Seminar 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

În acest seminar vom studia ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi în formă normală rezolvabile efectiv.

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1.1}$$

1.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi în formă normală cu variabile separabile au următoarea formă:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y\,(x)), \tag{1.2}$$

unde $f \in C(I)$, $g \in C(J, \mathbb{R}^*)$, $J \subset \mathbb{R}$, sunt continue.

Fie y o soluţie a ecuaţiei (1.2) şi $f :]x_1; x_2[\to \mathbb{R}$, $g :]y_1; y_2[\to \mathbb{R}^*$. Din (1.2) obţinem:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Ştiind că $y' = \frac{dy}{dx}$ deducem:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Fie $x_0 \in]x_1; x_2[$ şi notăm cu $y_0 = y(x_0)$. Integrăm relaţia de mai sus:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds. \tag{1.3}$$

Considerăm funcţia:

$$G(\xi) = \int_{y_0}^{\xi} \frac{dt}{g(t)},$$

funcţie ce este derivabilă şi strict monotonă datorită semnului funcţiei g, fapt ce asigură existenţa inversei G^{-1}. Astfel din relaţia (1.3) obţinem:

$$G(y) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \Longrightarrow$$

$$y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds.\right) \tag{1.4}$$

Reciproc se poate arăta că orice funcţie de forma (1.4) este soluţie a ecuaţiei (1.2).

Observaţia 1.1.1 *Dacă există $y_0 \in]y_1; y_2[$ astfel încât $g(y_0) = 0$ atunci funcţia constantă $y(x) \equiv y_0$ este soluţie a ecuaţiei (1.2). Astfel de soluţii se numesc* ***soluţii singulare****.*

Exerciţiul 1.1.1 *Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:*

1. $y' = 2x(1 + y^2)$;
2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$;
3. $xy' = y^3 + y$;
4. $xy + (2x - 1)y' = 0$;
5. $y' = k \cdot \dfrac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R}^*$;
6. $y - xy' = a(1 + x^2y'),\ a \in \mathbb{R}^*$.

Rezolvare.

1. $f(x) = 2x,\ g(y) = 1 + y^2 > 0$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x \Longrightarrow \int \frac{dt}{1+t^2} = \int 2sds \Longrightarrow arctg(y) = x^2 + c \Longrightarrow y = tg(x^2 + c),\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 1.1.2 *Orice funcţie de forma de mai sus definită pe un interval este soluţie a ecuaţiei.*

2. $y' = -\dfrac{2x}{x^2 - 1} \cdot y^2$

$f(x) = -\dfrac{2x}{x^2 - 1}, \quad f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$

$g(y) = y^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Se observă că pentru $y_0 = 0 \Longrightarrow g(y_0) = 0$. Astfel $y \equiv 0$ este soluţie singulară.

Pentru cazul în care $y \neq 0$ avem:

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2 - 1}dx \Longrightarrow y^{-1} = \ln\left|x^2 - 1\right| + c \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Conform teoriei generale ar trebui să considerăm 5 cazuri distincte corespunzătoare intervalelor, dar cum expresiile primitivelor sunt aceleaşi se pot rezolva simultan toate cazurile.

De exemplu, dacă $c < 0$ atunci soluţiile sunt definite pe intervalele:
$\left]-\infty; -(1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}\right[$; $\left]-(1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}; -1\right[$; $]-1;1[$; $\left]1; (1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}\right[$; $\left](1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$.

Observaţia 1.1.3 *În ecuaţia iniţială nu apar discontinuităţile $x = -1$ şi $x = 1$. De aceea suntem tentaţi să extindem prin continuitate soluţia atribuindu-i valoarea 0 în $x = -1$ şi $x = 1$. Acest lucru nu este posibil deoarece extensiile obţinute nu sunt funcţii derivabile (nici măcar lateral) în $x = -1$ şi $x = 1$.*

3. Soluţia în formă implicită este: $\ln y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln x + c$ sau dacă înlocuim c cu $\ln c$ obţinem soluţia în formă explicită

   $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{c^2x^2}{1-c^2x^2}}$, $c \in \mathbb{R}$.

4. Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   soluţia generală în formă implicită: $\ln|y| = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + c$

   sau dacă înlocuim c cu $\ln c$ obţinem soluţia în formă explicită

   $y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot |2x-1|^{-\frac{1}{4}}$, $c \in \mathbb{R}$.

5. Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   soluţia generală în formă explicită: $y(x) = cx^k$, $c \in \mathbb{R}$.

6. Ecuaţia devine $y' = \dfrac{y-a}{x(ax+1)}$

   Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   Soluţia generală în formă explicită: $y(x) = a + \dfrac{cx}{1+ax}$, $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Ecuaţii omogene în sens Euler

Ecuaţiile diferenţiale omogene în sens Euler au următoarea formă:

$$y'(x) = g(x,y), \tag{1.5}$$

unde funcţia g este omogenă de grad 0.

Definiţia 1.2.1 *Funcţia $g(x,y)$ este omogenă de grad k dacă:*

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x,y).$$

Pentru $k = 0$ avem $g(\lambda x, \lambda y) = g(x,y)$, lucru ce ne permite scrierea ecuaţiei (1.5) în forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.6}$$

Rezolvarea acestei ecuaţii se face prin substituţia:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Înlocuind în (1.6) obţinem ecuaţia cu variabile separabile:

$$z'(x) = \frac{1}{x} \cdot [f(z) - z]$$

Exerciţiul 1.2.1 *Să se rezolve:*

1. $2x^2y' = x^2 + y^2$;
2. $y' = -\dfrac{x+y}{y}$;
3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
4. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
5. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$
6. $x - y \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + x \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) y' = 0$

Soluţii:

1. Soluţia generală: $y(x) = x - \dfrac{2}{\ln|x| + c}$

   soluţie singulară $y(x) = x$;

2. Soluţia generală: $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2+xy+x^2}{x^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2y-x}{x}\right)\right) = -\ln|x| + c$

3. Soluţia generală: $y\left(x\right) = x \ln|\ \ln|x| + c|$

4. Soluţia generală: $y\left(x\right) = x \sin\left(\ln|x| + c\right)$

   Soluţii singulare: $y\left(x\right) = \pm x$

5. Soluţia generală: $y\left(x\right) = x \arcsin(cx)$;

6. Soluţia generală: $y\left(x\right) = x \arcsin\left(\ln|x| + c\right)$

   Soluţii singulare: $y\left(x\right) = k\pi x,\ k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Ecuaţii liniare

Forma generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare este:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.7}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue. Rezolvarea ecuaţiilor liniare se face astfel:

1. Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă:

$$y' + P(x)y = 0, \tag{1.8}$$

ecuaţia omogenă fiind o ecuaţie cu variabile separabile, soluţia generală o notăm cu y_0;

2. Se caută o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene y_p prin metoda variaţiilor constantelor;

3. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene este:

$$y = y_0 + y_p \tag{1.9}$$

Exerciţiul 1.3.1 *Să se rezolve:*

1. $y' + y \cdot \mathrm{tg}(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$;
2. $y' + \dfrac{2}{x} \cdot y = x^3$;
3. $y' + 2x \cdot y = 2xe^{-x^2}$;
4. $xy' - y + x = 0$;
5. $y' - y = \sin(x)$
6. $y' + \dfrac{x}{1-x^2} y = x + \arcsin(x)$

Soluţii:

1. $y(x) = c \cdot \cos(x) + \sin(x)$;
2. $y(x) = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{c}{x^2}$;
3. $y(x) = (c + x^2)e^{-x^2}$;
4. $y(x) = cx - x \ln|x|$;
5. $y(x) = xe^x - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$;
6. $y(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2(x)$.

Bibliografie

[1] Gh. Micula, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Ed. Dacia, 1989.

