

登革热蚊媒-人群动力学模型

SEI-SEIR 模型技术文档

蚊媒传染病建模项目

2026 年 2 月 5 日

目录

1	模型概述	2
2	完整微分方程组	2
2.1	蚊虫水生阶段	2
2.2	蚊虫成虫阶段 (SEI)	3
2.3	人群动态 (SEIR)	3
2.4	每周新发病例	4
3	温度依赖参数	4
3.1	产卵率	4
3.2	发育率	4
3.3	死亡率	5
3.4	叮咬与传播	5
3.5	外潜伏期 (EIP)	5
4	固定参数	6
5	估计参数 (通过优化)	6
6	BI 校正机制	6
6.1	BI 归一化	6
6.2	校正方式	6
6.3	验证指标	7
7	基本再生数 R_0	7
8	时间尺度说明	8

9	模型结构图	9
10	模型性能 (2015-2019 广东数据)	9
11	符号回归扩展 (待实现)	10

1 模型概述

本模型采用 **SEI-SEIR** 结构，描述登革热在蚊媒和人群之间的传播动态：

- **蚊媒水生期**: 幼虫 (L) → 蛹 (P)
- **蚊媒成虫**: 易感 (S_m) → 暴露 (E_m) → 感染 (I_m)
- **人群**: 易感 (S_h) → 暴露 (E_h) → 感染 (I_h) → 恢复 (R_h)

模型特点

1. 完整的蚊虫生命周期 (幼虫 → 蛹 → 成蚊)
2. 温度依赖的生物学参数
3. 布雷图指数 (BI) 校正幼虫密度
4. 输入病例机制

2 完整微分方程组

2.1 蚊虫水生阶段

幼虫 (Larvae)

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\phi(T) \cdot \sigma_E \cdot M_{total} \cdot BI_{ratio}}_{\text{产卵输入}} - \underbrace{f_L(T) \cdot L}_{\text{发育为蛹}} - \underbrace{\mu_L(T) \cdot L \cdot \left(1 + \frac{L}{K_L}\right)}_{\text{密度依赖死亡}} \quad (1)$$

其中：

- $\phi(T)$: 温度依赖的产卵率
- $\sigma_E = 0.6$: 卵存活率
- $M_{total} = S_m + E_m + I_m$: 成蚊总数
- $BI_{ratio} = BI(t)/\overline{BI}$: 归一化布雷图指数
- $f_L(T)$: 幼虫发育率
- $\mu_L(T)$: 幼虫死亡率
- $K_L = K_{base} \times 10^7 \times BI_{ratio}$: 承载力

蛹 (Pupae)

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{f_L(T) \cdot L}_{\text{幼虫发育}} - \underbrace{f_P(T) \cdot P}_{\text{羽化为成蚊}} - \underbrace{0.05 \cdot P}_{\text{死亡}} \quad (2)$$

2.2 蚊虫成虫阶段 (SEI)

易感成蚊 (Susceptible)

$$\frac{dS_m}{dt} = \underbrace{\sigma_P \cdot f_P(T) \cdot P}_{\text{羽化}} - \underbrace{\lambda_m \cdot S_m}_{\text{被感染}} - \underbrace{\mu_m(T) \cdot S_m}_{\text{死亡}} \quad (3)$$

暴露成蚊 (Exposed)

$$\frac{dE_m}{dt} = \underbrace{\lambda_m \cdot S_m}_{\text{新感染}} - \underbrace{\epsilon(T) \cdot E_m}_{\text{转为感染}} - \underbrace{\mu_m(T) \cdot E_m}_{\text{死亡}} \quad (4)$$

感染成蚊 (Infectious)

$$\frac{dI_m}{dt} = \underbrace{\epsilon(T) \cdot E_m}_{\text{暴露期结束}} - \underbrace{\mu_m(T) \cdot I_m}_{\text{死亡}} \quad (5)$$

蚊虫感染力:

$$\lambda_m = a(T) \cdot b_{hv}(T) \cdot \frac{I_h + \text{imp}}{N_H} \quad (6)$$

2.3 人群动态 (SEIR)

易感人群 (Susceptible)

$$\frac{dS_h}{dt} = -\lambda_h \cdot S_h \quad (7)$$

暴露人群 (Exposed)

$$\frac{dE_h}{dt} = \underbrace{\lambda_h \cdot S_h}_{\text{新感染}} - \underbrace{\delta \cdot E_h}_{\text{转为发病}} \quad (8)$$

感染人群 (Infectious)

$$\frac{dI_h}{dt} = \underbrace{\delta \cdot E_h}_{\text{发病}} - \underbrace{\gamma \cdot I_h}_{\text{恢复}} \quad (9)$$

恢复人群 (Recovered)

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma \cdot I_h \quad (10)$$

人群感染力:

$$\lambda_h = a(T) \cdot b_{vh}(T) \cdot \frac{I_m}{N_H} \quad (11)$$

2.4 每周新发病例

模型输出的周新发病例数:

$$\text{Cases}_{\text{week}} = \gamma \cdot I_h \times 7 \quad (12)$$

3 温度依赖参数

所有生物学参数均为温度 T ($^{\circ}\text{C}$) 的函数:

