Logică computațională
Curs 11

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Algebre booleene

- introduse de George Boole (1815-1864)
- stau la baza definirii funcţiilor booleene
  - care sunt utilizate în realizarea circuitelor logice

Definirea axiomatică (1)

O ***algebră booleană*** este o structură $(A, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1)$, unde:

- $|A| \geq 2$, A conţinând cel puţin 2 elemente diferite, 0 şi 1, $0 \neq 1$
- $\wedge, \vee$ sunt operaţii binare
- $\overline{}$ este operator unar
- există elementul unic 0 – elementul zero, cu proprietăţile:

  $x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0$ şi $x \vee 0 = 0 \vee x = x$, $\forall x \in A$
- există elementul unic 1 – elementul unitate, cu proprietăţile:

  $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$ şi $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$, $\forall x \in A$
- elementul zero, 0 şi cel unitate, 1 sunt primul respectiv ultimul element, iar $\overline{x}$ este complementul lui x:

  $x \wedge \overline{x} = 0$ şi $x \vee \overline{x} = 1$, $\forall x \in A$
- dubla negaţie:

  $\overline{\overline{x}} = x$, $\forall x \in A$

Definirea axiomatică (2)

- operaţiile $\wedge$, $\vee$ sunt comutative:
  $x \wedge y = y \wedge x$ şi $x \vee y = y \vee x$, $\forall x, y \in A$
- operaţiile $\wedge$, $\vee$ sunt asociative:
  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ $(= x \wedge y \wedge z)$ şi
  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $(= x \vee y \vee z)$, $\forall x, y, z \in A$
- au loc proprietăţile de distributivitate ale operatorilor $\wedge$ şi $\vee$:
  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ şi
  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $\forall x, y, z \in A$
- are loc proprietatea de idempotenţă pentru ambele operaţii:
  $x \wedge x = x$ şi $x \vee x = x$, $\forall x \in A$
- au loc legile lui De Morgan:
  $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ şi $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\forall x, y \in A$
- au loc proprietăţile de absorbţie:
  $x \wedge (x \vee y) = x$ şi $x \vee (x \wedge y) = x$, $\forall x, y \in A$

Observații

- Într-o algebră booleană are loc principiul dualităţii:

  „Pentru orice egalitate între două expresii booleene $U = V$, există o nouă egalitate $U' = V'$, obţinută prin interschimbarea operaţiilor $\wedge$, $\vee$ şi a elementelor: 0, 1”.
- majoritatea axiomelor algebrei booleene, sunt perechi de axiome duale

Algebra booleană binară

$\boldsymbol{B} = (B_2 = \{0,1\}, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$

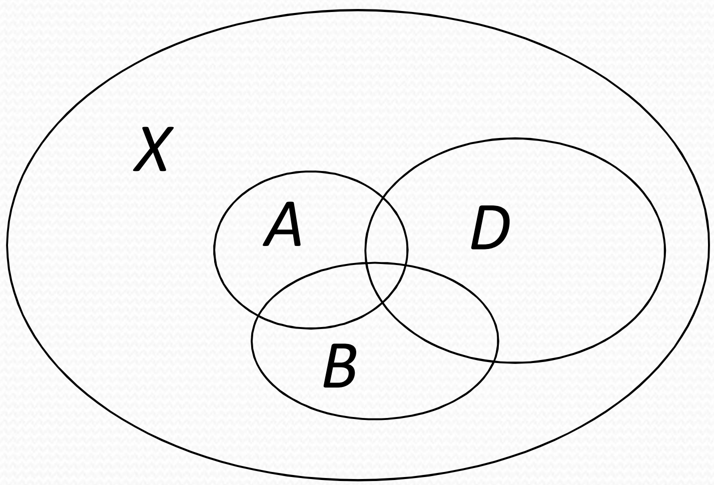
$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

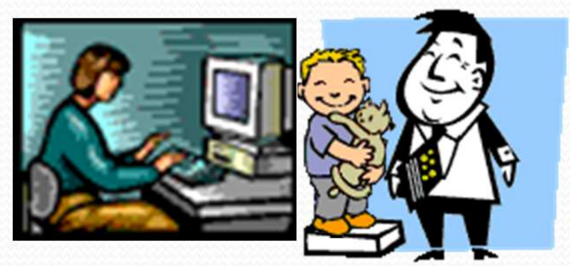
x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Alte exemple de algebre booleene

- $(F_P, \wedge, \vee, \neg, \mathrm{F}, \mathrm{T})$
- $(\mathscr{P}(X), \cap, \cup, C, \varnothing, X)$