[2] G. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Ed. Acad. RSR, 1989.

[3] M.A. Şerban, *Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale*, Ed. Presa Univ. Clujană, Cluj-Napoca, 2009.

Seminar 2

Ecuaţii diferenţiale de ordinul 2 rezolvabile

2.1 Ecuaţii de forma $y''(x) = f(x)$

Cea mai simplă ecuaţie diferenţială de ordinul 2 este ecuaţia de forma

$$y''(x) = f(x) \tag{2.1}$$

unde f este funcţie continuă. Soluţia generală se obţine integrând de două ori ecuaţia, după fiecare integrare adăugându-se câte o constantă de integrare.

Expresia soluţiei generale este:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)(x-s)ds + c_1(x-x_0) + c_2,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Exerciţiul 2.1.1 *Să se rezolve:*

1. $y'' = x + \cos x + \sin x$;
2. $y'' = \dfrac{1}{x}$;
3. $y'' = \ln x$;
4. $y'' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;
5. $y'' = xe^x$;
6. $y'' = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

Soluţii:

1. Avem:
$$(y')' = x + \cos x + \sin x$$
deci
$$\begin{aligned} y' &= \int (x + \cos x + \sin x)\, dx + c_1 \\ y' &= \frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1. \end{aligned}$$
şi
$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1 \right) dx + c_2$$
de unde obţinem soluţia generală
$$y(x) = \frac{x^3}{2} - \cos x - \sin x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Rezolvăm această ecuaţie în ipoteza că $x \in (0, +\infty)$, astfel
$$\begin{aligned} (y')' &= \frac{1}{x} \\ y' &= \int \frac{1}{x} dx + c_1 \\ y' &= \ln x + c_1 \\ y &= \int (\ln x + c_1)\, dx + c_2 = \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$
deci soluţia generală a ecuaţiei este:
$$y(x) = x \ln x - x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Soluţia generală: $y(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{3}{4} x^2 + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Soluţia generală: $y(x) = -\ln(\cos x) + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. Soluţia generală: $y(x) = (x - 2) \cdot e^x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

6. Soluţia generală: $y(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.2 Ecuaţii de forma $y''(x) = f(x, y')$

Acest tip de ecuaţii diferenţiale permite reducerea ordinului cu o unitate prin substituţia:
$$z(x) = y'(x) \tag{2.3}$$

şi astfel se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi

$$z'(x) = f(x, z(x)).$$

Rezolvarea ecuaţiei $y'' = f(x, y')$ revine la rezolvarea a două ecuaţii diferenţiale:

$$z'(x) = f(x, z(x))$$

dacă aceasta este o ecuaţie rezolvabilă efectiv şi

$$y'(x) = z(x)$$

care este o ecuaţie de forma (2.1).

Exerciţiul 2.2.1 *Să se rezolve:*

1. $xy'' + y' + x = 0$;
2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;
3. $y'' - 2y' = -x^2$;
4. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;
5. $(1 + x^2)y'' = 2xy'$;
6. $y'\left(1 + (y')^2\right) = ay''$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Soluţii:

1. Facem substituţia $y' = z$, deci $y'' = z'$ şi astfel obţinem ecuaţia

$$xz' + z + x = 0$$

sau după împărţirea prin x a ecuaţiei obţinem

$$z' + \frac{1}{x}z = -1$$

adică o ecuaţie liniară neomogenă de ordinul 1. Aplicăm metoda de rezolvare corespunzătoare. Mai întâi rezolvăm ecuaţia omogenă

$$z' + \frac{1}{x}z = 0$$

adică

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{x}z \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{x}z \\ \frac{dz}{z} &= -\frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

şi integrăm

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{z} &= -\int \frac{1}{x}dx \\ \ln z &= -\ln x + \ln c\end{aligned}$$

de unde obţinem că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$z_0(x) = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea soluţiei particulare aplicăm metoda variaţiei constantei, adică vom căuta soluţia particulară de forma

$$z_p(x) = \frac{c(x)}{x}$$

şi determinăm funcţia necunoscută $c(x)$ din condiţia ca z_p să fie soluţie a ecuaţiei neomogene, adică

$$z_p' + \frac{1}{x} z_p = -1.$$

Înlocuind, obţinem:

$$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{c(x)}{x} = -1$$

adică

$$\begin{aligned}\frac{c'(x)}{x} &= -1 \\ c'(x) &= -x\end{aligned}$$

deci

$$c(x) = -\int x dx = -\frac{x^2}{2},$$

de unde deducem că

$$z_p(x) = \frac{c(x)}{x} = -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene în z este

$$z = z_0 + z_p$$

$$z(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Folosind $z(x)$ determinat, revenim la substituţie şi obţinem că

$$y' = \frac{c_1}{x} - \frac{x}{2},$$

am înlocuit constanta c din expresia lui $z(x)$ cu c_1 deoarece urmează o nouă integrare. Astfel, avem că

$$y = \int \left(\frac{c_1}{x} - \frac{x}{2}\right) dx + c_2$$

de unde deducem expresia soluţiei generale a ecuaţiei în y

$$y(x) = c_1 \cdot \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Observăm că ecuaţia poate fi scrisă în forma

$$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}.$$

Dacă facem substituţia $y' = z$ vom obţine o ecuaţie omogenă în sens Euler şi vom fi nevoiţi să mai facem încă o substituţie de forma $u = \frac{z}{x}$ care să ne conducă la o ecuaţie cu variabile separabile. Pentru a reduce volumul de calcul putem combina cele două substituţii, adică, în acest caz, vom nota

$$z = \frac{y'}{x}$$

de unde deducem

$$y' = xz \Longrightarrow y'' = z + xz'.$$

Înlocuind în ecuaţie vom avea

$$z + xz' = z \ln z$$

adică obţinem

$$z' = \frac{z \cdot (\ln z - 1)}{x},$$

o ecuaţie cu variabile separabile

$$z' = f(x) \cdot g(z)$$

în care $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g(z) = z \cdot (\ln z - 1)$. Studiul existenţei soluţiilor singulare ne conduce la ecuaţia

$$g(z) = 0 \Longrightarrow z \cdot (\ln z - 1) = 0$$

adică $z = 0$ şi $z = \dot{e}$. Soluţia $z = 0$ nu convine deoarece funcţia ln nu este definită în 0, deci soluţia singulară este

$$z(x) \equiv e.$$

Rezolvăm ecuaţia în z cu variabile separabile

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{z \cdot (\ln z - 1)}{x} \\ \frac{dz}{z \cdot (\ln z - 1)} &= \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z \cdot (\ln z - 1)} &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln(\ln z - 1) &= \ln x + \ln c \end{aligned}$$

Având în vedere că în membrul stâng am obţinut un ln am utilizat ca şi constantă de integrare $\ln c$. Astfel, deducem

$$\begin{aligned} \ln z - 1 &= cx \\ \ln z &= cx + 1 \end{aligned}$$

de unde obţinem soluţia generală

$$z(x) = e^{cx+1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se observă că prin artificiul de calcul utilizat am inclus şi soluţia singulară $z(x) \equiv e$ în expresia soluţiei generale, aceasta putând fi obţinută pentru constanta $c = 0$.

Pentru determinarea soluţiei corespunzătoare ecuaţiei în y revenim la substituţia utilizată

$$y' = xz,$$

deci

$$y' = xe^{c_1 x+1},$$

unde am înlocuit constanta c din expresia lui $z(x)$ cu c_1. Astfel, avem că

$$y = \int xe^{c_1 x+1}dx + c_2.$$

Pentru a calcula această integrală trebuie să considerăm două cazuri: $c_1 = 0$ şi $c_1 \neq 0$. Cazul $c_1 = 0$ corespunde soluţiei singulare $z(x) \equiv e$, faptul ca am introdus soluţia singulară în expresia soluţiei generale a ecuaţiei în z nu ne ajută în determinarea soluţiei corespunzătoare ecuaţiei în y din cauza formei integralei, va trebui să le tratăm separat.

