

# 模糊推理系统

# 目录



1. 背景概述



2. 经典方法



3. 经典数据集



4. 研究方向



5. 应用领域

# 1. 背景概述



北京交通大学

- 模糊推理系统又称为**模糊系统**，是以**模糊集合理论**和**模糊推理方法**等为基础，具有处理模糊信息能力的系统。
- 模糊推理系统以**模糊逻辑理论**为主要计算工具，可以实现复杂的非线性映射关系，而且其**输入输出都是精确的数值**，因此已被广泛应用。



智能决策



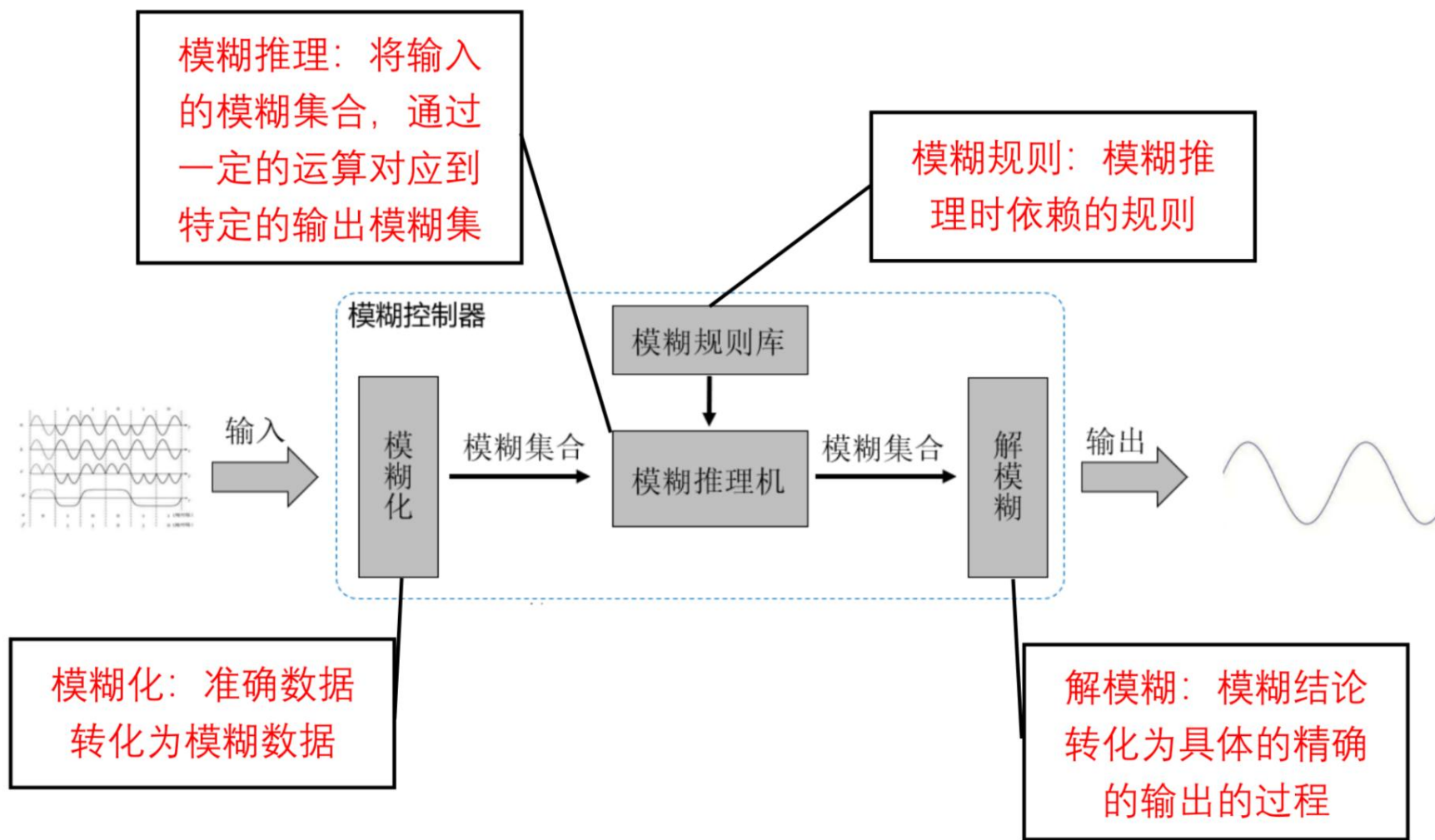
图像分割



时间序列预测

## 1.1 模糊推理系统的结构

从功能上来看，模糊推理系统主要由**模糊化**、**模糊规则库**、**模糊推理机**及**去模糊化**几部分组成：



## 1.2 模糊化

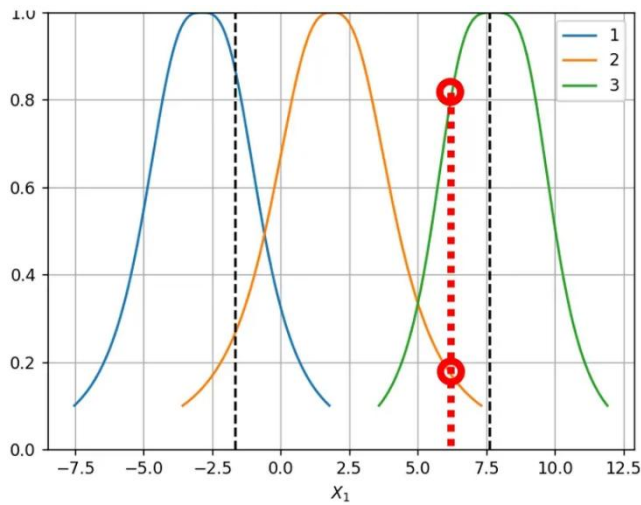
### ➤ 模糊化的概念

**精确值**进入模糊推理系统时，一般要将其**模糊化**成**给定论域上的模糊集合**。

模糊化的实质是将**给定输入转换**成**模糊集合**。

模糊化的原则是：

- 在精确值处模糊集合的**隶属度**最大；
- 当输入有噪声时，结果具有**抗干扰能力**；
- **模糊化运算**应尽可能简单。