Problemă practică

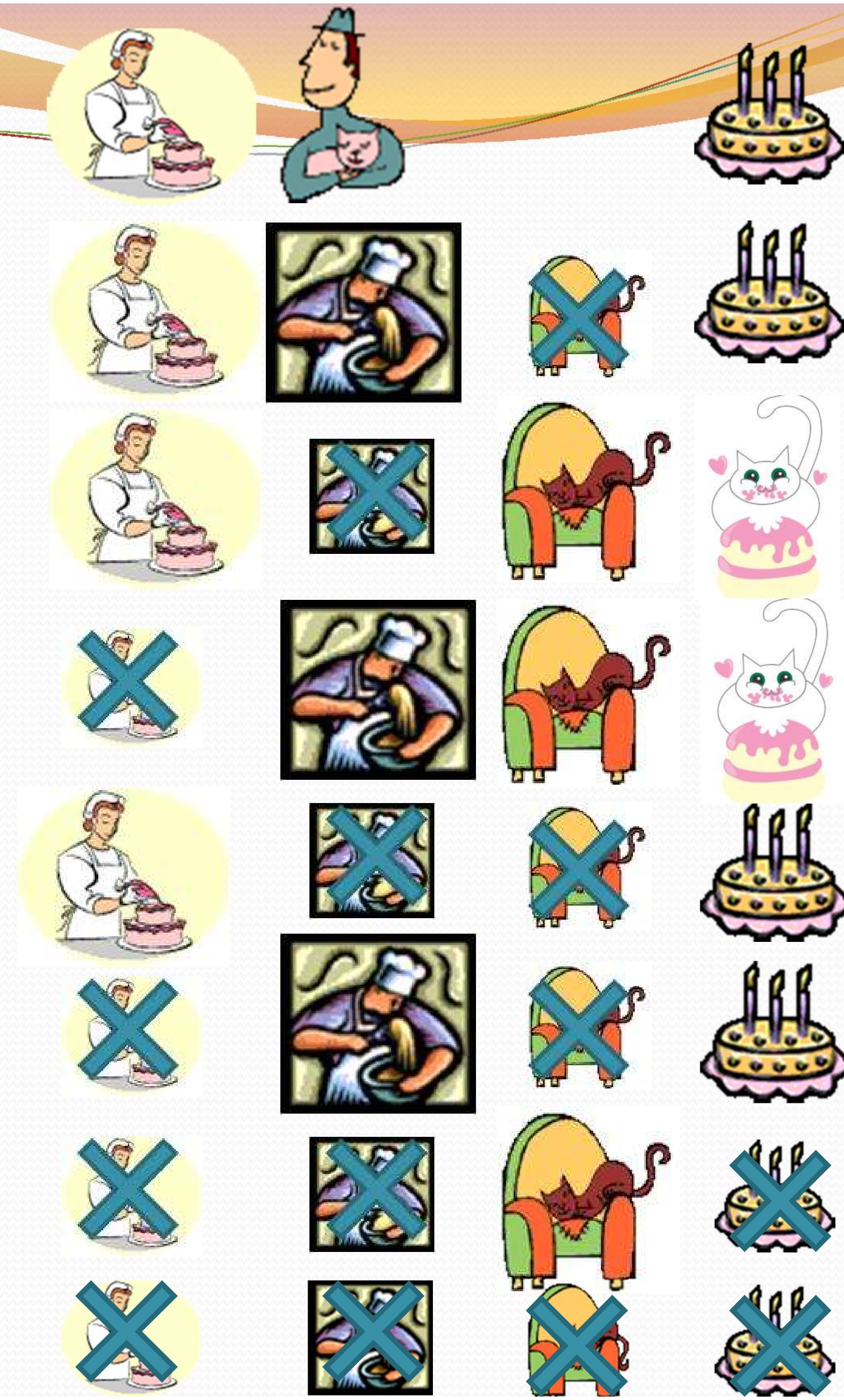


- Cine face tortul?

Soluțiile posibile

$x, \quad y, \quad z$

$f(x, y, z) =$ 



Funcții booleene

Fie $\boldsymbol{B} = (B_2, \wedge, \vee, \overline{\ }, 0, 1)$ algebra booleană binară, $B_2 = \{0, 1\}$ şi $n \in \boldsymbol{N}^*$. O *funcţie booleană de n variabile* este o funcţie definită recursiv astfel:

1. Funcţia *proiecţie*: $P_i : B_2^n \to B_2$, $P_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$, care păstrează doar variabila x_i, este o funcţie booleană.
2. Dacă avem două funcţii booleene $f, g : B_2^n \to B_2$, atunci $f \wedge g, f \vee g, \overline{f}$ sunt funcţii booleene, unde:
   $(f \wedge g)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \wedge g(x_1, ..., x_n)$
   $(f \vee g)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \vee g(x_1, ..., x_n)$
   $\overline{f}(x_1, ..., x_n) = \overline{f(x_1, ..., x_n)}$

- Orice funcţie booleană este obţinută prin aplicarea de un număr finit de ori a regulilor 1 şi 2 de mai sus.

Toate funcțiile booleene definite pe $\boldsymbol{B_2}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \boldsymbol{B_2}$

pentru $n=1$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Teoreme

- $\forall\, n \in \boldsymbol{N}^*$, există 2^{2^n} funcţii booleene de n variabile.

- Mulţimea tuturor funcţiilor booleene de $n \in \boldsymbol{N}^*$ variabile formează o algebră booleană: $(\mathbf{FB}(\boldsymbol{n}), \wedge, \vee, \bar{\ }, f_0, f_{2^{2^n}-1})$, unde $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ şi $f_{2^{2^n}-1}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ funcţiile constante 0, respectiv 1.

Notații

- $$x^{\alpha} = \begin{cases} x, \text{dacă } \alpha = 1 \\ \overline{x}, \text{dacă } \alpha = 0 \end{cases}, x \in \{0, 1\}$$

- Pentru $x, \alpha \in \{0, 1\}$, au loc: $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$ şi

$$0^0 = \overline{0} = 1;\ 0^1 = 0;$$
$$1^0 = \overline{1} = 0;\ 1^1 = 1$$

- Astfel, se obţine: $$x^{\alpha} = \begin{cases} 1, \text{dacă } x = \alpha \\ 0, \text{dacă } x \neq \alpha \end{cases}, x, \alpha \in \{0, 1\}$$

Formele canonice ale funcțiilor booleene (1)

O funcţie booleană $f : (B_2)^n \to B_2$, $n \in \boldsymbol{N}^*$ poate fi transformată în cele două forme echivalente:

- *forma canonică disjunctivă* (FCD):

$$(1)\ f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(B_2)^n} (f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n})$$

