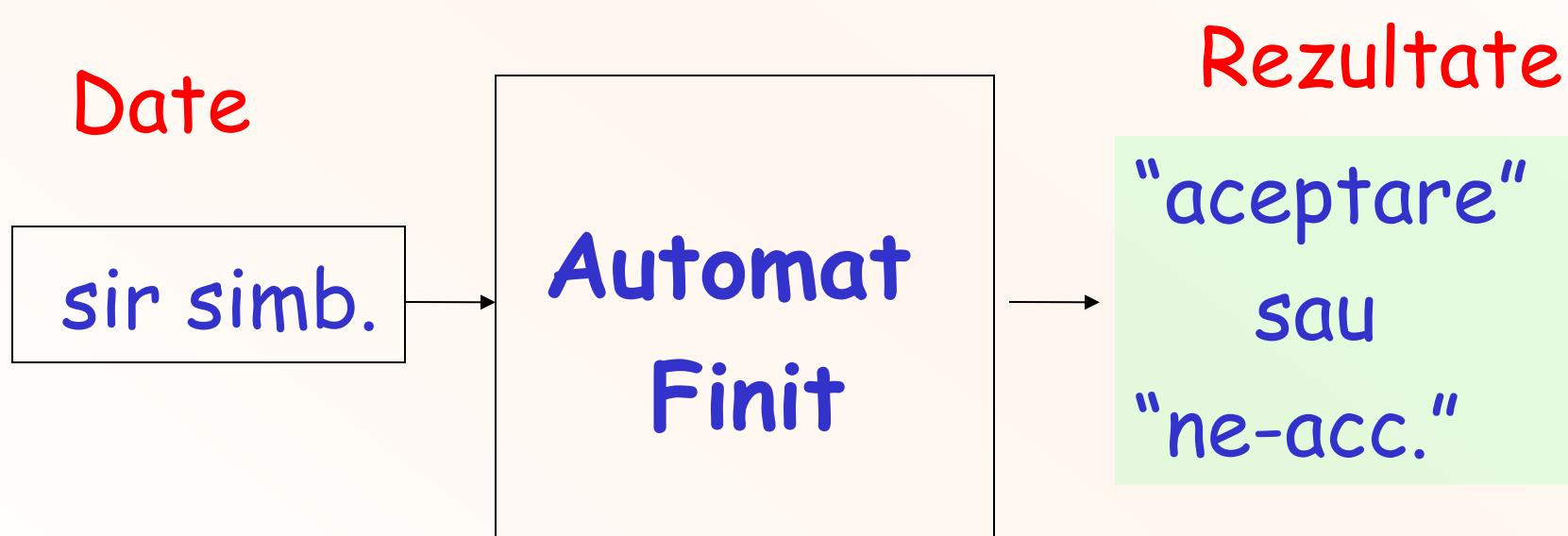


Automat finit (AF)



Automat finit: model fizic

banda de intrare



cap
citire



directie de deplasare



stari

Automat finit: model matematic

- Un *automat finit* este un ansamblu
 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:
- Q – alfabetul starilor
- Σ – alfabet de intrare
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ functie de tranzitie
- $q_0 \in Q$ - stare initială
- $F \subseteq Q$ multimea stărilor finale

AF – reprezentare tabelara

δ		a_j		

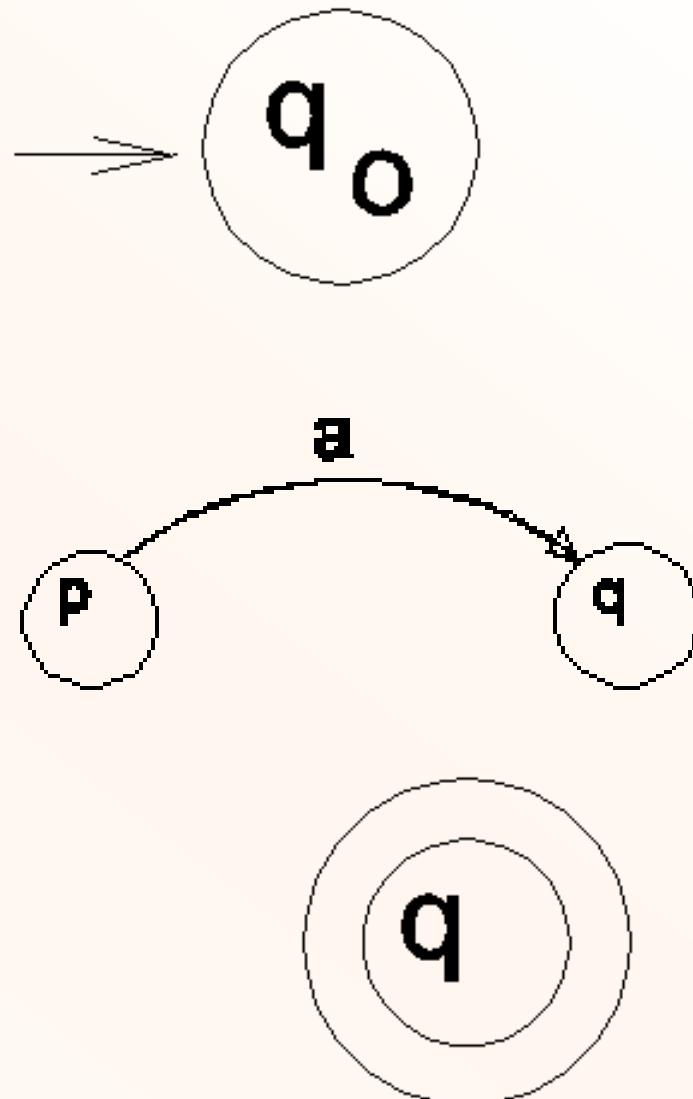
$z_i = \begin{cases} 0 & \text{daca } q_i \text{ nu e stare finala} \\ 1 & \text{daca } q_i \text{ este stare finala} \end{cases}$

AF reprezentat tabelar; exemplu

δ	0	1	
p	q	p	0
q	r	p	0
r	r	r	1

AF – reprezentare sub forma de graf

- graf orientat
- cu noduri si arce etichetate
- (graf de tranzitii)



Configuratii si relatii de tranzitie

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

configuratie: $(q, x) \in Q \times \Sigma^*$

tranzitie: element din $(Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$

- \vdash tranzitie directa $(p, aw) \vdash (q, w) \Leftrightarrow \delta(p, a) \ni q;$
 $p, q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$
- \vdash^k k-tranzitie
- \vdash^+ +-tranzitie
- \vdash^* *-tranzitie

Limbaj acceptat; autom. echivalente

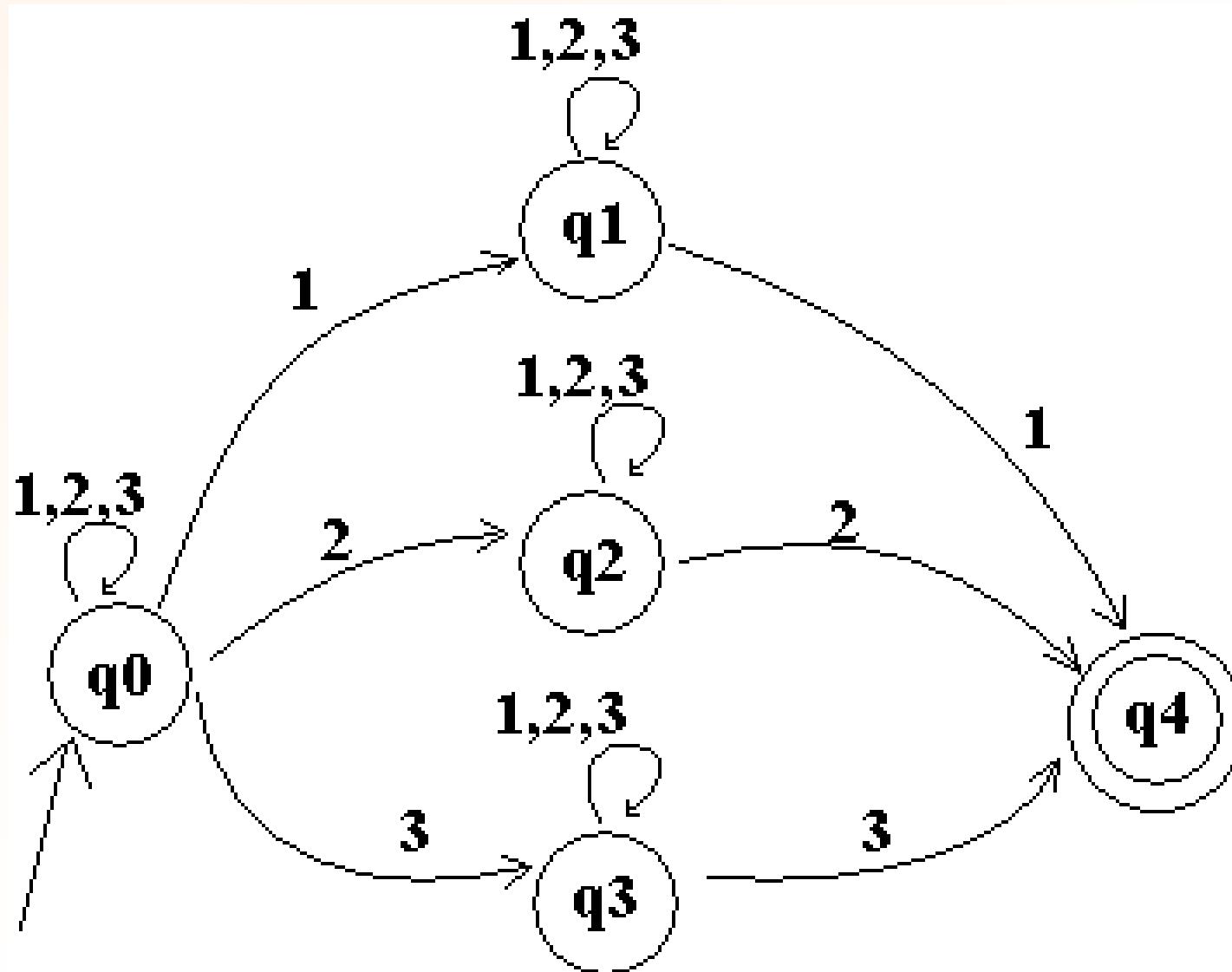
- Limbaj acceptat de automat

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, (q_0, w) \xrightarrow{*} (q_f, \epsilon), q_f \in F\}$$

- Automate echivalente

M_1 echivalent cu M_2 daca: $L(M_1) = L(M_2)$

Automat finit - exemplu



Determinism

- Automat finit determinist (AFD)
 $|\delta(q,a)| \leq 1 \quad \forall q \in Q, a \in \Sigma$
- Automat finit nedeterminist (AFN)
 $\exists q \in Q, a \in \Sigma \text{ astfel incat } |\delta(q,a)| > 1$
- Automat finit determinist complet definit
 $|\delta(q,a)| = 1 \quad \forall q \in Q, a \in \Sigma$

Echivalenta dintre AFD si AFN

Teorema:

- $\forall M_1 - \text{AFN} \quad \exists M_2 - \text{AFD} \text{ echivalent}$

Constructie (nu demonstratie!):

- Pornim cu: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ – AFN oarecare
- Construim: $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$ – AFD
pe baza lui M_1
a.i. $L(M_1) = L(M_2)$

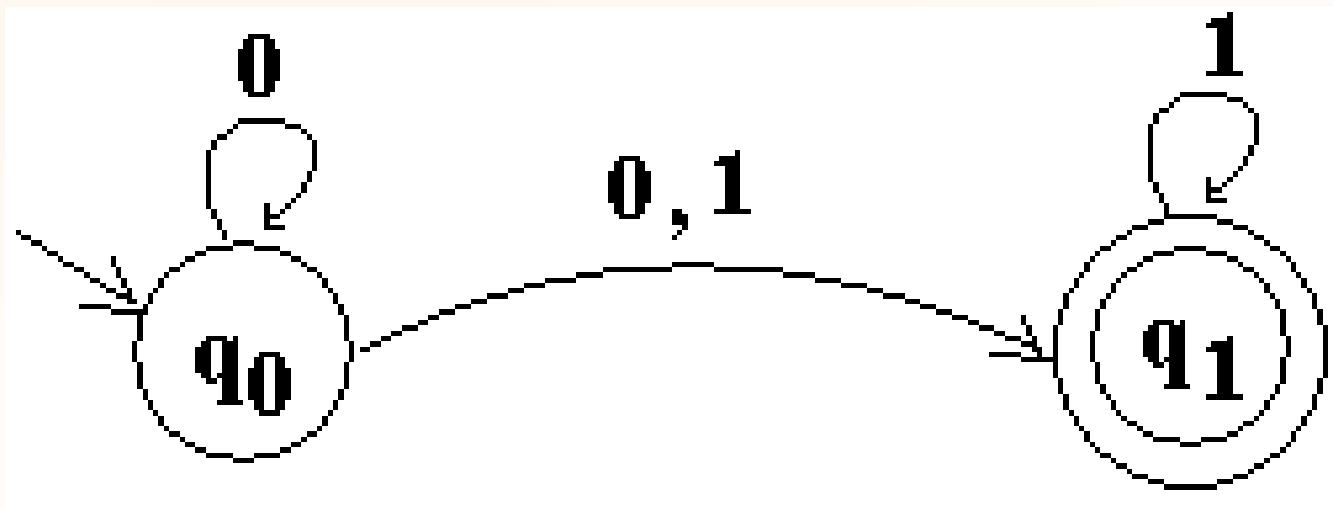
Teor: $\forall M_1 - \text{AFN} \quad \exists M_2 - \text{AFD}$ echivalent

- $\Sigma_2 = \Sigma_1$
- $Q_2 = \mathcal{P}(Q_1)$
- $q_{02} = \{q_{01}\}$
- $F_2 = \{S \in \mathcal{P}(Q_1) \mid S \cap F_1 \neq \emptyset\}$
- $\delta_2(q, a) = \{r \in Q_1 \mid \exists q_1 \in q \text{ a.i. } r \in \delta_1(q_1, a)\}$

$$= \bigcup_{q_1 \in q} \delta(q_1, a)$$

M_2 – determinist (?)

Problema: determinati AFD echiv. pt.



AF – stari care nu contribuie la acceptarea unui cuvant

- stare neproductiva – (nu e stare productiva)
- stare inaccesibila – (nu e stare accesibila)
- stare productiva: $q \in Q$ a.i.
 $\exists w \in \Sigma^* \text{ si } q_f \in F \text{ a.i. } (q, w) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$
- stare accesibila: $q \in Q$ a.i.
 $\exists w \in \Sigma^* \text{ a.i. } (q_0, w) \vdash^*(q, \varepsilon)$

Algoritm determin. starii accesibile

1. $i := 0$

$A_0 := \{q_0\}$

2. **Repeta**

$i := i + 1$

$A_{i+1} := A_i \cup \{ q \in Q \mid \exists p \in A_i, \exists a \in \Sigma \text{ a.i. } q \in \delta(p, a) \}$

pană cand $A_i = A_{i+1}$

$\{A_i - multimea starilor accesibile\}$

Algoritm determin. starii productive

1. $i := 0$

$A_0 := F$

2. Repeta

$i := i + 1$

$A_{i+1} = A_i \cup \{ q \in Q \mid \exists p \in A_i, \exists a \in \Sigma \text{ a.i. } p \in \delta(q, a) \}$

pană cand $A_i = A_{i+1}$

$\{A_i - multimea starilor productive\}$

Teorema:

$\forall M_1 - AF$ există $M_2 - AF$ fără st. neproductive **echiv.**

Constructie (nu demonstratie!):

- Pornim cu: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ – AF oarecare
- determinam A – multimea starilor productive (algoritmul anterior)
- Construim: M_2 pe baza lui M_1 (a.i. $L(M_1) = L(M_2)$)

$$M_2 = (A, \Sigma_1, \delta_{1/A}, q_{01}, F_1)$$
$$L(M_1) = L(M_2) !$$

Teorema:

$\forall M_1 - AF$ există $M_2 - AF$ fără st. inaccesibile echiv.

Constructie (nu demonstratie!):

- ... analog ...

? alta metoda de determinare a AFD echivalent pentru un AFN dat

- $M_1 \Rightarrow ? M_2$

Idea:

1. $\{q_{01}\} \in Q_2$
pornim cu $Q_2 = \{q_{01}\}$
2. adaugam la Q_2 toate submultimile lui Q_1 la care se poate ajunge prin functia de tranzitie, atunci cand se aplica unei stari $q \in Q_2$ deja adaugata

AFD complet definit

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (AFD)

- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ functie de tranzitie ; $|\delta(q,a)| \leq 1$
- ...

Teor: \forall AFD \exists AFD complet definit echivalent

Constructie:

AFD \Rightarrow AFD complet definit:

- adaugam o stare (neproductiva) r si extindem δ astfel:
- $\forall (q,a) \in Q \times \Sigma$ a.i. $\delta(q,a) = \emptyset$ devine: $\delta(q,a) = \{r\}$
- $\forall a \in \Sigma$ $\delta(r,a) = \{r\}$

Minimizarea automatelor finite

Ce vrem:

Automat deterministic cu numar minim de stari !

Automat redus

- AFD
- nu contine stari inaccesibile si neproductive
- nu contine perechi de stari echivalente

Minimizarea AFD

- automat cu numar minim de stari
 - fara stari –inaccesibile, neproductive
 - mai putine stari ?
- ideea: relatie de echivalenta; clase de echivalenta
- stari diferențiate
- stari k diferențiate
- stari echivalente
- stari k-echivalente

Automatul redus

Fie M_1 – un automat finit oarecare

- Determinam AFD echivalent
- Eliminam starile inaccesibile si neproductive
- Determinam AFD echivalent complet definit

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatul rezultat.

