Logică computațională
Curs 10

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Sistem formal (axiomatic) asociat Rezoluției predicative

- $\mathrm{Res}^{\mathrm{Pr}} = (\Sigma_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}}, F_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}}, A_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}}, R_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}})$
  - $\Sigma_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}} = \Sigma_{\mathrm{Pr}} \setminus \{ \forall, \exists, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ – **alfabetul**
  - $F_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}} \cup \{\square\}$ – **mulţimea formulelor bine-formate**
    - $F_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}}$ mulţimea tuturor clauzelor ce se pot forma folosind alfabetul $\Sigma_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}}$
    - $\square$ **- clauza vidă** care nu conţine nici un literal, simbolizează inconsistenţa
  - $A_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}} = \emptyset$ – **mulțimea axiomelor**
  - $R_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}} = \{res^{\mathrm{Pr}}, fact\}$ **mulţimea regulilor de inferenţă** care conţine:

Reguli de inferenţă predicative

- **regula rezoluţiei predicative**:

  $A \vee l_1, B \vee \neg l_2 \vdash_{res}^{\mathrm{Pr}} \theta(A) \vee \theta(B),$

  unde $\theta = mgu(l_1, l_2)$ și $A, B \in F_{\mathrm{Res}}^{\mathrm{Pr}}$

  - $C_1 = A \vee l_1$, $C_2 = B \vee \neg l_2$ clauzele care rezolvă,

    dacă literalii l_1 și l_2 sunt unificabili

  - Rezolventul binar $C_3 = \mathrm{Res}_{\theta}^{\mathrm{Pr}}(C_1, C_2) = \theta(A) \vee \theta(B)$

- **regula factorizării**:

  $C \vdash_{fact} C'$, C' – factor al lui C

  unde $C = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k \vee l_{k+1} \vee \ldots \vee l_n$,

  $\lambda = mgu(l_1, l_2, \ldots, l_k)$

  $C' = \lambda(l_k) \vee \lambda(l_{k+1}) \vee \ldots \vee \lambda(l_n)$

Exemple

$C_1 = P(x) \vee \underline{Q(y,b)}$

$C_2 = \underline{\neg\, Q(z,z)} \vee R(g(z))$

$\mathrm{Rez}_{\theta}^{\mathrm{Pr}}(C_1, C_2) = \theta(\, P(x)\,) \vee \ \theta(\, R(g(z))) = P(x) \vee R(g(b))$

$\theta = [y \leftarrow z]^\circ[z \leftarrow b] = [y \leftarrow b, z \leftarrow b]$

$C_3 = \underline{P(x) \vee P(y) \vee P(a)} \vee R(g(z),x)$

$\lambda = [x \leftarrow a, y \leftarrow a]$

$\mathrm{Fact}_{\lambda}\,(C_3) = \lambda\,(\underline{P(a)}) \vee \lambda\,(\, R(g(z),a)) = \underline{P(a)} \vee R(g(z),a)$

Teoremă

Fie $U_1, U_2, \ldots, U_n$ şi V formule predicative.

- $\vdash V$ dacă şi numai dacă $(\neg V)^C \vdash_{res}^{\Pr} \square$
- $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$ dacă şi numai dacă

$$\{U_1{}^C, U_2{}^C, \ldots, U_n{}^C, (\neg V)^C\} \vdash_{res} \square$$

Observație: Variabilele din clauze distincte se recomandă să fie distincte.

Algoritmul rezoluției predicative:

Date de intrare: $U_1, U_2, \ldots, U_n$, V – formule predicative

Date de ieșire: ”are loc $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$” sau ”nu are loc $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$”

Se construiește $S = \{\ U_1^C, U_2^C, \ldots, U_n^{\ C}, (\neg V)^C\ \}$

Repetă

Se selectează literalii l_1, l_2 și clauzele C_1, C_2 astfel încât sunt clauze sau factori ai unor clauze din S

Fie $l_1 \in C_1$ și $\neg\, l_2 \in C_2$, respectiv $l_1, l_2 \in C_1$

Dacă l_1 și l_2 sunt unificabili cu $\theta\ = mgu(\ l_1, l_2\ )$

Atunci

$C = \mathrm{Res}^{\mathrm{Pr}}_{\theta}(C_1, C_2)$ respectiv $C = fact_{\,\theta}(C_1)$

Algoritmul rezoluției predicative - continuare

Dacă $C = \square$

Atunci Scrie ”are loc $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$”; **STOP**

Altfel $S = S \cup \{C\}$

Sfârșit_dacă

Sfârșit_dacă

Până când nu se mai pot deriva noi rezolvenți **sau** un număr fixat de iterații au fost executate

Dacă nu se mai pot deriva noi rezolvenți

Atunci Scrie ”nu are loc $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$”

Altfel Scrie ”nu se poate decide dacă are loc sau nu $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$”

Sfârșit_dacă

Sfârșit algoritm

Strategii și rafinări ale rezoluției predicative

- Strategii:
  - Strategia eliminării !unificarea, factorizarea
  - Strategia saturării pe nivele
  - Strategia mulțimii suport