- *forma canonică conjunctivă* (FCC):

$$(2)\ f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(B_2)^n} (f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \vee x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}})$$

Formele canonice ale funcțiilor booleene (2)

O funcţie booleană $f: (B_2)^n \to B_2$, $n \in \boldsymbol{N}^*$ este unic determinată de valorile sale $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, unde $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (B_2)^n$:

- forma canonică disjunctivă:

$$(1) \Leftrightarrow (1') \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (B_2)^n \text{ şi } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1} (x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n})$$

- forma canonică conjunctivă:

$$(2) \Leftrightarrow (2') \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (B_2)^n \text{ şi } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}})$$

Observație

- Forma canonică *disjunctivă* este recomandată în caz contrar, când există un *număr mare de zerouri* ale funcţiei şi un număr mic de valori 1.
- Forma canonică *conjunctivă* este utilă când există un număr mic de zerouri şi un *număr mare de valori* 1 (realizări).

- Funcţia booleană f_0 nu poate fi scrisă în forma canonică disjunctivă, deoarece nu ia valoarea 1 pentru niciun argument.
- Funcţia booleană $f_{2^{2^n}-1}$ nu poate fi scrisă în forma canonică conjunctivă, deoarece nu ia valoarea 0 pentru niciun argument.

Definiție

Fie $f:(B_2)^n \to B_2$, $n \in \boldsymbol{N}^*$ o funcţie booleană cu n variabile.

- O conjuncţie de variabile se numeşte ***monom***.
- Un monom care conţine toate cele n variabile se numeşte ***monom canonic*** sau ***minterm*** de n variabile. Are forma:

  $x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in B_2$

- Disjuncţia care conţine toate cele n variabile, având forma:

  $x_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in B_2$ se numeşte ***maxterm*** de n variabile.

Proprietăți

- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, există exact 2^n maxtermi, notaţi cu $M_0, M_1, ..., M_{2^n-1}$ şi exact 2^n mintermi, notaţi cu $m_0, m_1, ..., m_{2^n-1}$.
- Un *maxterm* este o funcţie booleană care ia valoarea 0 doar pentru un argument.
- Un *minterm* este o funcţie booleană care ia valoarea 1 doar pentru un argument.

Observație

- Indicele unui minterm de *n* variabile este obţinut prin conversia în zecimal a numărului binar format cu cifrele ce reprezintă puterile celor *n* variabile ale expresiei acestuia.
- Indicele unui maxterm de *n* variabile este obţinut prin conversia în zecimal a numărului binar, format cu dualele cifrelor ce reprezintă puterile celor *n* variabile ale expresiei acestuia.

Propoziție

- Conjuncţia a doi mintermi distincţi este 0:

$$m_i \wedge m_j = 0, \forall i \neq j, \quad i, j = 0,\ldots, 2^{n-1}$$

- Disjuncţia a doi maxtermi distincţi este 1:

$$M_i \vee M_j = 1, \forall i \neq j, \quad i, j = 0,\ldots, 2^{n-1}$$

- Un minterm şi un maxterm cu acelaşi indice sunt funcţii duale.

$$M_i = \overline{m_i}, \overline{M}_i = m_i, \forall i = 0,\ldots, 2^{n-1}$$

Observație

- Forma canonică conjunctivă, *FCC*, este conjuncţia maxtermilor corespunzători argumentelor pentru care funcţia ia valoarea 0.

- Forma canonică disjunctivă, *FCD*, este disjuncţia mintermilor corespunzători argumentelor pentru care funcţia ia valoarea 1.