- Determinam relatia \equiv (stari echivalente, clase de echivalenta)
- Pe baza relatiei \equiv determinam automatul:

$$M_{\equiv} = (Q/\equiv, \Sigma, \delta_{\equiv}, [q_0], F_{\equiv})$$

Q/\equiv - multimea claselor de echivalenta

$$\delta_{\equiv}([q], a) = [\delta(q, a)]$$

$$F_{\equiv} = \{ [q] \mid q \in F \}$$

Automat redus

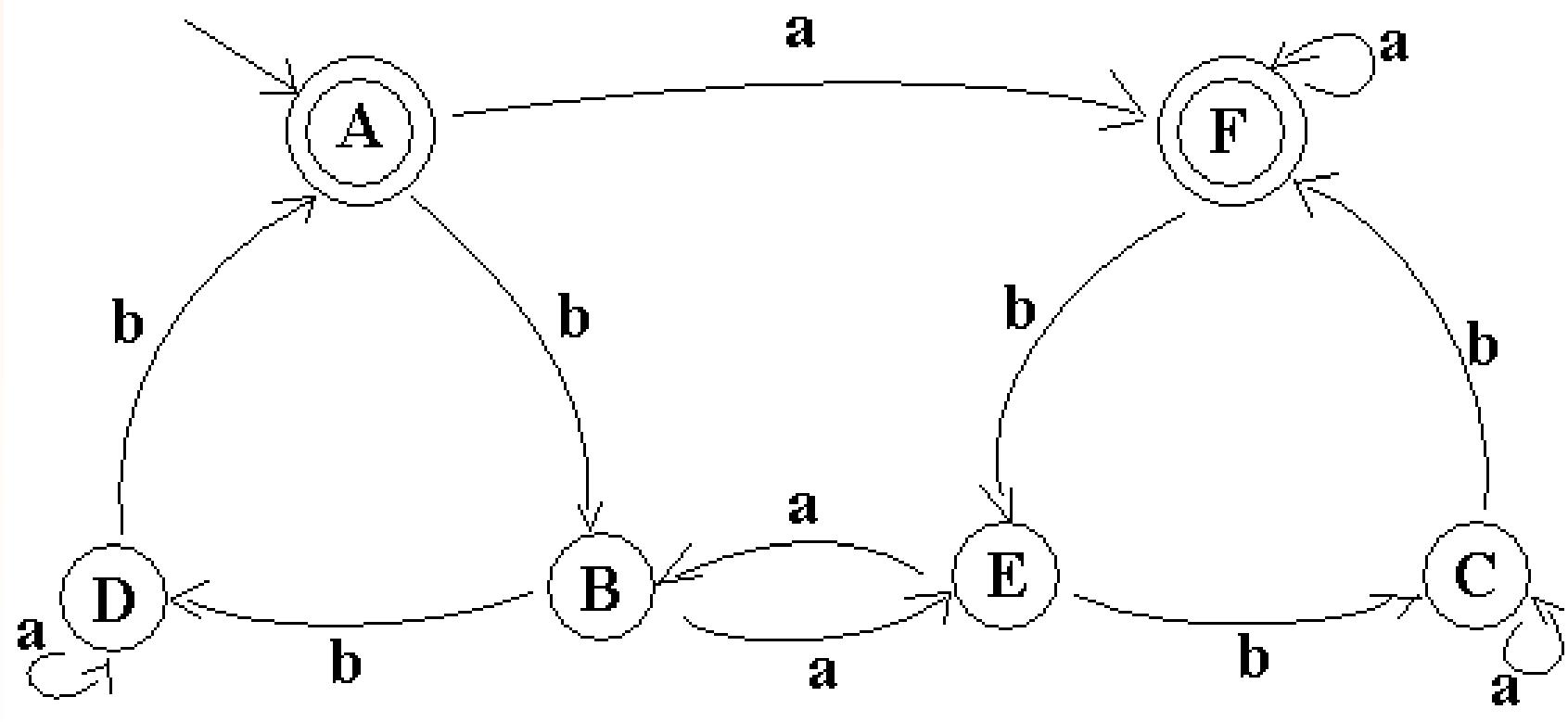
- **Teorema**

Automatul redus are numar minim de stari
dintre toate AFD echivalente

- **Teorema**

$\forall M_1 - AF \exists M_2 - \text{automat redus echivalent}$

Determinati clasele de echivalenta ale starilor automatului de mai jos



determinati automatul redus !

Stari diferențiate

- o alta exprimare

q_1, q_2 sunt *stari diferențiate* de $x \in \Sigma^*$

daca $\exists q_f \in F$ a.i. $(q_1, x) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$

si nu există nici un $q \in F$ a.i. $(q_2, x) \vdash^*(q, \varepsilon)$

sau

daca $\exists q_f \in F$ a.i. $(q_2, x) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$

si nu există nici un $q \in F$ a.i. $(q_1, x) \vdash^*(q, \varepsilon)$

- x (de mai sus) *diferențiază* pe q_1 și q_2

Stari diferențiate

- o alta exprimare

PP. AFD complet definit

q_1, q_2 sunt *stari diferențiate* de $x \in \Sigma^*$

daca $\exists r_1, r_2$ astfel incat: $(q_1, x) \vdash^*(r_1, \varepsilon)$

si $(q_2, x) \vdash^*(r_2, \varepsilon)$

are loc una dintre:

1. $r_1 \in F$ si $r_2 \in Q-F$
2. $r_1 \in Q-F$ si $r_2 \in F$

Relatii intre stari

- q_1, q_2 - stari diferențiate
 - cf. def. de mai sus
 - ($\exists x \in \Sigma^*$ care să le diferențieze)
- stari k diferențiate
 - dacă $\exists x \in \Sigma^*, |x| \leq k$ care să le diferențieze
- stari echivalente (\equiv)
 - dacă nu există $x \in \Sigma^*$ care să le diferențieze
- stari k -echivalente (\equiv^k)
 - dacă nu există $x \in \Sigma^*, |x| \leq k$, care să le diferențieze

Proprietati ale rel. de k-echivalenta (\equiv^k)

- $q_1 \equiv^0 q_2$ dacă ($q_1, q_2 \in F$) sau ($q_1, q_2 \in Q - F$)
- $\equiv^0 \supseteq \equiv^1 \supseteq \equiv^2 \supseteq \dots \supseteq \equiv^n \supseteq \dots$
- Dacă $(\equiv^k) = (\equiv^{k+1})$ atunci $(\equiv^k) = \equiv$

Lema:

Pt. orice M există $n \in \mathbf{N}$ a.i. $q_1 \equiv^n q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$

- ideea: pot avea un nr. finit de relații distincte (max. $|Q|$)

Proprietati ale limbajelor independente de context



Lema de pompare pentru limbaje independente de context

Fie L un limbaj independent de context. Există atunci o constantă p dependentă numai de L astfel că dacă $z \in L$ și $|z| \geq p$, atunci avem descompunerea $z = uvwxy$ cu proprietătile:

- a) $|vx| \geq 1$,
- b) $|vwx| \leq p$,
- c) $uv^iwx^i y \in L \quad \forall i \in \mathbb{N}$

?

$S \rightarrow 0A1$
 $A \rightarrow 0S$
 $A \rightarrow a$

Lema de pompare pentru limbaje independente de context

- *definitia formală:*

$$\begin{aligned} \forall L \in GIC \quad \exists p \in \mathbf{N}^* \quad \forall z \in L \quad |z| \geq p \\ \rightarrow \\ (\exists u, v, w, x, y \quad z = uvwxy \\ \quad \wedge \quad |vwx| \leq p \quad \wedge \quad |vx| \geq 1 \\ \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbf{N} : uv^n w x^n y \in L)) \\) \end{aligned}$$

Proprietăți de închidere ale limbajelor independente de context

Teorema.

Dacă L_1 și L_2 sunt limbaje independente de context atunci:

$$L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L_1^*$$

sunt limbaje independente de context.

Observatie:

$L_1 \cap L_2$, $\text{compl}(L_1)$ - nu sunt neapărat l.i.c.

Exercitii

Pentru urmatoarele limbaje, scrieti cate o gramatica independenta de context care le genereaza:

$$L_1 = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$L_2 = \{ c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$L_3 = \{ a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N} \}$$

$$L_4 = \{ a^n b^m c^m \mid m, n \in \mathbb{N} \}$$

$$L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L_1^*$$

Gramatici independente de context (GIC) (CFG – context free grammars)

derivari, arbori de derivare,
tipuri de gramatici independente de context,
gramatici echivalente - constructii

Ne reamintim: Gramatica

O gramatica este un cvadruplu $\mathbf{G} = (\mathbf{N}, \Sigma, P, S)$

- \mathbf{N} este un alfabet de simboluri **neterminale**
- Σ este un alfabet de simboluri **terminale**
- $\mathbf{N} \cap \Sigma = \emptyset$
- $P \subseteq (\mathbf{N} \cup \Sigma)^* \mathbf{N} (\mathbf{N} \cup \Sigma)^* \times (\mathbf{N} \cup \Sigma)^*$
 - \mathbf{P} multime finită (multimea regulilor de productie)
 - $S \in \mathbf{N}$ (simbolul de start - simbolul initial)

Notatie:

$(\alpha, \beta) \in P$ se noteaza: $\alpha \rightarrow \beta$
(α se înlocuieste cu β)

Ne reamintim: clasificarea Chomsky

- Gramatici de tip 0:
nici o restrictie (*suplimentara*) referitoare la forma regulilor de productie
- Gramaticile de tip 1
(gramatici monotone)
 - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P: |\alpha| \leq |\beta|$
 - caz special: $S \rightarrow \epsilon$ poate $\in P$. In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

• Gramatici independente de context:

reg. productie sunt de forma $A \rightarrow \alpha$, $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
(gramatici de tip 2)

- Gramaticile de tip 3:
reg. prod. sunt de forma
 - $A \rightarrow aB$
 - $A \rightarrow b$unde $A, B \in N$ si $a, b \in \Sigma$
caz special: $S \rightarrow \epsilon$ poate $\in P$. In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

derivari de stanga/ dreapta

- *derivare de stânga* \Rightarrow_{st}
o derivare directă în care se înlocuiește cel mai din stânga neterminál
 - *derivare de dreapta* \Rightarrow_{dr}
o derivare directă în care se înlocuiește cel mai din dreapta neterminál

Analiza sintactica

- *analiză sintactică* pt. cuvantul w
succesiunea de derivări directe:
 - $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_n = w$
altfel spus: reprezintă o derivare pentru cuvântul w
- *analiză sintactică descendentală*
dacă această succesiune de derivări directe se obtine pornind de la S și terminând cu w
- *analiză sintactică ascendentă*
dacă această succesiune de derivări directe se obtine pornind de la w și terminând cu S

Arbore de derivare

- Fie $G = (N, \Sigma, P, S)$ o gramatică independentă de context. Numim *arbore de derivare* sau *arbore de analiză sintactică* un arbore cu radacina, ordonat, cu urmatoarele proprietati:
 1. Orice nod interior - o eticheta din N ;
 2. Orice nod frunza - o *etichetă* din $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$
 3. Eticheta rădăcinii este S ;
 4. Dacă un nod are eticheta A iar nodurile succesoare acestuia, în ordine de la stânga la dreapta sunt etichetate cu X_1, X_2, \dots, X_n atunci $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_n$ trebuie să fie o producție din P .

Arbore de derivare

- **frontiera (frontul)**: nodurile terminale, în ordine de la stânga la dreapta
- etichetele lor formează o secvență peste Σ^*
- obs: denumirea de frontiera (front) se folosește și pentru a denumi succesiunea etichetelor nodurilor terminale

Teoremă.

Fie $G = (N, \Sigma, P, S)$ o gramatică independentă de context. Un cuvânt w peste alfabetul Σ , deci din Σ^* , aparține limbajului generat de G , adică $w \in L(G)$, dacă și numai dacă w este frontul unui arbore de analiză sintactică.

Gramatica ambigua

O gramatică $\mathbf{G} = (\mathbf{N}, \Sigma, P, S)$ independentă de context este *ambiguă*

dacă și numai dacă există cel puțin un cuvânt w care admite doi arbori de derivare distincti; în caz contrar gramatica este *neambiguă*.

- $\Leftrightarrow \exists 2$ analize sintactice care folosesc numai derivari de stanga, diferite
- $\Leftrightarrow \exists 2$ analize sintactice care folosesc numai derivari de dreapta, diferite

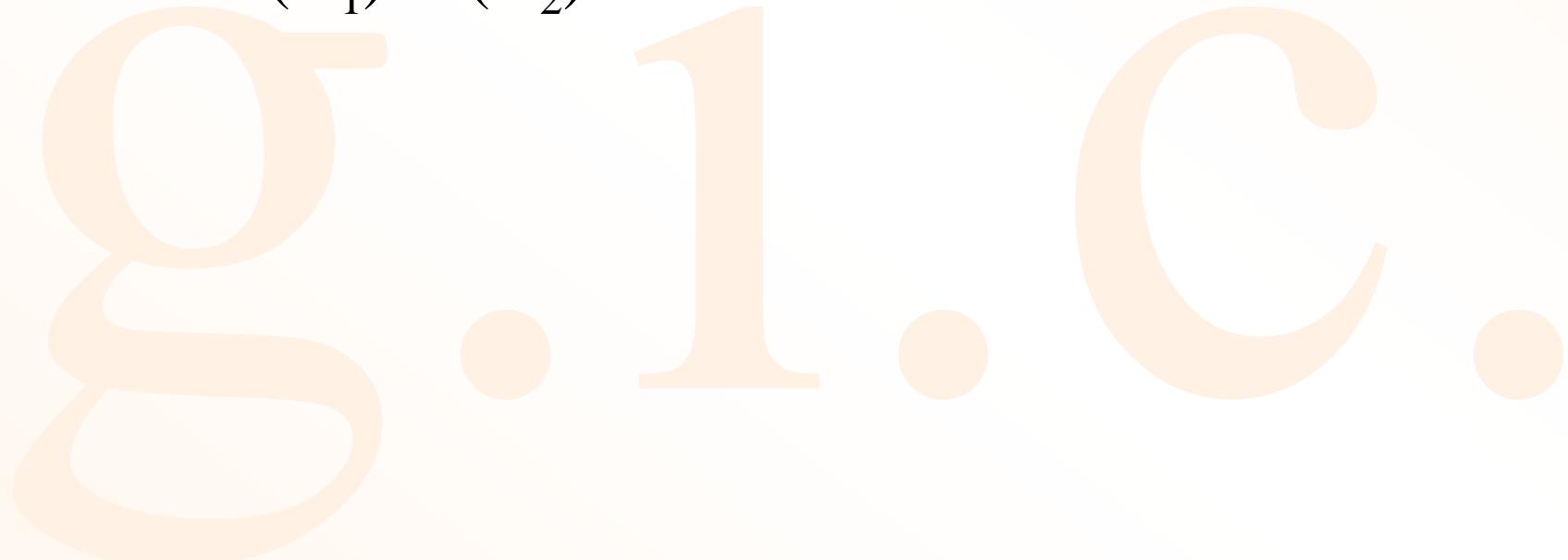
Descrieri echivalente. Forme normale

Ne reamintim :

O gramatica G_1

este echivalenta cu gramatica G_2

daca $L(G_1) = L(G_2)$



ϵ -productii si gram. ϵ -independente

- **ϵ -productie** : o productie de forma $A \rightarrow \epsilon$
- Gramatica $G = (N, \Sigma, P, S)$ este **ϵ -independentă** daca:
 - a) dacă $\epsilon \notin L(G)$ atunci G nu are ϵ -productii
 - b) dacă $\epsilon \in L(G)$ atunci avem o singură productie $S \rightarrow \epsilon$ iar celelalte productii nu-l contin în membrul drept pe S
- Teorema
$$\forall G = (N, \Sigma, P, S)$$
$$\exists G' = (N', \Sigma', P', S)$$
 echivalentă, ϵ -independentă

Redenumiri. Cicluri.

- *redenumire*: reg.prod. de forma $A \rightarrow B$
- *Gramatica fără redenumiri*: fara r.p. de redenumire

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără redenumiri

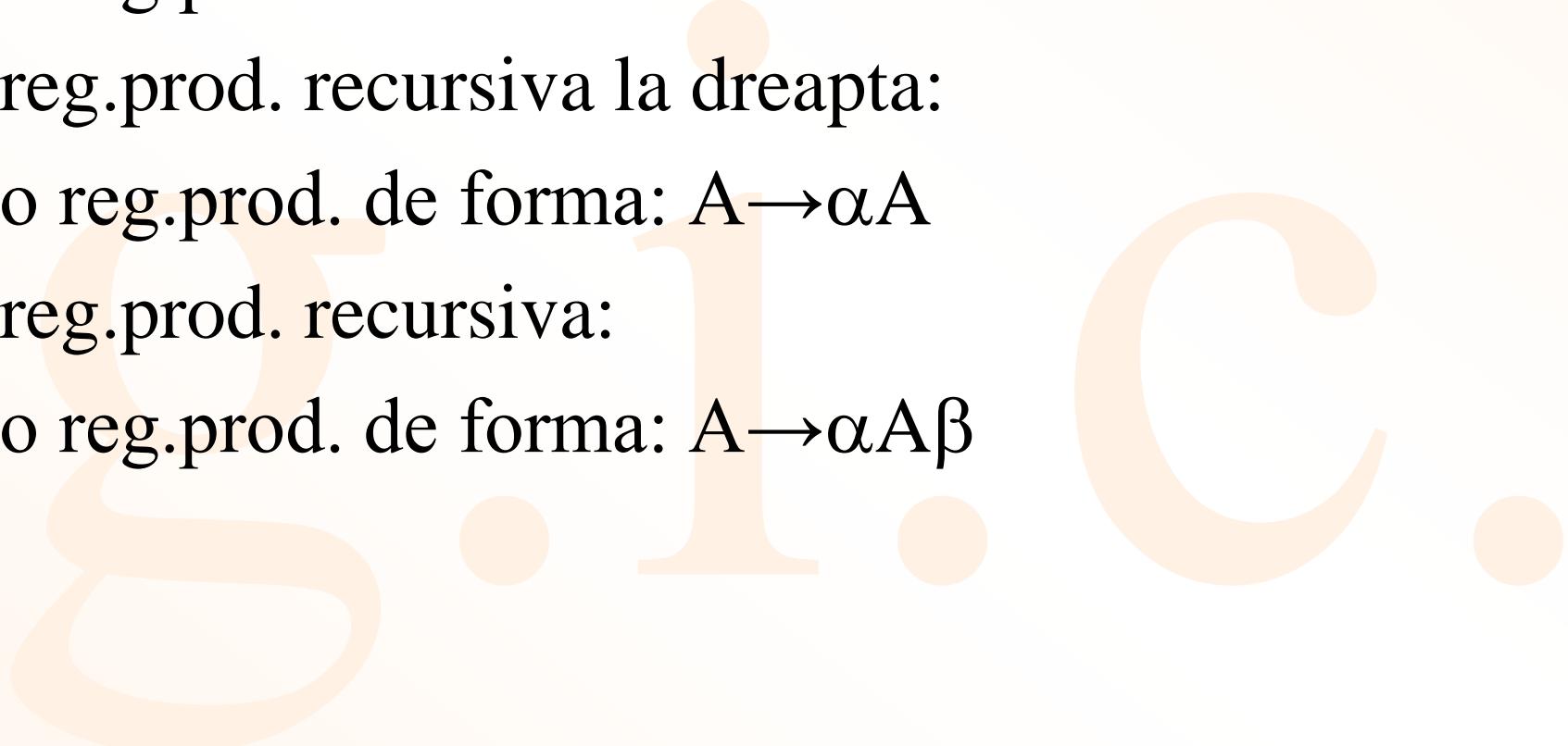
- *ciclu*: o * derivare de forma $A \Rightarrow^* B$
- *Gramatica fără cicluri*: nu se pot obtine cicluri (la derivare)

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără cicluri

Recursivitate

- reg.prod. recursiva la stanga:
 - reg.prod. de forma: $A \rightarrow A\alpha$
- reg.prod. recursiva la dreapta:
 - reg.prod. de forma: $A \rightarrow \alpha A$
- reg.prod. recursiva:
 - reg.prod. de forma: $A \rightarrow \alpha A \beta$



Recursivitate

- **neterminal recursiv la stanga:**
 $A \in N$ daca \exists o derivare de forma: $A =^+> A\alpha$
- **neterminal recursiv la dreapta:**
 $A \in N$ daca \exists o derivare de forma: $A =^+> \alpha A$
- **neterminal recursiv:**
 $A \in N$ daca \exists o derivare de forma: $A =^+> \alpha A \beta$
- **gramatica recursiva la stanga:**
are cel putin un neterminal recursiv la stanga
- **gramatica recursiva la dreapta:** ...

