

# Logică computațională

## Curs 11

Lector dr. Pop Andreea-Diana

# Algebre booleene

- introduse de George Boole (1815-1864)
- stau la baza definirii funcțiilor booleene
  - care sunt utilizate în realizarea circuitelor logice

# Definirea axiomatică (1)

O *algebră booleană* este o structură  $(A, \wedge, \vee, \overline{\phantom{x}}, 0, 1)$ , unde:

- $|A| \geq 2$ ,  $A$  conținând cel puțin 2 elemente diferite, 0 și 1,  $0 \neq 1$
- $\wedge, \vee$  sunt operații binare
- $\overline{\phantom{x}}$  este operator unar
- există elementul unic 0 – elementul zero, cu proprietățile:  
 $x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0$  și  $x \vee 0 = 0 \vee x = x$ ,  $\forall x \in A$
- există elementul unic 1 – elementul unitate, cu proprietățile:  
 $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$  și  $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$ ,  $\forall x \in A$
- elementul zero, 0 și cel unitate, 1 sunt primul respectiv ultimul element, iar  $\overline{x}$  este complementul lui  $x$ :  
 $x \wedge \overline{x} = 0$  și  $x \vee \overline{x} = 1$ ,  $\forall x \in A$
- dubla negație:  
 $\overline{\overline{x}} = x$ ,  $\forall x \in A$



# Definirea axiomatică (2)

- operațiile  $\wedge$ ,  $\vee$  sunt comutative:  
 $x \wedge y = y \wedge x$  și  $x \vee y = y \vee x$ ,  $\forall x, y \in A$
- operațiile  $\wedge$ ,  $\vee$  sunt asociative:  
 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z (= x \wedge y \wedge z)$  și  
 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z (= x \vee y \vee z)$ ,  $\forall x, y, z \in A$
- au loc proprietățile de distributivitate ale operatorilor  $\wedge$  și  $\vee$ :  
 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  și  
 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ,  $\forall x, y, z \in A$
- are loc proprietatea de idempotență pentru ambele operații:  
 $x \wedge x = x$  și  $x \vee x = x$ ,  $\forall x \in A$
- au loc legile lui De Morgan:  
 $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  și  $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ ,  $\forall x, y \in A$
- au loc proprietățile de absorbție:  
 $x \wedge (x \vee y) = x$  și  $x \vee (x \wedge y) = x$ ,  $\forall x, y \in A$

# Observații

- Într-o algebră booleană are loc principiul dualității:  
„Pentru orice egalitate între două expresii booleene  $U = V$ , există o nouă egalitate  $U' = V'$ , obținută prin interschimbarea operațiilor  $\wedge$ ,  $\vee$  și a elementelor: 0, 1”.
- majoritatea axiomelor algebrei booleene, sunt perechi de axiome duale



# Algebra booleană binară

$$\mathbf{B} = (B_2 = \{0, 1\}, \wedge, \vee, \overline{\phantom{x}}, 0, 1)$$

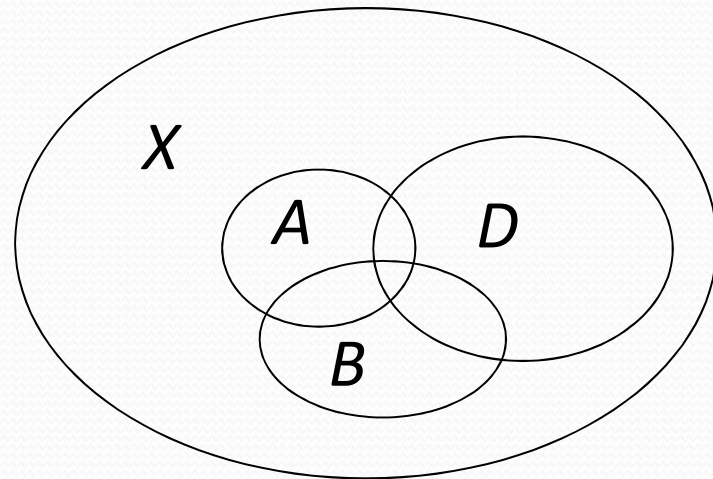
$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$x$	$\overline{x}$
0	1
1	0

# Alte exemple de algebre booleene

- $(F_P, \wedge, \vee, \neg, F, T)$
- $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, C, \emptyset, X)$





# Problemă practică



- Cine face tortul?