Dacă $c_1 = 0$ atunci

$$y = \int x \cdot e \cdot dx + c_2 = e \cdot \frac{x^2}{2} + c_2$$

adică

$$y(x) = e \cdot \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

este soluţie singulară a ecuaţiei în y.

Dacă $c_1 \neq 0$ atunci

$$\begin{aligned} y &= \int xe^{c_1 x+1}dx + c_2 = \frac{1}{c_1}\int x \cdot \left(e^{c_1 x+1}\right)' dx + c_2 \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot x \cdot e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_1}\int e^{c_1 x+1}dx + c_2 \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot x \cdot e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1 x+1} + c_2 \end{aligned}$$

deci soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = \frac{1}{c_1} \cdot x \cdot e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1 x+1} + c_2, \ c_1 \in \mathbb{R}^*, \ c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Soluţia generală: $y(x) = \frac{1}{2}c_1 e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Soluţia generală: $y(x) = -\frac{x}{c_1} + \left(1 + \frac{1}{c_1^2}\right)\ln|1 + c_1 x| + c_2$, $c_1 \in \mathbb{R}^*$, $c_2 \in \mathbb{R}$, şi $y(x) = -\frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $(c_1 = 0)$.

5. Soluţia generală: $y(x) = c_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

6. Soluţia generală: $y(x) = \arcsin\left(c_1 e^{\frac{x}{a}}\right) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.3 Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi este:

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{2.4}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Ecuaţia (2.4) este ecuaţia liniară neomogenă, iar ecuaţia

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.5}$$

este ecuaţia liniară omogenă.

În cazul ecuaţiei liniare omogene cu coeficienţi constanţi, sistemul fundamental de soluţii se construieşte cautând soluţii de forma $y(x) = e^{rx}$, astfel se obţine **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei liniare omogene:

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{2.6}$$

Algoritmul de determinare a soluţiei generale pentru ecuaţia liniară omogenă:

Pasul 1. Se ataşează ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (2.5) ecuaţia caracteristică (2.6).

Pasul 2. Se determină rădăcinile ecuaţiei caracteristice (2.6).

Pasul 3. Fiecărei rădăcini r_1 şi r_2 i se ataşează funcţiile y_1 şi y_2 în modul următor:

(a) dacă r_1 şi r_2 sunt reale astfel încât $r_1 \neq r_2$ (cazul $\Delta > 0$) atunci:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \text{ şi } y_2(x) = e^{r_2 x}$$

(b) dacă r_1 şi r_2 sunt reale astfel încât $r_1 = r_2$ (cazul $\Delta = 0$) atunci:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \text{ şi } y_2(x) = x e^{r_1 x}$$

(c) dacă r_1 şi r_2 sunt complexe, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (cazul $\Delta < 0$) atunci:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ şi } y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Pasul 4. Se scrie soluţia generală de forma:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

În cazul ecuaţiei liniare neomogene cu coeficienţi constanţi, soluţia generală este de forma:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x),$$

unde y_0 este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (se determină folosind algoritmul anterior), iar y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (se determină prin metoda variaţiei constantei sau în cazuri speciale pentru funcţia f prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi).

Cazuri speciale de determinare a lui y_p:

Cazul I. Dacă $f(x) = P_m(x)$ atunci:

(a) dacă $b \neq 0$ atunci $y_p(x) = Q_m(x)$;

(b) dacă $b = 0$ şi $a \neq 0$ atunci $y_p(x) = xQ_m(x)$;

Cazul II. Dacă $f(x) = e^{rx}P_m(x)$ atunci:

(a) dacă r nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) atunci:

$$y_p(x) = e^{rx}Q_m(x)$$

(b) dacă r este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) cu ordinul de multiplicitate μ atunci:

$$y_p(x) = x^{\mu}e^{rx}Q_m(x)$$

Cazul III. Dacă $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)\cos\beta x$ sau $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)\sin\beta x$ atunci:

(a) dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) atunci:

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$$

(b) dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) atunci:

$$y_p(x) = xe^{\alpha x}\left[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$$

Observaţia 2.3.1 (Principiul superpoziţiei) *Dacă funcţia f apare ca sumă de două funcţii*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

astfel încât f_1, respectiv f_2 se încadrează într-unul din cazurile speciale de determinare a soluţiei particulare y_p atunci putem aplica principiul superpoziţiei pentru determinarea soluţiei particulare, adică soluţia particulară y_p a ecuaţiei neomogene

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$

este de forma

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

unde y_{p1} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y'' + ay' + by = f_1(x)$$

şi y_{p2} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Demonstraţie. Întradevăr

$$\begin{aligned} y_p'' + ay_p' + by_p &= (y_{p1} + y_{p2})'' + a\,(y_{p1} + y_{p2})' + b\,(y_{p1} + y_{p2}) \\ &= y_{p1}'' + ay_{p1}' + by_{p1} + y_{p2}'' + ay_{p2}' + by_{p2} \\ &= f_1\,(x) + f_2\,(x) \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 2.3.1 *Să se determine soluţiile generale corespunzătoare următoarelor ecuaţii diferenţiale:*

1. $y'' - y = 0;$
2. $y'' + 2y' + y = 0;$
3. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2;$
4. $y'' + 3y' + 2y = e^x;$
5. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + 2x + 4;$
6. $y'' + y' - 2y = 10\sin 2x;$
7. $y'' - 3y' + 2y = 3e^x + 10\sin x;$
8. $y'' + y = 4xe^{-x} + 2\cos x;$

Soluţii:
Rezolvările complete sunt date pentru exerciţiile *1.*, *3.* şi *5.*

1. Avem ecuaţia liniară omogenă cu coeficienţi constanţi

$$y'' - y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$r^2 - 1 = 0$$

cu soluţiile

$$r_{1,2} = \pm 1.$$

Pornind de la rădăcinile ecuaţiei caracteristice construim sistemul fundamental de soluţii

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \longmapsto y_1\,(x) = e^x, \\ r_2 &= -1 \longmapsto y_2\,(x) = e^{-x}. \end{aligned}$$

Cum ecuaţia este una omogenă, atunci soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. În acest caz ecuaţia
$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$$
este una liniară neomogenă.

Mai întâi determinăm soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene ataşate
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$
Ecuaţia caracteristică este
$$r^2 - 5r + 6 = 0$$
cu rădăcinile
$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3.$$
Astfel, sistemul fundamental de soluţii este de forma
$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \longmapsto y_1(x) = e^{2x}, \\ r_2 &= 3 \longmapsto y_2(x) = e^{3x}, \end{aligned}$$
deci soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene este
$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
adică
$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Pentru determinarea soluţiei particulare corespunzătoare ecuaţiei liniare neomogene aplicăm metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Observăm că
$$f(x) = 6x^2 - 10x + 2 = P_2(x)$$
adică $f(x)$ este un polinom de gradul 2 în x, cum termenul y apare în ecuaţie suntem în Cazul I-a., deci ecuaţia neomogenă va admite ca soluţie particulară o funcţie polinom de gradul 2. Astfel căutăm $y_p(x)$ de forma
$$y_p(x) = Q_2(x) = ax^2 + bx + c$$
şi determinăm parametrii a, b, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $y_p(x)$ să fie soluţie a ecuaţiei neomogene, adică
$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 6x^2 - 10x + 2.$$
Calculăm derivatele lui y_p
$$\begin{aligned} y_p(x) &= ax^2 + bx + c, \\ y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned}$$
şi înlocuim în ecuaţie
$$2a - 5(2ax + b) + 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 6x^2 - 10x + 2$$

de unde obţinem

$$6ax^2 + (-10a + 6b) \cdot x + 2a - 5b + 6c = 6x^2 - 10x + 2.$$

Cum relaţia obţinută trebuie să fie o identitate, obţinem că

$$\begin{cases} 6a &= 6 \\ -10a + 6b &= -10 \\ 2a - 5b + 6c &= 2 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

deci

$$y_p(x) = x^2.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = y_0 + y_p$$

adică

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{6} e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

5. Ecuaţia liniară

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + 2x + 4$$

este una neomogenă.