Forma normală Chomsky

O gramatică independentă de context $G = (N, \Sigma, P, S)$ este în *forma normală Chomsky (FNC)*

dacă orice regula de producție din P este de una din formele:

a) $A \rightarrow BC$ $A, B, C \in N;$

b) $A \rightarrow a$ $a \in \Sigma, A \in N;$

Si un caz special: $S \rightarrow \epsilon$ poate $\in P$. În acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de producție.

Teoremă. Oricare ar fi $G = (N, S, P, S)$ o gramatică independentă de context, întotdeauna există o gramatică în forma normală Chomsky G' , astfel încât $L(G) = L(G')$.

Forma normală Greibach

O gramatică $G = (N, \Sigma, P, S)$

este în *forma normală Greibach (FNG)*

dacă P are productii numai de forma:

$$A \rightarrow a\alpha, \quad A \in N, a \in \Sigma, \alpha \in N^*;$$

Si un caz special: $S \rightarrow \varepsilon$ poate $\in P$. In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

Teorema. Oricare ar fi $G = (N, \Sigma, P, S)$ o gramatică independentă de context, întotdeauna există o gramatică în forma normală Greibach, astfel încât $L(G) = L(G')$.

Simplificarea GIC

- *simbol neproductiv*

Un simbol $A \in N$ este *neproductiv* dacă nu există nici o derivare de forma $A =^* > x \quad (x \in \Sigma^*)$

- În caz contrar A este *simbol productiv*

- Teorema

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă, fără simboluri neproductive

Simplificarea GIC

(transformari echivalente)

- *simbol inaccessible*

Un simbol $X \in N \cup \Sigma$ este *simbol inaccessible* dacă nu există nici o $*$ derivare: $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \quad (\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*)$

- În caz contrar simbolul este *accessible*
- Teorema

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă, fără simboluri inaccessible

Determinarea simbolurilor productive

≈ algoritm AF determ. stari productive

$$\begin{aligned} A &\rightarrow BC \\ B &\rightarrow bB \\ C &\rightarrow c \end{aligned}$$

1. $i := 0 ; V_0 := \Phi$

2. Repeta

$$V_{i+1} := V_i \cup \{A \in N \mid \exists A \rightarrow \alpha \in P, \alpha \in (V_i \cup \Sigma)^*\}$$

$$i := i + 1$$

pana cand $V_i = V_{i-1}$

$\{V_i - multimea simbolurilor productive\}$

Determinarea simbolurilor accesibile

≈ algoritm AF determ. stari accesibile

1. $i := 0 ; V_0 := \{S\}$

2. Repeta

$$V_{i+1} := V_i \cup \{ B \in N \mid \exists A \in V_i, \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* \text{ a.i. } A \rightarrow \alpha B \beta \in P \}$$

$i := i + 1$

pana cand $V_i = V_{i-1}$

$\{V_i - multimea simbolurilor neterminale accesibile\}$

* analog pentru simboluri terminale accesibile

Simplificarea GIC

- Un simbol este **neutilizabil** dacă el este fie inaccesibil, fie neproductiv
- Teorema

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără simboluri neutilizabile



Observatii:

Fie $G = (N, \Sigma, P, S)$ o gramatica independenta de context:

- Fie un simbol neterminal A al gramaticii G .

Daca nu exista o regula de productie $A \rightarrow \alpha$ in P
atunci A este neproductiv

- Fie un simbol terminal a al gramaticii G .

Daca nu exista o regula de productie de forma
 $B \rightarrow \alpha a \beta$ in P
atunci a este inaccesibil

Eliminarea ε -productiilor

1. Construim multimea N_ε care are ca elemente acele neterminale care prin derivare conduc la ε adică :

- $N_\varepsilon = \{A \mid A \in N, A \Rightarrow^* \varepsilon\}$
alg. \approx determinarea simb. productive

2. Determinam noile reguli de productie

- astfel incat productiile de forma $A \rightarrow \varepsilon$ se elimina
- dar, daca $\varepsilon \in L(G)$, atunci $\exists S \rightarrow \varepsilon$ si S nu apare în membrul drept al nici unei productii

Determinarea lui N_ε

1. $i := 0 ;$

$$V_0 := \{A \in N \mid \exists A \rightarrow \varepsilon \in P\}$$

2. **Repetă**

$$V_{i+1} := V_i \cup \{A \in N \mid \exists A \rightarrow \alpha \in P, \alpha \in (V_i)^*\}$$

$$i := i + 1$$

pană cand $V_i = V_{i-1}$

determinam noile reguli de productie

- productiile de forma $A \rightarrow \varepsilon$ se elimina
- celelalte r.p. se rescriu astfel incat sa “suplineasca” eliminarea ε -productiilor astfel:

Fie r.p. $A \rightarrow \alpha_0 B_1 \alpha_1 B_2 \alpha_2 \dots B_k \alpha_k$

unde: $B_i \in N_\varepsilon$

α_j nu contine simb. din N_ε

Se inlocuieste cu:

$A \rightarrow \alpha_0 X_1 \alpha_1 X_2 \alpha_2 \dots X_k \alpha_k$

unde $X_i = \begin{cases} B_i & \text{este unul dintre } B_i \text{ sau } \varepsilon \\ \varepsilon & \text{(se fac toate inlocuirile posibile)} \end{cases}$

Ce lipseste ???

determinam noile reguli de productie

- continuare

Dacă $\varepsilon \in L(G)$ trebuie să avem o ε -productie

“atunci avem productia $S \rightarrow \varepsilon$ si S nu apare în membrul drept al nici unei productii”
(gram. ε -independenta)

- adaugam un nou simbol de start S' și productiile $S' \rightarrow \varepsilon \mid S$

Redenumiri. Cicluri.

- *redenumire*: reg.prod. de forma $A \rightarrow B$
- *Gramatica fără redenumiri*: fara r.p. de redenumire

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără redenumiri

- *ciclu*: o * derivare de forma $A \Rightarrow^* B$
- *Gramatica fără cicluri*: nu se pot obtine cicluri (la derivare)

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără cicluri

Eliminarea redenumirilor

PP. G – ε -independenta (daca nu , luam gr.echiv. ε -ind.)

Pentru fiecare $A \in N$

se elimina redenumirile de forma $A \rightarrow B$ ($\forall B \in N$)

- construieste multimile $N_A = \{B \mid A =^* > B\}$;
 $(\approx$ det. simb. accesibile)
- determinam noile reguli de productie

Construieste $N_A = \{D \mid A =^* > D\}$

1. $i := 0$;

$V_0 := \{A\}$

2. Repeta

$V_{i+1} := V_i \cup \{C \mid (B \rightarrow C) \in P, B \in V_i\}$

$i := i + 1$

pana cand $V_i = V_{i-1}$

$N_A := V_i$

determinam noile reguli de productie

A ∈ N:

- pentru fiecare $A \rightarrow \alpha \in P$ execută
 - daca α e format dintr-un singur neterminatunci il excludem din mult. noilor reg.prod
altfel adaugam: $B \rightarrow \alpha , \forall B \in N$ a.i. $A \in N_B$
 - sf.daca
 - sf.pentru

Eliminarea redenumirilor

Exercitiu:

$E \rightarrow E + T$

$E \rightarrow T$

$T \rightarrow T * F$

$T \rightarrow F$

$F \rightarrow (E)$

$F \rightarrow a$

1.C

Gramatica fara cicluri

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără cicluri

Daca $G - \varepsilon$ -independenta si fara redenumiri atunci este fara cicluri

Gramatica propre:

este o gramatica

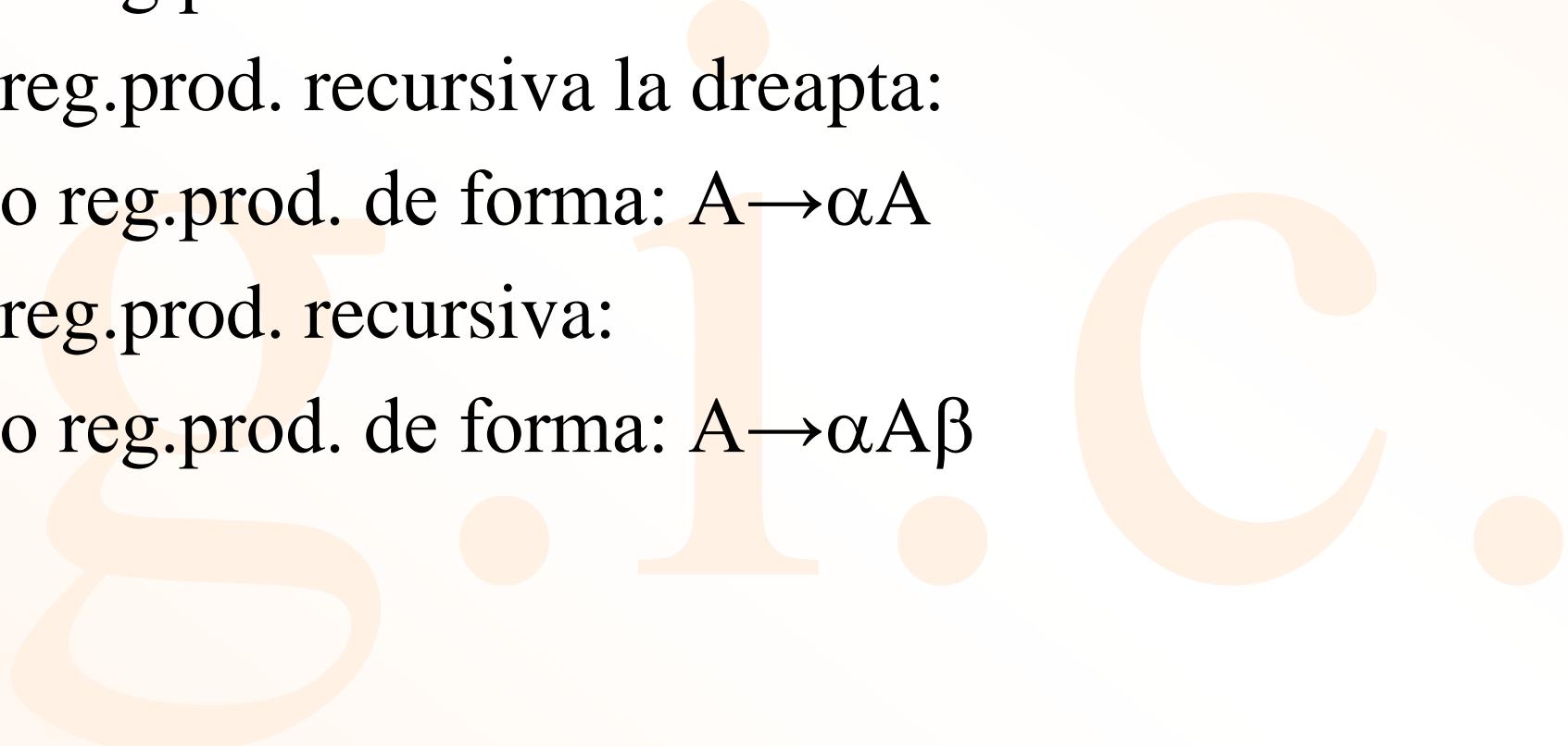
- fara simb. neutilizabile
- **ϵ -independenta**
- fara cicluri

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ propri echiv.

Recursivitate

- reg.prod. recursiva la stanga:
 - reg.prod. de forma: $A \rightarrow A\alpha$
- reg.prod. recursiva la dreapta:
 - reg.prod. de forma: $A \rightarrow \alpha A$
- reg.prod. recursiva:
 - reg.prod. de forma: $A \rightarrow \alpha A \beta$



Reg. prod. recursive la stanga

- reg.prod. recursiva la stanga: $A \rightarrow A\alpha$

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără reg.prod. recursive la stanga

- **PP. G – gr. propre**
(daca nu este, det. gr. propre echiv. si lucram cu ea)
- Obs.: vom obtine tot o gramatica propre

Eliminarea r.p. recursive la stanga

pentru fiecare $A \in N$: reg.prod.cu m.s. A

- grupam r.p. in recursive la stng. si nerec. la stanga

$$A \rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \dots \mid A\alpha_r \quad (\text{r.p. recursive})$$

$$A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_s \quad (\text{r.p. ne-recursive})$$

- r.p. se transforma astfel:

$$A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_s \mid \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \dots \mid \beta_s A'$$

$$A' \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_r \mid \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \dots \mid \alpha_r A'$$

(a fost introdus un net. nou: A')

Eliminarea r.p. recursive la stanga

Observatii:

- Recursivitatea nu se poate elimina.
- Recursivitatea la stanga a fost transformata în recursivitate la dreapta.

Exercitiu

Eliminati recursivitatea la stanga:

$S \rightarrow Sa$

$S \rightarrow a$

Recursivitate

- **neterminal recursiv la stanga:**
 $A \in N$ daca \exists o derivare de forma: $A =^+> A\alpha$
- **neterminal recursiv la dreapta:**
 $A \in N$ daca \exists o derivare de forma: $A =^+> \alpha A$
- **neterminal recursiv:**
 $A \in N$ daca \exists o derivare de forma: $A =^+> \alpha A \beta$
- **gramatica recursiva la stanga:**
are cel putin un neterminal recursiv la stanga
- **gramatica recursiva la dreapta:** ...

Eliminarea recurs. la stg. a neterm.

Teorema:

$\forall G = (N, \Sigma, P, S) \exists G' = (N', \Sigma', P', S)$ echivalentă fără neterminale recursive la stanga

- PP. G – gr. propriie
(daca nu este, det. gr. propriie echiv. si lucram cu ea)
- impunem o ordine asupra neterminalelor
 $N = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
si apoi modific r.p. a.i. sa nu existe $A_i \rightarrow A_j \alpha$ cu $j <= i$
de aici \Rightarrow nu va exista recursivitate la stanga

Eliminarea recurs. la stg. a neterm.

pentru A_i de la A_1 la A_n **executa**

//se elimina r.p. de forma $A_i \rightarrow A_j \alpha$ cu $j <= i$ astfel:

***repeta**

pentru $j := 1, i - 1$ **executa**

* $A_i \rightarrow A_j \alpha$ ($j < i$) se inlocuieste cu: $A_i \rightarrow \beta \alpha$
cu toti β cu proprietatea $A_j \rightarrow \beta \in P_{inloc}$

sf.pentru

* se elimina r.p. de forma $A_i \rightarrow A_i \alpha$

(se inlocuiesc cf.alg. de elim.r.p.rec.stg)

***pana cand** toate r.p. cu A_i in m.s. respecta: $\nexists j < i : A_i \rightarrow A_j \alpha$

sf.pentru

Eliminarea recurs. la stg. a neterm.

Exercitii:

(1)

$$A \rightarrow BC \mid a$$

$$B \rightarrow CA \mid b$$

$$C \rightarrow AB \mid c$$

(2)

$$A \rightarrow a \mid aB$$

$$B \rightarrow AC \mid b$$

$$C \rightarrow BA \mid c$$

Problema 1:

Fie limbajul:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$$

Este independent de context?

Rezolvare:

- Facem **observatia** ca: $z \in L$ daca:
 - a. ordinea simb. este data de regulile:
 - i. simb. **a** apar inaintea simb. **b** si **c**
 - ii. simb. **b** apar inaintea simb. **c**
 - b. nr. simb. **a** este egal cu nr. simb. **b** este egal cu nr. simb. **c**
(si notam: $nr_a(z) = nr_b(z) = nr_c(z)$)

Vom dem. ca nu este independent de context, prin reducere la absurd, folosind lema de pompare pentru limbaje independente de context.

- PP. ca este independent de context.
Atunci au loc conditiile din lema de pompare

De aici rezulta ca $\exists p \in N^*$ astfel incat:

$\forall z \in L$ care satisface

- $|z| \geq p$
- \exists o descompunere $z = uvwxy$ astfel incat: $uv^iwx^iy \in L, \forall i \in N$
 - si $|vx| \geq 1$
 - si $|vwx| \leq p$

Dem., Versiunea 1:

Alegem z cu $|z| \geq p$ (satisfac cond. de mai sus)

- $\exists n$ a.i. $|a^n b^n c^n| \geq p$; $z \in L \Rightarrow z = a^n b^n c^n$ si $|z| \geq p$
- $z = uvwxy$ descompunerea din lema de pompare
ne aflam in unul din urmatoarele cazuri generale:
 1. cel putin unul dintre **v** si **x** contin cel putin 2 simboluri (dintre a,b,c) diferite; **(cazul 1)**
 2. **v** si **x** contin un singur simbol de oricate ori (o sau mai multe) dar acelasi simbol (sau a, sau b, sau c)
dar **v** si **x** nu pot fi ambele vide **(cazul 2)**
 3. **v** si **x** contin un simbol (a, sau b, sau c) de oricate ori,
dar nu pot fi vide,
dar **v** si **x** nu contin acelasi simbol **(cazul 3)**

cazul 1: (vezi cazurile posibile pentru cazul 1; aleg unul dintre ele si dem. pt. el;
pentru celelalte demonstratia se face analog)

fie: $v = a^{k1} b^{k2}$, $k1 > 0, k2 > 0$ (**rel.1**) (oricare x)
fie $i = 2$

cf. Lemei de pompare: $uv^2wx^2y \in L$

adica:

$$uv^2wx^2y = u a^{k1} \underline{b^{k2}} \underline{a^{k1}} b^{k2} wx^2y \in L,$$

atunci cand $k1 > 0$ si $k2 > 0$ (cf. rel.1)

ar insemana ca simb. **b** pot sa apara inaintea simb. **a**

ceea ce nu e adevarat pentru cuvintele din L

(observatia (a.)(i.))

