Logică computațională
Curs 6

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Metoda rezoluţiei (Robinson, 1965)

- metodă de demonstrare automată *sintactică*, prin *respingere*
- este o metodă corectă şi completă de demonstrare automată
- verificarea *consistenţei/inconsistenţei* unei mulţimi de clauze (scop)

Sistem formal (axiomatic) asociat Rezoluției propoziționale

- $\mathrm{Res} = (\Sigma_{\mathrm{Res}} , F_{\mathrm{Res}} , A_{\mathrm{Res}} , R_{\mathrm{Res}})$
  - $\Sigma_{\mathrm{Res}} = \Sigma_{\mathrm{P}} \setminus \{\wedge , \rightarrow , \leftrightarrow \}$ – **alfabetul**
  - $F_{\mathrm{Res}} \cup \{\square\}$ – **mulţimea formulelor bine-formate**
    - F_{Res} mulţimea tuturor clauzelor ce se pot forma folosind alfabetul Σ_{Res}
    - $\square$ **- clauza vidă** care nu conţine nici un literal, simbolizează inconsistenţa
  - $A_{\mathrm{Res}} = \varnothing$ – **mulțimea axiomelor**
  - $R_{\mathrm{Res}} = \{res\}$ **mulţimea regulilor de inferenţă** care conţine doar
    - **regula rezoluţiei**: $A \vee l, B \vee \neg l \vdash_{res} A \vee B$, unde l este un literal, iar $A, B \in F_{\mathrm{Res}}$

Terminologie

- clauzele $C_1 = A \vee l$, $C_2 = B \vee \neg l$ **rezolvă** deoarece conţin doi literali opuşi (complementari)
- **Notație:** $C_3 = Res_l\,(C_1, C_2)$
- C_3 **rezolventul** clauzelor C_1 și C_2
- clauzele C_1, C_2 **clauze părinte**
- caz particular: $C_1 = l$, $C_2 = \neg l$, $Res_l\,(C_1, C_2) = \square$ - inconsistentă

Observație:

- Rezoluţia ca şi regulă de inferenţă este o generalizare a regulilor *modus ponens*, *modus tollens* şi a *silogismului*.

- *mp:* $U, U \rightarrow V \vdash V \quad \Rightarrow \quad U, \neg U \vee V \vdash V$
- *mt:* $U \rightarrow V \vdash \neg V \rightarrow \neg U \overset{\text{ITD}}{\Rightarrow} U \rightarrow V, \neg V \vdash \neg U \Rightarrow$

$$\neg U \vee V, \neg V \vdash \neg U$$

- *sil.:* $U \rightarrow V, V \rightarrow Z \vdash U \rightarrow Z \Rightarrow$

$$\neg U \vee V, \neg V \vee Z \vdash \neg U \vee Z$$

Algoritmul rezoluției propoziționale:

Date de intrare: S – o mulţime de clauze

Date de ieșire: S consistentă sau inconsistentă

$S_0 = S$

$i = 0$

Repetă

@ se aleg două clauze $C_1, C_2 \in S$ care rezolvă

$C_3 = \text{Res}(C_1, C_2)$

$S_{i+1} = S_i \cup \{C_3\}$

Dacă $C_3 = \square$

Atunci Scrie ”*S* este inconsistentă”; **STOP**

Altfel $i = i + 1$

Sfârșit_dacă

Până când $S_i = S_{i-1}$ *//nu se mai pot deriva clauze noi*

Scrie ”*S* este consistentă”

Sfârșit algoritm

Notație:

- $S \vdash_{\text{Res}} \square$ ”din mulțimea S de clauze s-a derivat clauza vidă prin aplicarea algoritmului rezoluției propoziținale”

Teorema de corectitudine și completitudine

- Teorema de corectitudine

  Dacă $S \vdash_{\text{Res}} \square$ atunci S este inconsistentă.

- Teorema de completitudine

  Dacă S este inconsistentă atunci $S \vdash_{\text{Res}} \square$.

- Teorema de corectitudine și completitudine

  Mulțimea S este inconsistentă dacă și numai dacă $S \vdash_{\text{Res}} \square$.