Mai întâi determinăm soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene ataşate

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

cu rădăcinile

$$r_{1,2} = -1 \pm i.$$

Sistemul fundamental de soluţii în acest caz este de forma

$$r_{1,2} = -1 \pm i \longmapsto y_1(x) = e^{-x} \cos x \text{ şi } y_2(x) = e^{-x} \sin x$$

deci soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene este

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene vom aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi combinată cu principiul superpoziţiei. Observăm că funcţia $f(x)$ este de forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

unde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= xe^{-x}, \\ f_2(x) &= 2x + 4. \end{aligned}$$

Căutăm soluţia particulară y_p de forma

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

unde y_{p1} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$$

şi y_{p2} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y'' + 2y' + 2y = 2x + 4.$$

Funcţia f_1 este de forma

$$f_1(x) = P_1(x)\, e^{-x},$$

adică, se încadrează în Cazul II-a, deci căutăm y_{p1} de forma

$$y_{p1}(x) = Q_1(x) \cdot e^{-x} = (ax + b)\, e^{-x}.$$

Calculăm derivatele lui y_{p1}:

$$\begin{aligned} y_{p1}(x) &= (ax + b)\, e^{-x}, \\ y'_{p1}(x) &= ae^{-x} - (ax + b)\, e^{-x} = (-ax + a - b)\, e^{-x} \\ y''_{p1}(x) &= -ae^{-x} - (-ax + a - b)\, e^{-x} = (ax - 2a + b)\, e^{-x} \end{aligned}$$

şi înlocuind în ecuaţia neomogenă

$$y''_{p1} + 2y'_{p1} + 2y_{p1} = xe^{-x}$$

obţinem

$$(ax + bax - 2a + b)\, e^{-x} + 2(-ax + a - b)\, e^{-x} + 2(ax + b)\, e^{-x} = xe^{-x}$$

adică avem egalitatea

$$ax + b = x$$

deci

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

şi astfel deducem că

$$y_{p1}(x) = xe^{-x}.$$

Pentru determinarea lui y_{p2} observăm că funcţia f_2 este de forma

$$f_2(x) = P_1(x),$$

adică, se încadrează în Cazul I-a, deci căutăm y_{p2} de forma

$$y_{p2}(x) = Q_1(x) = ax + b.$$

Calculăm derivatele lui y_{p1}:

$$\begin{aligned} y_{p2}(x) &= ax + b, \\ y'_{p2}(x) &= a \\ y''_{p2}(x) &= 0 \end{aligned}$$

şi înlocuind în ecuaţia neomogenă

$$y''_{p2} + 2y'_{p2} + 2y_{p2} = 2x + 4$$

obţinem

$$2a + 2(ax + b) = 2x + 4$$

adică avem egalitatea

$$2ax + 2a + b = 2x + 4$$

deci

$$\begin{cases} 2a &= 2 \\ 2a + b &= 4 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 2 \end{cases}$$

şi astfel deducem că

$$y_{p2}(x) = x + 2.$$

Prin urmare o soluţie particulară a ecuaţie neomogene

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + 2x + 4$$

este

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

adică

$$y_p(x) = xe^{-x} + x + 2,$$

iar soluţia generală este

$$y = y_0 + y_p$$

adică

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + xe^{-x} + x + 2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{3}{2}\sin(2x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

7. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 3xe^x + \sin x + 3\cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

8. Soluţia generală: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (2x+2)\, e^{-x} + x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Temă:

- Rezolvaţi punctele *3.*, *4.* de la Exerciţiul 2.1.1
- Rezolvaţi punctele *3.*, *4.*, *5.* de la Exerciţiul 2.2.1
- Rezolvaţi punctele *2.*, *4.*, *7.* de la Exerciţiul 2.3.1

Pentru a bifa prezenţa la Seminarul 2 trebuie să rezolvaţi exerciţiile propuse ca temă. Scrieţi rezolvările pe foi, scanaţi sau pozaţi foile (format pdf sau jpg) şi trimiteţi fişierele prin email cadrului didactic ce ţine seminarul la grupa voastră până cel târziu în data de 20 Martie 2020, ora 14.00.

Adrese email:
Marcel Şerban: mserban@math.ubbcluj.ro
Mădălina Moga: madalina.moga@math.ubbcluj.ro
Radu Truşcă: radu.trusca@math.ubbcluj.ro

Seminar 3

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

3.1 Mulţimea soluţiilor. Sistem fundamental de soluţii

Se consideră sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} y_1'(x) & = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) \\ y_2'(x) & = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,2}$. Dacă notăm cu

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

obţinem forma vectorială a sistemului (3.1)

$$Y' = A \cdot Y \tag{3.2}$$

unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm cu S_0 mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen (3.1).

Teorema 3.1.1 *S_0 este un subspaţiu finit dimensional cu* $\dim S_0 = 2$ *al spaţiului* $C^1(I, \mathbb{R}^2)$.

$\{Y^1, Y^2\}$ bază în S_0 se numeşte **sistem fundamental de soluţii**, iar matricea

$$U = \left(Y^1\ Y^2\ ...\ Y^n\right)$$

se numeşte **matrice fundamentală de soluţii**.

Soluţia generală a sistemului liniar omogen:

$$Y = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

3.2 Metoda reducerii la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi

Considerăm cazul sistemelor de două ecuaţii

$$\begin{cases} y_1' = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

Se alege una dinrte ecuaţiile sistemului şi se derivează

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_{11}\left(a_{11}y_1 + a_{12}y_2\right) + a_{12}\left(a_{21}y_1 + a_{22}y_2\right) \\ &= \left(a_{11}^2 + a_{12}a_{21}\right)y_1 + \left(a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}\right)y_2 \end{aligned}$$

Pentru simplificarea scrierii vom nota

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \\ \alpha_2 &= a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}, \end{aligned}$$

astfel, obţinem

$$y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Folosind această relaţie şi ecuaţia sistemului de la care am pornit obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & = y_1' \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & = y_1'' \end{cases} \tag{3.4}$$

din care îl exprimăm pe y_2 în funcţie de y_1, y_1':

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1\right) \tag{3.5}$$

şi prin înlocuirea în cea de a doua ecuaţie obţinem

$$\begin{aligned} y_1'' &= \alpha_1 y_1 + \frac{\alpha_2}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1\right) \\ y_1'' &= \frac{\alpha_2}{a_{12}}y_1' + \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 a_{11}}{a_{12}}\right)y_1 \end{aligned}$$

adică o ecuaţiei cu coeficienţi constanţi de ordinul 2 cu necunoscuta y_1:

$$y_1'' + \beta_1 y_1' + \beta_2 y_1 = 0, \tag{3.6}$$

unde $\beta_1 = -\frac{\alpha_2}{a_{12}}$, $\beta_2 = -\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 a_{11}}{a_{12}}\right)$. Prin rezolvarea acestei ecuaţii folosind metoda de rezolvare a ecuaţiilor liniare omogene de ordinul 2 cu coeficienţi constanţi obţinem

$$y_1(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

unde $\{\phi_1, \phi_2\}$ este sistemul fundamental de soluţii corespunzător ecuaţiei (3.6). Expresia celei de a doua componente a sistemului se obţine din (3.5) prin înlocuirea lui y_1 cu expresia determinată.