# Soluțiile posibile



$x,$

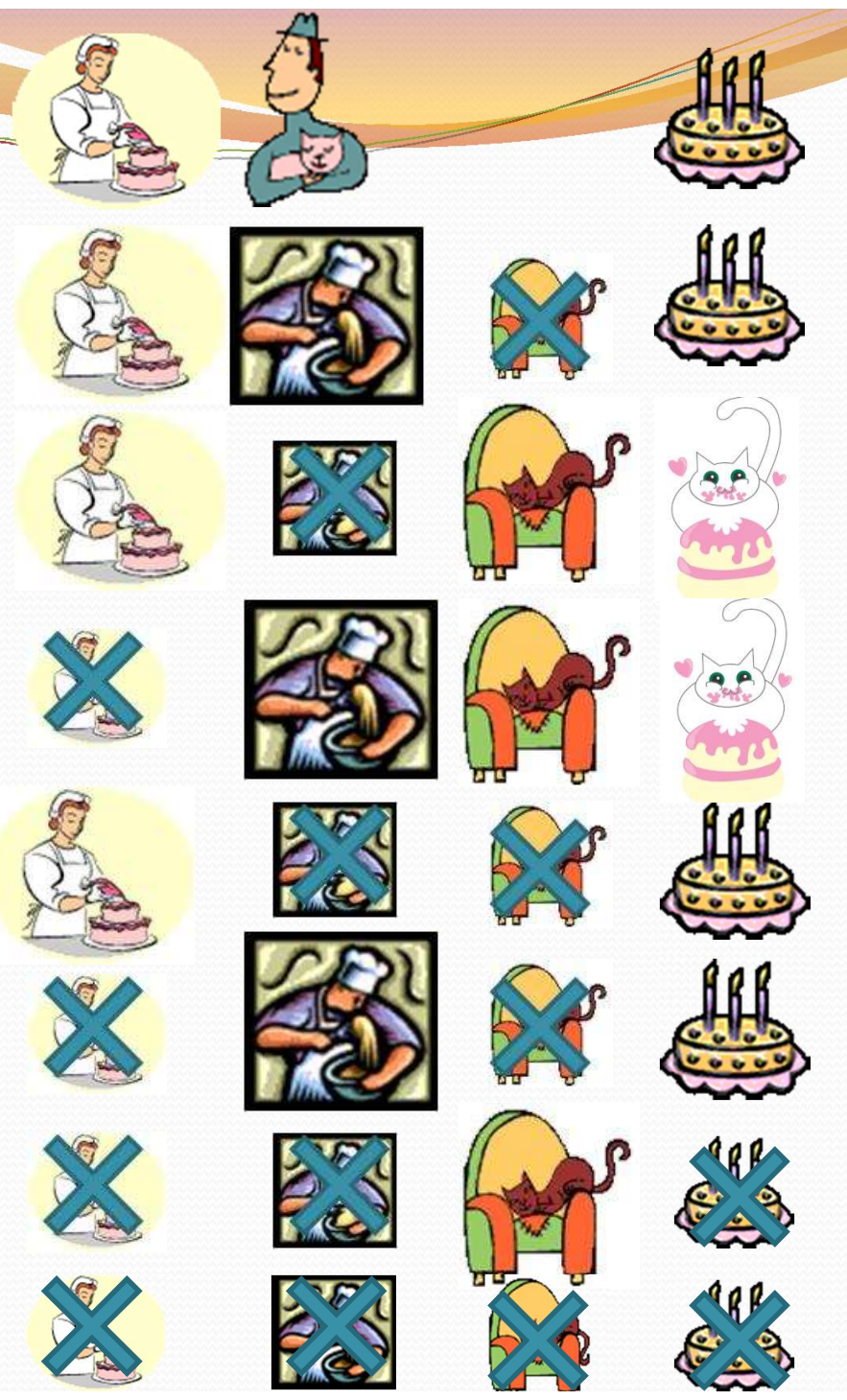


$y,$



$z$

$$f(x, y, z) = \text{cake}$$





# Funcții booleene

Fie  $\mathbf{B} = (B_2, \wedge, \vee, \overline{\phantom{x}}, 0, 1)$  algebra booleană binară,  $B_2 = \{0, 1\}$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ . O *funcție booleană de  $n$  variabile* este o funcție definită recursiv astfel:

1. Funcția *proiecție*:  $P_i : B_2^n \rightarrow B_2$ ,  $P_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$ , care păstrează doar variabila  $x_i$ , este o funcție booleană.

2. Dacă avem două funcții booleene  $f, g : B_2^n \rightarrow B_2$ , atunci  $f \wedge g, f \vee g, \overline{f}$  sunt funcții booleene, unde:

$$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \wedge g(x_1, \dots, x_n)$$

$$(f \vee g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \vee g(x_1, \dots, x_n)$$

$$\overline{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$$

- Orice funcție booleană este obținută prin aplicarea de un număr finit de ori a regulilor 1 și 2 de mai sus.



Toate funcțiile booleene definite pe  
 $B_2^n \rightarrow B_2$   
pentru  $n=1$

$x$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

# Teoreme

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , există  $2^{2^n}$  funcții booleene de  $n$  variabile.
- Mulțimea tuturor funcțiilor booleene de  $n \in \mathbb{N}^*$  variabile formează o algebră booleană:  $(\mathbf{FB}(n), \wedge, \vee, \overline{\phantom{x}}, f_0, f_{2^{2^n}-1})$ , unde  $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  și  $f_{2^{2^n}-1}(x_1, \dots, x_n) = 1$  funcțiile constante 0, respectiv 1.