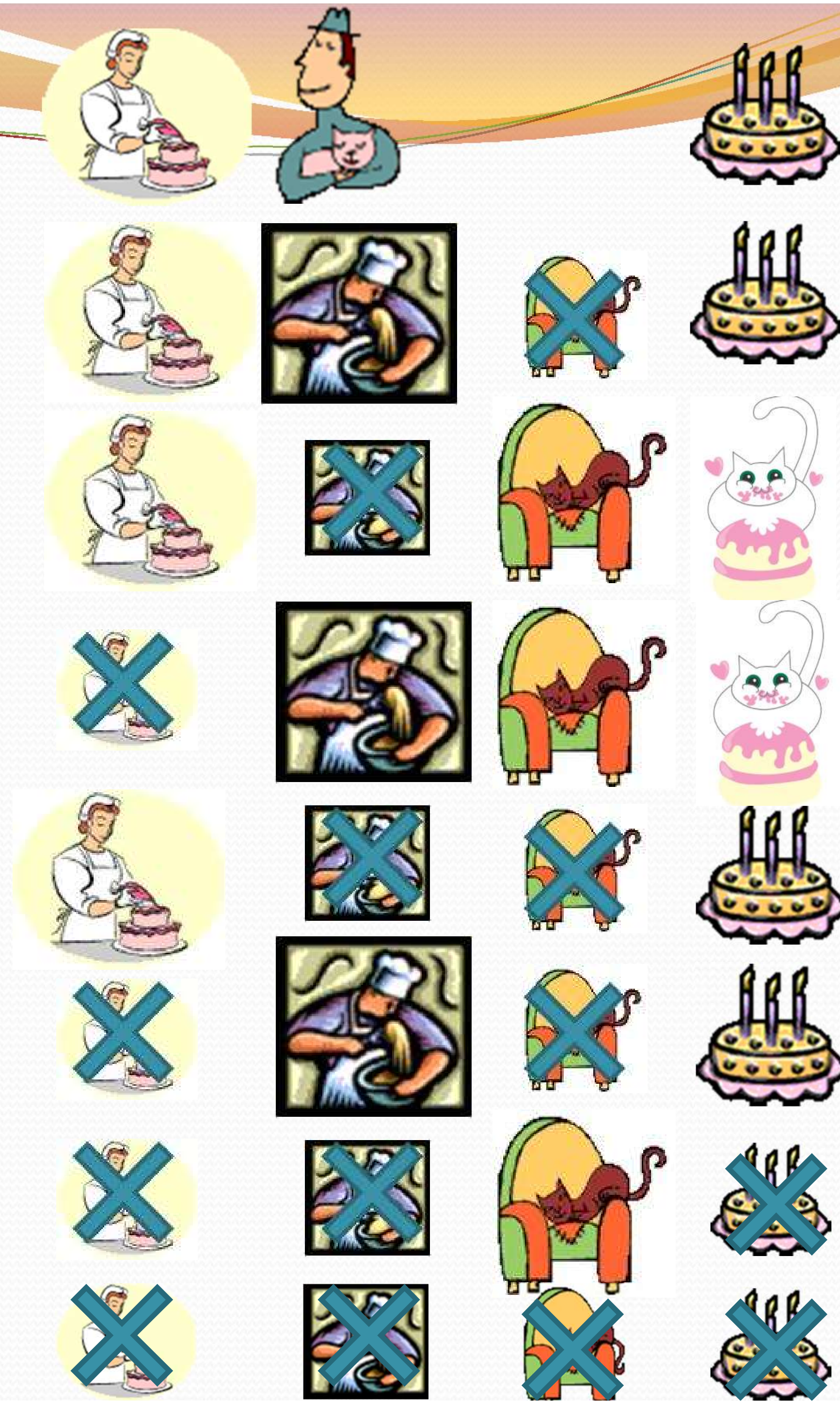
Soluțiile posibile

x, y, z

$f(x, y, z)=$ 

- Putem să le „condensăm”?



Suportul funcției

- *suportul* funcţiei booleene f 

$$S_f = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_2^{\,n} \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \,\}$$

 $(1, 1, 0) \in S_f$

 $(1, 0, 1) \notin S_f$

Relația mai mic sau egal

- Relaţia *mai mic sau egal* $f \leq g \Leftrightarrow S_f \subseteq S_g$

$m = x \wedge y \wedge \overline{z}$ și $m' = x \wedge \overline{z}$

$$S_m = \{(1, 1, 0)\} \quad \subset \quad S_{m'} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$m \leq m'$$

Factorizarea

- *monoame adiacente* (*vecine*) dacă ele diferă doar prin puterea (semnul: negaţie sau nu) variabilei cu indicele „k_i”:

$$m = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge .... \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge x_{k_i} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge ... \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

$$m' = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge .... \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge \overline{x_{k_i}} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge ... \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

- *factorizarea monoamelor m* şi *m'* este operaţia prin care se obţine, eliminând variabila cu indicele „k_i”, monomul

$$m \vee m' = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge .... \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge ... \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

mai mare decât *m* şi *m'*.

Simplificarea

- A *simplifica* o funcţie booleană, înseamnă a obţine o formă echivalentă a sa cu un număr cât mai mic de apariţii de variabile.

- Dacă se pornește de la FCD(f), prin factorizări repetate, într-un număr finit de paşi se poate obţine o formă simplificată a funcţiei.

Mulțimea monoamelor maximale

- Mulţimea $M(f)$ se numeşte *mulţimea monoamelor maximale* ale funcţiei booleene $f : B_2{}^n \to B_2$ dacă:

$$\forall m \in M(f),\ m \in FB(n),\ m \le f;$$

$$\forall m \in M(f),\ \nexists m' \in FB(n), \text{ astfel încât } m < m' \le f$$

Mulțimea monoamelor centrale

- Mulţimea $C(f)$ se numeşte *mulţimea monoamelor centrale* ale funcţiei booleene $f : B_2{}^n \to B_2$ dacă:

$$\forall m \in C(f), m \in M(f)$$

$$\forall m \in C(f), \text{nu are loc } m \leq \vee m', \text{ unde } m' \in M(f) - \{m\}$$

Algoritmul de simplificare a funcţiilor booleene

Date de intrare: f – ***o funcţie booleană în formă canonică disjunctivă***

Date de ieşire: $f'_1, f'_2, \ldots, f'_k$ - variantele simplificate ale funcţiei f

Se determină $M(f)$ şi $C(f)$.

dacă $M(f) = C(f)$

atunci $f'_1 = \bigvee_{m \in M(f)} m$ <u>STOP1</u> // caz 1--- soluţie unică

altfel

dacă $C(f) \neq \varnothing$

atunci $g \overset{not.}{=} \bigvee_{m \in C(f)} m$

$f'_i = g \vee h_i$, $i = \overline{1,k}$, unde h_i este disjuncţia unui număr cât mai mic de monoame maximale astfel încât $S_{h_i} = S_f - S_g$

<u>STOP2 //</u> caz 2 --- k soluţii

altfel // nu există monoame centrale

$f'_i = h_i$, $i = \overline{1,k}$, unde h_i este disjuncţia unui număr cât mai mic de monoame maximale astfel încât $S_{h_i} = S_f$