\Rightarrow contradictie

Se poate dem. in mod **analog** ca:

- pentru oricare doua (sau trei) simboluri distincte ar fi format v, v^2 nu va mai pastra ordinea simbolurilor care este necesara pt.ca $uv^2wx^2y \in L$

... \Rightarrow contradictie

- pentru oricare doua (sau trei) simboluri distincte ar fi format x, x^2 nu va mai pastra ordinea simbolurilor care este necesara pt.ca $uv^2wx^2y \in L$

... \Rightarrow contradictie

cazul 2: (dintre cazurile posibile pentru cazul 2 aleg unul dintre ele si dem. pt. el)

$$\begin{aligned} \text{fie: } v &= a^{k1} & k1 >= 0 \\ x &= a^{k2} & k2 >= 0 \end{aligned}$$

Stim ca: $|vx| >= 1$

$$\Leftrightarrow |a^{k1}a^{k2}| >= 1$$

$$\Leftrightarrow k1 + k2 > 0 \quad (\text{rel.2})$$

($k1, k2$ – nu sunt simultan 0)

atunci: $u = a^{k3}, k3 >= 0$

$w = a^{k4}, k4 >= 0$

$y = a^{n-k1-k2-k3-k4}b^n c^n, n-k1-k2-k3-k4 >= 0$

fie $i = 2$: cf. lemei: $uv^2wx^2y \in L$

$$uv^2wx^2y = a^{k3} a^{2*k1} a^{k4} a^{2*k2} a^{n-k1-k2-k3-k4} b^n c^n$$

dar: $uv^2wx^2y \in L \Rightarrow nr_a(z') = nr_b(z') = nr_c(z')$

$$k3 + 2*k1 + k4 + 2*k2 + n - k1 - k2 - k3 - k4 = n = n$$

$$\Rightarrow n + k1 + k2 = n$$

$$\Rightarrow k1 + k2 = 0$$

dar (cf. rel.2) : $k1 + k2 > 0$

\Rightarrow contradictie

Se dem. analog pt. orice alte combinatii posibile atunci cand

si **y** si **u** contin un acelasi simbol (**a**, sau **b**, sau **c**),

ca in $z' = uv^2wx^2y$ nu are loc relatia $nr_a(z') = nr_b(z') = nr_c(z')$

\Rightarrow contradictie

cazul 3: (dintre cazurile posibile pentru cazul 3 aleg unul dintre ele si dem. pt. el)

$$\begin{aligned} \text{fie: } v &= a^{k1}, k1 > 0 & (\text{rel.4}) \\ x &= b^{k2}, k2 > 0 & (\text{rel.5}) \end{aligned}$$

atunci: $u = a^{k3}, k3 >= 0$

$$y = b^{k_4}c^n, k_4 >= 0$$

$$w = a^{n-k_1-k_3}b^{n-k_2-k_4}, n-k_1-k_2 >= 0; n-k_2-k_4 >= 0$$

fie $i = 2$; atunci $uv^2wx^2y \in L$

$$uv^2wx^2y = a^{k_3} a^{2*k_1} a^{n-k_1-k_2} b^{n-k_2-k_4} b^{2*k_2} b^{k_4} c^n$$

$$z' = uv^2wx^2y \in L \Rightarrow nr_a(z') = nr_b(z') = nr_c(z')$$

$$k_3 + 2*k_1 + n - k_1 - k_3 = n - k_2 - k_4 + 2*k_2 + k_4 = n$$

$$\Rightarrow n + k_1 = n + k_2 = n$$

$$\Rightarrow k_1 = 0 \text{ contradicție (rel.4)}$$

$$(\Rightarrow k_2 = 0, \text{ contradicție (rel.5)})$$

Se dem. analog pt. orice alte combinatii posibile atunci cand
 si v si x contin cate un simbol (a, sau b, sau c), dar nu acelasi
 ca in $z' = uv^2wx^2y$ nu are loc relatia $nr_a(z') = nr_b(z') = nr_c(z')$
 $\Rightarrow \underline{\text{contradicție}}$

cazurile posibile pt. cazul 1

$$z = a^n b^n c^n, z = uvwxy$$

cel putin unul dintre v si x contin cel putin 2 simboluri (dintre a,b,c) diferite;

$$v = a^{k_1} b^{k_2}, k_1 > 0, k_2 > 0 \text{ si nu specificam ce poate contina x}$$

$$v = a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0 \text{ si nu specificam ce poate contina x}$$

$$v = b^{k_2} c^{k_3}, k_2 > 0, k_3 > 0 \text{ si nu specificam ce poate contina x}$$

daca v contin un singur acelasi simbol, ne situam in cazul 1 daca:

$$x = a^{k_1} b^{k_2}, k_1 > 0, k_2 > 0$$

$$x = a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0$$

$$x = b^{k_2} c^{k_3}, k_2 > 0, k_3 > 0$$

analog se face dem. pt. fiecare dintre cazurile de mai sus (ajunge la o contradictie)

Exercitiu:

descrieti cazurile posibile pt. cazul 2 si cazul 3

Dem., Versiunea 2 (scurta ☺):

Alegem z cu $|z| \geq p$ (satisfacă condiția de mai sus)

$$z = a^p b^p c^p$$

- $\Rightarrow |z| \geq p$
- $z = uvwxy$ descompunerea din lema de pompare
 - astfel încât: $uv^iwx^i y \in L, \forall i \in N$
 - si $|vx| \geq 1$
 - si $|vwx| \leq p$

Pentru ca $|vwx| \leq p$: secvența vwx conține maxim 2 simboluri dintre a, b, c.

Astfel, în secvența $uv^iwx^i y$ există cel puțin un simbol care nu este "pompat" și cel puțin unul care este "pompat" ; astfel se pierde egalitatea dintre numărul de aparitii ale celor două simboluri.

Echivalenta dintre expresiile regulare si limbajele acceptate de AF

Teorema:

Daca r este o expresie regulara, atunci exista un AF care accepta multimea secentelor reprezentate de aceasta expresie (multimea regulara). Si reciproc.

- Echivalenta:
 - constructia automatului echivalent pentru fiecare dintre constructiile de mai sus (nu vom face dem.)
 - constructia expresiei regulare ce descrie limbajul acceptat de un automat (nu vom face dem.)(→ ~ seminar)

Expresie regulara

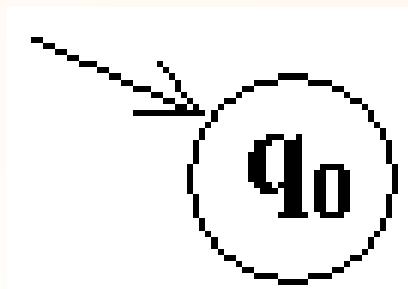
=> limbaj acceptat de AF

- Expresii regulare
 - \emptyset
 - ϵ
 - a daca: $a \in \Sigma$
 - $r+s$ daca r,s – expresii regulare
 - rs daca r,s – expresii regulare
 - r^* daca r – expresie regulara
- Constructia automatului echivalent
pentru fiecare dintre constructiile de mai sus

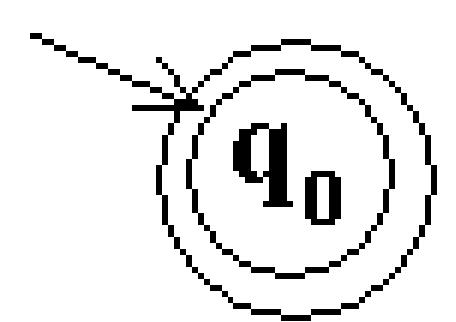


Expresie regulara=> limbaj acceptat de AF

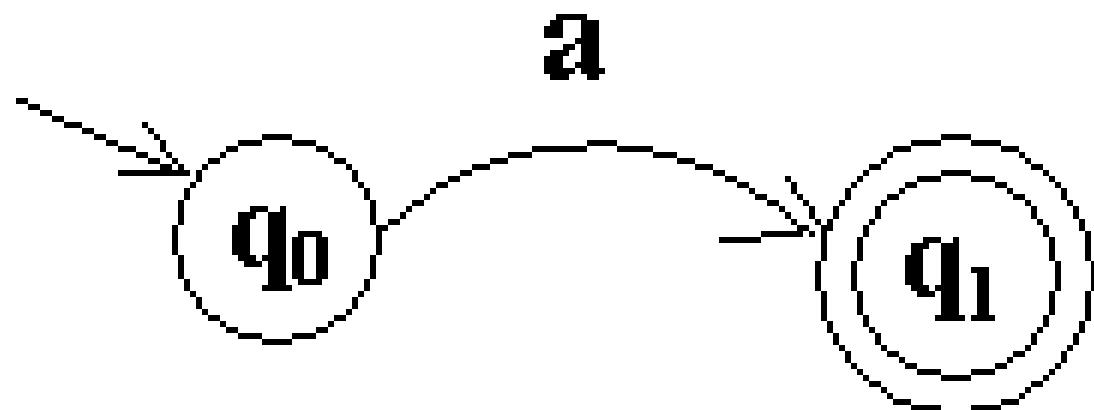
- Automatul ce accepta: Φ



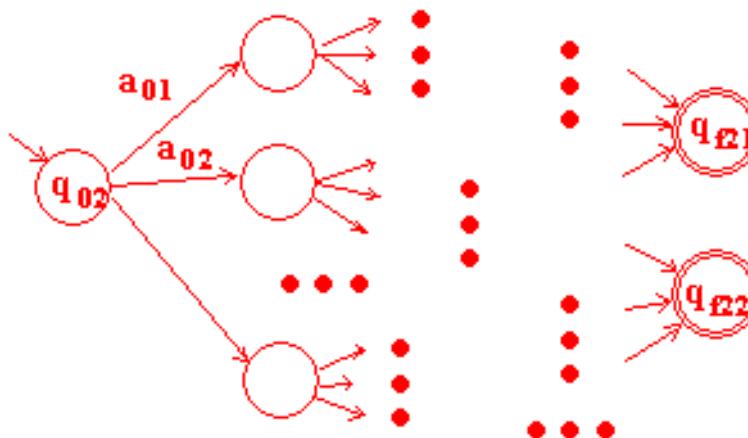
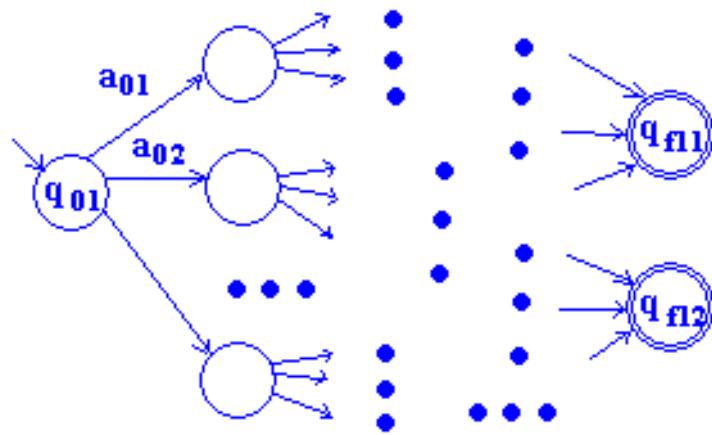
- Automatul ce accepta: ϵ



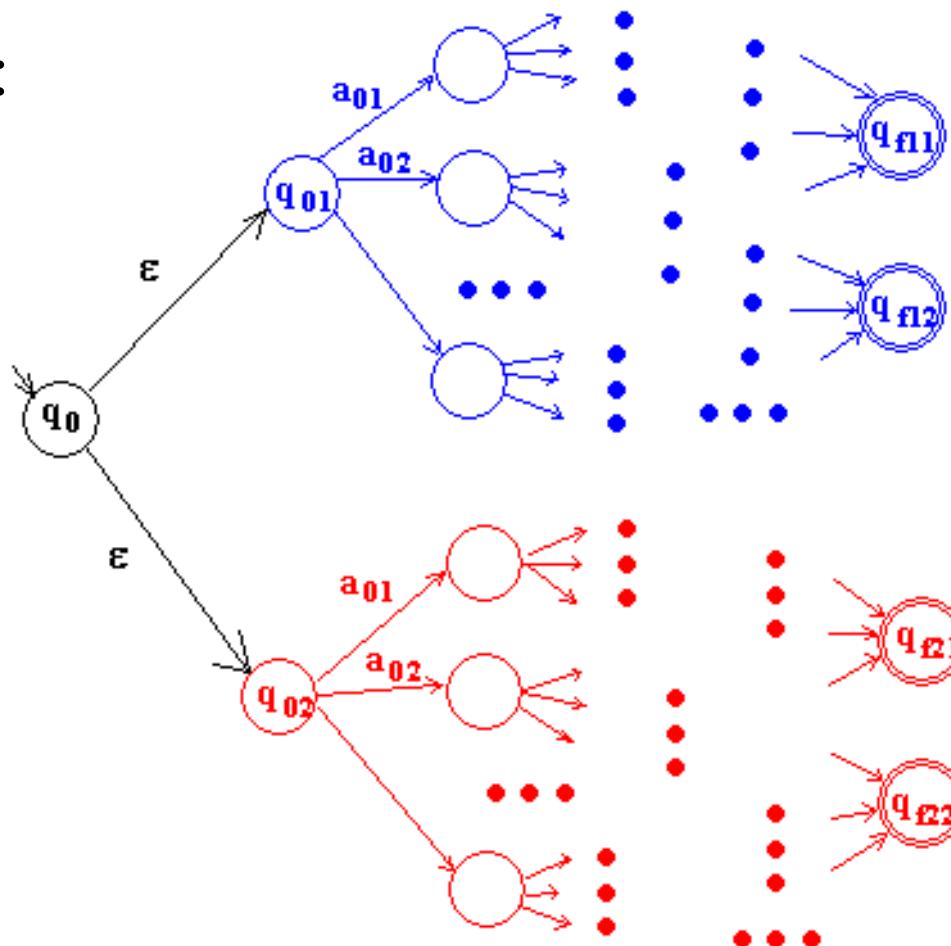
- Automatul ce accepta: a (daca: $a \in \Sigma$)



- Automatul ce acceptă reuniunea limbajelor acceptate de două automate date
 - se dau:

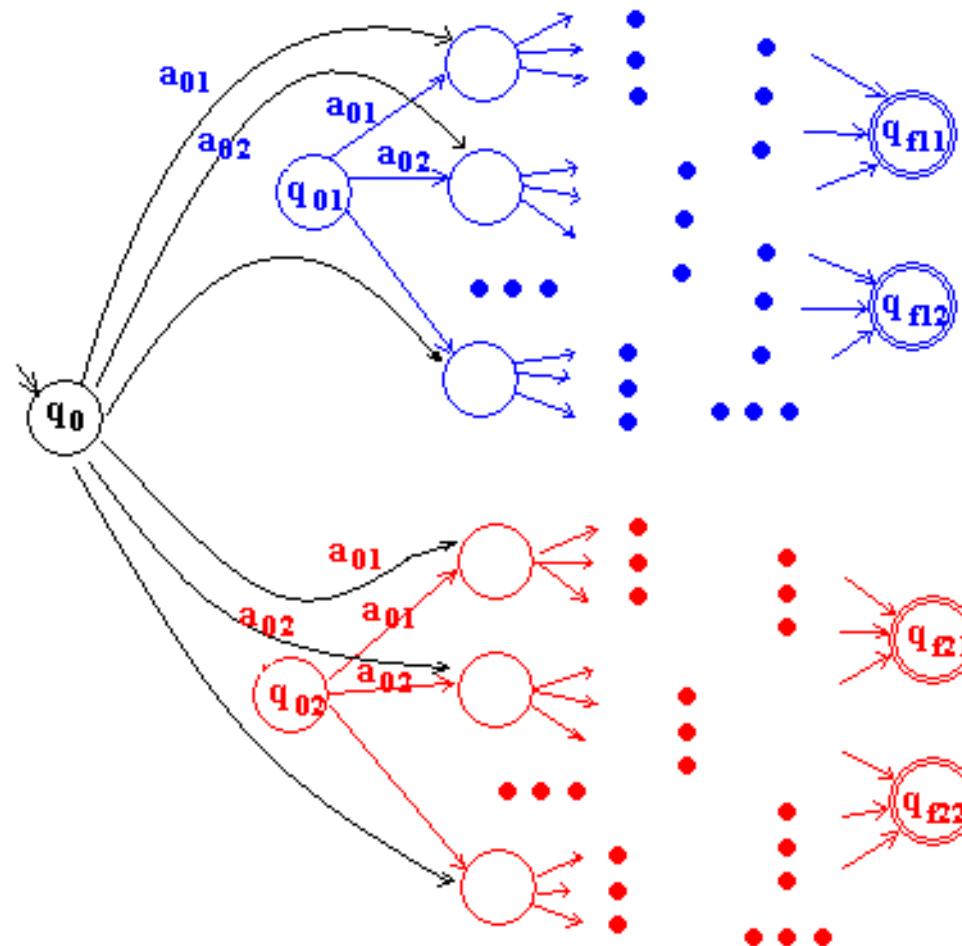


- Automatul ce acceptă reuniunea limbajelor acceptate de două automate date
 - AF cu ϵ tranz.:



- Automatul ce acceptă reuniunea limbajelor acceptate de două automate date

– AF

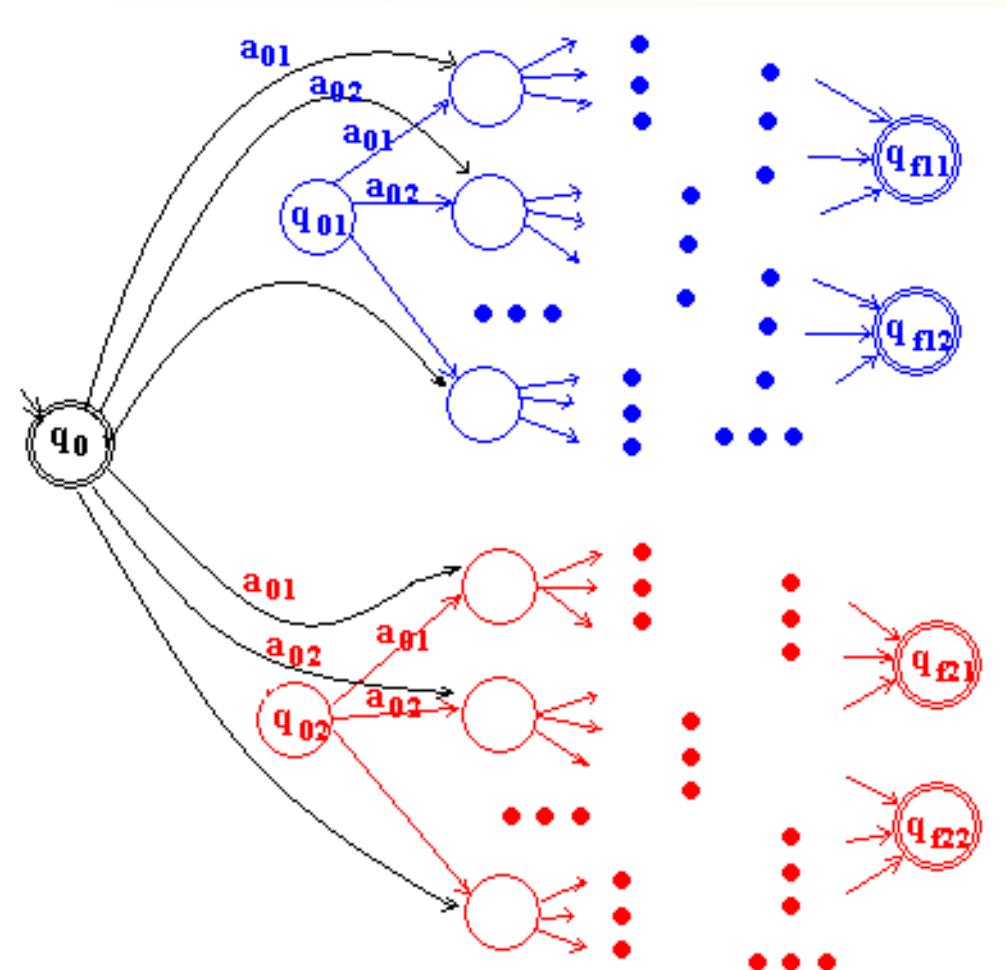


**??! cel putin una
dintre q_{01} sau q_{02}**

e stare finală

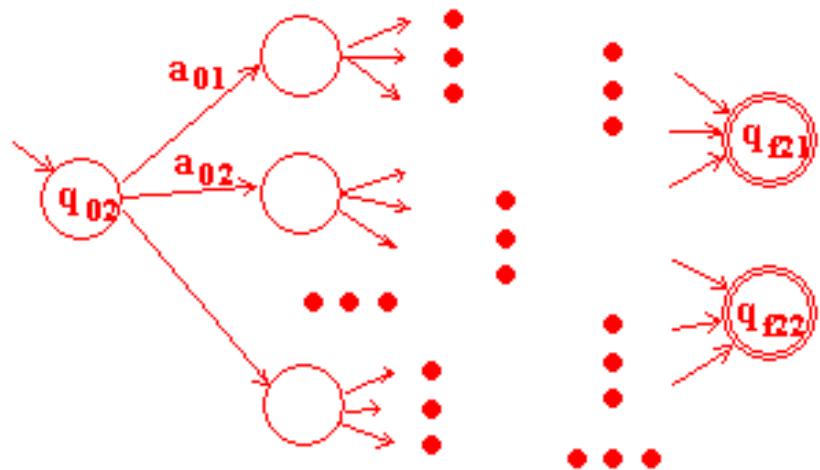
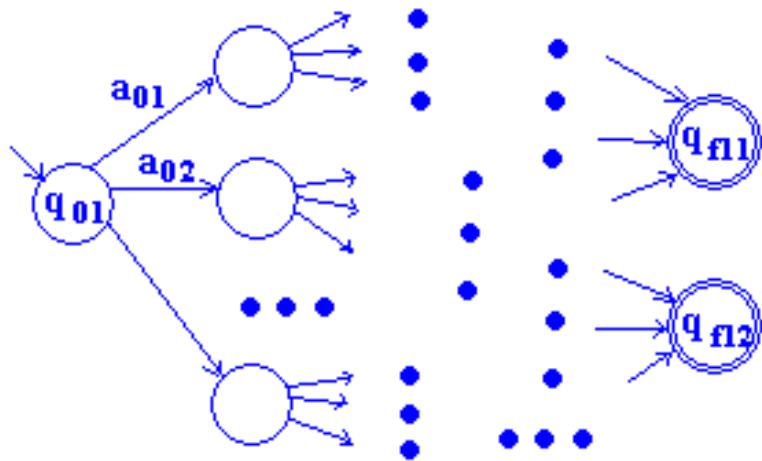
- Automatul ce accepta reuniunea limbajelor acceptate de doua automate date
 - AF