假设我们对变量 $x_1$ 设置三个隶属度（个数的设置是偏主观化的），隶属函数采用**高斯隶属函数**。如果 $x_1$ 是苹果产量，那么我们可以将蓝、黄、绿三个隶属度函数理解为**低产**、**中产**、**高产**。那么当 $x_1 = 6$ 时，就是属于0.82的高产、0.19的中产和几乎为0的低产。

### ➤ 模糊化方法：高斯隶属函数法

**高斯隶属函数法**是一种常用的模糊化方法，具有良好的**抗干扰能力**，且模糊化结果更接近人的认知。

设 $x^*$ 为精确值， $\tilde{A}^*$ 为转化后的模糊集合，高斯隶属函数法为：

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}$$

其中，参数 $\sigma$ 决定高斯函数的陡度。

## 1.3 模糊规则库

### ➤ 模糊规则库的概念

由模糊推理系统中的**全部模糊规则**组成，是模糊推理系统的**核心部分**。

从某种意义上讲，模糊系统的其他部分都是为了有效地执行这些规则而存在。

### ➤ 模糊规则的基本形式

给定论域 $X$ 和 $Y$ ,且 $x \in X$ 、 $y \in Y$

#### (1) 一维模糊规则

*if  $x$  is  $\tilde{A}$ , then  $y$  is  $\tilde{B}$*

其中， $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 分别是论域 $X$ 和 $Y$ 上的模糊集合。