3.1 产卵率

$$\phi(T) = \max \left(0.1, \phi_{\max} \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - 28}{7} \right)^2 \right) \right) \quad (13)$$

其中 $\phi_{\max} = 4.0$, 最适温度 28°C 。

3.2 发育率

幼虫发育率:

$$f_L(T) = \max \left(0.01, 0.10 \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - 27}{9} \right)^2 \right) \right) \quad (14)$$

蛹发育率:

$$f_P(T) = \max \left(0.01, 0.15 \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - 27}{9} \right)^2 \right) \right) \quad (15)$$

3.3 死亡率

幼虫死亡率:

$$\mu_L(T) = \begin{cases} 0.30 & T < 15 \\ 0.25 & T > 35 \\ \max(0.05, 0.15 - 0.006(T - 15)) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

成蚊死亡率 (U 形曲线):

$$\mu_m(T) = \mu_{min} + 0.002 \cdot (T - T_{opt})^2 \quad (17)$$

其中 $\mu_{min} = 0.04$, $T_{opt} = 26^\circ\text{C}$ 。

3.4 叮咬与传播

叮咬率:

$$a(T) = \max \left(0.1, 0.5 \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - 28}{8} \right)^2 \right) \right) \quad (18)$$

人 \rightarrow 蚊传播概率:

$$b_{hv}(T) = 0.4 \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - 27}{6} \right)^2 \right) \quad (19)$$

蚊 \rightarrow 人传播概率:

$$b_{vh}(T) = 0.45 \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - 26}{6} \right)^2 \right) \quad (20)$$

3.5 外潜伏期 (EIP)

蚊虫外潜伏期转化率:

$$\epsilon(T) = \begin{cases} 0.05 & T < 18 \\ 0.20 & T > 32 \\ 0.08 + 0.01(T - 20) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

4 固定参数

表 1: 固定生物学参数

参数	符号	值	说明
卵存活率	σ_E	0.6	卵 \rightarrow 幼虫存活
蛹存活率	σ_P	0.7	蛹 \rightarrow 成蚊存活
人潜伏期转化率	δ	1/5 天 ⁻¹	内潜伏期约 5 天
人恢复率	γ	1/7 天 ⁻¹	感染期约 7 天
人口总数	N_H	14,000,000	广州市人口

5 估计参数（通过优化）

以下参数通过差分进化算法 + Nelder-Mead 局部优化估计：

表 2: 优化估计的参数

参数	符号	优化范围	含义
繁殖缩放因子	k_{scale}	[0.1, 20]	调整产卵率和承载力
传播缩放因子	b_{scale}	[0.01, 5]	调整传播效率
输入病例率	imp	[0, 50]	每周外部输入病例数
基础承载力因子	K_{base}	[0.1, 10]	幼虫承载力基数

注：这些参数目前被估计为**常数**。如需进行符号回归，需将 b_{scale} 改为时变参数 $\beta(t)$ 。

6 BI 校正机制

布雷图指数 (BI) 是蚊媒幼虫密度的**相对指标**，模型中通过以下方式校正：

6.1 BI 归一化

$$BI_{ratio}(t) = \frac{BI(t)}{\overline{BI}} \quad (22)$$

6.2 校正方式

1. 产卵输入：

$$\text{产卵} = \phi(T) \cdot \sigma_E \cdot M_{total} \cdot \text{BI}_{ratio} \quad (23)$$

BI 高 \rightarrow 环境适宜 \rightarrow 产卵增加

2. 环境承载力:

$$K_L = K_{base} \times 10^7 \times \text{BI}_{ratio} \quad (24)$$

BI 高 \rightarrow 栖息地多 \rightarrow 承载力大

6.3 验证指标

通过计算模型幼虫 $L(t)$ 与观测 BI 的相关系数来验证校正效果:

$$r_{BI-L} = \text{Corr} \left(\text{BI}_{normalized}, \frac{L(t)}{\bar{L}} \right) \quad (25)$$

7 基本再生数 R_0

根据 Ross-MacDonald 模型推导:

$$R_0 = \sqrt{\frac{a^2 \cdot b_{vh} \cdot b_{hv} \cdot M \cdot \epsilon}{\mu_m \cdot (\epsilon + \mu_m) \cdot \gamma \cdot N_H}} \quad (26)$$

其中:

- a : 叮咬率
- b_{vh}, b_{hv} : 传播概率
- M : 成蚊总数
- ϵ : EIP 转化率
- μ_m : 成蚊死亡率
- γ : 人恢复率
- N_H : 人口总数

解释: $R_0 > 1$ 表示疫情可能扩散, $R_0 < 1$ 表示疫情将消退。

8 时间尺度说明

重要说明

- **ODE 积分步长:** 1 天 ($dt = 1$)
- **数据尺度:** 周 (月度数据插值为周)
- **参数单位:** 天⁻¹
- **周数据索引:** $\text{idx} = \lfloor t/7 \rfloor$