**Daca cel putin una
dintre q_{01} sau q_{02}
este stare finala**

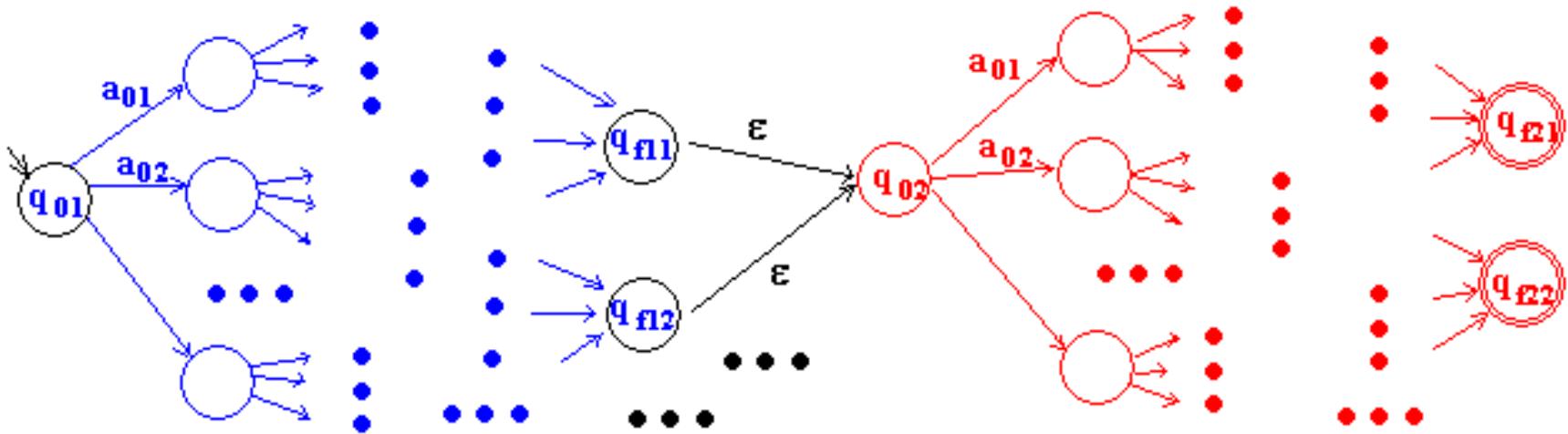


...

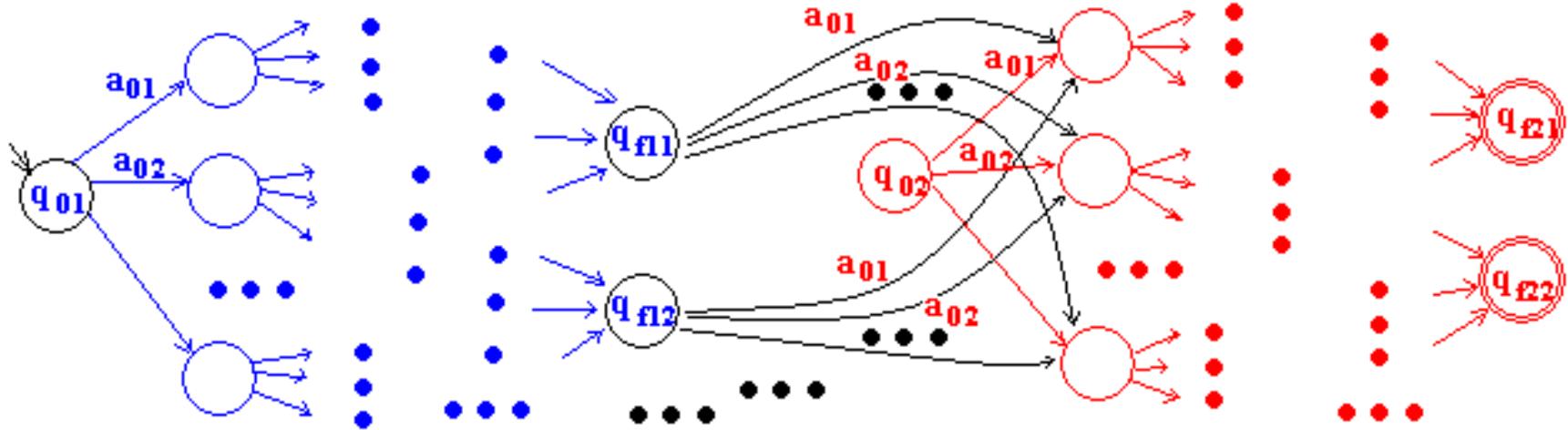
- Automatul ce acceptă concatenarea limbajelor acceptate de două automate date
 - se dau



- Automatul ce acceptă concatenarea limbajelor acceptate de două automate date
 - AF cu ϵ tranz.:

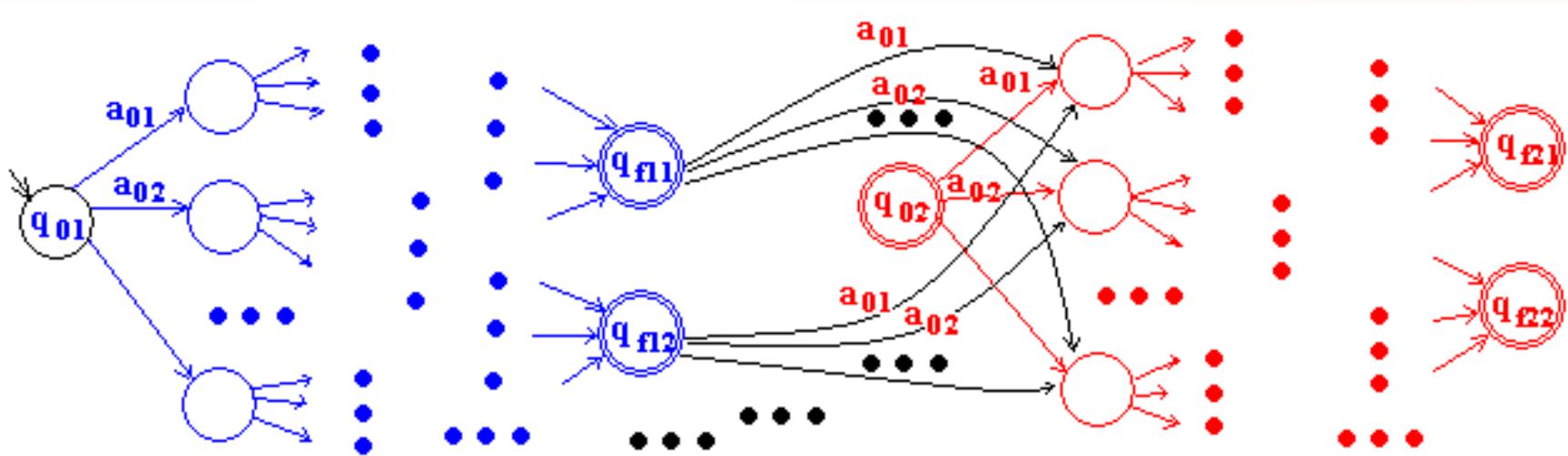


- Automatul ce accepta concatenarea limbajelor acceptate de doua automate date
 - AF



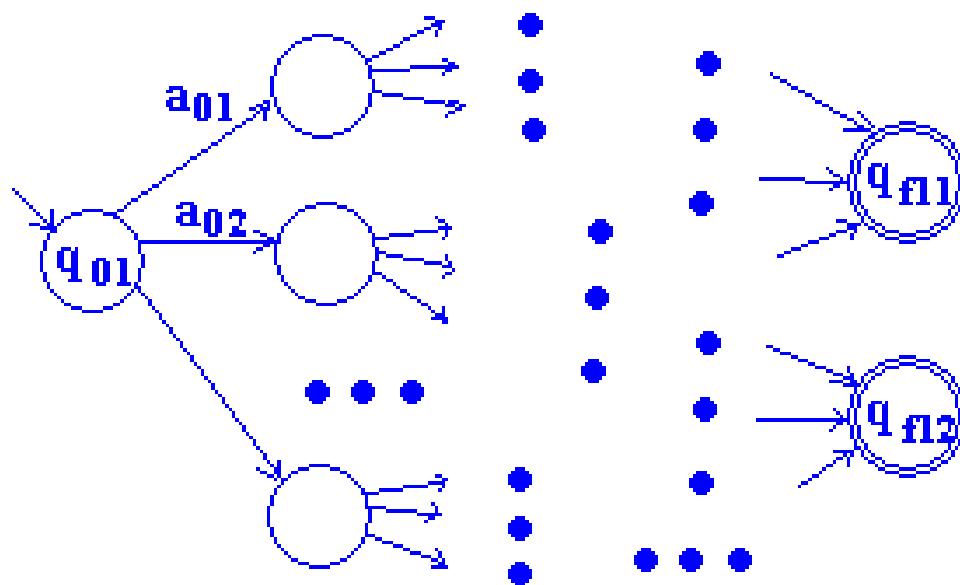
??! q_{02} stare finală

- Automatul ce acceptă concatenarea limbajelor acceptate de două automate date
 - AF

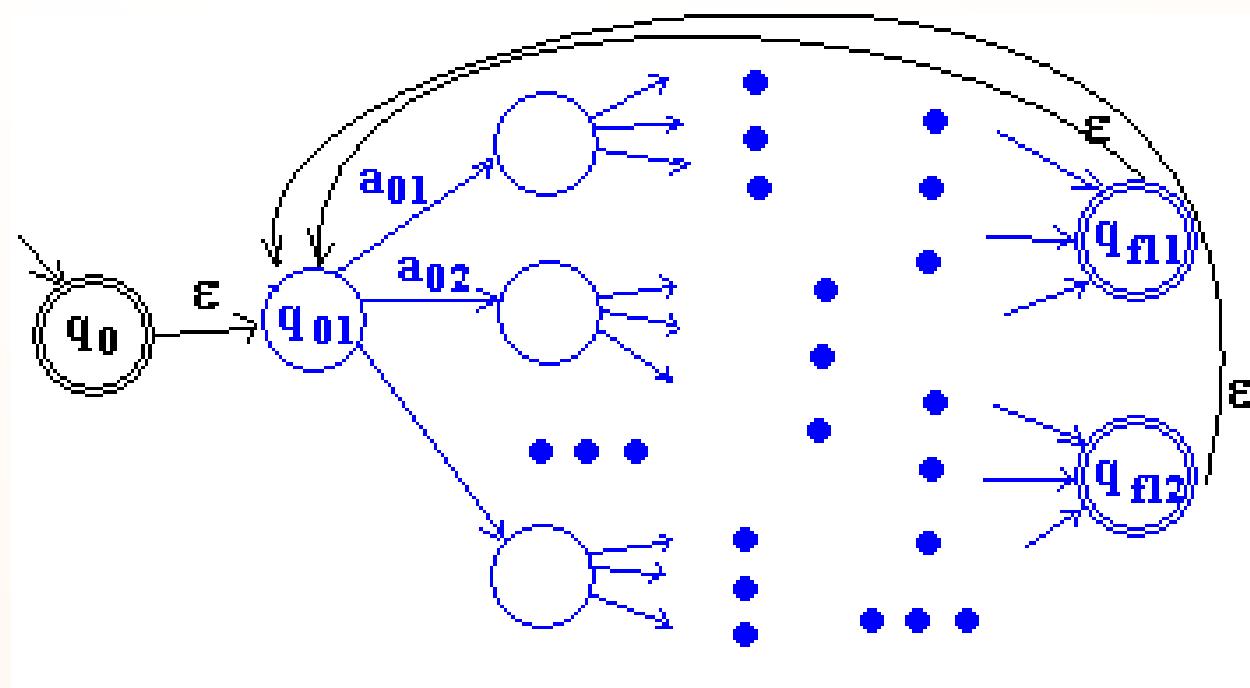


Daca q_{02} stare finala

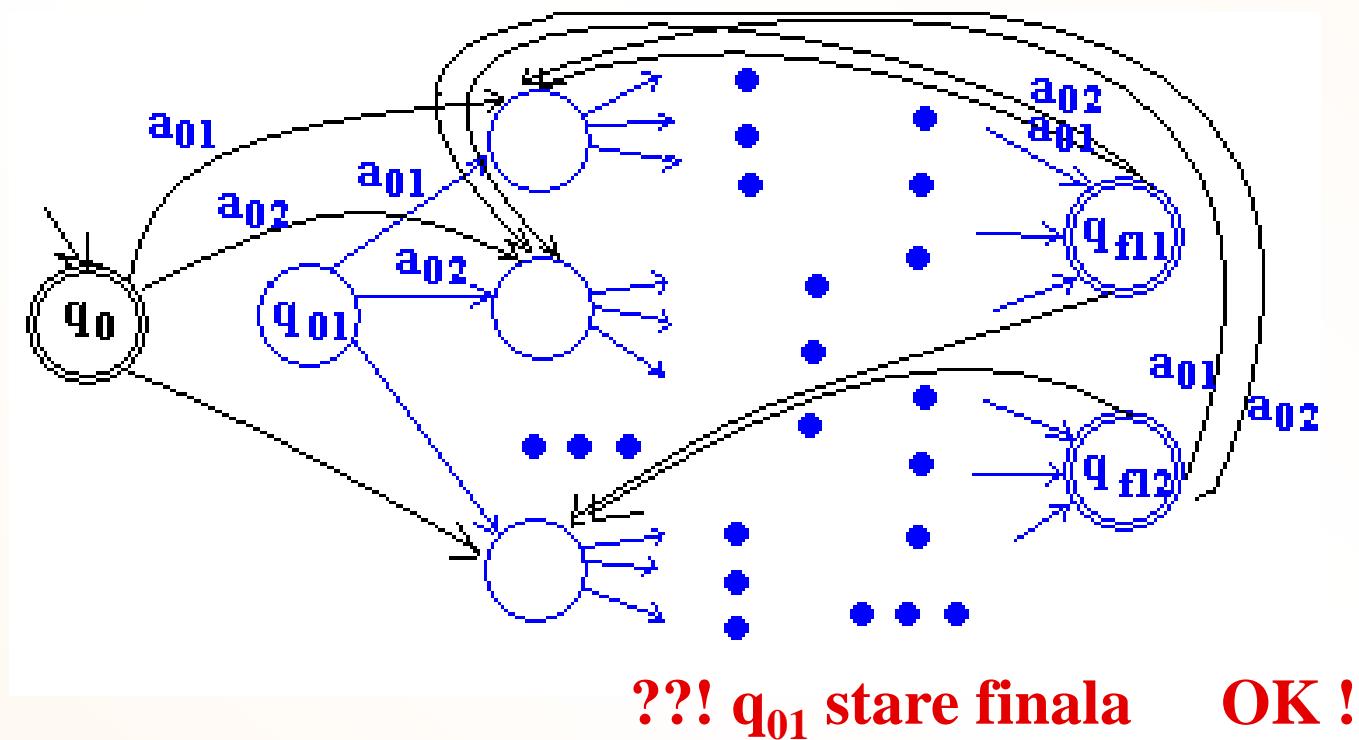
- Automatul ce acceptă orice secvență peste limbajul acceptat de un automat dat
 - se da:



- Automatul ce acceptă orice secvență peste limbajul acceptat de un automat dat
 - AF cu ϵ tranz.:



- Automatul ce accepta orice secventa peste limbajul acceptat de un automat dat
 - AF:



Exercitii:

Expresie regulara=> limbaj acceptat de AF

- Automatul ce accepta reuniunea limbajelor acceptate de doua automate date
 - se considera AF pt.:
 aa^*
 bb^*
 - se considera AF pt.:
 a^{2n} n – nr. natural; $n \geq 0$
 b^{2n+1} n – nr. natural; $n \geq 0$

Exercitii:

Expresie regulara=> limbaj acceptat de AF

Construiti automatul ce accepta concatenarea limbajelor acceptate de doua automate date.

a) Se considera AF pt.: a si b

b) Se considera AF pt.: a* si b*

c) Se considera AF pt.: a si b*

Exercitii:

Expresie regulara=> limbaj acceptat de AF

- Automatul ce accepta orice secventa peste limbajul acceptat de un automat dat
 - se considera AF pt.: a

LEX / FLEX

LEX -> generator de analizor LEXical

~ 1975 Mike Lesk , Eric Schmidt

FLEX - Fast LEX

~ 1987 Vern Paxson

doc: “*pattern-matching techniques used by flex:
deterministic finite automata*”
(DFA)

Expresii regulare

x	se potriveste cu caracterul <i>x</i>
r*	zero sau mai multi <i>r</i>
r+	unul sau mai multi <i>r</i>
r?	zero sau un <i>r</i> (optional)
rs	concatenarea lui <i>r</i> cu <i>s</i>
r s	sau <i>r</i> sau <i>s</i>
r{2,5}	doi, trei, patru sau cinci <i>r</i>
r{2,}	doi sau mai multi <i>r</i>
r{4}	exact patru <i>r</i>
	<i>“character class”</i>
[xyz]	se potriveste cu oricare dintre 'x', 'y', 'z'.
[abj-oZ]	se potriveste cu oricare dintre 'a', 'b', orice de la 'j' la 'o', sau 'Z'
[^A-Z]	<i>“negated character class”</i>
.	se potriveste cu orice caracter cu exceptia celor specificate
	orice caracter cu exceptia newline
{name}	se potriveste cu definitia "name"

Exemplu:

DIGIT	[0-9]
ID	[a-z] [a-z0-9]*

%%

```
if|then|while|do|begin|end
"+|-*"/
[ \t\r\n]           /* white spaces */
{DIGIT}+
{DIGIT}+."{DIGIT}*
{ID}
```

%

#include <stdio.h>

%

alpha [A-Za-z]

digit [0-9]

alphanum [A-Za-z0-9]

%%

[\t\r\n]

"if"

"then"

"else"

"while"

"do"

"begin"

"end"

{alpha}{alphanum}*{digit}+

.