#### (2) 多维模糊规则

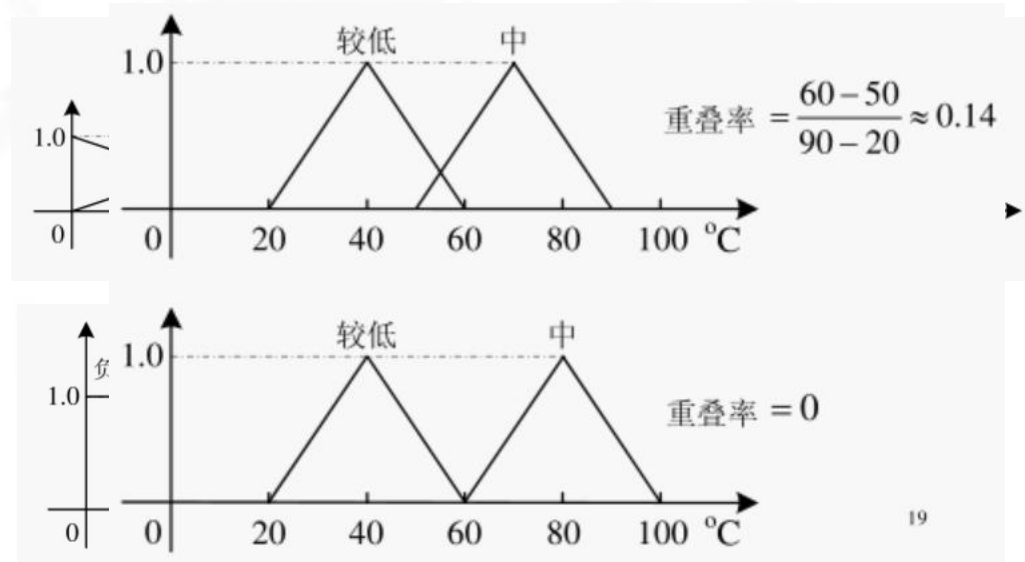
*if  $x_1$  is  $\tilde{A}_1$  and  $x_2$  is  $\tilde{A}_2$  and  $\cdots$  and  $x_n$  is  $\tilde{A}_n$ , then  $y$  is  $\tilde{B}$*

*if  $x_1$  is  $\tilde{A}_1$  or  $x_2$  is  $\tilde{A}_2$  or  $\cdots$  or  $x_n$  is  $\tilde{A}_n$ , then  $y$  is  $\tilde{B}$*

其中 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$ 是论域 $X$ 上的模糊集合， $\tilde{B}$ 是论域 $Y$ 上的模糊集合。

### ➤ 模糊规则库的基本性质

- **完备性**：输入空间中的任意值都至少存在一条可利用的模糊规则
- **交叉性**：相邻的模糊规则之间有一定的交叉性
- **一致性**：规则库中不存在相互矛盾的模糊规则

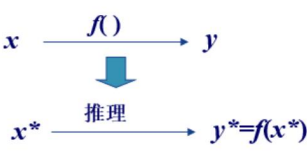
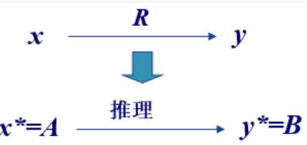




# 1.4 模糊推理机（模糊推理方法）

## ➤ 模糊推理的概念

在语言控制规则中蕴涵的模糊关系确定后，模糊推理机根据模糊控制规则库和当前的输入状态，推断出输出状态（模糊控制量）的过程。

名称	示意图	解释
常规推理		已知x, y之间的函数关系 $y=f(x)$ ，则对于某个 $x^*$ ，根据 $f()$ 可以推理得到相应的 $y^*$
模糊推理		知道了语言控制规则中蕴涵的模糊关系后，就可以根据模糊关系和输入情况，来确定输出情况，这就叫做“模糊推理”

假设模糊控制器的规则库中有n条并列的规则：

$R_1, R_2, \dots, R_n$ ，其中第*i*条规则为：

$R_i: \text{If } x_1 \text{ 取 } A_{i1}, \text{ 且 } x_2 \text{ 取 } A_{i2}, \dots, \text{ 且 } x_m \text{ 取 } A_{im},$   
 $\text{Then } y \text{ 取 } B_i$

那么控制器的模糊推理就是：当系统的当前输入状态是  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$  时，寻找控制器的输出模糊状态。

## ➤ 模糊推理的两种方法

### (1) 综合法

对所有规则所表示的模糊关系**同时进行综合处理**，得到整个规则库的**总模糊关系** $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$ 。然后，通过与当前的**输入模糊状态** $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$ 的合成得到推理的输出模糊状态，即：

$$B' = (A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_m) \circ R$$

### (2) 并行法

对规则库的规则不作综合处理，而是**各自独立地存放、独立地**对系统当前的输入模糊状态**做响应**，然后通过综合各规则的**分布响应**得到最终的输出模糊状态。

若给定当前输入模糊状态 $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$ ，则经过第*i*条规则推理后的输出模糊集合为：

$$B'_i = (A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_m) \circ R_i$$
$$B' = B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_m$$

## 1.5 去模糊化

### ➤ 去模糊化概念

去模糊化是**确定一个最能代表模糊集合的精确值**。是模糊推理系统必不可少的环节。由于模糊性的存在，获得的代表模糊集合的清晰值可能有所不同，所以**去模糊化方法不唯一**。