Teoreme

- U este tautologie dacă și numai dacă $FNC\,(\neg U) \vdash_{\text{Res}} \square$
- $U_1, U_2, \ldots, U_n \models V$ dacă și numai dacă

  $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$ dacă și numai dacă

  $FNC\,(U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n \wedge \neg V) \vdash_{\text{Res}} \square$

$$S_i \overset{\text{not.}}{=} FNC\,(U_i),\ i = \overline{1,n}$$

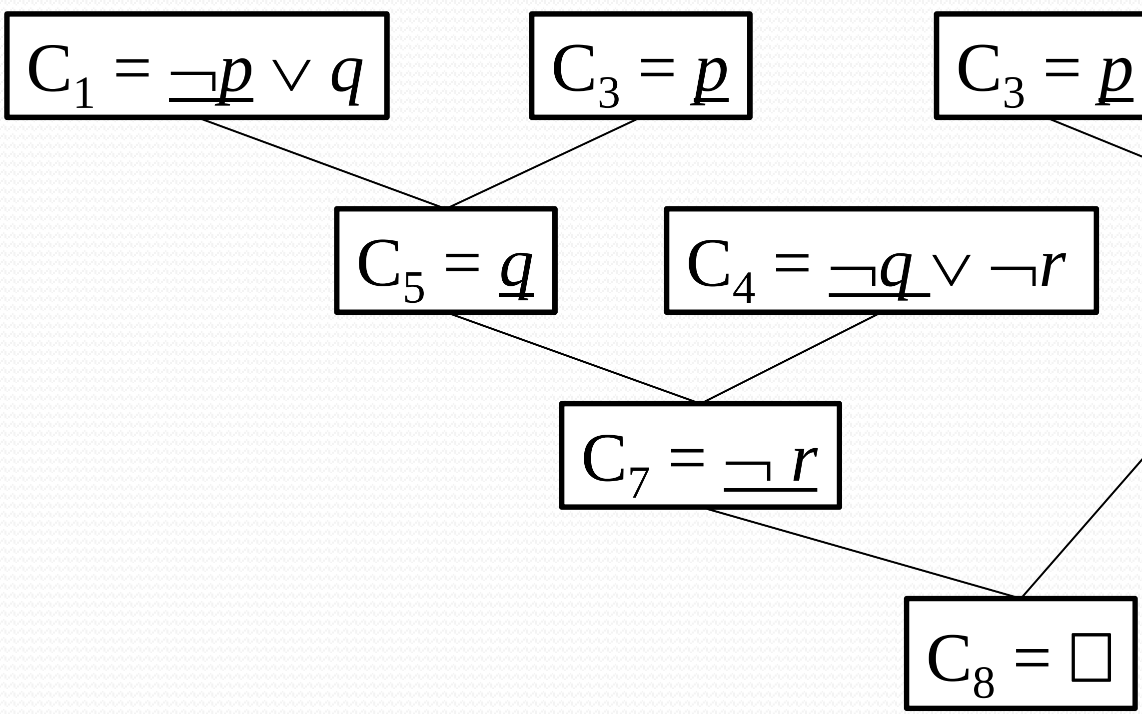
$$S_{n+1} \overset{\text{not.}}{=} FNC\,(\neg V)$$

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup S_{n+1} \vdash_{\text{Res}} \square$$

Exemplu

$S = \{\neg p \vee q, \neg p \vee r, p, \neg q \vee \neg r\}$

$C_1 \overset{\text{not.}}{=\!=} \neg p \vee q, \quad C_2 \overset{\text{not.}}{=\!=} \neg p \vee r, \quad C_3 \overset{\text{not.}}{=\!=} p, \quad C_4 \overset{\text{not.}}{=\!=} \neg q \vee \neg r$



$\overset{\text{TCC}}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

Problemă propusă

Ion, Vasile și Gheorghe sunt studenți la Informatică. Ei au făcut următorul pact:

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut.
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul.
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face.
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face.
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul.

1. Să se verifice dacă pactul nu este contradictoriu
2. Să se verifice dacă din cele de mai sus se poate deduce că Vasile a făcut laboratorul.

Notații

Ion și-a făcut lab. $\overset{\text{not.}}{=}$ p,

Vasile și-a făcut lab. $\overset{\text{not.}}{=}$ q,

Gheorghe și-a făcut lab. $\overset{\text{not.}}{=}$ r.

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut.
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul.
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face.
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face.
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul.

? Vasile a făcut laboratorul.

Transformare limbaj natural în limbaj logic

Ion și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} p$,

Vasile și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} q$,

Gheorghe și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} r$.