# Notatii

- $x^\alpha = \begin{cases} x, \text{dacă } \alpha = 1 \\ \overline{x}, \text{dacă } \alpha = 0 \end{cases}, x \in \{0, 1\}$
- Pentru  $x, \alpha \in \{0, 1\}$ , au loc:  $x^0 = \overline{x}$ ,  $x^1 = x$  și
$$0^0 = \overline{0} = 1; 0^1 = 0;$$
$$1^0 = \overline{1} = 0; 1^1 = 1$$
- Astfel, se obține:  $x^\alpha = \begin{cases} 1, \text{dacă } x = \alpha \\ 0, \text{dacă } x \neq \alpha \end{cases}, x, \alpha \in \{0, 1\}$

# Formele canonice ale funcțiilor booleene (1)

O funcție booleană  $f: (B_2)^n \rightarrow B_2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  poate fi transformată în cele două forme echivalente:

- *forma canonică disjunctivă* (FCD):

$$(1) f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n})$$

- *forma canonică conjunctivă* (FCC):

$$(2) f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}})$$



# Formele canonice ale funcțiilor booleene (2)

O funcție booleană  $f: (B_2)^n \rightarrow B_2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  este unic determinată de valorile sale  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , unde  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n$ :

- forma canonică disjunctivă:

$$(1) \Leftrightarrow (1') f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n \text{ și } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1} (x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n})$$

- forma canonică conjunctivă:

$$(2) \Leftrightarrow (2') f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n \text{ și } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}})$$

# Observație

- Forma canonică *disjunctivă* este recomandată în caz contrar, când există un *număr mare de zerouri* ale funcției și un număr mic de valori 1.
- Forma canonică *conjunctivă* este utilă când există un număr mic de zerouri și un *număr mare de valori 1* (realizări).
- Funcția booleană  $f_0$  nu poate fi scrisă în forma canonică disjunctivă, deoarece nu ia valoarea 1 pentru niciun argument.
- Funcția booleană  $f_{2^{2^n}-1}$  nu poate fi scrisă în forma canonică conjunctivă, deoarece nu ia valoarea 0 pentru niciun argument.



# Definiție

Fie  $f: (B_2)^n \rightarrow B_2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  o funcție booleană cu  $n$  variabile.

- O conjuncție de variabile se numește **monom**.
- Un monom care conține toate cele  $n$  variabile se numește **monom canonic** sau **minterm** de  $n$  variabile. Are forma:

$$x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in B_2$$

- Disjuncția care conține toate cele  $n$  variabile, având forma:

$$x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in B_2 \text{ se numește } \mathbf{maxterm} \text{ de } n \text{ variabile.}$$

# Proprietăți

- $\forall n \in \mathbf{N}^*$ , există exact  $2^n$  maxtermi, notați cu  $M_0, M_1, \dots, M_{2^n - 1}$  și exact  $2^n$  mintermi, notați cu  $m_0, m_1, \dots, m_{2^n - 1}$ .
- Un *maxterm* este o funcție booleană care ia valoarea 0 doar pentru un argument.
- Un *minterm* este o funcție booleană care ia valoarea 1 doar pentru un argument.



# Observație

- Indicele unui minterm de  $n$  variabile este obținut prin conversia în zecimal a numărului binar format cu cifrele ce reprezintă puterile celor  $n$  variabile ale expresiei acestuia.
- Indicele unui maxterm de  $n$  variabile este obținut prin conversia în zecimal a numărului binar, format cu dualele cifrelor ce reprezintă puterile celor  $n$  variabile ale expresiei acestuia.

# Propoziție

- Conjuncția a doi mintermi distincți este 0:

$$m_i \wedge m_j = 0, \forall i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, 2^{n-1}$$

- Disjuncția a doi maxtermi distincți este 1:

$$M_i \vee M_j = 1, \forall i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, 2^{n-1}$$

- Un minterm și un maxterm cu același indice sunt funcții duale.

$$M_i = \overline{m_i}, \overline{M_i} = m_i, \forall i = 0, \dots, 2^{n-1}$$



# Observație

- Forma canonică conjunctivă, *FCC*, este conjuncția maxtermilor corespunzători argumentelor pentru care funcția ia valoarea 0.
- Forma canonică disjunctivă, *FCD*, este disjuncția mintermilor corespunzători argumentelor pentru care funcția ia valoarea 1.