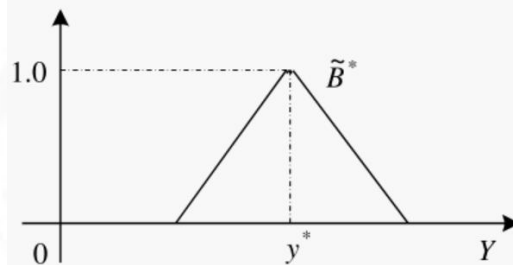
确定去模糊化方法时，一定要考虑到以下准则：

- **有效性**：所得到的精确值能够直观地表达该模糊集合
- **简便性**：去模糊化运算要足够简单，保证模糊推理系统实时使用
- **鲁棒性**：模糊集合的微小变化不会使精确值发生大幅变化

### ➤ 去模糊化的两种方法

#### (1) 最大隶属度法

选取模糊集合覆盖的论域中，对应隶属度最大的元素作为该模糊集合的精确值。如果给定模糊集合 $\tilde{B}^*$ ，则精确值 $y^*$ 应满足 $\mu_{\tilde{B}^*}(y^*) \geq \mu_{\tilde{B}^*}(y), y \in Y$ 。



**优点:**去模糊运算特别简单

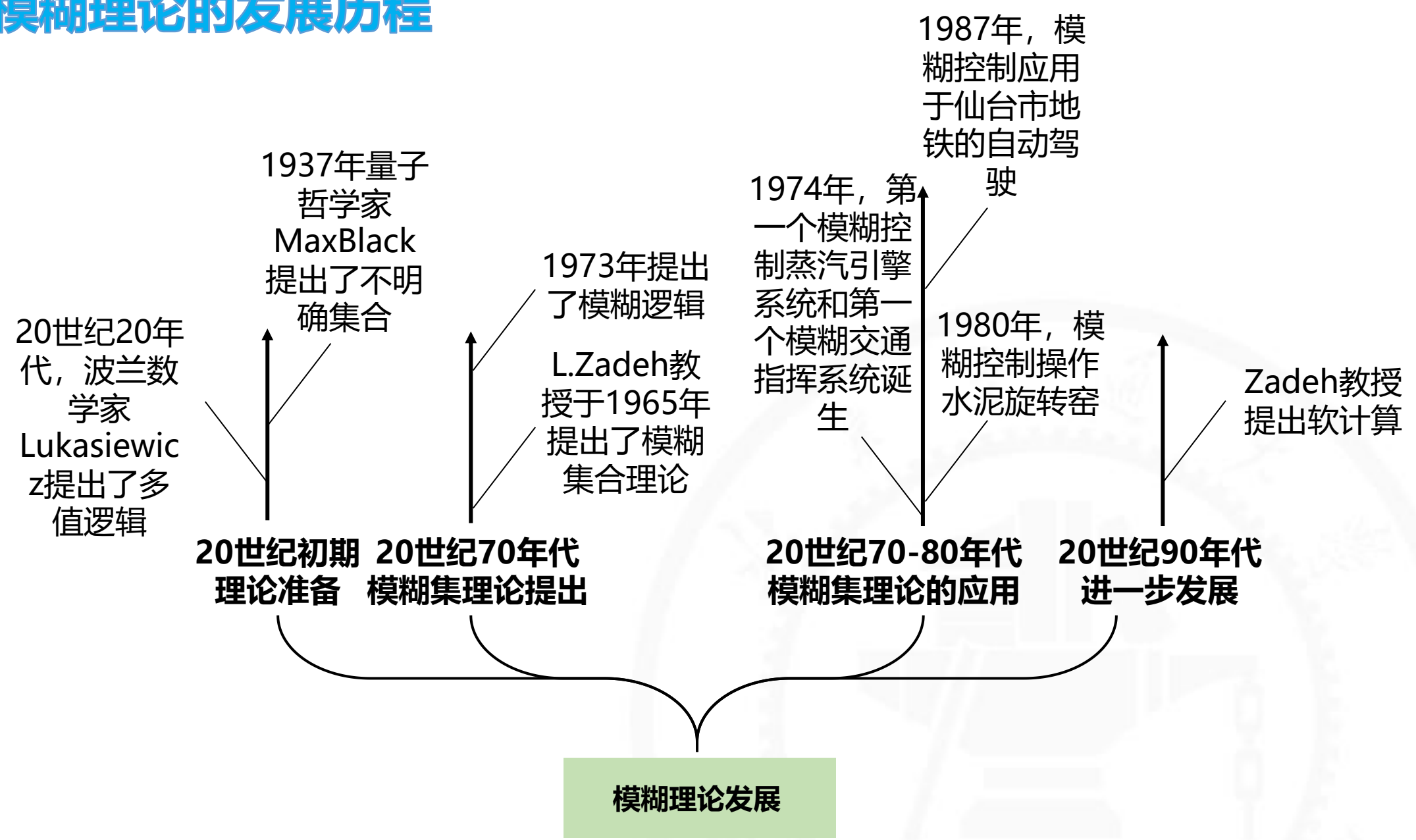
#### (2) 中心平均法

若模糊推理结果是由 $N$ 个模糊集合构成，令 $y^*$ 为第 $i$ 个模糊集合的中心， $\mu_{max}^i(y)$ 为该模糊集合对应的最大隶属度，则中心平均去模糊化方法得到的清晰值 $y^*$ 为

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^* (\mu_{max}^i(y)))}{\sum_{i=1}^N \mu_{max}^i(y)}$$



# 2.1 模糊理论的发展历程



## 2.1 经典方法-模糊综合评价法



北京交通大学

### ➤ 模糊综合评价法概念

应用模糊系统的原理，从多个因素对被评判事物的**隶属度等级状况**进行**综合评判**的方法。

### ➤ 模糊综合评价法步骤（以评定科研成果等级为例）

#### • 1. 建立综合评价的因素集

因素集是以影响评价对象的各种因素为元素，所组成的一个普通集合，通常用 $U$ 表示， $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ，其中元素 $u_i$ 代表评价对象的第 $i$ 个因素，这些因素通常都具有不同程度的模糊性。

这里假设评定科研成果等级的指标为 $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ ，其中元素 $u_1$ 表示科研成果发明或创造、革新的程度， $u_2$ 表示安全性能， $u_3$ 表示经济效益， $u_4$ 表示推广前景， $u_5$ 表示成熟性。