Exerciţiul 3.2.1 *Să se rezolve (folosind metoda reducerii la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi):*

$$(a)\ \begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & y_1 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 - y_2 \\ y_2' = & y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} y_1' = & 7y_1 + y_2 \\ y_2' = & 7y_2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 + y_2 \\ y_2' = & -2y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} y_1' = & 2y_1 - y_2 \\ y_2' = & 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Soluţii:

(a) Pentru sistemul

$$\begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & y_1 \end{cases}$$

alegem prima ecuaţie şi o derivăm:

$$y_1'' = y_2'.$$

Dar, din a doua ecuaţie a sistemului avem

$$y_2' = y_1,$$

de unde deducema că

$$y_1'' = y_1,$$

adică obţinem ecuaţie liniară omogenă de ordinul 2 în y_1

$$y_1'' - y_1 = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este de forma

$$r^2 - 1 = 0$$

cu rădăcinile

$$r_{1,2} = \pm 1.$$

Astel, sistemul fundamental de soluţii corespunzător acestei ecuaţii este:

$$\phi_1(x) = e^x,\ \phi_2(x) = e^{-x}\ ,$$

deci soluţia corespunzătoare y_1 este

$$y_1(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Expresia celei de a doua componente a sistemului se obţine din prima ecuaţie a sistemului, ştim că

$$y_2 = y_1',$$

deci

$$y_2(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

În concluzie, soluţia sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = & c_1 e^x - c_2 e^{-x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Pentru sistemul

$$\begin{cases} y_1' = & y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

Alegem prima ecuaţie a sistemului şi o derivăm

$$y_1'' = y_1' - 5y_2'.$$

Folosind relaţiile sistemului obţinem

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 - 5y_2 - 5(2y_1 - y_2) = \\ &= y_1 - 5y_2 - 10y_1 + 5y_2 = \\ &= -9y_1, \end{aligned}$$

adică y_1 este soluţie a ecuaţiei

$$y_1'' + 9y_1 = 0.$$

Rezolvăm această ecuaţie. Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$r^2 + 9 = 0$$

şi are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 3i$. Astfel, sistemul fundamental de soluţii corespunzător este format din funcţiile

$$\phi_1(x) = \cos(3x), \ \phi_2(x) = \sin(3x),$$

deci

$$y_1(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cea de doua componentă a sistemului se determină din prima ecuaţie

$$y_2 = \frac{1}{5}(y_1 - y_1'),$$

adică

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 3c_1 \sin(3x) - 3c_2 \cos(3x)\right],$$

de unde obţinem

$$y_2(x) = c_1\left[\frac{1}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\sin(3x)\right] + c_2\left[\frac{1}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\right],$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

În concluzie, soluţia sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = & c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \\ y_2(x) = & c_1\left[\frac{1}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\sin(3x)\right] + c_2\left[\frac{1}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\right], \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2(x) = & c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{x} \sin(x) + c_2 e^{x} \cos(x) \\ y_2(x) = & -c_1 e^{x} \cos(x) + c_2 e^{x} \sin(x) \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(e) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x} \\ y_2(x) = & c_2 e^{7x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(f) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = & c_1 e^{x} + 3c_2 e^{-x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3.3 Metoda ecuaţiei caracteristice (metoda valorilor proprii)

Considerăm sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi (3.1) scris în forma vectorială (3.2)

$$Y' = A \cdot Y.$$

Căutăm soluţii de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

astfel încât $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Deoarece Y trebuie să fie soluţie a sistemului (3.2) atunci

$$Y' - A \cdot Y = 0$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică (α_1, α_2) este soluţie a sistemului liniar omogen

$$(\lambda E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

şi cum $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ atunci

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0. \tag{3.9}$$

Ecuaţia (3.9) se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată sistemului (3.2) şi se observă că soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt valorile proprii ale matricii A, iar coeficienţii (α_1, α_2) sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii λ.

(a) **Cazul valorilor proprii simple**

Dacă matricea A admite 2 valori proprii simple λ_1, λ_2 atunci pentru fiecare valoare proprie λ_i, $i = \overline{1, 2}$, se determină un vector propriu nenul din sistemul (3.8) de forma (α_1^i, α_n^i), $i = 1, 2$. Astfel, se construiesc 2 soluţii

$$Y^i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^i e^{\lambda_i x} \\ \alpha_2^i e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}, \ i = \overline{1, 2},$$

ce vor forma sistemul fundamental de soluţii corespunzător sistemului (3.2). Deci, matricea fundamentală de soluţii va fi de forma

$$U(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

de unde deducem soluţia generală a sistemului

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) **Cazul valorilor proprii complexe**

Dacă matricea A admite o valori proprii complexe conjugate $\lambda = \alpha \pm i\beta$, ceea ce înseamnă că o pereche de valori proprii conjugate vor genera două soluţii în sistemul fundamental. Principiul este identic cu cel din cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, şi anume,

$$Z(x) = Z_1(x) + i \cdot Z_2(x)$$

este soluţie a sistemului (3.2) dacă şi numai dacă partea reală $Z_1(x)$ şi partea imaginară $Z_2(x)$ sunt soluţii a sistemului (3.2).

Astfel, în cazul unei valori proprii complexe se determină un vector propriu nenul în $\mathbb{C}^2$ din sistemul (3.8) de forma $(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \neq (0,0)$ şi se determină soluţia corespunzătoare

$$Z(x) = \begin{pmatrix} (a_1 + ib_1)\, e^{(\alpha + i\beta)x} \\ (a_2 + ib_2)\, e^{(\alpha + i\beta)x} \end{pmatrix}$$

după care determinăm partea reală şi partea imaginară folosind relaţia

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + i \cdot \sin(\beta x)\right].$$

În urma calculelor, obţinem

$$Z(x) = Z^1(x) + i \cdot Z^2(x)$$

unde

$$Z^1(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}\left[a_1 \cos(\beta x) - b_1 \sin(\beta x)\right] \\ e^{\alpha x}\left[a_2 \cos(\beta x) - b_2 \sin(\beta x)\right] \end{pmatrix},$$

$$Z^2(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}\left[a_1 \sin(\beta x) + b_1 \cos(\beta x)\right] \\ e^{\alpha x}\left[a_2 \sin(\beta x) + b_2 \cos(\beta x)\right] \end{pmatrix},$$

iar cele două soluţii din sistemul fundamental generate de valorile proprii complexe conjugate $\alpha \pm i\beta$ vor fi $Z^1(x)$ şi $Z^2(x)$.

(c) **Cazul valorilor proprii multiple**

Dacă λ este valoare proprie reală a matricii A cu ordinul de multiplicitate 2, adică λ este rădăcină de ordin 2 a ecuaţiei caracteristice (3.9), atunci ea va genera 2 soluţii în sistemul fundamental de soluţii de forma

$$\begin{aligned} Y^1(x) &= e^{\lambda x} u_1 \\ Y^2(x) &= e^{\lambda x}\left(\tfrac{x}{1!} u_1 + u_2\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

unde u_1, u_2 sunt vectorii proprii generalizaţi ai matricii A, adică

$$\begin{aligned} Au_1 &= \lambda u_1, \\ Au_2 &= \lambda u_2 + u_1, \end{aligned}$$

sau u_1, u_2 sunt soluţii a sistemelor

$$\begin{aligned} (A - \lambda E_2)\, u_1 &= 0, \\ (A - \lambda E_2)\, u_2 &= u_1, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Exerciţiul 3.3.1 *Să se rezolve (folosind metoda ecuaţiei caracteristice):*

$$(a) \quad \begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} y_1' = & y_1 - y_2 \\ y_2' = & y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y_1' = & y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (e) \quad \begin{cases} y_1' = & 7y_1 + y_2 \\ y_2' = & 7y_2 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y_1' = & y_1 + y_2 \\ y_2' = & -2y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (f) \quad \begin{cases} y_1' = & 2y_1 - y_2 \\ y_2' = & 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Soluţii:

(a) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

iar ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

de unde obţinem valorile proprii $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 3$.