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut. $p \to p \vee q$
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul $p \to q$
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face. $\neg q \to r$
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face. $\neg r \to \neg p \vee q$
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul. $\neg r$

? Vasile a făcut laboratorul. q

În limbaj logic

- $p \to p \vee q$
- $p \to q$
- $\neg q \to r$
- $\neg r \to \neg p \vee q$
- $\neg r$

$? \, q$

Obținerea mulțimilor de clauze

- $p \to p \vee q \equiv \neg p \vee p \vee q \overset{\text{not.}}{=} \mathrm{C}_1$
- $p \to q \equiv \neg p \vee q \overset{\text{not.}}{=} \mathrm{C}_2$
- $\neg q \to r \equiv q \vee r \overset{\text{not.}}{=} \mathrm{C}_3$
- $\neg r \to \neg p \vee q \equiv r \vee \neg p \vee q \overset{\text{not.}}{=} \mathrm{C}_4$
- $\neg r \overset{\text{not.}}{=} \mathrm{C}_5$

$$?\, q \quad \overset{\text{se neagă concluzia}}{\Longrightarrow} \quad \neg q \overset{\text{not.}}{=} \mathrm{C}_6$$

$\mathrm{S}_1 = \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_5\}$

$\mathrm{S}_2 = \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_5, \mathrm{C}_6\}$

Aplicarea metodei rezoluției

$S_1 = \{ \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5 \} =$

$$= \{ \neg p \vee p \vee q \,, \neg p \vee q \,, q \vee r \,, r \vee \neg p \vee q \,, \neg r \}$$

$S_2 = \{ \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5, \quad C_6 \} =$

$$= \{ \neg p \vee p \vee q \,, \neg p \vee q \,, q \vee r \,, r \vee \neg p \vee q \,, \neg r \,, \neg q \}$$

Aplicarea metodei rezoluției pt. S_1:

$S_1 = \{ \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5 \} =$

$= \{ \neg p \vee p \vee q \,, \neg p \vee q \,, q \vee r \,, r \vee \neg p \vee q \,, \neg r \}$

$C_6 = \mathrm{Res}_r\,(C_3, C_5) = q$

$\cancel{C_2 = \mathrm{Res}_p\,(C_1, C_2) = \neg p \vee q}$ nu s-a obținut o clauză nouă

$\cancel{C_1 = \mathrm{Res}_p\,(C_1, C_1) = \neg p \vee p \vee q}$ nu s-a obținut o clauză nouă

$\cancel{C_2 = \mathrm{Res}_r\,(C_4, C_5) = \neg p \vee q}$ nu s-a obținut o clauză nouă

Abandonăm fără a ajunge la o concluzie, am constatat că avem nevoie de o strategie.

Deci nu știm încă dacă ipotezele sunt contradictorii.

Aplicarea metodei rezoluției pt. S_2:

$S_2 = \{ \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5, \quad C_6\} =$

$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

$C_7 = Res_r(C_3, C_5) = q$ TCC

$C_8 = Res_r(C_7, C_6) = \square \Rightarrow S_2$ e inconsistentă adică, Vasile își face laboratorul

Automatizarea procesului rezolutiv

- prin intermediul unor *strategii*
  - asigură exploatarea tuturor modurilor posibile de derivare a clauzei vide
  - evitarea deducerii unor clauze redundante sau irelevante pentru obținerea □

Strategia eliminării

- inspirată din procedura Davis-Putman
- O mulțime *S* de clauze poate fi simplificată, păstrând consistența/inconsistența ei prin aplicarea următoarelor transformări:
  - **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide): $\cancel{\underline{\neg p} \vee q \vee \underline{p} \vee \neg r}$
  - **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din *S***: clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

    $\cancel{\underline{\neg p \vee q} \vee r}$ este subsumată de $\neg p \vee q$
  - **Eliminarea clauzelor care conțin literali puri în *S***: Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din *S*:

    $\{\neg p \vee q, \cancel{\neg p \vee \underline{r}}, p, \cancel{\neg q \vee \underline{r}}\}$

- Dacă C=*l* este o **clauză unitate** din *S*, **se șterg toate clauzele *care-l conțin pe l* și *¬l din clauzele rămase*.**

$\{\cancel{\underline{\neg p}} \vee q, \cancel{\underline{\neg p}} \vee r, \cancel{p}, \neg q \vee \neg r, \cancel{p \vee \neg r}\}$ $\Rightarrow$ $\{q, r, \neg q \vee \neg r\}$

 $\varnothing$ sau $\{\square\}$ 

Strategia eliminării aplicată la S_1:

$S_1 = \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r\}$

- **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide):

$S_1 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \boldsymbol{r \vee \neg p \vee q}, \neg r\}$

- **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din *S***: clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