#### • 2. 建立综合评价的评价集

评价集是评价者对评价对象可能做出的各种结果所组成的集合，通常用 $V$ 表示， $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 其中 $v_j$ 代表第 $j$ 种评价结果，可以根据实际情况的需要，用不同的等级、评语或数字来表示（注意以下出现的 $m$ 和 $n$ ， $m$ 表示 $m$ 个因素集， $n$ 表示 $n$ 个评价集）。

这里假设评定科研成果等级的评价集为 $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ， $v_1, v_2, v_3, v_4$ 分别表示很好、较好、一般、不好。

## 2.1 经典方法-模糊综合评价法



北京交通大学

### ➤ 模糊综合评价法步骤（以评定科研成果等级为例）

#### • 3.进行单因素模糊评价，获得评价矩阵

若因素集 $U$ 中第 $i$ 个元素对评价集 $V$ 中第1个元素的隶属度为 $r_{i1}$ ，则对第 $i$ 个元素单因素评价的结果用模糊集合表示为： $R_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ ，以 $m$ 个单因素评价集 $R_1, R_2, \dots, R_m$ 为行，组成矩阵 $R_{m \times n}$ ，称为模糊综合评价矩阵。

在实例中，某项科研成果通过专家评审打分，按下表给出 $U \times V$ 上每个有序对 $(u_i, v_j)$ 指定的隶属度。

表 1: 有序对 $(u_i, v_j)$ 指定的隶属度

U	V			
	$v_1$ 很好	$v_2$ 较好	$v_3$ 一般	$v_4$ 不好
$u_1$	0.35	0.39	0.22	0.04
$u_2$	0.17	0.35	0.39	0.09
$u_3$	0	0.30	0.44	0.26
$u_4$	0.09	0.22	0.30	0.39
$u_5$	0.43	0.35	0.22	0

$$R = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.39 & 0.22 & 0.04 \\ 0.17 & 0.35 & 0.39 & 0.09 \\ 0 & 0.30 & 0.44 & 0.26 \\ 0.09 & 0.22 & 0.30 & 0.39 \\ 0.43 & 0.35 & 0.22 & 0 \end{bmatrix}$$

#### • 4. 确定因素权向量

评价工作中，各因素的重要程度有所不同，为此，给各因素 $u_i$ 一个权重 $a_i$ ，各因素的权重集合用 $A$ 表示： $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 。