Pentru fiecare valoare proprie determinăm un vector propriu corespunzător. Astfel, pentru $\lambda_1 = 2$ sistemul vectorilor proprii este

$$(\lambda_1 E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{cases}$$

deci $\alpha_1 = \alpha_2$. Alegem $\alpha_1 = 1$ de unde deducem că $\alpha_2 = 1$. Astfel, obţinem prima soluţie din sistemul fundamental de soluţii

$$Y^1(x) = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda_2 = 3$ sistemul vectorilor proprii este

$$(\lambda_2 E_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 & = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

deci $2\alpha_1 = \alpha_2$. Alegem $\alpha_1 = 1$ de unde deducem că $\alpha_2 = 2$. Astfel, obţinem a doua soluţie din sistemul fundamental de soluţii

$$Y^1(x) = e^{3x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Matricea fundamentală de soluţii este

$$U = \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}$$

de unde obţinem soluţia generală a sistemului

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & 2e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x) & = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2(x) & = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

iar ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 10 = 0$$

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

de unde obţinem valorile proprii $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Suntem în cazul valorilor proprii complexe conjugate, alegem una dintre aceste valori, de exemplu $\lambda = 3i$ şi construim soluţia de variabilă reală dar cu valori complexe $Z(x)$. Sistemul vectorilor proprii este (în $\mathbb{C}^2$) pentru $\lambda = 3i$ este

$$(\lambda_1 E_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3i-1 & 5 \\ -2 & 3i+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} (3i-1)\,\alpha_1 + 5\alpha_2 & = 0 \\ -2\alpha_1 + (3i+1)\,\alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

Trebuie sa determinăm o soluţie diferită de soluţia banală (nu uitaţi ca sistemul este compatibil nedeterminat, deci are o infinitate de soluţii în $\mathbb{C}$), alegem prima ecuaţie a sistemului în care luăm $\alpha_2 = \frac{1}{5}$, astfel, obţinem

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3i-1} = \frac{1+3i}{10}.$$

Scriem soluţia $Z(x)$ de variabilă reală dar cu valori complexe

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1+3i}{10}e^{3ix} \\ \frac{1}{5}e^{3ix} \end{pmatrix}.$$

Folosind formula lui Euler

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + i\cdot\sin(\beta x)\right]$$

obţinem

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ \frac{1}{5}(\cos(3x) + i\sin(3x)) \end{pmatrix}$$

şi identificăm partea reală şi partea imaginară

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) \end{pmatrix} + i\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix},$$

deci sistemul fundamental de soluţii va fi format din partea reală, respectiv partea imaginară a lui $Z(x)$

$$Y^1(x) = \operatorname{Re} Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) \end{pmatrix},$$

$$Y^2(x) = \operatorname{Im} Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix}.$$

Matricea fundamentală de soluţii este

$$U = \left(Y^1\ Y^2\right)$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) & \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) & \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix}$$

de unde obţinem soluţia generală a sistemului

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) & \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) & \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x) & = c_1\left(\dfrac{1}{10}\cos(3x) - \dfrac{3}{10}\sin(3x)\right) + c_2\left(\dfrac{1}{10}\sin(3x) + \dfrac{3}{10}\cos(3x)\right) \\ y_2(x) & = \dfrac{c_1}{5}\cos(3x) + \dfrac{c_2}{5}\sin(3x) \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2(x) = & c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(d) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{x}\sin(x) + c_2 e^{x}\cos(x) \\ y_2(x) = & -c_1 e^{x}\cos(x) + c_2 e^{x}\sin(x) \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(e) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x} \\ y_2(x) = & c_2 e^{7x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(f) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = & c_1 e^{x} + 3c_2 e^{-x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Seminar 4

Probleme ataşate ecuaţiilor diferenţiale

4.1 Problema Cauchy

Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

unde $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Printr-o *problemă Cauchy* (*problemă cu valori iniţiale*) ataşată sistemului de ecuaţii (4.1) înţelegem problema

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y^0 \end{cases} \tag{4.2}$$

unde $x_0 \in I$, $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Rezolvarea problemelor Cauchy revine la determinarea soluţiei generale a ecuaţiei după care sunt utilizate condiţiile iniţiale pentru determinarea valorilor constantelor de integrare, soluţia problemei fiind soluţia obţinută prin înlocuirea acestor constante în expresia soluţiei generale.

Exerciţiul 4.1.1 *Să se determine soluţiile următoarelor probleme Cauchy:*

(a) $\begin{cases} (1 + e^x) yy' - e^x &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy' + y &= e^x \\ y(a) &= b, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2 \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y_1' &= 3y_1 - y_2 \\ y_2' &= 10y_1 - 4y_2 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 5 \end{cases}$

În cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n problema Cauchy are următoarea formă

$$\left\{\begin{array}{ll} y^{(n)} & = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \\ y\left(x_0\right) & = y_1^0 \\ y'\left(x_0\right) & = y_2^0 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) & = y_n^0 \end{array}\right. \tag{4.3}$$

unde $x_0 \in I$, $y_1^0, ...y_n^0 \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 4.1.2 *Să se determine soluţiile următoarelor probleme Cauchy:*

$$(a) \left\{\begin{array}{ll} y'' - 5y' + 4y & = 0 \\ y(0) & = 5 \\ y'(0) & = 8 \end{array}\right. \qquad (c) \left\{\begin{array}{ll} y'' + 4y & = 4x \\ y(\pi) & = 0 \\ y'(\pi) & = 1 \end{array}\right.$$

$$(b) \left\{\begin{array}{ll} y'' - 4y' + 5y & = 2x^2e^x \\ y(0) & = 2 \\ y'(0) & = 3 \end{array}\right. \qquad (d) \left\{\begin{array}{ll} y'' + 6y' + 9y & = 6\cos x + 8\sin x \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 1 \end{array}\right.$$

4.2 Problema bilocală

Problema bilocală se ataşează ecuaţiilor diferenţiale de ordinul II şi spre deosebire de problema Cauchy condiţiile sunt date în două puncte diferite, adică:

$$\left\{\begin{array}{ll} y'' & = f(x, y, y') \\ y(a) & = \alpha \\ y(b) & = \beta \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Determinarea soluţiei se face ca în cazul problemelor Cauchy, adică se determină soluţia generală a ecuaţiei, după care sunt utilizate cele două condiţii pentru determinarea celor două constante de integrare, soluţia problemei bilocale fiind soluţia obţinută prin înlocuirea acestor constante în expresia soluţiei generale.

Exerciţiul 4.2.1 *Să se determine soluţiilor următoarelor probleme bilocale:*

$$(a) \left\{\begin{array}{ll} y'' + 3y' & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(3) & = 0 \end{array}\right. \qquad (c) \left\{\begin{array}{ll} y'' + y & = x \\ y(0) & = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) & = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$(b) \left\{\begin{array}{ll} y'' + \pi^2 y & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(1) & = 0 \end{array}\right. \qquad (d) \left\{\begin{array}{ll} y'' + 4y' + 4y & = e^{-x} \\ y(0) & = 1 \\ y(\ln 2) & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 2 \end{array}\right.$$

Exerciţiul 4.2.2 *Să se determine valorile parametrului real λ pentru care problema bilocală*

$$\left\{\begin{array}{ll} y'' + \lambda y & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(1) & = 0 \end{array}\right.$$

admite soluţii nebanale (diferite de soluţia identic nulă) şi să determine aceste soluţii.