%%

/* ignore white spaces */
printf("if \n");
printf("then \n");
printf("else \n");
printf("while \n");
printf("do \n");
printf("begin \n");
printf("end \n");
printf("identifier \n");
printf("number \n");
/* ignore other character*/

Formatul fisierului de specificatii

```
% {  
    // text copiat in fisierul generat  
    // - incluziuni de fisiere, variabile globale  
}  
definitii  
%%%  
reguli  
%%%  
cod utilizator
```

Sectiunea de definitii

declaratii de *definitii de nume* simple, de forma
nume definitie

- **nume** - este un cuvant compus din una sau mai multe litere, cifre, '_' sau '-'
primul caracter trebuie sa fie litera sau '_'
si sa se afle pe prima pozitie a liniei.
- **definitie** este o expresie regulara si se considera ca incepe cu primul caracter non-spatiu de dupa nume si tine pana la sfarsitul liniei.

Scop: pentru a simplifica specificarea regulilor

Sectiunea de reguli

Scopul principal al acestei sectiuni este acela de a asocia

- expresii regulare (consideram ca o expr. regulara descrie un atom)
- actiuni *semantice* (cod C definit de utilizator).

Pentru aceasta se utilizeaza o constructie de forma:

sablon actiune

unde:

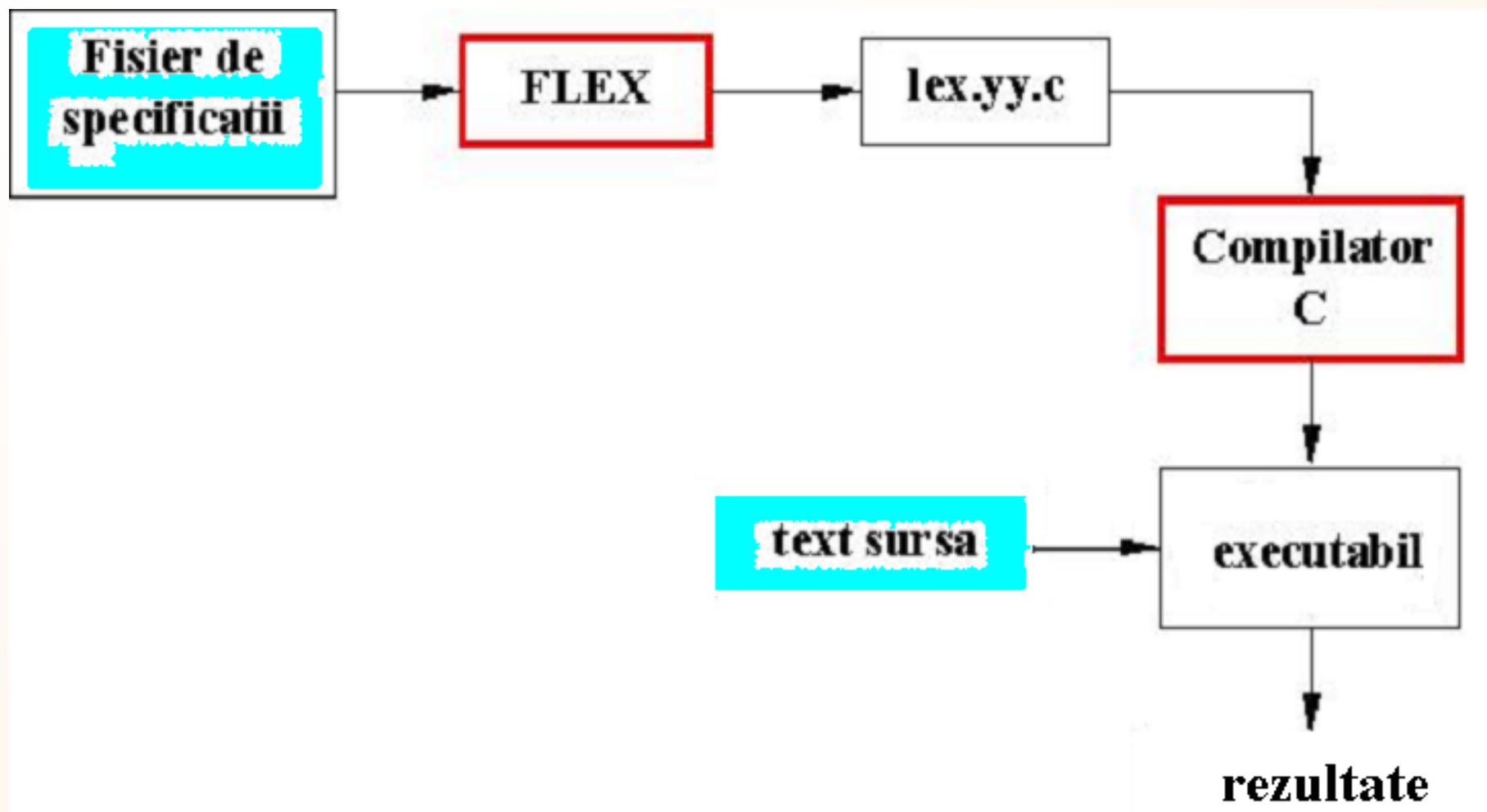
- **sablon** este o expresie regulara
- **actiune** este o secventa formata din 1 sau mai multe instructiuni C

Acestea trebuie sa inceapa pe aceeasi linie cu sablonul.

Daca dorim sa scriem instructiuni pe mai multe linii,
acestea se vor inchide intre accolade.

In particular, actiunea poate fi si vida.

Cum se lucreaza cu FLEX



Executie analizor generat cu flex

Lansarea în execuție flex

`flex [optiuni] [nume_fisier_specificatii]`

- unde *nume_fisier_specificatii* e fisierul de intrare
 - text sursa (implicit `stdin`)

e.g. (S.O. linux)

`$ flex spec.lxi` \Rightarrow `lex.yy.c`

`$ gcc lex.yy.c -o exe` \Rightarrow `exe`

`$./exe` (`<stdin>`)

`$./exe <fisier_intrare`

Fisierul de specificatii

- fisier text
- Nume:
poate avea orice nume acceptat de sistemul de operare. Din considerente istorice se prefera ca fisierul de specificatie sa aiba extensia **.lxi** sau **.l**
- Contine:
 - descrierea analizorului lexical
 - ... cod C

Sectiunea de cod utilizator

- furnizam functia main
- specificam “pornirea analizorului lexical”,
 - apelam functia yylex
- de exemplu, in sectiunea cod utilizator:

...

%%

int main()

{

yylex();

}

Sectiunea de cod utilizator

Functia: int yywrap()

- spune ce facem dupa terminarea procesarii unui fisier (primeste indicatorul EOF)
 - yywrap \neq 0 : dorim sa terminam procesarea
 - yywrap = 0 : dorim sa mai procesam ...
- de exemplu, in sectiunea cod utilizator:

...

%%

int yywrap(){return 1;}

- Optiuni echivalente cu: yywrap returneaza 1
%option noyywrap

Cateva variabile utile

*char *yytext* - reprezinta adresa zonei in care se depun caracterele atomului curent ;

int yylen - reprezinta lungimea atomului curent;

*FILE *yyin* - desemneaza fisierul care contine textul sursa de analizat;

Mod de functionare:

- pentru sabloanele recunoscute se aplica actiunile corespunzatoare din specificatie (sectiunea de reguli),
 - genereaza text specific sau “*pot returna coduri lexicale*”;
- textul din fisierul sursa care nu se potriveste cu nici un sablon este copiat automat in *yyout* (in cazul in care *yyout* nu a fost redefinit, el este implicit *stdout*);
- daca pentru un text se potrivesc mai multe sabloane, se alege potrivirea cea mai lunga;
- daca pentru un text se potrivesc mai multe sabloane de aceeasi lungime, se alege prima potrivire din specificatie, in ordine textuala;
- textul corespunzator potrivirii este copiat in variabila globala *yytext* iar lungimea acestuia este memorata in variabila globala *yyleng*.
- Cand analizorul intalneste marcajul EOF, el verifica rezultatul functiei *yywrap()*. Rezultat fals (zero) inseamna ca analiza trebuie sa continue cu noul fisier desemnat de *yyin*. Un rezultat nenul al functiei *yywrap()* determina sfarsitul analizei si returnarea valorii 0 spre apelantul lui *yylex()*.

Curs 4

- AF cu ϵ -miscari
- Expresii regulare - proprietati
- Legatura dintre AF si expresiile regulate
- Lex/flex - generator de analizor lexical

Lect. Dr. Lupsa Dana
Universitatea Babes - Bolyai
Facultatea de Matematica si Informatica
2023 - 2024

Multimi regulare

Fie Σ un alfabet.

Multimile regulare peste Σ se definesc recursiv astfel:

1. Φ - multime reg. peste Σ
2. $\{\varepsilon\}$...
3. $\{a\}$ daca: $a \in \Sigma$
4. RUS daca R, S – multimile regulare peste Σ +
5. RS daca R, S – multimile regulare peste Σ
6. R^* daca R – multime regulara peste Σ
7. Orice alta multime regulara se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6

Multimi regulare si expresii regulate

- Expresii regulate

1.	Φ	expr. reg. coresp. m.reg.	Φ
2.	ϵ		$\{\epsilon\}$
3.	a	daca: $a \in \Sigma$	$\{a\}$
4.	$r+s$	daca r,s – expresii regulate	$r s$
5.	rs	daca r,s – expresii regulate	RS
6.	r^*	daca r – expresie regulara	R^*
7.	Orice alta expr. reg. se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6		

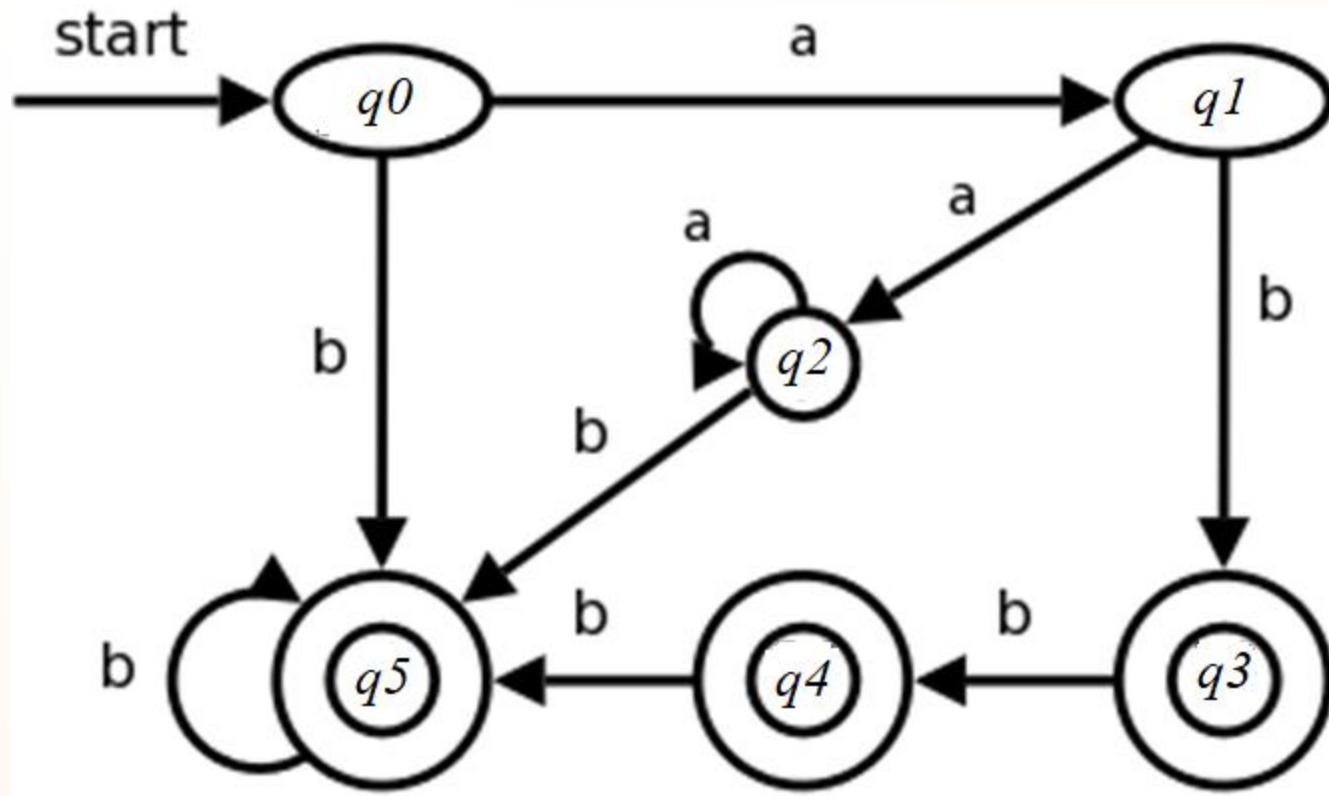
- Expresii regulate echivalente:

- mult. regulate reprezentate de acestea sunt egale

Expresii regulare

- expresiile regulare – secv. obtinute prin concatenarea de simb. din
$$\Sigma \cup \{\Phi, \varepsilon, +, *, (,)\} \quad (\dots \text{prioritate} \dots)$$
 - multimile regulare asociate expresiilor regulare sunt limbaje regulare
- => orice expresie regulară peste Σ este un limbaj regular

Expresii regulate si AF (exemplu)



Care este expresia regulară ce îl descrie pe $L(M)$?

Proprietati: expresii regulare echivalente

- “ = “ noteaza relatia dintre 2 expresii regulare echivalente

(reuniune si concaten.)

$$r + s = s + r$$

$$(r+s)+t = r+(s+t)$$

$$(rs)t = r(st)$$

$$(r+s)t = rt+st$$

$$r(s+t) = rs+rt$$

(utilizarea lui Φ si ϵ)

$$\Phi + r = r + \Phi = r$$

$$\epsilon r = r \epsilon = r$$

$$\Phi r = r \Phi = \Phi$$

$$\Phi^* = \epsilon$$

$$r^* + \epsilon = \epsilon + r^* = r^*$$

$$(\epsilon + r)^* = r^*$$

$$(r^*)^* = r^*$$

$$(r^*s^*)^* = (r+s)^*$$

Expresii regulare

Exercitiu:

Fie r, s – expresii regulare oarecare

Demonstrati ca:

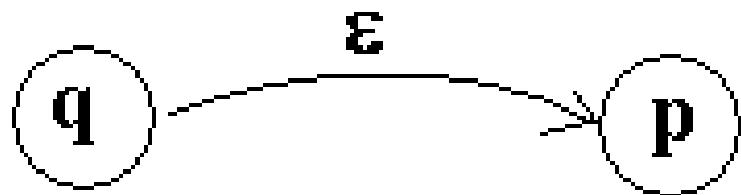
- $r^* r^* = r^*$
- $(r^*)^* = r^*$
- $(r^*s^*)^* = (r + s)^*$

Automate finite cu ε -miscari

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$: ...

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(Q)$ functia de tranzitie

Ideea: putem avea si ε -tranzitii
(automate cu ε -tranzitii)



Teorema:

Pentru orice automat finit cu ε -miscari
exista un automat finit echivalent.

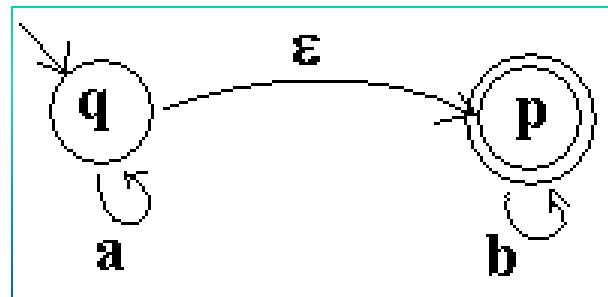
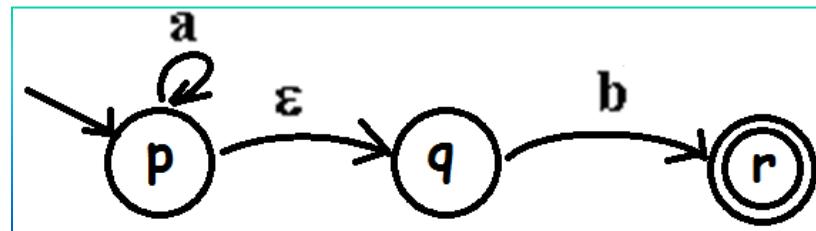
Obs. Conform definitiei pe care am dat-o (in cursul 2),
automatele finite sunt fara ε -miscari

Automate finite cu ε -miscari

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ functie de tranzitie

*Care este
automatul finit
echivalent?*



Notiuni de baza

- alfabet
- secventa
 - lungime
 - secv. vida
- concatenare
 - notatii
- subsecventa
 - prefix
 - sufix
- multimi speciale
- proprietati Σ^*
- limbaj
 - cuvant
- tipuri de limbaje
- specificarea unui limbaj
- operatii cu limbaje

Alfabet

- Def:
Alfabet = o multime finită si nevidă de elemente numite simboluri
- Notatie: Σ

Secventa

Def.

- **secventa peste Σ**
 - o succesiune finita de simboluri din Σ
- subsecventa
 - o succesiune de simboluri consecutive dintr-o secventa

Lungimea unei secvențe

- def:
 - nr. de simboluri din care este formata acea secventa
 - notatie
 - | ... |
- Ex: $|abc| = 3$
- **Secv. vida** = secv. de lungime 0
 - notatie: ε (unele surse λ)

Concatenare

Dacă

$$x = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$y = b_1 b_2 \dots b_m$$

atunci $z = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$

rezintă **concatenarea** secvențelor x și y

și se notează $z = xy$

Notatii: $aa\dots aa = a^n$

(de n ori)

Exemplu: $a^2 = aa$

Secventa

Def.

- **secventa peste Σ**
 - o succesiune finita de simboluri din Σ
- subsecventa
 - o succesiune de simboluri consecutive dintr-o secventa

w2 – subsecventa a lui w1

daca \exists secentele u, v a.i. $w1 = u \ w2 \ v$

Prefix, sufix

Fie x, y, z sunt secvențe peste alfabetul Σ

- x este un **prefix** al secvenței xy
- y un **sufix** al secvenței xy
- **Prefix:** o subsecvență care
 - fie este văzută
 - fie începe cu primul simbol al secvenței date
- **Sufix:** o subsecvență care
 - fie este văzută
 - fie se termină cu ultimul simbol al secvenței date

Multimi speciale

- $\Sigma^n = \{ w \mid w \text{ - secventa peste } \Sigma, |w| = n \}$
- $\Sigma^* = \{ w \mid w \text{ - secventa peste } \Sigma, 0 \leq |w| \}$
- $\Sigma^+ = \{ w \mid w \text{ - secventa peste } \Sigma, 0 < |w| \}$
- $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$

Operatia *

Denumiri:

- Operatia: *, steaua lui Kleene
- Inchiderea lui Kleene

Σ^* - inchiderea alfabetului

- multimea tuturor secventelor ce se pot obtine folosind secvențe din Σ

(Similar pentru limbaje)

Σ^* - proprietati

- $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$ avem: $w_1w_2 \in \Sigma^*$
- $\forall w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ avem: $(w_1w_2)w_3 = w_1(w_2w_3)$
- $\forall w \in \Sigma^*, \varepsilon w = w\varepsilon = w$

(Σ^*, \cdot) - monoid

Limbaj, cuvant

- def: (limbaj)
L – limbaj peste alfabetul Σ
daca $L \subseteq \Sigma^*$
- def: (cuvant)
Cuvant al unui limbaj – un element al limbajului

Metode de specificare a unui limbaj

- enumerand elementele
- evidențierea unor proprietăți ale elementelor
 - folosind multimi și descrieri matematice
 - ...
- folosind gramatici, automate, expresii regulate
- ...