# Soluțiile posibile




$x,$



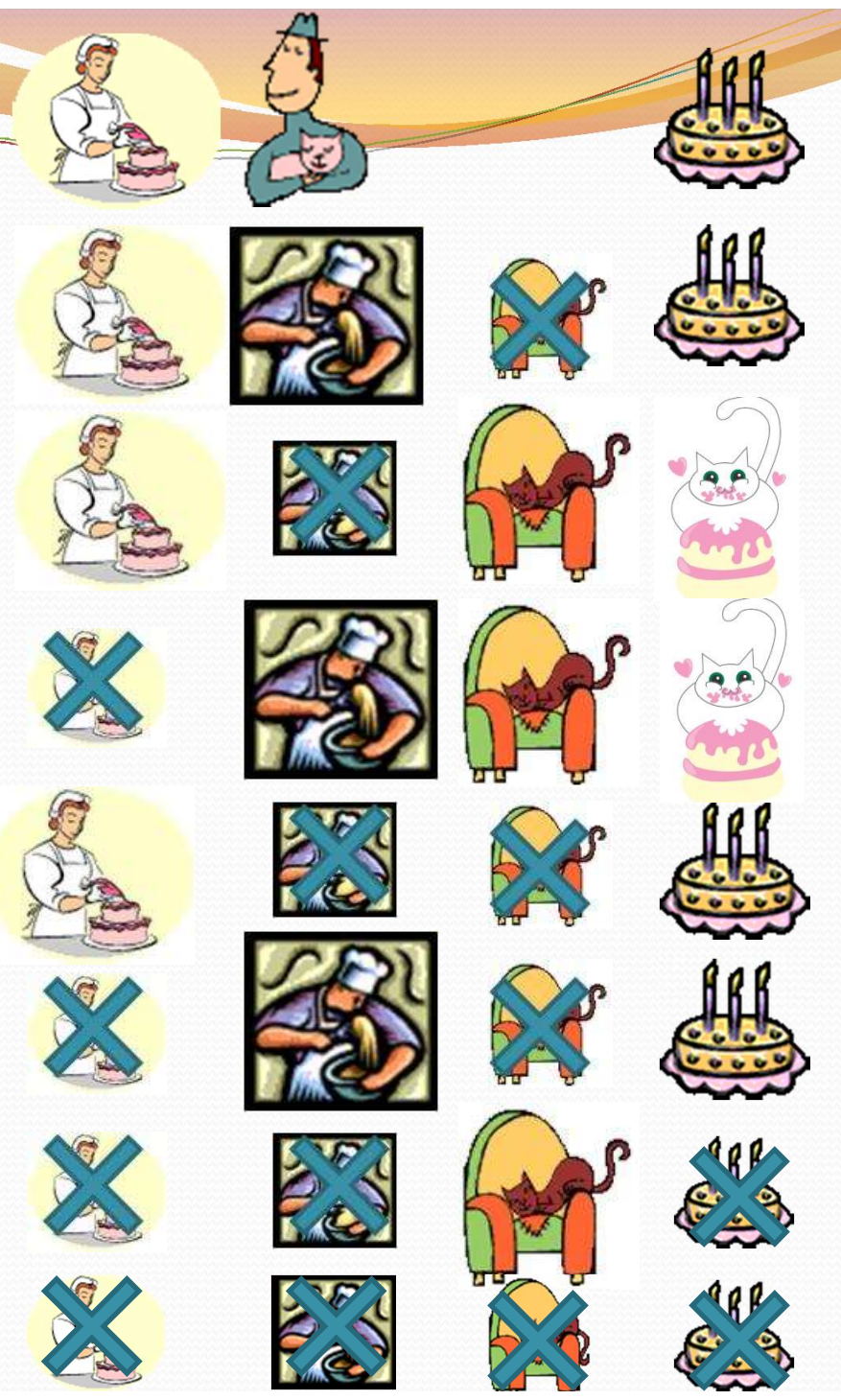
$y,$



$z$

$$f(x, y, z) =$$


- Putem să le „condensăm”?





# Suportul funcției

- *suportul* funcției booleene  $f$  

$$S_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \}$$



$(1, 1, 0) \in S_f$



$(1, 0, 1) \notin S_f$

# Relația mai mic sau egal

- Relația *mai mic sau egal*  $f \leq g \Leftrightarrow S_f \subseteq S_g$

$$m = x \wedge y \wedge \bar{z}$$

și

$$m' = x \wedge \bar{z}$$



$$S_m = \{(1, 1, 0)\} \subset S_{m'} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$m \leq m'$$



# Factorizarea

- *monoame adiacente (vecine)* dacă ele diferă doar prin puterea (semnul: negație sau nu) variabilei cu indicele „ $k_i$ ”:

$$m = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge x_{k_i} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge \dots \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

$$m' = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge \overline{x_{k_i}} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge \dots \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

- *factorizarea monoamelor  $m$  și  $m'$*  este operația prin care se obține, eliminând variabila cu indicele „ $k_i$ ”, monomul

$$m \vee m' = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge \dots \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

mai mare decât  $m$  și  $m'$ .

# Simplificarea

- A *simplifica* o funcție booleană, înseamnă a obține o formă echivalentă a sa cu un număr cât mai mic de apariții de variabile.
- Dacă se pornește de la  $FCD(f)$ , prin factorizări repetate, într-un număr finit de pași se poate obține o formă simplificată a funcției.



# Mulțimea monoamelor maximale

- Mulțimea  $M(f)$  se numește *mulțimea monoamelor maximale* ale funcției booleene  $f : B_2^n \rightarrow B_2$  dacă:

$$\forall m \in M(f), m \in FB(n), m \leq f;$$

$$\forall m \in M(f), \nexists m' \in FB(n), \text{ astfel încât } m < m' \leq f$$

# Mulțimea monoamelor centrale

- Mulțimea  $C(f)$  se numește *mulțimea monoamelor centrale* ale funcției booleene  $f : B_2^n \rightarrow B_2$  dacă:

$$\forall m \in C(f), m \in M(f)$$

$$\forall m \in C(f), \text{ nu are } \text{loc } m \leq \vee m', \text{ unde } m' \in M(f) - \{m\}$$



# Algoritmul de simplificare a funcțiilor booleene

**Date de intrare:**  $f$  – o funcție booleană în formă canonică disjunctivă

**Date de ieșire:**  $f'_1, f'_2, \dots, f'_k$  - variantele simplificate ale funcției  $f$

Se determină  $M(f)$  și  $C(f)$ .