在实例中，为了评定科研成果，取权重分配 $A = (0.35, 0.35, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。（这里给出的权重向量较为简单，其实可以通过层次分析法AHP的成对比较阵来构造这个权重向量。）

## 2.1 经典方法-模糊综合评价法



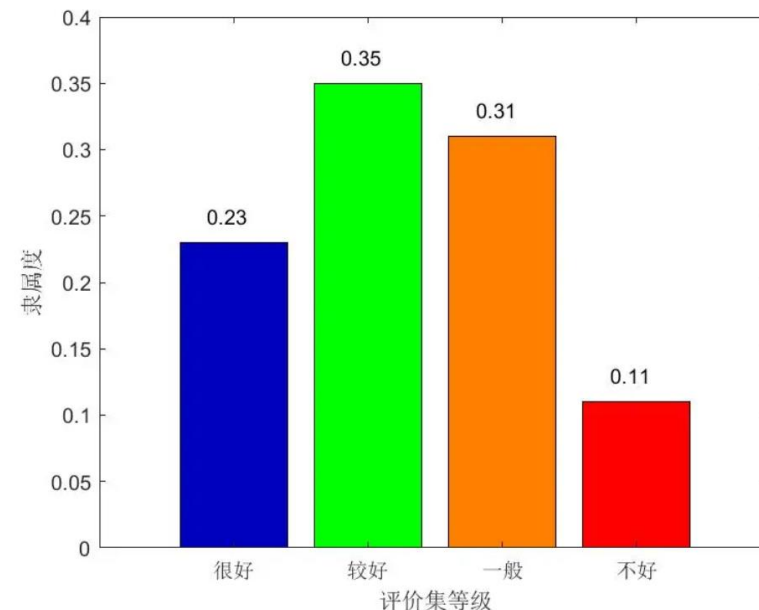
北京交通大学

### ➤ 模糊综合评价法步骤（以评定科研成果等级为例）

#### • 5. 建立综合评价模型

确定单因素评判矩阵 $R$ 和因素权向量 $A$ 之后，通过模糊变换将 $U$ 上的模糊向量 $A$ 变为 $V$ 上的模糊向量 $B$ ，即 $B = A_{1 \times m} \circ R_{m \times n} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 。其中 $\circ$ 称为综合评价合成算子，这里一般取为矩阵乘法即可。

在实例中，最后得到的模糊向量为 $B = A \times R = (0.23, 0.35, 0.31, 0.11)$ ，由计算结果可见，该成果应被评为较好。



#### • 6. 确定系统总得分

综合评价模型确定后，确定系统得分，即 $F = B_{1 \times n} \times S_{1 \times n}^T$ ，其中 $F$ 为系统总得分， $S$ 为 $V$ 中相应因素的级分。

在实例中，很好的级分肯定最高，其次是较好，依次往下，设级分依次为 $S = (100, 80, 60, 30)$ ，则该成果最后的系统总得分为72.9。

## 2.2 经典方法-模糊C均值聚类



北京交通大学

### ➤ FCM算法

FCM算法是一种基于划分的聚类算法，它的思想就是使得被划分到同一簇的对象之间相似度最大，而不同簇之间的相似度最小。**模糊C均值算法是普通C均值算法的改进**，普通C均值算法对于数据的划分是硬性的，而FCM则是一种**柔性的模糊划分**。

#### 情景：

假设有一群人，将他们分成大人和小孩两类，以身高作为分类标准（若身高>160cm为大人，<160cm为小孩）。

有一人的身高为159cm，该如何划分呢？

- IDEA1：159cm总是小于160cm，分到小孩组。
- IDEA2：159cm**很接近160cm,更偏离小孩组**，应该被分到大人组。

### ➤ FCM算法原理

数据集中的对象不能划分成为明显分离的簇，指派一个对象到一个特定的簇有些生硬，也可能会出错。故，对每个对象和每个簇赋予一个权值，指明对象属于该簇的程度。

简单地说，就是要最小化目标函数 $J_m$ ：

$$J_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C u_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2, 1 \leq m < \infty$$