$S_1 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \neg r\}$

- **Eliminarea clauzelor care conțin literali puri în *S***: Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din *S*:

$S_1 = \{q \vee r, \neg r\}$

$S_1 = \{\neg r\}$

$S_1 = \{\} = \emptyset$ - consistentă, deci pactul studenților este necontradictoriu

Strategia eliminării aplicată la S_2:

$S_2 = \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

- **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide):

$S_2 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \mathbf{r \vee \neg p \vee q}, \neg r, \neg q\}$

- **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din *S***: clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

$S_2 = \{\neg p \vee q, q \vee r, \neg r, \neg q\}$

- **Eliminarea clauzelor care conțin literali puri în *S***: Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din *S*:

$S_2 = \{q \vee r, \neg r, \neg q\}$

- Dacă C=*l* este o **clauză unitate** din *S*, **se șterg toate clauzele *care-l conțin pe l* și *¬l din clauzele rămase*.**

$S_2 = \{q, \neg q \vee \square\}$

$S_2 = \{\square\}$ – inconsistentă, deci Vasile și-a făcut laboratorul

Strategia saturării pe nivele (algoritmul)

Date de intrare: S – o mulţime de clauze
Date de ieșire: S consistentă sau inconsistentă

//Se generează mulțimile de clauze S^0 , S^1, … S^k ce reprezintă nivelele
$S^0 = S$
$k= 0$
Repetă
$k = k + 1$
$S^k = \{\text{Res}\,(C_1, C_2) \mid C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \ldots \cup S^{k-1} , C_2 \in S^{k-1} \}$
$S^k = S^k \setminus (S^0 \cup S^1 \cup \ldots \cup S^{k-1})$
Până când $\square \in S^k$ **sau** $S^k = \emptyset$
Dacă $\square \in S^k$
Atunci Scrie ”S este inconsistentă”;
Altfel Scrie ”S este consistentă”
Sfârșit_dacă
Sfârșit algoritm

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_1 (1):

$S_1^0 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} =$

$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r\}$

$C_2 = Res_p(C_1, C_2) = \neg p \vee q$

$Res_?(C_1, C_3)$ NU

$C_4 = Res_p(C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$

$Res_?(C_1, C_5)$ NU

$Res_?(C_2, C_3)$ NU

$Res_?(C_2, C_4)$ NU

$Res_?(C_2, C_5)$ NU

$Res_?(C_3, C_4)$ NU

$C_6 = Res_r(C_3, C_5) = q$

$C_2 = Res_r(C_4, C_5) = \neg p \vee q$

$S_1^1 = \{C_6\} = \{q\}$

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_1 (2):

$S_1^0 = \{ \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5\}=$

$=\{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r\}$

$S_1^1 = \{C_6\}=\{q\}$

$Res_? (C_6, C_1)$ NU

$Res_? (C_6, C_2)$ NU

$Res_? (C_6, C_3)$ NU

$Res_? (C_6, C_4)$ NU

$Res_? (C_6, C_5)$ NU

$S_1^2 = \{\}=\varnothing \Rightarrow S_1$ este consistent

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_2 (1):

$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} =$
$= \{\neg p \vee p \vee q , \neg p \vee q , q \vee r , r \vee \neg p \vee q , \neg r , \neg q\}$

$C_2 = Res_p (C_1, C_2) = \neg p \vee q$

$Res_? (C_1, C_3)$ NU

$C_4 = Res_p (C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$

$Res_? (C_1, C_5)$ NU

$C_7 = Res_q (C_1, C_6) = \neg p \vee p$

$Res_? (C_2, C_3)$ NU

$Res_? (C_2, C_4)$ NU

$Res_? (C_2, C_5)$ NU

$C_8 = Res_q (C_2, C_6) = \neg p$

$Res_? (C_3, C_4)$ NU

$C_9 = Res_r (C_3, C_5) = q$

$C_{10} = Res_q (C_3, C_6) = r$

$C_2 = Res_r (C_4, C_5) = \neg p \vee q$

$C_{11} = Res_q (C_4, C_6) = r \vee \neg p$

$Res_? (C_5, C_6)$ NU

$S_2^1 = \{C_7 , C_8 , C_9 , C_{10} , C_{11}\} = \{\neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p \}$

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_2 (1):

$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} =$
$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