<u>STOP3</u> // caz 3 --- k soluţii

sf_dacă

sf_dacă

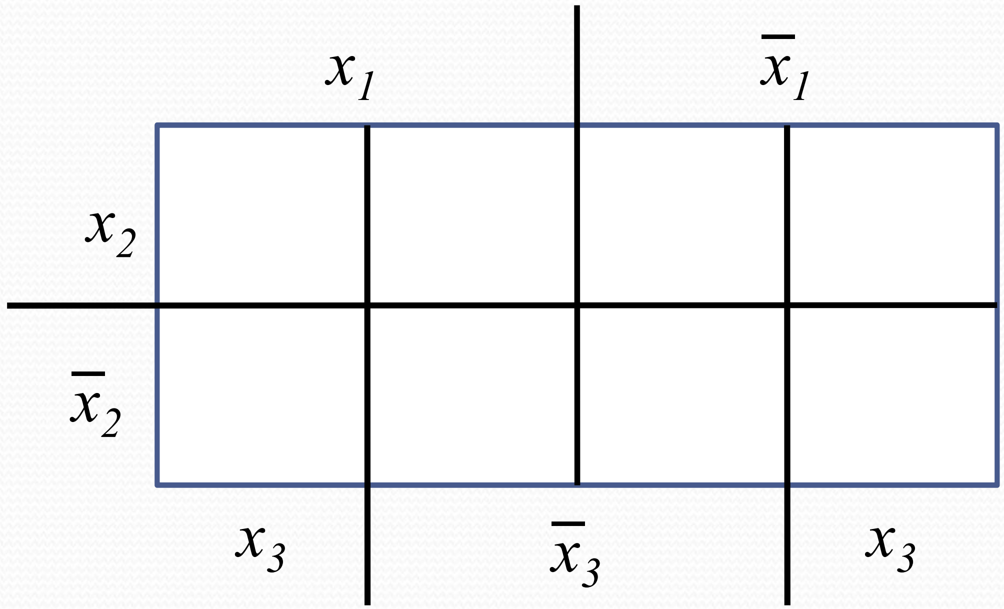
Sf_algoritm

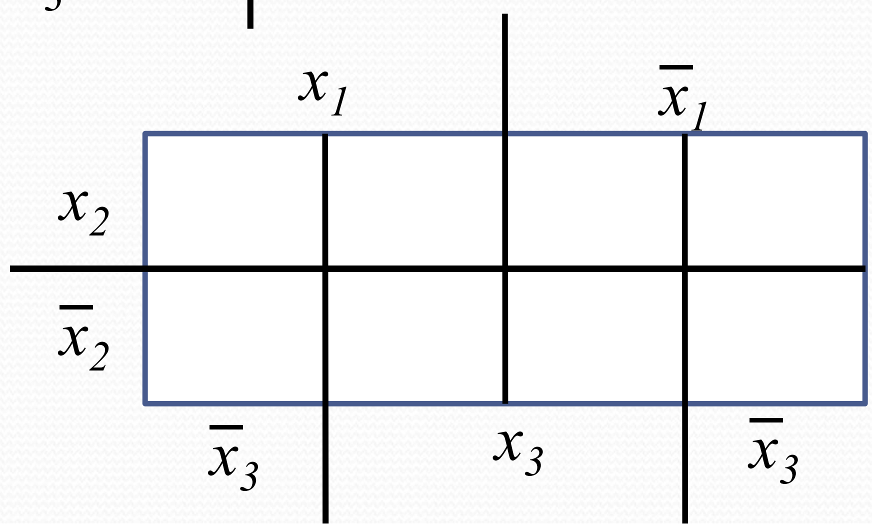
Metoda diagramelor Veitch

- Această metodă se bazează pe reprezentarea grafică, sub forma unei diagrame, a suportului funcţiei.

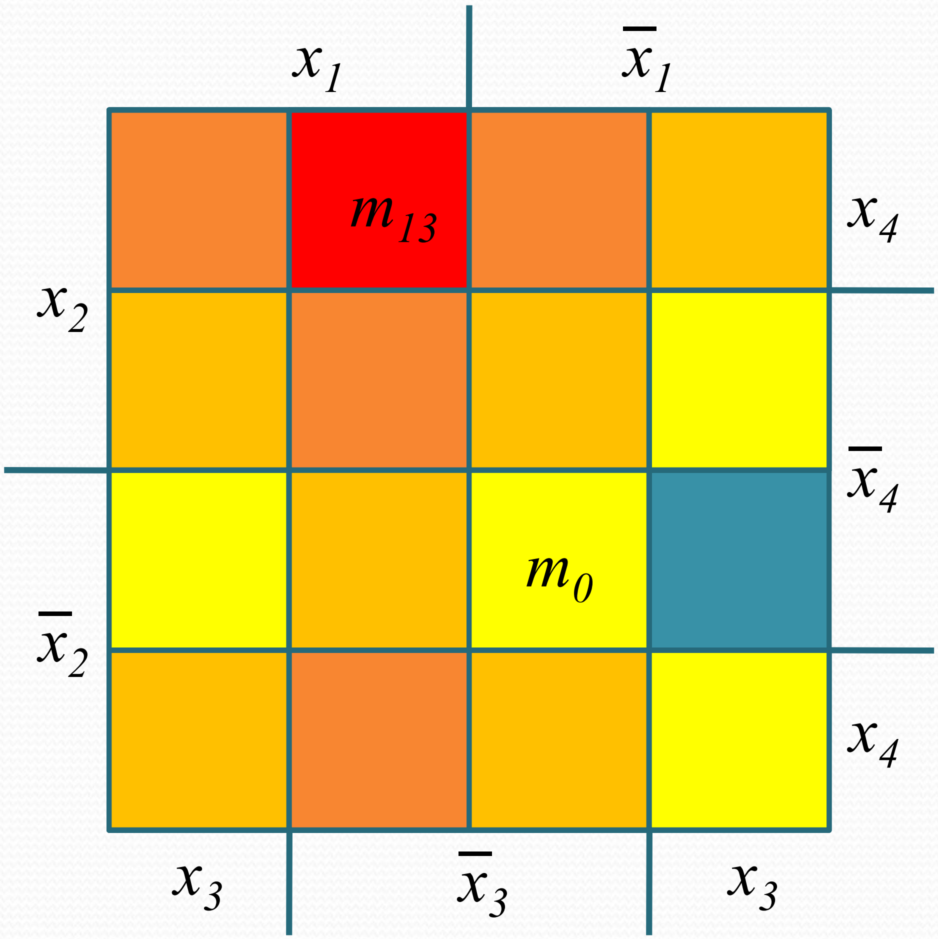
- Este foarte utilă pentru funcţii cu un număr mic de variabile: 2, 3 sau 4.

