mathbf{b}$$

其中 $\mathbf{b}$包含已知的入射波项 a_{jn}^1, b_{mn}^1。

这样就将两个5方程组合并成了一个10×10的线性方程组，可以直接求解十个未知数。