$C_2 = \mathrm{Res}_p (C_1, C_2) = \neg p \vee q$

$\mathrm{Res}_? (C_1, C_3)$ NU

$C_4 = \mathrm{Res}_p (C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$

$\mathrm{Res}_? (C_1, C_5)$ NU

$C_7 = \mathrm{Res}_q (C_1, C_6) = \neg p \vee p$

$\mathrm{Res}_? (C_2, C_3)$ NU

$\mathrm{Res}_? (C_2, C_4)$ NU

$\mathrm{Res}_? (C_2, C_5)$ NU

$C_8 = \mathrm{Res}_q (C_2, C_6) = \neg p$

$\mathrm{Res}_? (C_3, C_4)$ NU

$C_9 = \mathrm{Res}_r (C_3, C_5) = q$

$C_{10} = \mathrm{Res}_q (C_3, C_6) = r$

$C_2 = \mathrm{Res}_r (C_4, C_5) = \neg p \vee q$

$C_{11} = \mathrm{Res}_q (C_4, C_6) = r \vee \neg p$

$\mathrm{Res}_? (C_5, C_6)$ NU

$S_2^1 = \{C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\} = \{\neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p\}$

Strategia saturării pe nivele aplicată la $S_2(2)$:

$S_2^0 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} =$

$= \{\neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q\}$

$S_2^1 = \{C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\} =$

$= \{\neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p\}$

$C_1 = Res_p(C_7, C_1) = \neg p \vee p \vee q$

$C_2 = Res_p(C_7, C_2) = \neg p \vee q$

$Res_?(C_7, C_3)$ NU

$C_4 = Res_p(C_7, C_4) = r \vee \neg p \vee q$

$Res_?(C_7, C_5)$ NU

$Res_?(C_7, C_6)$ NU

$C_8 = Res_p(C_7, C_8) = \neg p$

$Res_?(C_7, C_9)$ NU

$Res_?(C_7, C_{10})$ NU

$C_{11} = Res_p(C_7, C_{11}) = r \vee \neg p$

$C_2 = Res_p(C_8, C_1) = \neg p \vee q$

$Res_?(C_8, C_2)$ NU

$Res_?(C_8, C_3)$ NU

$Res_?(C_8, C_4)$ NU

$Res_?(C_8, C_3)$ NU

$Res_?(C_8, C_4)$ NU

$Res_?(C_8, C_5)$ NU

$Res_?(C_8, C_6)$ NU

$Res_?(C_8, C_9)$ NU

$Res_?(C_8, C_{10})$ NU

$Res_?(C_8, C_{11})$ NU

$Res_?(C_9, C_1)$ NU

$Res_?(C_9, C_2)$ NU

$Res_?(C_9, C_3)$ NU

$Res_?(C_9, C_4)$ NU

$Res_?(C_9, C_5)$ NU

$C_{12} = Res_p(C_9, C_6) = \square$

$\Rightarrow S_2$ este inconsistentă

Strategia mulţimii suport

- se *evită* aplicarea regulii de rezoluţie asupra unor clauze dintr-o *submulţime consistentă* a mulţimii iniţiale de clauze, deoarece rezolvenţii obţinuţi sunt *irelevanţi* în procesul de derivare a □
- Această strategie a fost inspirată din faptul următor: în general mulţimea *premizelor* (faptelor) unei deducţii este *consistentă*, deci rezolvarea unor clauze din această mulţime consistentă nu poate duce la derivarea clauzei vide (inconsistenţa)

- **Definiţie:** Fie *S* o mulţime de clauze. O submulţime *Y* a lui *S* se numeşte *mulţime suport* a lui *S*, dacă *S* \ *Y* este consistentă. **Rezoluţia mulţimii suport** este rezoluţia a două clauze care nu aparţin ambele mulţimii *S* \ *Y* .

Aplicarea strategiei mulțimii suport pt. S_2:

$S_2 = \{ \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5, \quad C_6 \} =$

$= \{ \neg p \vee p \vee q \,,\, \neg p \vee q \,,\, q \vee r \,,\, r \vee \neg p \vee q \,,\, \neg r \,,\, \neg q \}$

$Y = \{C_6\}$ mulțimea suport a lui S_2. este formată din clauzele obținute din concluzie.

$S_2 \setminus Y = S_1$ și am demonstrat deja că S_1 este consistentă.

Așadar nu vom rezolva clauzele S_1 din între ele.

Vom începe de la o clauză din Y și nu vom rezolva deloc primele 5 clauze între ele:

$C_7 = Res_r\,(C_5, C_3) = q_{TCC}$

$C_8 = Res_r\,(C_6, C_7) = \square \Rightarrow S_2$ e inconsistentă adică, Vasile își face laboratorul