Construirea diagramei Veitch





Completarea diagramei



$$m_{13} = x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$$

Exercițiu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$$

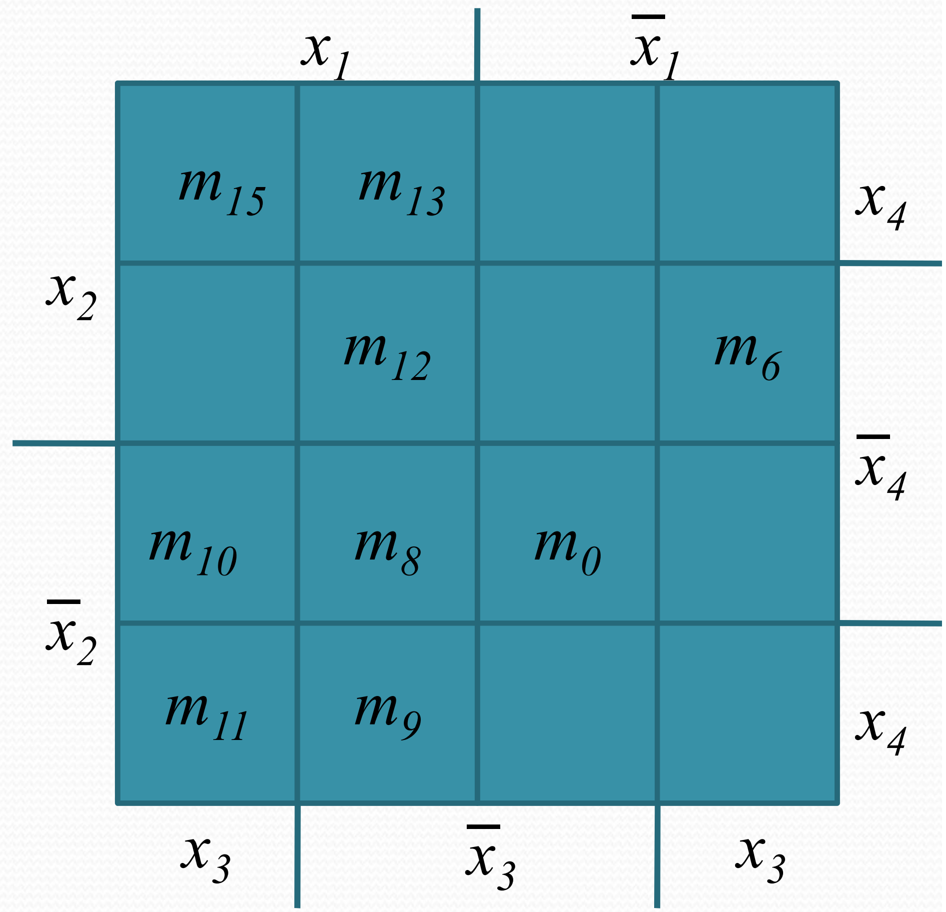
$$\vee\, x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4$$

$$\vee\, x_1 x_2 x_3 x_4$$

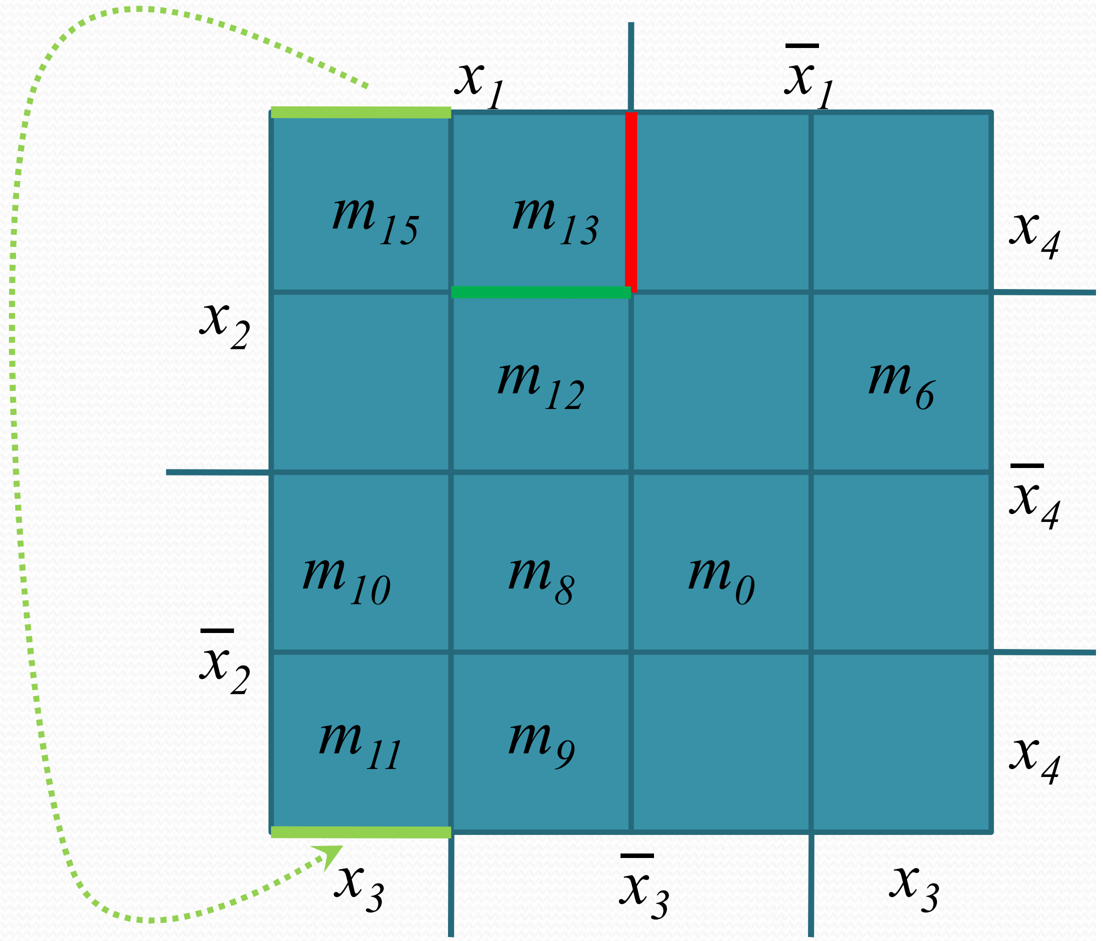
$$\vee\, \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$$