Cateva tipuri de limbaje

- teoretice

$$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

limbaj peste $\Sigma = \{a\}$

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

limbaj peste $\Sigma = \{a, b\}$

- informatice

limbajul identificatorilor

$$\Sigma = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, _, 0, \dots, 9\}$$

$$L = \{a'w' \mid a' \in \{a, \dots, z, A, \dots, Z, _\}, w' \in \Sigma^*\}$$

- matematice

ex: limbajul reprezentarii zecimale a numerelor naturale

Multime & descriere matematica a proprietatilor

Enumerarea elementelor

Operatii cu limbaje (1)

Fie: L_1 – limbaj peste Σ_1 L_2 – limbaj peste Σ_2
(operatii cu multimi)

- $L_1 \cup L_2$ limbaj peste Σ **ales corespunzator**;

de exemplu: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

- $L_1 \cap L_2$ limbaj peste Σ ($\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$)

- $L_1 - L_2$ limbaj peste Σ ($\Sigma = \Sigma_1$)

- $L_1 L_2$ limbaj peste Σ ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$)

(operatii bazate pe concatenare)

- câtul la dreapta: $L_1 / L_2 = \{ w \in \Sigma^* | \exists y \in L_2: wy \in L_1 \}$

- câtul la stânga: $L_1 \setminus L_2 = \{ w \in \Sigma^* | \exists y \in L_2: yw \in L_1 \}$

Operatii cu limbaje (2)

- L limbaj peste un alfabet Σ
- complementara: $\overline{L} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$

- Închiderea reflexivă și tranzitivă:

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n \quad \text{unde } L^n = LL^{n-1}, \quad L^0 = \{\epsilon\};$$

- Închiderea tranzitivă:

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n \quad \text{sau } L^+ = LL^*, \quad L^* = L^+ \bigcup \{\epsilon\}$$

Gramatica independenta de context

O gramatica independenta de context este un cvadruplu

$$\mathbf{G} = (\mathbf{N}, \Sigma, P, S)$$

- \mathbf{N} este un alfabet de simboluri **neterminale**

- Σ este un alfabet de simboluri **terminale**

- $\mathbf{N} \cap \Sigma = \emptyset$

- $P \subseteq \mathbf{N} \times (\mathbf{N} \cup \Sigma)^*$

P multime finită (multimea regulilor de productie)

- $S \in \mathbf{N}$ (simbolul de start - simbolul initial)

Notatie:

$(\alpha, \beta) \in P$ se noteaza: $\alpha \rightarrow \beta$

(α se înlocuieste cu β)

Folosita pentru a specifica un limbaj

Doua tipuri de gramatici

- Gramatica independentă de context:
reg. productie sunt de forma $A \rightarrow \alpha$, $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
 - Gramatica regulară:
reg. prod. sunt de forma
 - $A \rightarrow aB$
 - $A \rightarrow b$ unde $A, B \in N$ și $a, b \in \Sigma$

Backus Naur Form

- primitive (terminale)
- variabile metalingvistice : intre paranteze unghiulare
- conective metalingvistice: ::= , |

$\langle \text{intreg_fara_semn} \rangle ::= \langle \text{cifra} \rangle \mid$
 $\qquad\qquad\qquad \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{intreg_fara_semn} \rangle$

$\langle \text{cifra} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$

Extended Backus Naur Form

- primitive (terminale): intre “ghilimele”
- variabile metalingvistice
- conective metalingvistice: = , | ,
[optional] , { de oricate ori }
- punctul este folosit ca sfarsit de regula

intreg_fara_semn = cifra { cifra } .

cifra = “0” | “1” | ... | “9” .

Operatii cu limbaje (1)

Fie: L_1 – limbaj peste Σ_1 L_2 – limbaj peste Σ_2
(operatii cu multimi)

- $L_1 \cup L_2$ limbaj peste Σ **ales corespunzator**;

de exemplu: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

- $L_1 \cap L_2$ limbaj peste Σ ($\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$)

- $L_1 - L_2$ limbaj peste Σ ($\Sigma = \Sigma_1$)

- $L_1 L_2$ limbaj peste Σ ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$)

(operatii bazate pe concatenare)

- câtul la dreapta: $L_1 / L_2 = \{ w \in \Sigma^* | \exists y \in L_2: wy \in L_1 \}$

- câtul la stanga: $L_1 \setminus L_2 = \{ w \in \Sigma^* | \exists y \in L_2: yw \in L_1 \}$

Operatii cu limbaje (2)

- L limbaj peste un alfabet Σ
- complementara: $\overline{L} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$

- Închiderea reflexivă și tranzitivă:

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n \quad \text{unde } L^n = LL^{n-1}, \quad L^0 = \{\epsilon\};$$

- Închiderea tranzitivă:

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n \quad \text{sau } L^+ = LL^*, \quad L^* = L^+ \bigcup \{\epsilon\}$$

Limbaje formale si tehnici de compilare.

Introducere

2023-2024

Translator. Compilator.

Translator: program

care traduce textul unui program, numit program sursa,
intr-un alt program, numit program obiect.

Cele doua programe sunt echivalente din punct de vedere
semantic.

Compilator: translator

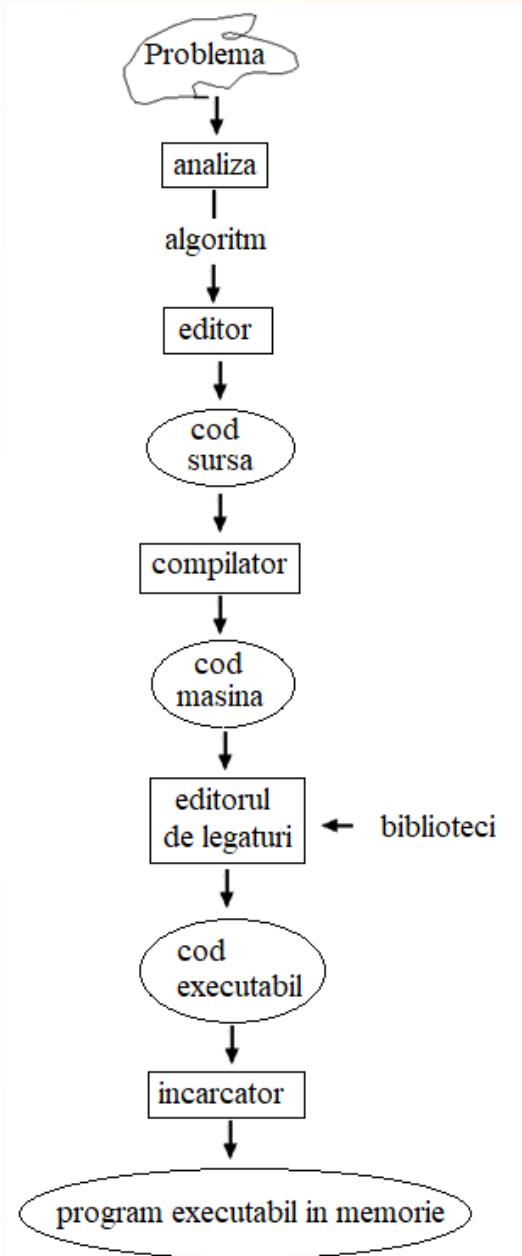
programul obiect este în cod (limbaj) masina
(sau cod al unei masini virtuale)



- Ex.: tpc, bcc, gcc

Compilator

- Locul compilatorului



Compilator vs. interpretor

- Compilator
 - parcurge întregul program și il traduce în cod de mașină
- Interpretor:
 - (program)
 - la un moment dat
 - citește o singură linie de program,
 - o traduce în cod mașină
 - o execută

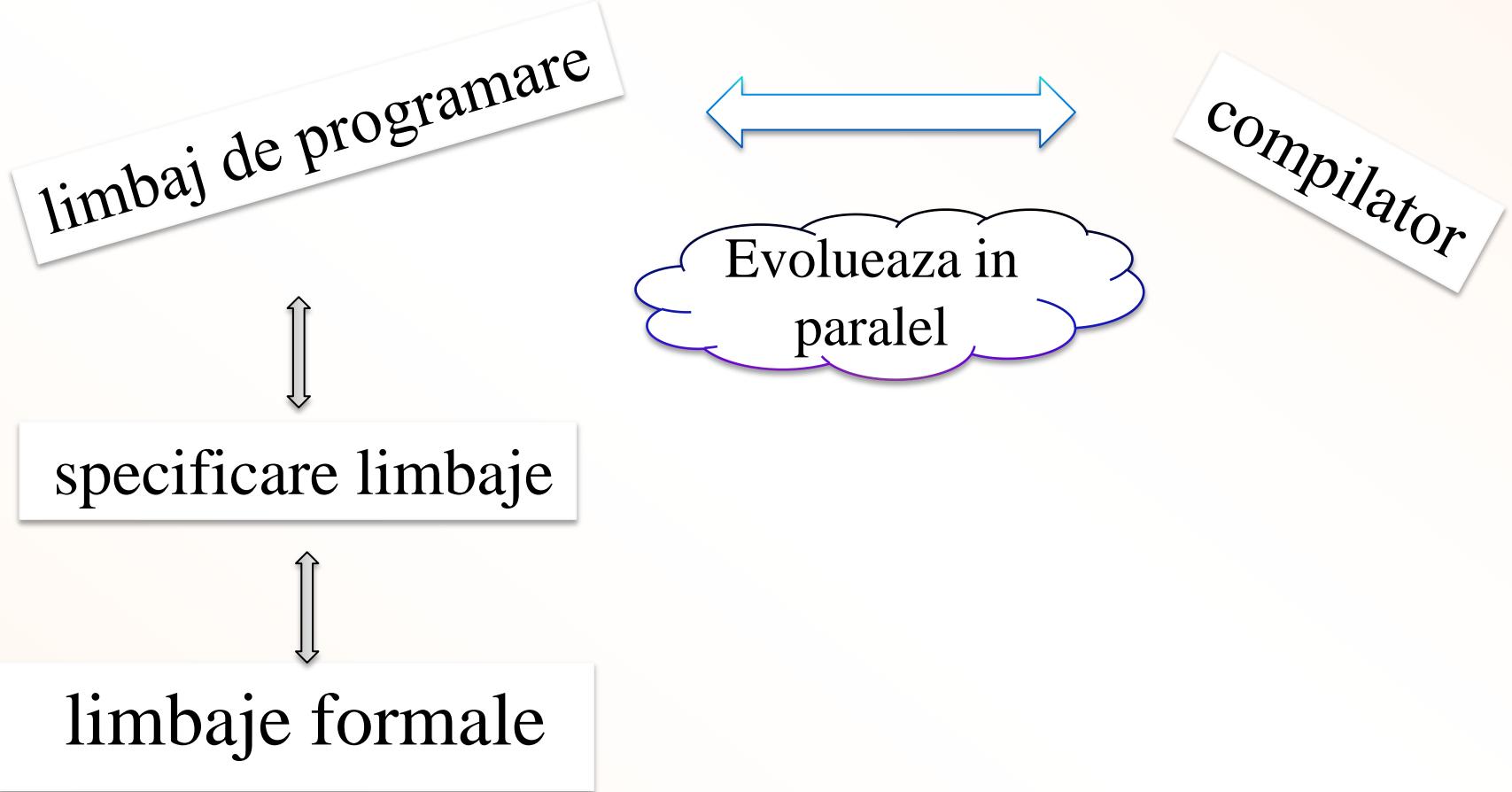


Un compilator este mai rapid decât un interpretor.

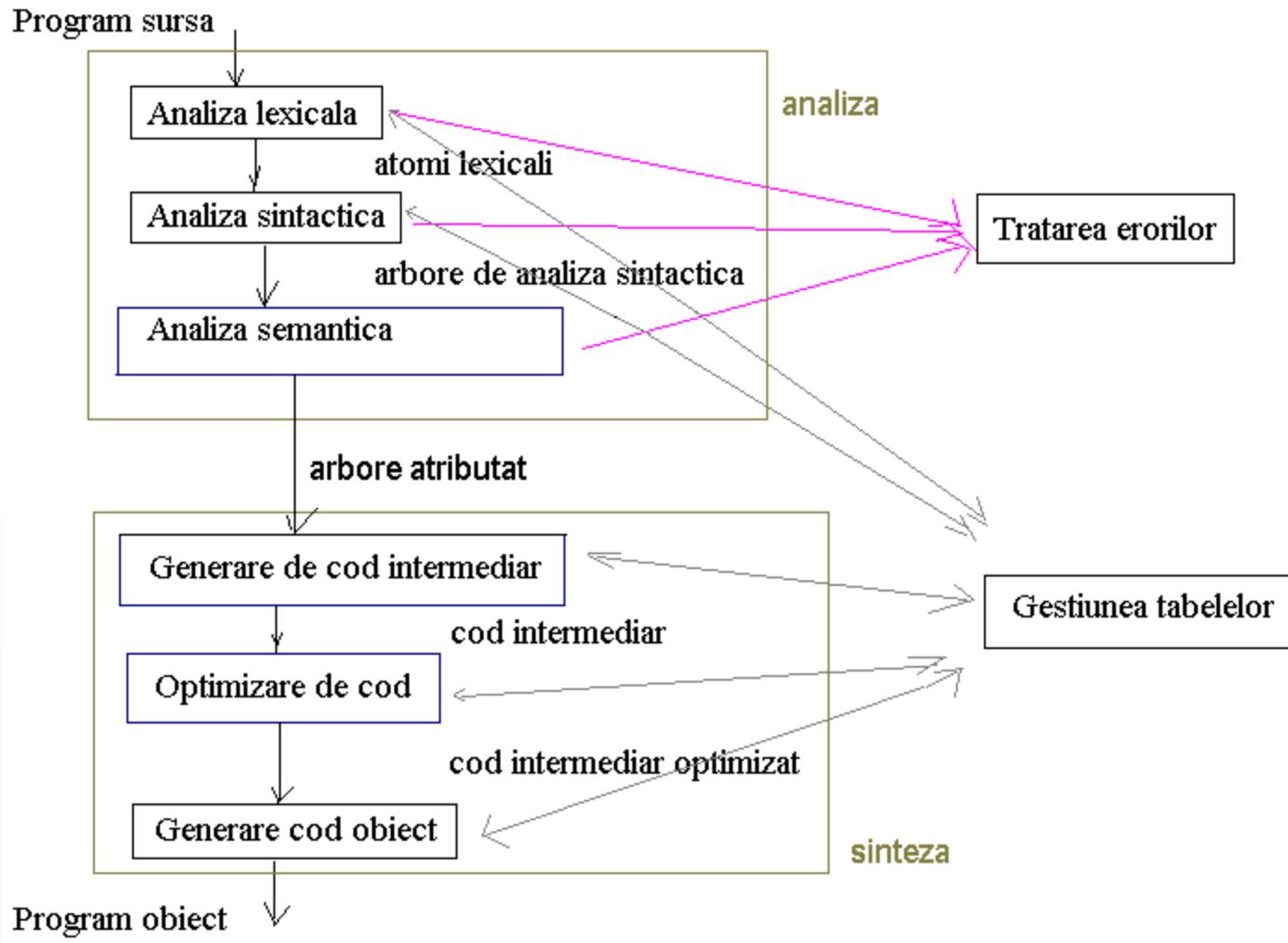
Limbaj de programare

- De ce e importanta specificarea limbajului de programare ?
Comunicare între:
 - proiectantul limbajului,
 - programatorii care scriu compilatoarele, ...
 - programatorii care utilizeaza compilatoarele
- Ce specificăm?
 - Reguli referitoare la corectitudinea textului ca limbaj de programare (semantică statică)
 - Semanticii programelor (numită și semantică de rulare)
- Ce mecanisme se folosesc pentru specificare?
 - ...

Limbaj de programare



Structura unui compilator



Limbaje formale si tehnici de compilare. Continut

Limbaj formal

Limbaj regulare:

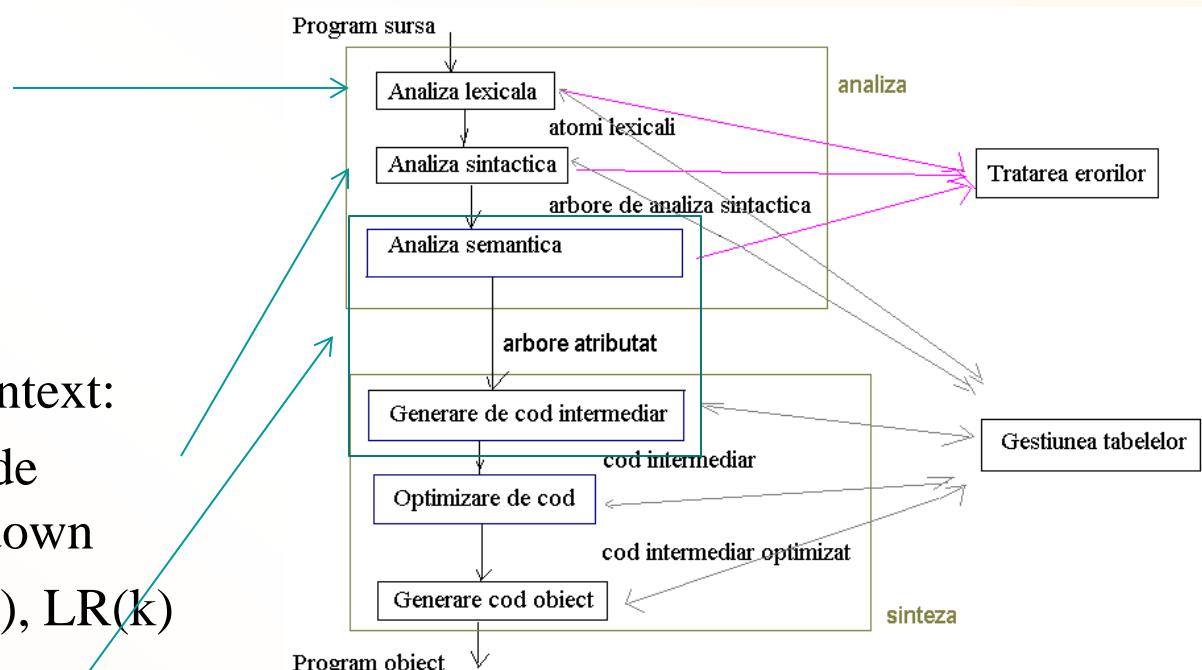
- gramatici regulare,
- automate finite,
- expresii regulare.