**dacă**  $M(f) = C(f)$

**atunci**  $f'_1 = \bigvee_{m \in M(f)} m$  STOP1 // caz 1 --- soluție unică

**altfel**

**dacă**  $C(f) \neq \emptyset$  *not.*

**atunci**  $g = \bigvee_{m \in C(f)} m$

$f'_i = g \vee h_i, i = \overline{1, k}$ , unde  $h_i$  este disjuncția unui număr cât mai mic de monoame maximale astfel încât  $S_{h_i} = S_f - S_g$

STOP2 // caz 2 ---  $k$  soluții

**altfel** // nu există monoame centrale

$f'_i = h_i, i = \overline{1, k}$ , unde  $h_i$  este disjuncția unui număr cât mai mic de monoame maximale astfel încât  $S_{h_i} = S_f$

STOP3 // caz 3 ---  $k$  soluții

**sf\_dacă**

**sf\_dacă**

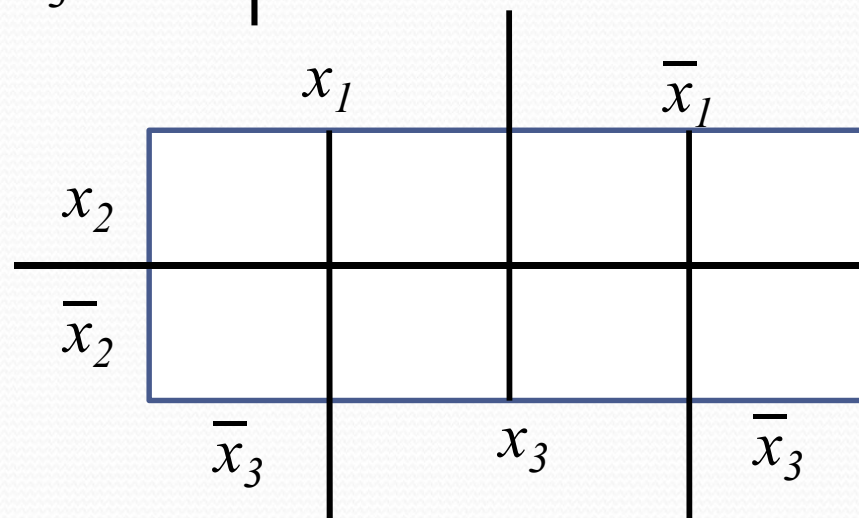
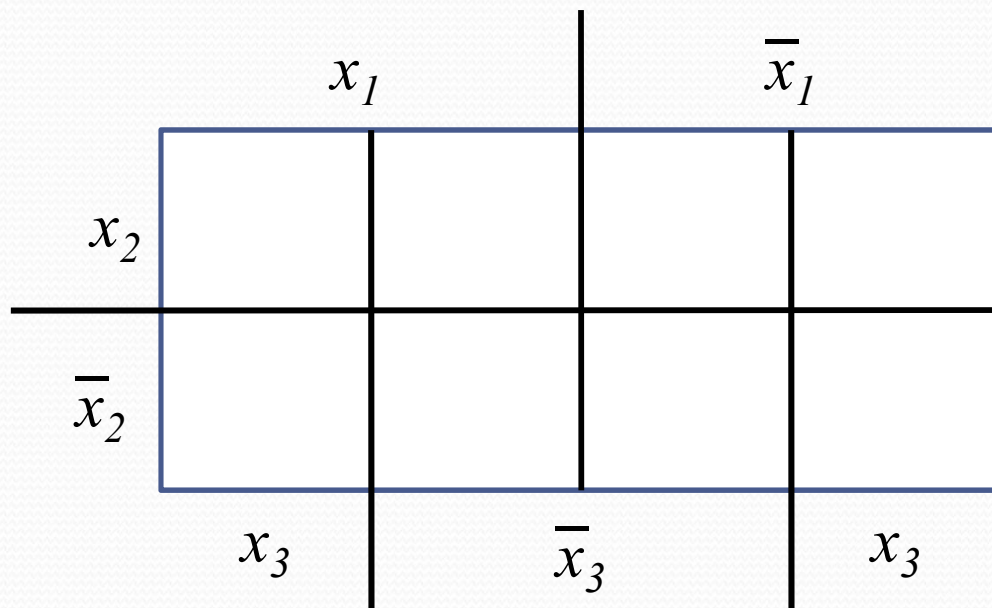
**Sf\_algoritm**