$$\vee\, x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$$

$$\vee\, x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4$$



Mintermi adiacenți



Factorizarea (1)

Se grupează 2^k, $k \in \mathbf{N}$ mintermi adiacenți, k – cât mai mare

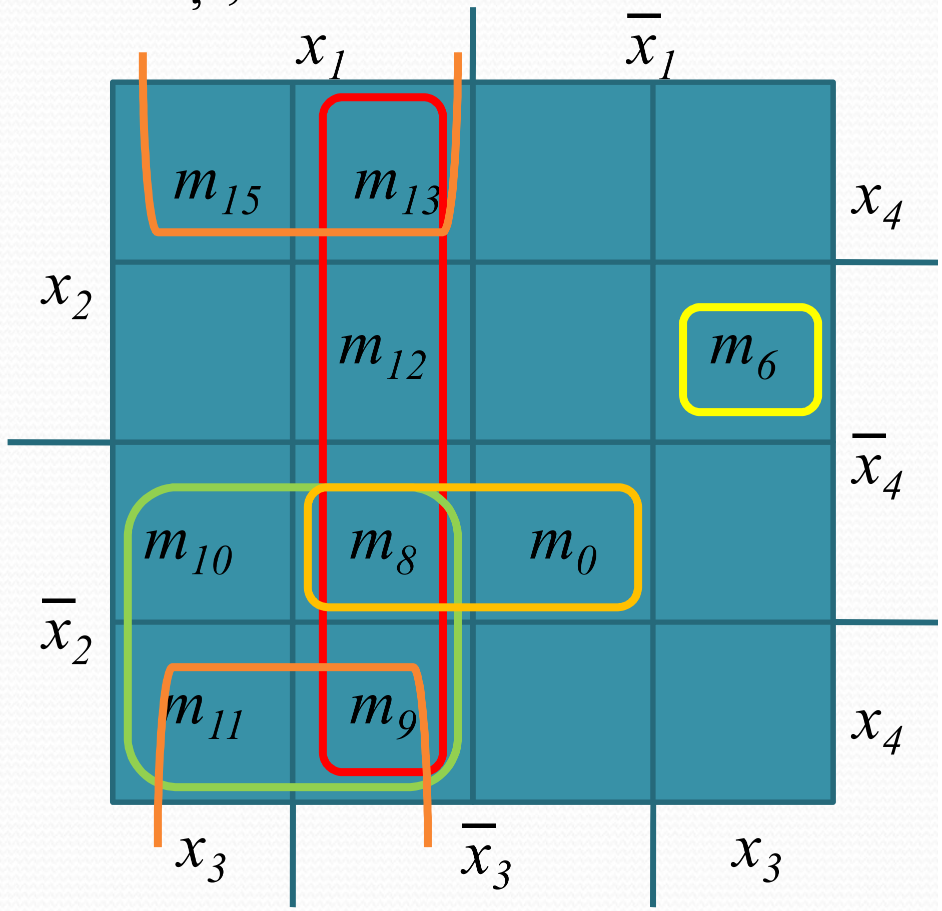
$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9$

$max_2 = m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9$

$max_3 = m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13}$

$max_4 = m_8 \vee m_0$

$max_5 = m_6$



Factorizarea (2)

- se grupează 2^k, $k \in \mathbf{N}$ mintermi adiacenți
- ! prima și ultima line, prima și ultima coloană sunt vecine!
- același minterm poate fi utilizat de mai multe ori
- ! se neglijează grupurile incluse!
- nu se lasă mintermi neîncercuiți