$m$ 是模糊化程度的参数。算法有一个约束条件，就是某一个元素对所有类别的隶属程度的值加起来要等于1。



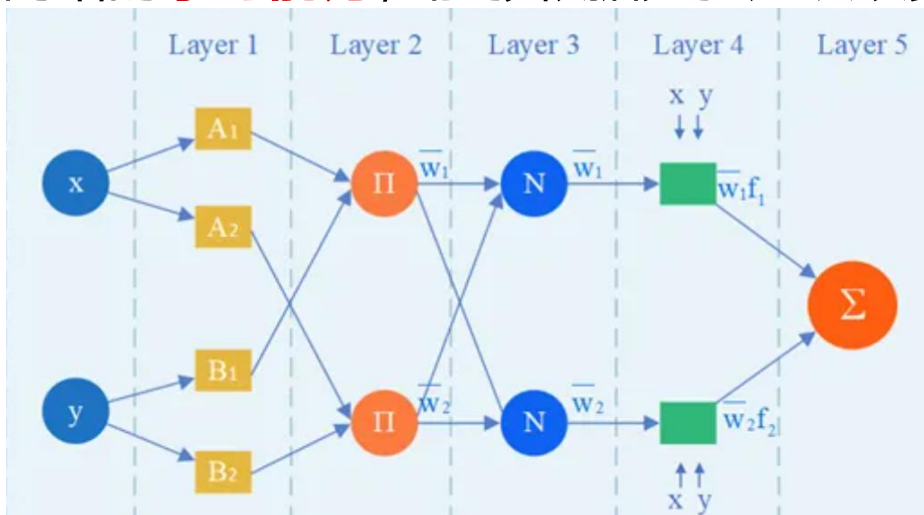
## 2.2 经典方法-自适应模糊神经网络



北京交通大学

### ➤ ANFIS模型的概念

由**自适应网络**和**模糊推理系统**合并而成，在功能上继承了模糊推理系统的**可解释性**的特点以及自适应网络的**学习能力**，能够根据先验知识改变系统参数，使系统的输出更贴近真实的输出。



ANFIS 模型计算主要采用 Takagi-Sugeno 模糊模型，假设该模型拥有  $x$ ,  $y$  两个输入量与  $z$  一个输出量，形成 2 个 if-then 语言规则，公式为：

规则1: if  $x = A_1, y = B_1$ , then  $f_1 = p_1x + q_1y + r_1$

规则2: if  $x = A_2, y = B_2$ , then  $f_2 = p_2x + q_2y + r_2$

其中,  $f_i$  为规则  $i$  所对应的输出结果;  $A_1, B_1$  为规则  $i$  对应的非线性参数;  $p_1, q_1, r_1$  为规则 1 的结论参数,  $p_2, q_2, r_2$  为规则 2 的结论参数。

**第一层 (输入层)**：将输入变量模糊化，转换为不同模糊集的隶属度。公式为：

$$Q_i^1 = \mu A_i(x) \quad i = 1, 2$$

$$Q_j^1 = \mu B_i(y) \quad i = 1, 2$$

式中:  $i$  为节点;  $x$ ,  $y$  分别表示节点  $i$  的输入变量;  $\mu A_i(x)$ ,  $\mu B_i(y)$  为  $x$ ,  $y$  输入变量的隶属函数;  $Q_i^1$  为第一层  $i$  节点对应的隶属度值。

**第二层**：计算各模糊规则的触发强度，由不同模糊集的隶属度相乘所得。公式为：

$$Q_i^2 = w_i = \mu A_i(x) \times \mu B_i(y)$$

**第三层**：将第二层所得的触发强度归一化为第  $i$  个规则在所有规则库中的触发比值，即在整个推理过程中使用到的第  $i$  个规则的程度。计算公式为：

$$Q_i^3 = \bar{w}_i = \frac{w_1}{(w_1 + w_2)}$$

**第四层**：计算规则输出。公式为：

$$Q_i^4 = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (p_i x + q_i y + r_i)$$