周新发病例 = 日发病率 \times 7

9 模型结构图

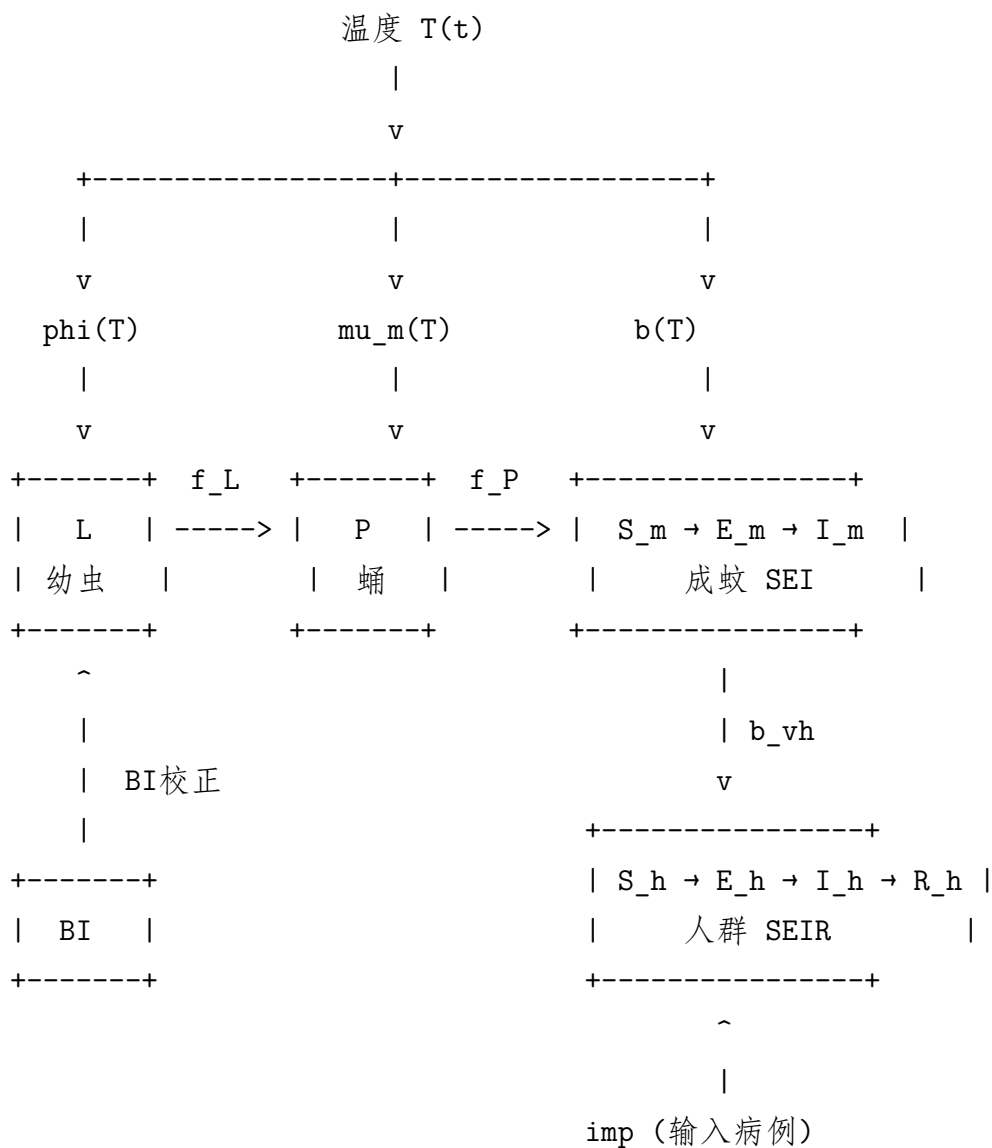


图 1: SEI-SEIR 模型结构

10 模型性能 (2015-2019 广东数据)

表 3: 模型评估指标

指标	值
Pearson 相关系数 r	0.70 - 0.76
R^2 (对数尺度)	0.50 - 0.55
BI-幼虫相关	0.60 - 0.75
R_0 范围	0.5 - 2.5

11 符号回归扩展（待实现）

当前模型的 b_{scale} 为常数。如需进行符号回归，需：

1. 将 b_{scale} 改为时变参数 $\beta(t)$
2. 对每周独立估计 $\beta(t)$ 序列
3. 使用符号回归寻找 $\beta(t) = f(T, \text{humidity}, \text{BI})$

理论公式（基于 MLP 预测结果）：

$$P(T) \approx A \cdot \exp \left(- \left(\frac{T - T_{opt}}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (27)$$

其中 $A \approx 0.35$, $T_{opt} \approx 26.5^\circ\text{C}$, $\sigma \approx 5.8$ 。