Formulele monoamelor maximale

$$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9 = x_1\bar{x}_3$$

$$max_2 = m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9$$

$$= x_1\bar{x}_2$$

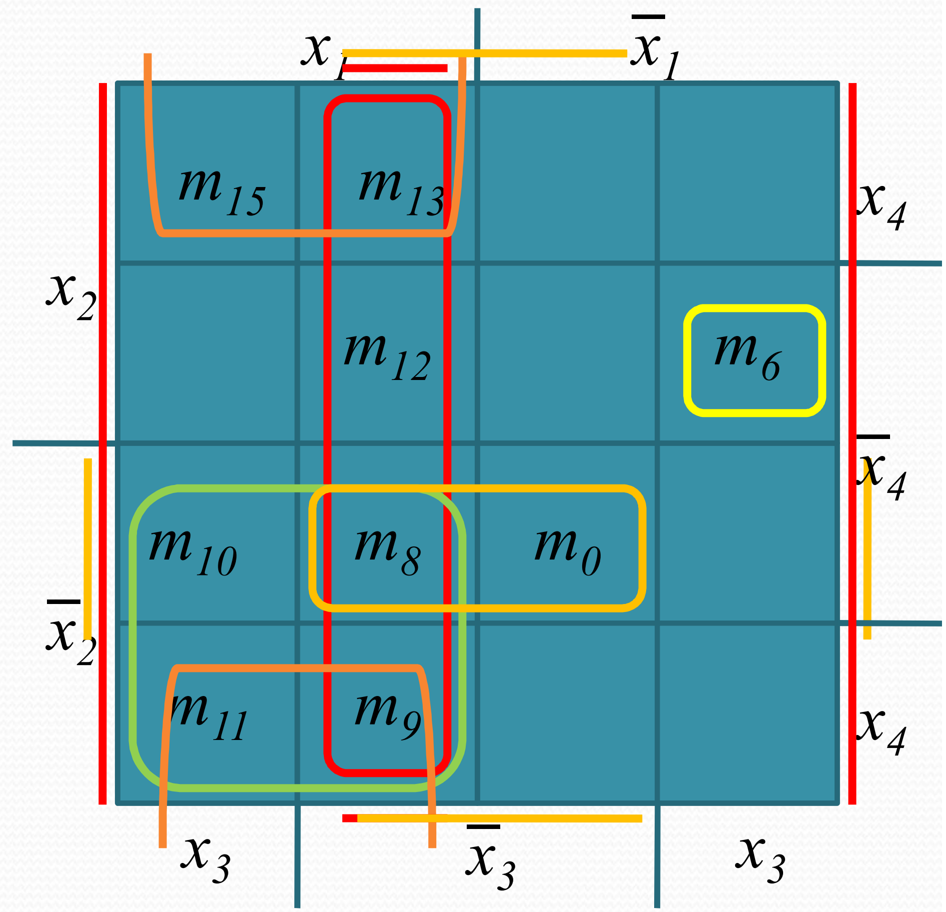
$$max_3 = m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13}$$

$$= x_1x_4$$

$$max_4 = m_8 \vee m_0$$

$$= \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$max_5 = m_6 = \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$$

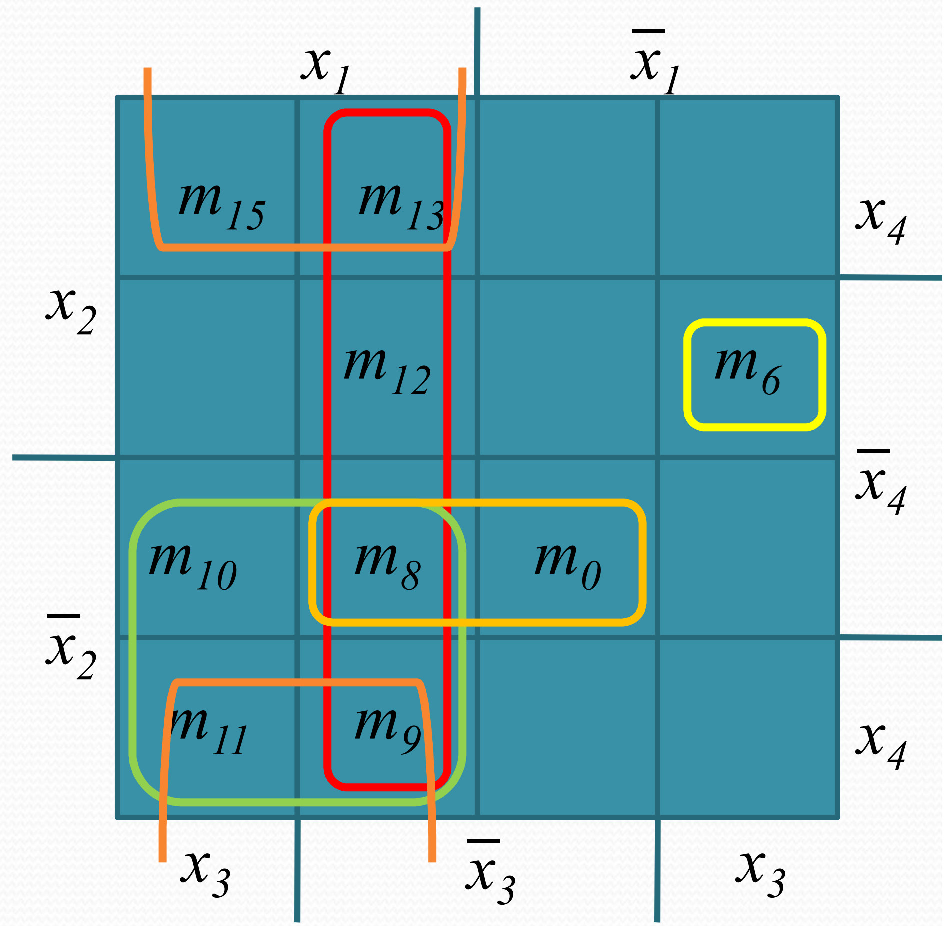


Mulţimea monoamelor maximale şi mulţimea monoamelor centrale

$M(f) =$

$\{max_1, max_2, max_3, max_4, max_5\}$

$M(f) = C(f)$



Forma simplificată a funcţiei

- Cazul I al algoritmului de simplificare
- O singură formă simplificată a funcţiei:

$$f^s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$$

Construirea diagramei Karnaugh

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0				
1				

- ! O singură cifră **distinctă**!