

3 问题的解

3.1 边界处理方法

Lin^[38]在 Lamb^[37]的线性积分法的基础上, 引入 Hankel 函数积分变换法来解决单相介质半空间中洞室对平面 P 波的散射问题, 展示了 Hankel 函数积分变换法在处理特定波动问题中的有效性。其中 Hankel 函数积分变换公式为:

$$H_n(k_\alpha r_1) e^{int\theta_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{i^{-n}}{i\pi v_\alpha} \right) \left(\frac{k - v_\alpha}{k_\alpha} \right)^n e^{ikx_1 - v_\alpha y_1} \right] dk, \quad (19)$$

式中, $v_\alpha = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}$, k_α 为介质中入射波的波数, k 为波数域。

本文使用此方法将饱和冻土中洞室周围的散射波势函数从极坐标系 (r_1, θ_1) 转换到直角坐标系 (x, y) 中。将式(19)代入式(10), 对洞室周围的散射波进行坐标变换:

$$\varphi_j^s = \int_{-\infty}^{\infty} A_j^s(k) e^{ikx - v_{\alpha j} y} dk \quad (j=1,2,3), \quad (20a)$$

$$\psi_m^s = \int_{-\infty}^{\infty} B_m^s(k) e^{ikx - v_{\beta m} y} dk \quad (m=1,2), \quad (20b)$$

式中, $A_j^s(k)$ 和 $B_m^s(k)$ 分别为直角坐标系 (x, y) 下洞室附近散射 P_j 和 S_m 波的波幅系数, 与柱坐标系下的波幅系数 a_{jn}^s 和 b_{mn}^s 之间的关系可表示为

$$\begin{bmatrix} A_j^s(k) \\ B_m^s(k) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^{-n}}{i\pi} \zeta(n, h) \begin{bmatrix} a_{jn}^s \\ b_{mn}^s \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中, $\zeta(n, h) = \begin{bmatrix} \zeta_{\alpha j, n}(h)/v_{\alpha j} (j=1,2,3) \\ \zeta_{\beta m, n}(h)/v_{\beta m} (m=1,2) \end{bmatrix}$, $\zeta_{\alpha j, n}(h) = \left(\frac{k - v_{\alpha j}}{k_\alpha} \right)^n e^{-v_{\alpha j} h} (j=1,2,3)$,

$$\zeta_{\beta m, n}(h) = \left(\frac{k - v_{\beta m}}{k_\beta} \right)^n e^{-v_{\beta m} h}$$

地下洞室和半空间表面存在时会产生额外的散射和反射波, 在直角坐标系 (x, y) 下表示为:

$$\varphi_j^R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_{jn}^R J_n(k_{\alpha j} r_1)] e^{in\theta_{\alpha j}} \quad (j=1,2,3), \quad (22a)$$

$$\psi_m^R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [b_{mn}^R J_n(k_{\beta m} r_1)] e^{in\theta_{\beta m}}, \quad (22b)$$

利用公式 $e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$ ^[39], 半空间表面处散射波可变换为式(11)。

从式(11)、式(22)中可以发现,

$$\begin{bmatrix} a_{jn}^R \\ b_{mn}^R \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} i^n \lambda(n, h) \begin{bmatrix} A_j^R(k) \\ B_m^R(k) \end{bmatrix} dk. \quad (23)$$

其中, $\lambda(n, h) = \begin{bmatrix} \zeta_{\alpha j, n}(h) (j=1,2,3) \\ \zeta_{\beta m, n}(h) (m=1,2) \end{bmatrix}$