# Metoda diagramelor Veitch

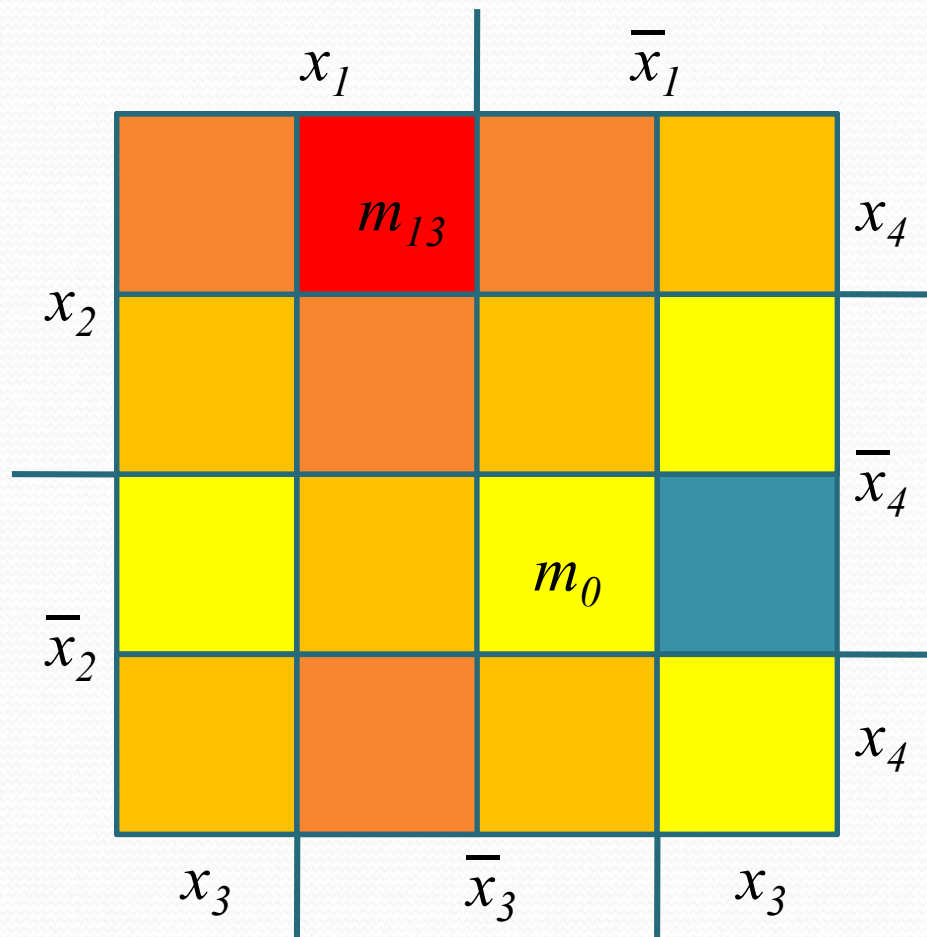
- Această metodă se bazează pe reprezentarea grafică, sub forma unei diagrame, a suportului funcției.
- Este foarte utilă pentru funcții cu un număr mic de variabile: 2, 3 sau 4.



# Construirea diagramei Veitch



# Completarea diagramei



$$m_{13} = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

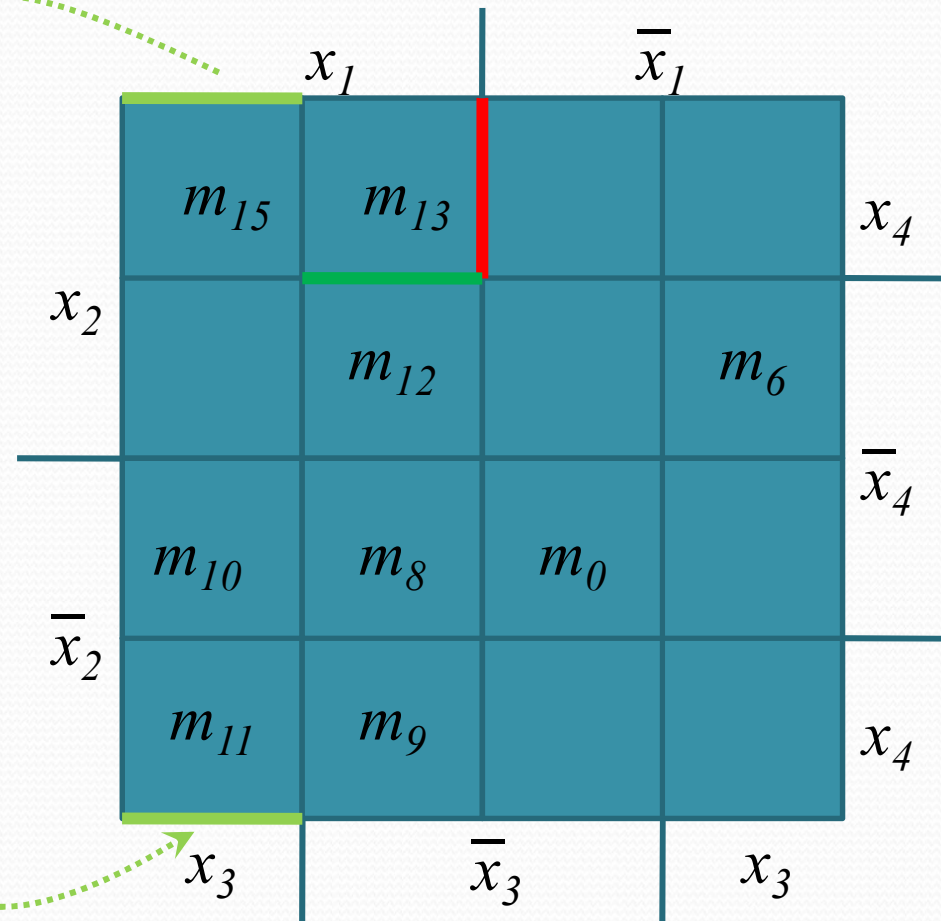


# Exercițiu

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \\
 & \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \\
 & \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \\
 & \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \\
 & \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \\
 & \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4
 \end{aligned}$$