Limbaje independente de context:

- Gramatici independente de context, automate push-down
- Gramatici speciale: LL(k), LR(k)

Gramatici de atrbute

Structura unui compilator



Curs 1

- Aspecte organizatorice
 - Bibliografie
- Limbaje formale si tehnici de compilare. Introducere
 - translator, compilator; structura unui compilator
 - legatura cu limbajele formale
- Limbaj, specificare
- Analiza lexicala

Lect. Dr. Lupsa Dana
Universitatea Babes - Bolyai
Facultatea de Matematica si Informatica
2023 - 2024

Analiza lexicală

Atomi lexicali:

- identificatori
- constante (literali)
- cuvinte cheie (*cuvinte rezervate*)
- operatori aritmetici, relationali, ...
separatori

Clase de atomi
lexicali

spatiile "albe"

cuvinte cheie - simboluri sintactice

cuvinte rezervate - nu pot fi folosite ca identificatori
(semnificatii speciale)

Analiza lexicală

Analiza lexicală

- Date: fisier text
 - Rezultate: FIP, TS
sau: mesaj de eroare
-

TS: tabela de simboluri

- informații despre identificatori și constante
nume, tip, ...

FIP: forma internă a programului

- Cod atom lexical
- Poziția în TS (unde e cazul)

Analiza lexicala, FIP, TS – exemplu partial

if a < b then b:=a

- Care sunt elementele lexicale ?
- Descrieti sintaxa instructiunilor.
- Creati un alt exemplu care respecta sintaxa descrisa.

FIP

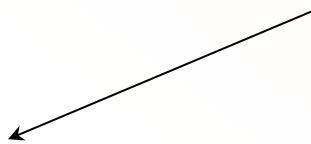
Cod	Atom lexical
0	ID
1	CONST
2	:=
3	<
4	if
5	then

TS

Pozitie	Atom lexical	Alte informatii
1	a	...
2	b	...

Analiza lexicala (versiunea 1)

detecteaza



Pentru fiecare *atom* lexical din fisierul sursa

clasifica *atom*

codifica *atom*

Sf.pentru

Analiza lexicala (versiunea 2)

Cat timp (mai exista caractere necitite in prg. sursa) ex.

detecteaza *atom*

clasifica *atom*

codifica *atom*

Sf.cattimp

Analiza lexicala (versiunea 3)

Clasifica

Cat timp (mai exista caractere necitite in prg. sursa) ex detecteaza atom

Daca e cuvant-cheie sau operator sau separator atunci adauga in FIP codul corespunzator atomului

Altfel

Daca e identifier sau **constanta**

Daca nu exista deja in TS atunci adauga-l ; Sf. Daca adauga in FIP codul coresp. atomului si pozitia in TS

altfel

Eroare

Sf.Daca

Sf. Daca

Sf.cattimp

Analiza lexicala (versiunea 4)

Cat timp (mai exista caractere necitite in prg. sursa) ex
detecteaza *atom*

Daca *atom* e cuvant-cheie sau operator sau separator atunci
adaugaFIP(cod(*atom*), 0)

Altfel

Daca *atom* e identificator atunci

indice:=poz(*atom*, TS)
adaugaFIP((cod_id, indice))

altfel Daca *atom* e constanta atunci

indice:=poz(*atom*, TS)
adaugaFIP((cod_const, indice))

altfel

MesajEroare:, indicatie asupra erorii

sfDaca

Sf.Daca

Sf. Daca

Sf.cattimp

Obs.: multe cautari in TS

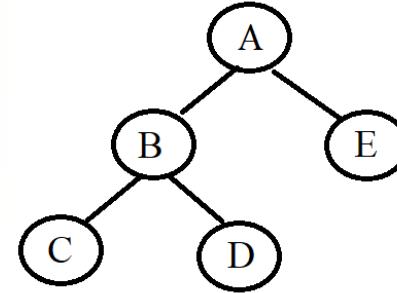
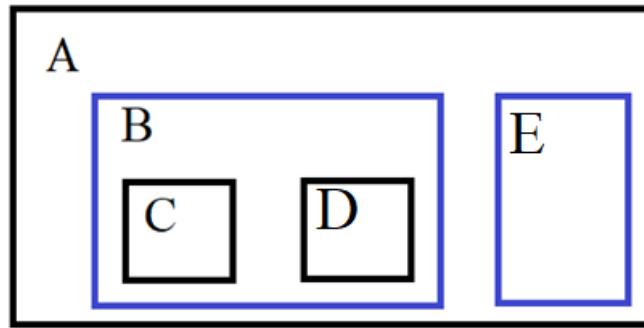
++ urmatoarele faze !!

- TS fara organizare
 - cautare secventiala
- organizare pt. cautare mai rapida
 - ordonare (ordonata lexicografic)
 - tabel ordonat lexicografic
 - arbore binar de cautare echilibrat
 - tabela de dispersie
 - cautare – fct. de dispersie
(hash)



Probleme ?

TS si programe cu mai multe blocuri



Obs.:
noi vom lucra doar cu
un singur bloc program

Se construieste cate o TS pt. fiecare bloc

Se construieste o tabela pentru incluziunea
blocurilor

Cum se modifica
algoritmul de cautare
in TS?

nume bloc	parinte	"legatura" TS
A		TS.A
B	1	TS.B
C	2	TS.C
D	2	TS.D
E	1	TS.E

Curs 3

- Gramatici. Clasificarea Chomsky
 - Gramatici regulare
 - Limbaje regulare. Echivalente
 - Expresii regulare
- Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

Gramatica

O gramatica este un cvadruplu $\mathbf{G} = (\mathbf{N}, \Sigma, P, S)$

- \mathbf{N} este un alfabet de simboluri ***neterminale***
- Σ este un alfabet de simboluri ***terminale***
- $\mathbf{N} \cap \Sigma = \emptyset$
- $P \subseteq (\mathbf{N} \cup \Sigma)^* \mathbf{N} (\mathbf{N} \cup \Sigma)^* \times (\mathbf{N} \cup \Sigma)^*$
 - P multime finită (multimea regulilor de productie)
 - $S \in \mathbf{N}$ (simbolul de start - simbolul initial)

Notatie:

$(\alpha, \beta) \in P$ se noteaza: $\alpha \rightarrow \beta$
(α se înlocuieste cu β)

Notatii

- la nivel abstract (exemple matematice, specificari)
 - Σ : a,b,... litere mici de la inceputul alfabetului
 - N: A,B,.. litere mari de la inceputul alfabetului
 - Σ sau N: X,Y,...litere mari de la sfarsitul alfabetului
 - Σ^* : x,y,... litere mici de la sfarsitul alfabetului
 - $(\Sigma \cup N)^*$: α, β, \dots litere grecesti
- nu se folosesc spatii cand avem nevoie de mai multe caractere pentru a specifica un simbol (terminal sau neterminal)

Relatii de derivare

relatii binare peste $(\Sigma \cup N)^*$ adica $(\Sigma \cup N)^* \times (\Sigma \cup N)^*$

- derivare directă

$$\gamma \Rightarrow \delta \Leftrightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$$

a.i. $\gamma = \gamma_1 \alpha \gamma_2$, $\delta = \gamma_1 \beta \gamma_2$, iar $(\alpha \rightarrow \beta) \in P$

- k-derivare

$\overset{k}{\Rightarrow}$

(o succesiune de k derivări directe)

- + derivare

$\overset{+}{\Rightarrow}$

dacă $\exists k > 0$ a.i. cele 2 secvențe să fie într-o relație de "k derivare"

- * derivare

$\overset{*}{\Rightarrow}$

dacă fie cele 2 secvențe sunt egale, fie între ele există o relație de +derivare

Limbaj generat de o gramatica

- Limbaj generat gramatica $G=(N, \Sigma, P, S)$
$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \xrightarrow{*} w \}$$
- Forma propositională
– $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ a.i. $S \xrightarrow{*} \alpha$
- Propozitie (cuvant)
– un element din $L(G)$
- Gramatici echivalente
daca genereaza acelasi limbaj

Tipuri de gramatici

- Gramatica monotonă
 - $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P: |\alpha| \leq |\beta| \quad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$
 - caz special: $S \rightarrow \epsilon$ poate să aparțină lui P. În acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de producție.
- Gramatica dependenta de context
reguli de producție sunt de forma:
$$\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta \quad A \in N$$
$$\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \neq \epsilon$$
 - caz special: $S \rightarrow \epsilon$ poate să aparțină lui P. În acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de producție.

Tipuri de gramatici

- Gramatica regulara:

reg. prod. sunt de forma

- $A \rightarrow aB$

- $A \rightarrow b$

unde $A, B \in N$ și $a, b \in \Sigma$

caz special: $S \rightarrow \epsilon$ poate $\in P$. În acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de producție.

- Gramatica independentă de context:

reg. producție sunt de forma $A \rightarrow \alpha$, $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$

Clasificarea Chomsky

- Gramatici de tip **0**
nici o restrictie (*suplimentara*) referitoare la forma regulilor de productie
- Gramaticile de tip **1**
dependente de context \Leftrightarrow *gramatici monotone*
(*monotonic, non-contracting*)
- Gramaticile de tip **2**
gramatici independente de context
- Gramaticile de tip **3**
gramatici regulate
=> Limbaje independente de context
=> Limbaje regulate

Ierarhia Chomsky

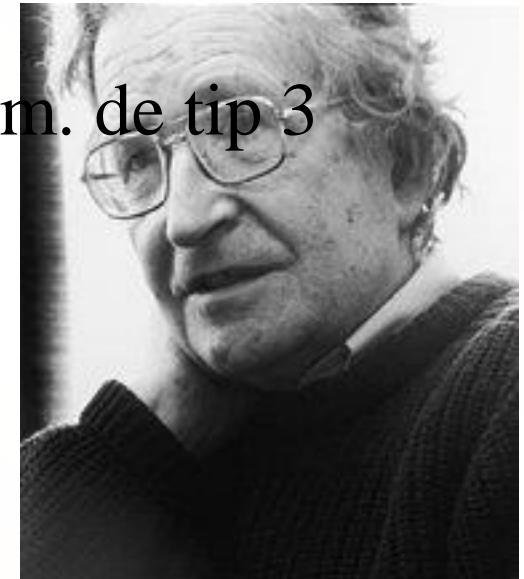
Fie

~ 1959-1963

- \mathcal{L}_0 - multimea limbajelor generate de gram. de tip 0
- \mathcal{L}_1 - multimea limbajelor generate de gram. de tip 1
- \mathcal{L}_2 - multimea limbajelor generate de gram. de tip 2
- \mathcal{L}_3 - multimea limbajelor generate de gram. de tip 3

Are loc:

$$\mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \mathcal{L}_3$$



Ierarhia Chomsky: observatii

Teorema:

Fiecare dintre familiile de limbaje:

$$\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$$

este inchisa fata de operatia de reuniiune

Limbaje regulare. Echivalente

- Limbaj regular
 - = limbaj generat de o gramatica regulara
- putere de exprimare
 - AF: AFN \leftrightarrow AFD
 - AF \leftrightarrow gr.regulare
 - AF \leftrightarrow (m.regulare \leftrightarrow expr.reg.)

Multimi regulare

Fie Σ un alfabet.

Multimile regulare peste Σ se definesc recursiv astfel:

1. Φ este o m. reg. peste Σ
2. $\{\varepsilon\}$
3. $\{a\}$ daca: $a \in \Sigma$
4. RUS daca R, S – multim regulare peste Σ +
5. RS daca R, S – multim regulare peste Σ
6. R^* daca R – multime regulara peste Σ
7. Orice alta multime regulara se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6

Multimi regulare si expresii regulare

- Expresii regulare

1.	Φ	expr. reg. coresp. m.reg.	Φ
2.	ϵ		$\{\epsilon\}$
3.	a	daca: $a \in \Sigma$	$\{a\}$
4.	$r+s$	daca r,s – expresii regulare	$r s$
5.	rs	daca r,s – expresii regulare	RS
6.	r^*	daca r – expresie regulara	R^*
7.	Orice alta expr. reg. se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6		

- Expresii regulare echivalente:

- mult. regulare reprezentate de acestea sunt egale

Expresii regulare

- expresiile regulare – secv. obtinute prin concatenarea de simb. din
$$\Sigma \cup \{\Phi, \varepsilon, +, *, (,)\} \quad (\dots \text{prioritate} \dots)$$
- multimile regulare asociate expresiilor regulare sunt limbaje regulare

Deci: *Orice expresie regulară peste Σ descrie un limbaj regular peste Σ*

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

Teorema:

Daca

L_1, L_2 sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

atunci:

$L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 L_2, L_1^*, \text{complement}(L_1)$
sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

Lema de pompare pt. limbaje regulare

- Daca L este un limbaj regular,
- atunci $\exists p \in \mathbf{N}^*$ (fix pt. un limbaj dat)
(oricat de mare)
- astfel incat:
 $\forall w \in L$ de lungime cel putin p
exista o descompunere de forma $w=xyz$,
unde $0 < |y| \leq p$
cu proprietatea ca: $xy^i z \in L, \forall i \in \mathbf{N}$

Lema de pompare pt. limbaje regulare

$(\forall L \subseteq \Sigma^*)$

$(\text{regular}(L) \Rightarrow$

$((\exists p \geq 1)((\forall w \in L)((|w| \geq p) \Rightarrow$

$((\exists x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \wedge (|y| \geq 1 \wedge |y| \leq p \wedge (\forall n \geq 0)(xy^n z \in L)))))))$

(enunt formal al teoremei)

Lema de pompare pt. limbaje regulare

(o alta versiune, mai “puternica”)

Daca L este un limbaj regular,

- atunci $\exists p \in \mathbb{N}^*$ (fix pt. un limbaj dat)
(oricat de mare)
- astfel incat:
 $\forall w \in L$ de lungime cel putin p
exista o descompunere de forma $w=xyz$ astfel incat
 - $0 < |y|$
 - $|x y| \leq p$
 - $xy^i z \in L, \forall i \in \mathbb{N}$

Lema de pompare pt. limbaje regulare

Observatii:

- Lema da o conditie necesara dar nu suficiente
- daca un limbaj satisface conditiile lemei nu inseamna ca este regular
- folosim negatia lemei de pompare pt. a dem. ca un limbaj nu este regular

Lema de pompare pt. limbaje regulare

De ce se intampla asa:

- Daca L – limb. reg.

\Rightarrow exista G – gram. reg. a.i. $L(G) = L$ (def.)

\Rightarrow exista M – AF a.i. $L(M) = L$ (teorema)

- Fie p – nr. de stari ale lui M
- daca $|w| \geq p$ si w – acceptat

$\Rightarrow \exists$ un drum in graful asociat lui M a.i. etichetele arcelor sunt simboluri din w

\Rightarrow drumul este de lungimea p ; adica trece prin $p + 1$ noduri din graf

$\Rightarrow \exists$ un nod prin care se trece de cel putin 2 ori

\Rightarrow ciclu/bucla – care se poate repeta de oricate ori !!

\Rightarrow se poate repeta sirul etichetelor arcelor din bucla !!

(de 0 sau mai multe ori)

Exemplu:

Fie L - limbajul regular corespunzator expresiei regulare:

aa^*b^*

1) fie $w = ab$;

Puteti identifica o descompunere $w=xyz$ a.i. xy^iz in L ?

2) fie $w = aa$;

Puteti identifica o descompunere $w=xyz$ a.i. xy^iz in L ?

Analog pt.: $a(ba)^*$

si $w = aba$

Analog pt.: $L=\{a,b\}$ si $w = a$

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulate

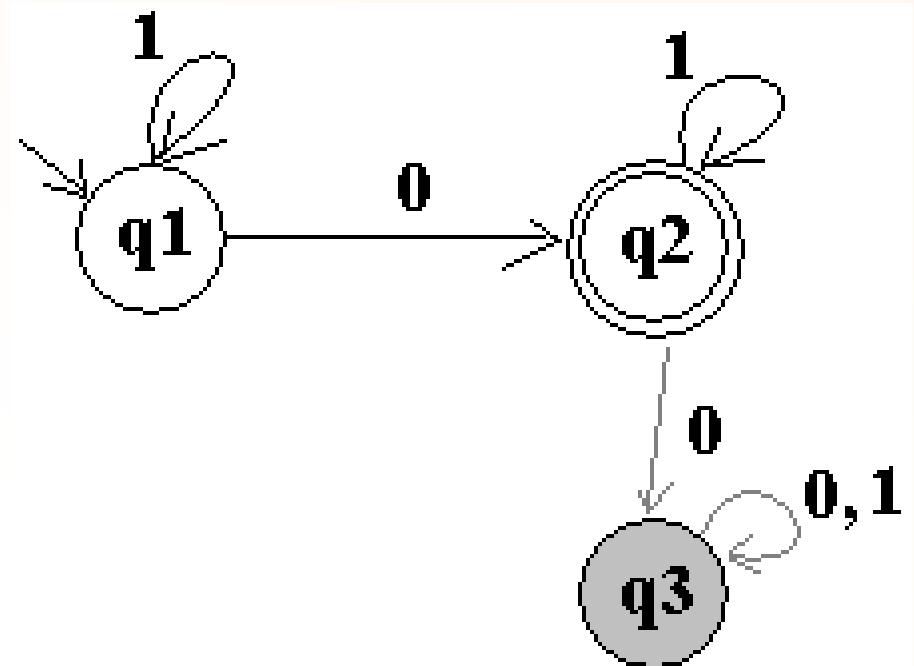
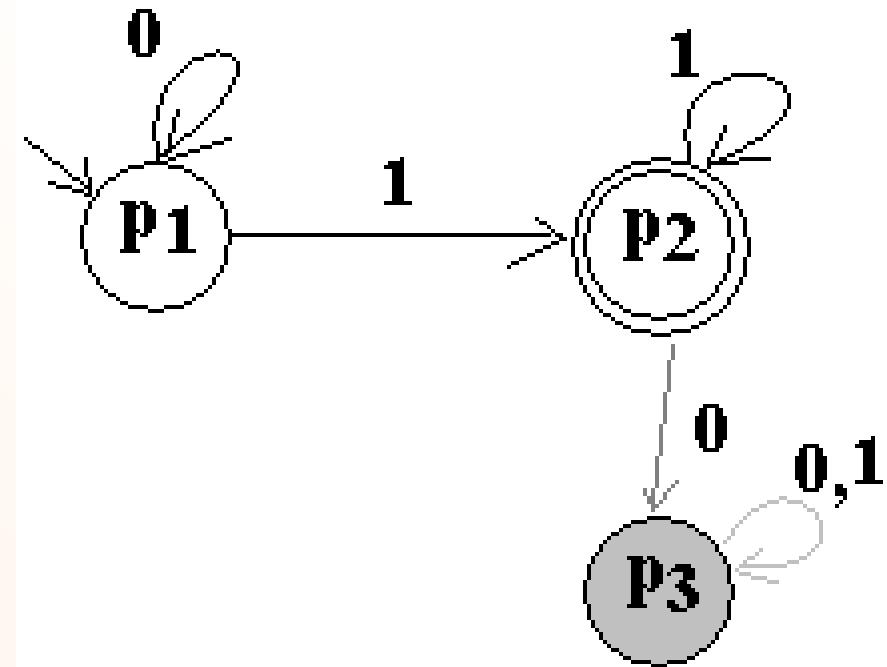
$L_1 \cap L_2$

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$
- $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$
- ? $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

PP. ca aut. M_1 si M_2 sunt deterministe, complet definite !

(alg. de constr. !!)

- $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2)$
- $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$



Proprietati de inchidere ale limbajelor regulate

complement(L_1)

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$
- $?M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

PP. ca aut. M_1 este determinist complet definit !
(alg. de constr.)

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, Q_1 - F_1)$