**第五层**：去模糊化，得到确切的输出。计算公式为每条规则的结果加权平均：

$$Q_i^5 = \sum_i \bar{w}_i f_i = \frac{\sum_i \bar{w}_i f_i}{\sum_i \bar{w}_i}$$

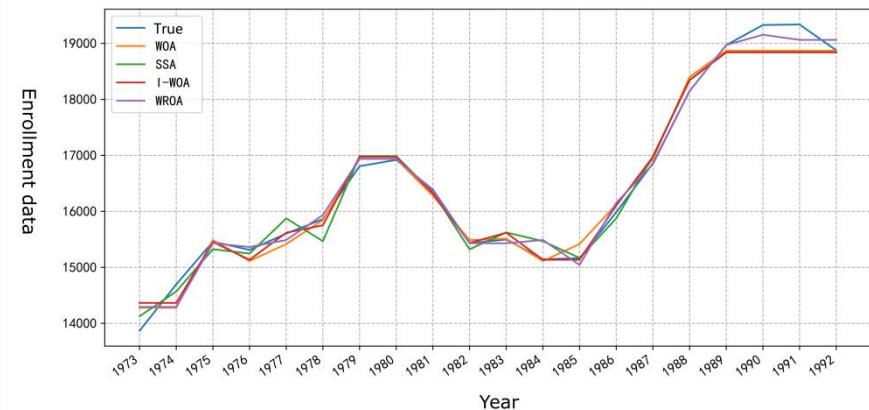


### 3 经典数据集

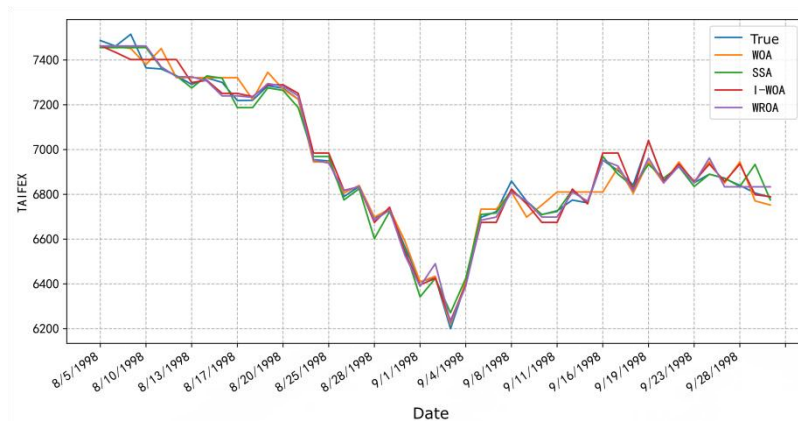


北京交通大学

#### ➤ 模糊时间序列领域

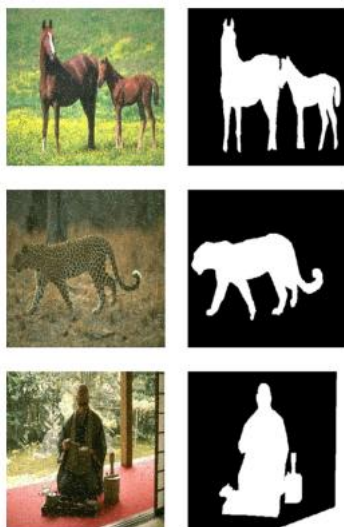


Alabama Enrollment Data



TAIFEX Stock Index

#### ➤ 图像分割



Berkeley segmentation dataset



Brain MRI data with different noise

## 4. 研究方向



北京交通大学

### 模糊理论

模糊数学

模糊集合 🔥

模糊测度 🔥

模糊分析

模糊关系

模糊拓扑

模糊系统

模糊控制

控制器设计

稳定性分析

模糊信号处理

模式识别 🔥

通信

图像处理 🔥

信道均衡设置

模糊决策

多目标优化

模糊数学规划

不确定性信息

可能性理论

不确定性度量

模糊逻辑与人工智能

模糊逻辑原理

近似推理

模糊专家系统

## 5. 应用领域



北京交通大学

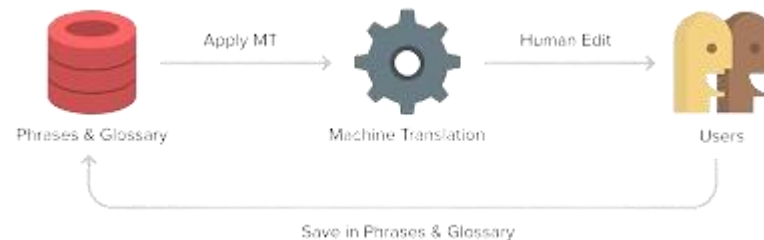
### ➤ 工程技术方面



型样识别(指纹识别)



控制工程(机器人控制)



人工智能及专家系统(自动翻译)

### ➤ 教育社会及人文科学方面



教育(计算机辅助教学)



心理学(心理分析)



群体决策(决策分析)