		$x_1$	$\bar{x}_1$	
	$x_2$	$m_{15}$	$m_{13}$	$x_4$
			$m_{12}$	$m_6$
	$\bar{x}_2$	$m_{10}$	$m_8$	$m_0$
		$m_{11}$	$m_9$	
		$x_3$	$\bar{x}_3$	$x_3$

# Mintermi adiacenți





# Factorizarea (1)

Se grupează  $2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mintermi adiacenți,  $k$  – cât mai mare

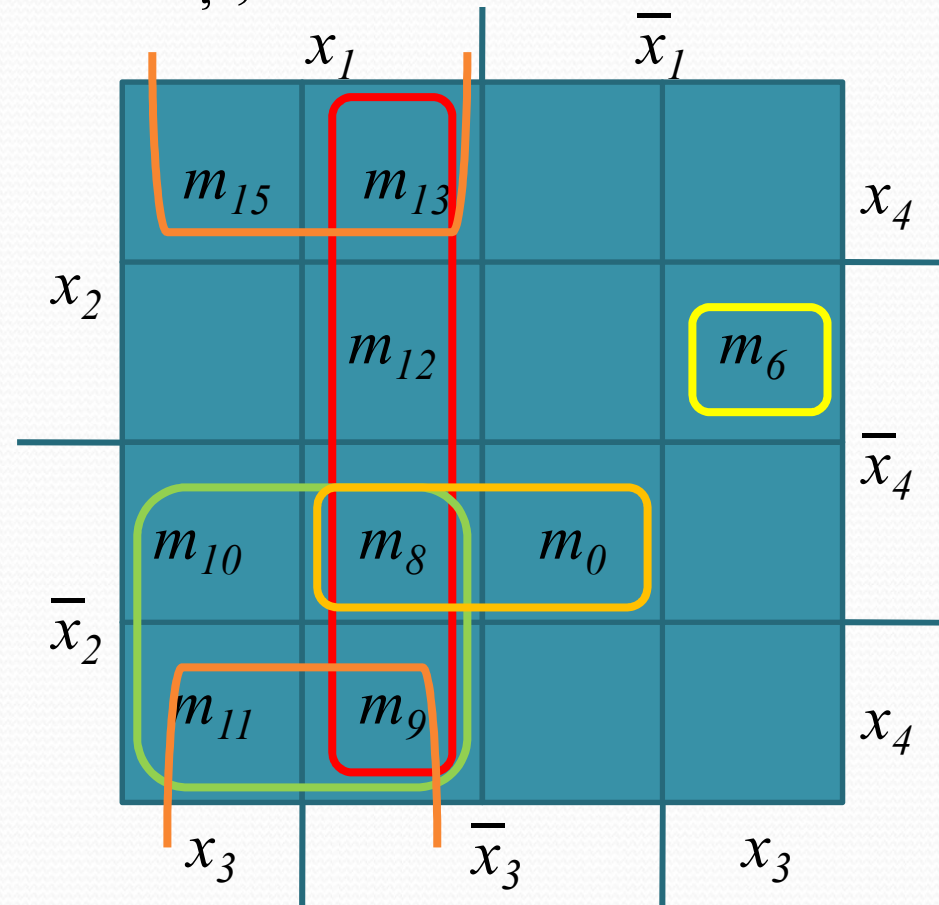
$$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9$$

$$max_2 = m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9$$

$$max_3 = m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13}$$

$$max_4 = m_8 \vee m_0$$

$$max_5 = m_6$$



# Factorizarea (2)

- se grupează  $2^k$ ,  $k \in \mathbf{N}$  mintermi adiacenți
- ! prima și ultima line, prima și ultima coloană sunt vecine!
- același minterm poate fi utilizat de mai multe ori
- ! se neglijează grupurile incluse!
- nu se lasă mintermi neîncercuiți