4.3 Alte tipuri de probleme

În categoria "alte tipuri de probleme" sunt incluse probleme care au ataşate ale tipuri condiţii decât cele utilizate în cazul problemelor Cauchy sau bilocale.

Exerciţiul 4.3.1 *Să se determine soluţiilor următoarelor ecuaţii care satisfac condiţiile date:*

(a) $$\begin{cases} x^2 y' \cos\frac{1}{x} - y \sin\frac{1}{x} & = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) & = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} y'' - y & = 1 \\ y(0) & = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) & < +\infty \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y & = \sin(x) \\ y(x) & \textit{mărginită pe } \mathbb{R} \end{cases}$$

Seminar 5

Sisteme dinamice generate de ecuaţii diferenţiale autonome

O ecuaţie diferenţială se numeşte *ecuaţie autonomă* dacă variabila funcţiei necunoscute nu apare în mod explicit în expresia ecuaţiei diferenţiale (funcţia f nu depinde explicit de variabila t), adică aceasta este de forma:

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{5.1}$$

5.1 Fluxul generat de o ecuaţie diferenţială autonomă. Portret fazic

Se consideră ecuaţia autonomă (5.1). Avem următorul rezultat:

Teorema 5.1.1 *Dacă $f \in C^1(\mathbb{R})$ atunci problema Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = & f(x) \\ x(0) = & \eta \end{cases} \tag{5.2}$$

are o unică soluţie saturată pentru orice $\eta\in\mathbb{R}$.

Printr-o *soluţie saturată* a unei ecuaţii diferenţiale înţelegem o soluţie definită pe cel mai mare interval posibil. Notăm prin $x(t,\eta)$ unica soluţie a problemei Cauchy (5.2), astfel soluţia

$$x(\cdot,\eta) : I_\eta \to \mathbb{R},$$

unde intervalul I_η este maximal (în general, intervalul maximal depinde de alegerea valorii η). Din Teorema de comportare la frontieră a soluţiilor saturate avem că interval maximal I_η este un interval deschis de forma:

$$I_\eta = \left(\alpha_\eta, \beta_\eta\right),$$

(valorile α_η, β_η putând fi valori finite sau infinite) şi pentru ca problema Cauchy (5.2) să fie bine definită trebuie ca $0 \in I_\eta$ ceea ce implică relaţia

$$\alpha_\eta < 0 < \beta_\eta.$$

Fluxul φ generat de ecuaţia (5.1) este soluţia saturată a problemei Cauchy (5.2) şi se defineşte în următorul mod:

$$\varphi : W \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(t, \eta) = x(t, \eta)$$

unde mulţimea W este definită de

$$W = \{I_\eta \times \{\eta\} : \ \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă $I_\eta = \mathbb{R}$ atunci $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pentru orice t fixat putem defini operatorul

$$\eta \longmapsto \varphi(t, \eta),$$

acest operator se numeşte *sistemul dinamic* generat de ecuaţia (5.1).

Proprietăţi:

1. $\varphi(0, \eta) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t + s, \eta) = \varphi(t + s, \varphi(s, \eta))$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\forall t, \eta \in I_\eta$;
3. φ este continuu în raport cu η.

Definiţia 5.1.1 *Pentru $\eta \in \mathbb{R}$ fixat avem mulţimile:*

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t \in [0, \beta_\eta)} \varphi(t, \eta) - \textit{se numeşte orbita pozitivă a lui } \eta,$$

$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t \in (\alpha_\eta, 0]} \varphi(t, \eta) - \textit{se numeşte orbita negativă a lui } \eta,$$

$$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) - \textit{se numeşte orbita a lui } \eta.$$

Definiţia 5.1.2 *Reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul de parcurgere al acestora formează portretul fazic generat de ecuaţia (5.1).*

Exerciţiul 5.1.1 *Să se determine fluxul şi portretul fazic (pe baza definiţiei) pentru următoarele ecuaţii:*

(a) $x' = x + 1$

(b) $x' = 2x + 1$

(c) $x' = x^2$

(Indicaţie: Pentru rezolvare a se vedea Exemplele 7.1.1 şi 7.1.2 din Cursul 7)

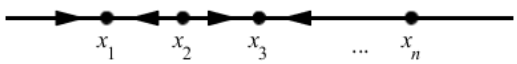
Portretul fazic poate fi obţinut direct din analiza semnului funcţiei $f(x)$. Mai întâi rezolvăm ecuaţia

$$f(x) = 0.$$

Fie $x_1, \ldots, x_n$ soluţiile reale ale acestei ecuaţii în ordine crescătoare. Construim tabelul cu semnul funcţiei f

x	$-\infty$	$\ldots$	x_1		x_2		x_3		$\ldots$	x_n
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\ldots$	0
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		

Astfel orbitele sunt determinate de punctele $x_1, \ldots, x_n$, adică vor fi intervalele $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), $(x_n, +\infty)$ cu sensul de parcurgere crescător dacă semnul funcţiei f este pozitiv, respectiv cu sens de parcurgere descrescător dacă semnul funcţiei f este negativ, la care se vor adauga punctele $\{x_1\}$, ..., $\{x_n\}$.



Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = f(x)$.

5.2 Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie ecuaţia autonomă (5.1)

$$x' = f(x).$$

Definiţia 5.2.1 *Soluţiile constante*

$$x(t) \equiv x^*$$

ale ecuaţiei (5.1) se numesc soluţii de echilibru sau soluţii staţionare.

Valoarea $x^* \in \mathbb{R}$ se numeşte punct de echilibru sau punct staţionar.

Se observă că dacă $x(t) \equiv x^*$ este o soluţie de echilibru a ecuaţiei autonome (5.1) atunci $x^* \in \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei

$$f(x) = 0 \tag{5.3}$$

sau cu alte cuvinte, rădăcinile reale ale funcţiei f sunt puncte de echilibru.

În studiul ecuaţiilor autonome este important studiul proprietăţilor de stabilitate a punctelor de echilibru. Avem următoarele noţiuni de stabilitate:

Definiţia 5.2.2 *Fie $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de echilibru al ecuaţiei autonome (5.1). Spunem că punctul de echilibru x^* este:*

(a) *local stabil dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $|\eta - x^*| < \delta$ atunci*

$$|\varphi(t, \eta) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

unde $\varphi(t, \eta)$ este fluxul generat de (5.1).

(b) *local asimptotic stabil dacă este local stabil şi în plus există $r > 0$ astfel încât dacă $|\eta - x^*| < r$ atunci*

$$|\varphi(t, \eta) - x^*| \to 0, \quad \textit{pentru } t \to +\infty,$$

unde $\varphi(t, \eta)$ este fluxul generat de (5.1).

(c) *instabil dacă nu este local stabil.*

Stabilitatea punctelor de echilibru poate fi studiată folosind două metode:
1. Metoda portretului fazic
2. Metoda liniarizării (metoda primei aproximaţii)

Metoda portretului fazic

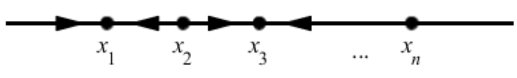
Portretul fazic poate fi obţinut direct din analiza semnului funcţiei $f(x)$. Mai întâi rezolvăm ecuaţia

$$f(x) = 0.$$

Fie $x_1, \ldots, x_n$ soluţiile reale ale acestei ecuaţii în ordine crescătoare. Construim tabelul cu semnul funcţiei f

x	$-\infty$	$\ldots$	x_1		x_2		x_3		$\ldots$	x_n
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\ldots$	0
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		

Astfel orbitele sunt determinate de punctele $x_1, \ldots, x_n$, adică vor fi intervalele $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), $(x_n, +\infty)$ cu sensul de parcurgere crescător dacă semnul funcţiei f este pozitiv, respectiv cu sens de parcurgere descrescător dacă semnul funcţiei f este negativ, la care se vor adauga punctele $\{x_1\}$, ..., $\{x_n\}$.