# Formulele monoamelor maximale

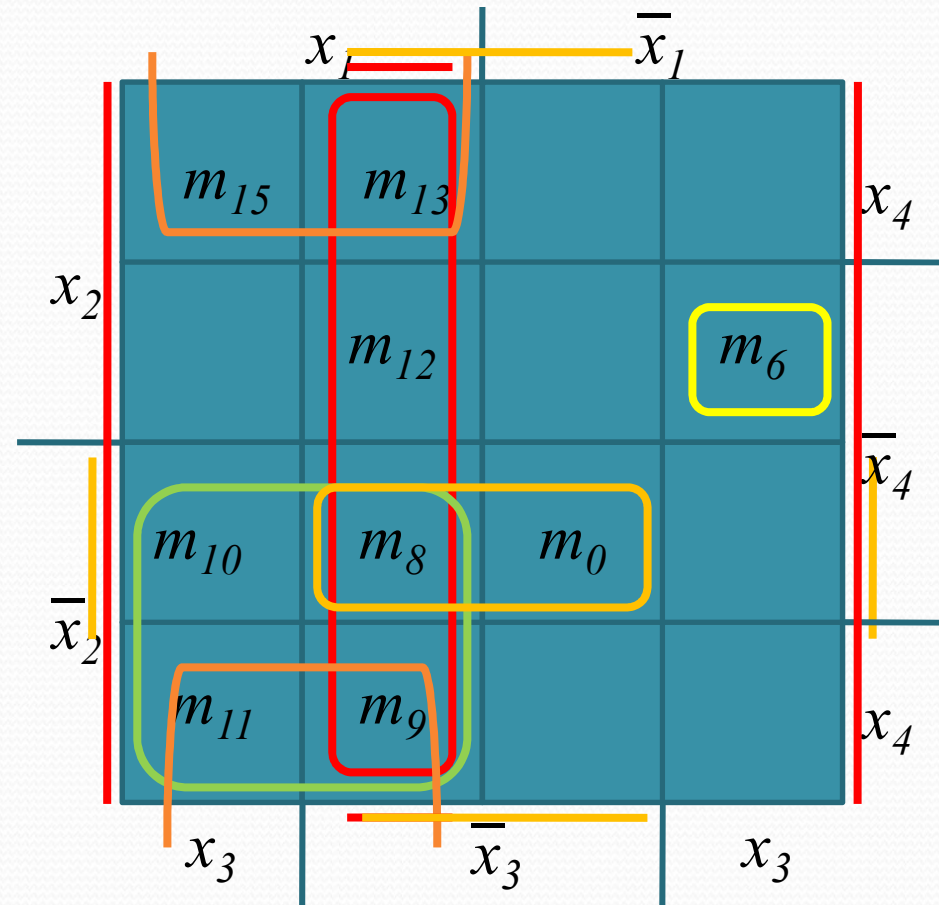
$$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9 = x_1 \bar{x}_3$$

$$\begin{aligned} max_2 &= m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9 \\ &= x_1 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} max_3 &= m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13} \\ &= x_1 x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} max_4 &= m_8 \vee m_0 \\ &= \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \end{aligned}$$

$$max_5 = m_6 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$$

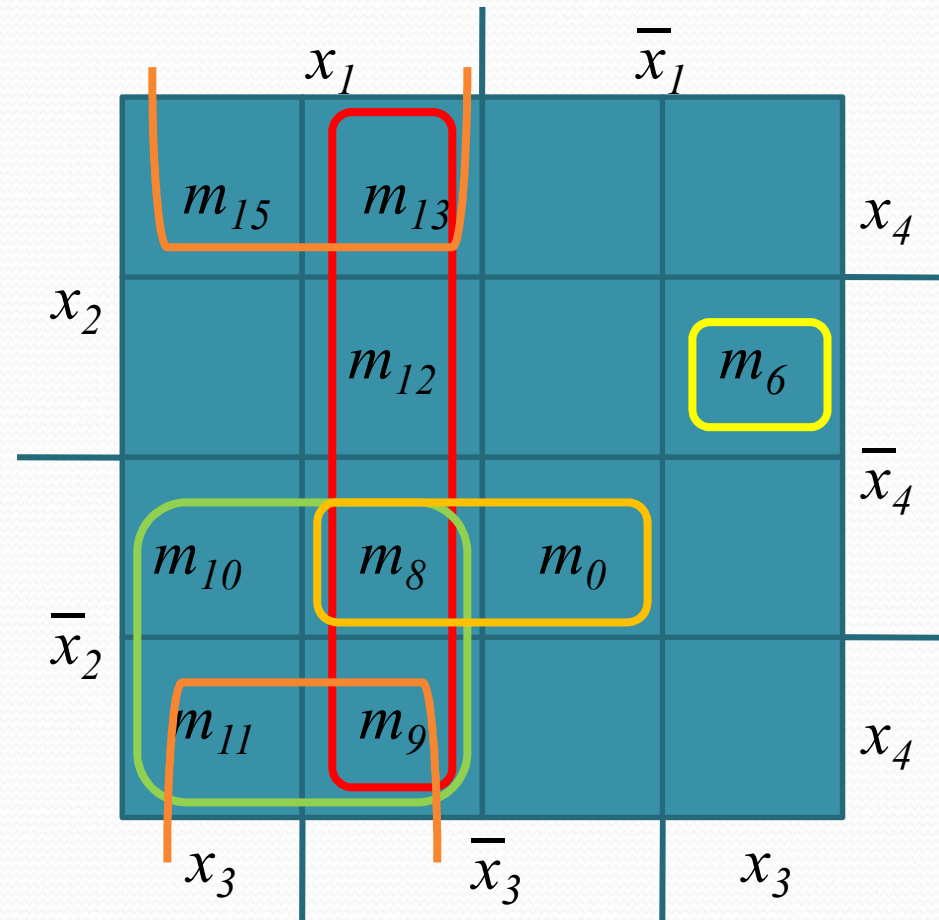


# Mulțimea monoamelor maximale și mulțimea monoamelor centrale

$$M(f) =$$

$$\{max_1, max_2, max_3, max_4, max_5\}$$

$$M(f) = C(f)$$





# Forma simplificată a funcției

- Cazul I al algoritmului de simplificare
- O singură formă simplificată a funcției:

$$f^s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$$

# Construirea diagramei Karnaugh

$x_2 x_3$		00	01	11	10
$x_1$	0				
	1				

- ! O singură cifră **distinctă**!