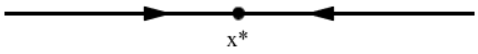


Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = f(x)$.

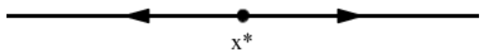
Prin analiza portretului putem determina stabilitatea soluţiilor de echilibru în felul următor:

- dacă sensul de parcurgere al orbitelor din vecinătatea punctului de echilibru este către acesta atunci punctul de echilibru este local asimptotic stabil

- dacă sensul de parcurgere al orbitelor din vecinătatea punctului de echilibru este dinspre acesta atunci punctul de echilibru este instabil



Punct de echilibru local asimptotic stabil



Punct de echilibru instabil

Metoda liniarizării (metoda primei aproximaţii)

Metoda liniarizării este dată de următorul criteriu de stabilitate cunoscut sub numele de criteriul stabilităţii în primă aproximaţie sau criteriul stabilităţii liniarizate (vezi Cursul 7 pentru explicaţii):

Teorema 5.2.1 (Criteriul de stabilitate în primă aproximaţie) *Fie ecuaţia autonomă (5.1) şi* $x^* \in \mathbb{R}$ *un punct de echilibru corespunzător pentru care există* $f'(x^*)$. *Atunci:*

(a) Dacă $f'(x^*) < 0$ *atunci punctul de echilibru* x^* *este local asimptotic stabil.*

(b) Dacă $f'(x^*) > 0$ *atunci punctul de echilibru* x^* *este instabil.*

Exerciţiul 5.2.1 *Să se determine punctele de echilibru şi să se studieze stabilitatea acestora (atât prin metoda portretului fazic determinat pe baza semnului funcţiei* f *cât şi prin metoda stabilităţii în primă aproximaţie) pentru ecuaţiile:*

(a) $x' = -2x$

(b) $x' = 2 + x$

(c) $x' = x - x^2$

(d) $x' = x(x+1)(2-x)$

(e) $x' = \sin(x)$

Indicaţie: *pentru rezolvare a se vedea (din Cursul 7) Exemplul 7.1.3 pentru determinarea portretului fazic pe baza semnului funcţiei* f, *Exemplul 7.2.4 pentru determinarea stabilităţii punctelor de echilibru pe baza portretului fazic şi Exemplul 7.2.5 pentru determinarea stabilităţii punctelor de echilibru pe baza criteriului de stabilitate în primă aproximaţie.*

Seminar 6

Sisteme dinamice generate de sisteme planare de ecuaţii diferenţiale autonome

6.1 Flux. Portret fazic

Se consideră sistemul planar de ecuaţii diferenţiale autonome

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \end{cases} \tag{6.1}$$

Fluxul generat de sistemul planar (6.1) reprezintă soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \\ x\left(0\right) = & \eta_1 \\ y\left(0\right) = & \eta_2 \end{cases} \tag{6.2}$$

unde $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, parametru. Notăm cu $x\left(t;\eta\right), y\left(t;\eta\right) : I_\eta \to \mathbb{R}$, $I_\eta = (\alpha_\eta, \beta_\eta)$, unica soluţie saturată a problemei (6.2) în ipoteza că $f \in C^1$. Fluxul este dat de

$$\begin{gathered} \varphi : W \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi\left(t,\eta\right) = \left(x\left(t;\eta\right), y\left(t;\eta\right)\right) \end{gathered} \tag{6.3}$$

unde

$$W = \left\{ I_\eta \times \{\eta\} : \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dacă $I_\eta = \mathbb{R}$

Proprietăţile fluxului:

1. $\varphi\left(0,\eta\right) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;

2. $\varphi\left(t+s,\eta\right) = \varphi\left(t,\varphi\left(s,\eta\right)\right)$, $t, s \in I_\eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;

3. φ continuă.

$\gamma^+(\eta) = \bigcup\limits_{t\in[0;\beta_\eta)} \varphi(t,\eta)$ orbita pozitivă a lui $\eta \in \mathbb{R}$

$\gamma^-(\eta) = \bigcup\limits_{t\in(\alpha_\eta;0]} \varphi(t,\eta)$ orbita negativă a lui $\eta \in \mathbb{R}$

$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta)$ orbita lui $\eta \in \mathbb{R}$

Reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul de parcurgere al acestora formeaza portretul fazic.

Exerciţiul 6.1.1 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & -2y \end{cases}$$

(a) Să se determine fluxul generat de sistem;

(b) Să se determine orbitele $\gamma(0,0)$, $\gamma(1,0)$, $\gamma(-1,0)$, $\gamma(0,1)$, $\gamma(0,-1)$, $\gamma(1,1)$;

(c) Să se determine portretul fazic.

Se consideră sistemul (6.1), ecuaţia

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} \tag{6.4}$$

reprezintă ecuaţia diferenţială a orbitelor din portretul fazic.

Exerciţiul 6.1.2 *Să se determine portretul fazic pentru sistemele folosind ecuaţia diferenţială a orbitelor (6.4):*

(a) $\begin{cases} x' = & x \\ y' = & -2y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -\omega^2 x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = & x \\ y' = & x + 2y \end{cases}$

6.2 Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie sistemul planar autonom (6.1)

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \end{cases}$$

Soluţiile constante de forma $(x(t), y(t)) \equiv (x^*, y^*)$, se numesc **soluţii echilibru** (staţionare), iar valoarea $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ se numesc **puncte de echilibru** (staţionare). Punctele de echilibru sunt **soluţiile reale** ale sistemului algebric

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = & \ 0 \\ f_2(x,y) = & \ 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

În cazul sistemelor liniare

$$\begin{cases} x' = & a_{11}x + a_{12}y \\ y' = & a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

notăm cu $A = (a_{ij})_{i.j=1}^{2}$ matricea coeficienţilor. $(0,0)$ este punct de echilibru pentru acest sistem şi avem următorul rezultat de stabilitate:

Teorema 6.2.1 *(Teorema stabilităţii sistemelor liniare)*

(a) Dacă $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\forall\lambda$ *valoare proprie a matricii* A *atunci punctul de echilibru* $(0,0)$ *este asimptotic stabil;*

(b) Dacă $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, $\forall\lambda$ *valoare proprie a matricii* A*, egalitatea cu* 0 *având loc pentru valori proprii simple, atunci punctul de echilibru* $(0,0)$ *este local stabil;*

(c) Dacă nu are loc (b) *atunci punctul de echilibru* $(0,0)$ *este instabil.*

În cazul sistemelor neliniare,

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \end{cases}$$

notăm prin

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

jacobianul funcţiei vectoriale $f = (f_1, f_1)$

Teorema 6.2.2 *(Teorema stabilităţii în primă aproximaţie)*
Fie $f \in C^1(\mathbb{R})$ *şi* $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ *un punct de echilibru a sistemului (6.1).*

(a) Dacă $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\forall\lambda$ *valoare proprie a matricii* $J_f(x^*, y^*)$ *atunci punctul de echilibru* (x^*, y^*) *este local asimptotic stabil;*

(b) Dacă există λ *valoare proprie a matricii* $J_f(x^*, y^*)$ *cu* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *atunci punctul de echilibru* (x^*, y^*) *este instabil.*

Exerciţiul 6.2.1 *Să se determine punctele de echilibru şi să se studieze stabilitatea acestora pentru*

(a) $\begin{cases} x' = & x \\ y' = & -2y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -\omega^2 x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = & x + 5y \\ y' = & 5x + y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = & 1 - xy \\ y' = & x - y^3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & 2x^3 + x^2 - x \end{cases}$