- Rafinări:
  - Rezoluția blocării
  - Rezoluția liniară
    - input
    - unit

Exemple

$$\vdash (\exists\, x)(\forall\, y)\,(\mathrm{P}(x,y)\rightarrow \mathrm{R}(x)) \rightarrow((\forall\, x)(\forall\, y)\mathrm{P}(x,y)\rightarrow(\exists\, z)\mathrm{R}(z))$$

$$\vdash (\exists y)\,(\exists\, x)\,(P(x, y) \wedge P(y, y)\,) \vee (\exists y)\,(\exists x)\,(\neg\, P(y, x) \wedge \neg\, P(y, y))$$

$$\vdash (\exists x)\,(\forall y)\,(\,P(x) \wedge \neg\, P(y)\,) \vee \neg(\exists\, z)P(z)$$

Exemplu (1) obținerea mulțimii de clauze

$\overset{?}{\vdash} (\exists\, x)(\forall\, y)\, (P(x,y) \to R(x)) \to ((\forall\, x)(\forall\, y)P(x,y) \to (\exists\, z)R(z)) \overset{\text{ITD}}{\Rightarrow}$

$(\exists\, x)(\forall\, y)\, (P(x,y) \to R(x)) \overset{?}{\vdash} (\forall\, x)(\forall\, y)P(x,y) \to (\exists\, z)R(z) \overset{\text{ITD}}{\Rightarrow}$

$(\exists\, x)(\forall\, y)\, (P(x,y) \to R(x)), (\forall\, x)(\forall\, y)P(x,y) \overset{?}{\vdash} (\exists\, z)R(z)$

$U_1 = (\exists\, x)(\forall\, y)\, (P(x,y) \to R(x)) \equiv (\exists\, x)(\forall\, y)\, (\neg P(x,y) \lor R(x)) = U_1^{\text{P}}$

$x \leftarrow a\ U_1^{\text{S}} = (\forall\, y)\, (\neg P(a,y) \lor R(a))$

$U_1^{\text{Sq}} = \neg P(a,y) \lor R(a) = U_1^{\text{C}} = C_1$

$U_2 = (\forall\, x)(\forall\, y)P(x,y)$

$U_2^{\text{C}} = P(x,y) = U_2^{\text{C}} = C_2$

$\neg V = \neg((\exists\, z)R(z))$

$\neg V \equiv (\forall z) \neg\, R(z)$

$(\neg V)^{\text{Sq}} = \neg\, R(z) = (\neg V)^{\text{C}} = C_3$

$S = \{\neg P(a,y) \lor R(a), P(x,y), \neg\, R(z)\}$

Exemplu (1) aplicarea metodei rezoluției

$S = \{\neg P(a,y) \vee R(a), P(x,y), \neg R(z)\}$

$\text{Rez}_{\theta}^{Pr}(C_1, C_2) = R(a) = C_4$

$\theta = [x \leftarrow a]$

$\text{Rez}_{\lambda}^{Pr}(C_4, C_3) = \square$

$\lambda = [z \leftarrow a]$

($\overset{\text{TCC}}{\Rightarrow}$ S este inconsistentă)

$\Rightarrow$ (pe baza teoremei din curs) că $U_1, U_2 \vdash V$, și din raționamentul prin respingere (sau aplicând de 2 ori TD)

$\vdash (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to R(x)) \to ((\forall x)(\forall y)P(x,y) \to (\exists z)R(z))$

Exemplu (2)
obținerea mulțimii de clauze

$$\overset{?}{\models} (\exists y)(\exists x)(P(x,y) \wedge P(y,y)) \vee (\exists y)(\exists x)(\neg P(y,x) \wedge \neg P(y,y)) \overset{not.}{=} U$$

$$\neg U \equiv \neg ((\exists y)(\exists x)(P(x,y) \wedge P(y,y)) \vee (\exists y)(\exists x)(\neg P(y,x) \wedge \neg P(y,y)))$$

$$\neg U \equiv (\forall y)(\forall x)(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,y)) \wedge (\forall y)(\forall x)(P(y,x) \vee P(y,y))$$

$$\neg U \equiv (\forall y)(\forall x)(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,y)) \wedge (\forall t)(\forall z)(P(t,z) \vee P(t,t))$$

$$\neg U \equiv (\forall y)(\forall x)(\forall t)(\forall z)((\neg P(x,y) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(t,z) \vee P(t,t)))$$

$$\neg U^{Sq} = (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(t,z) \vee P(t,t)) = \neg \mathrm{U}^{\mathrm{C}}$$

$$C_1 = \neg P(x,y) \vee \neg P(y,y)$$

$$C_2 = P(t,z) \vee P(t,t)$$

$$S = \{C_1, C_2\}$$

Exemplu (2)
aplicarea metodei rezoluției

$S = \{ C_1, C_2 \}$

$\mathrm{Rez}_{\theta}^{\mathrm{Pr}}(C_1, C_2) = \neg P(x, t) \vee P(t, z) = C_3$

$\theta = [y \leftarrow t]$

$\mathrm{Fact}_{\lambda}^{\mathrm{Pr}}(\mathrm{C}_2) = P(t, t) = C_4$

$\lambda = [\mathrm{z} \leftarrow t]$

$\mathrm{Fact}_{\xi}^{\mathrm{Pr}}(C_1) = \neg P(y, y) = C_5$

$\xi = [\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{y}]$

$\mathrm{Rez}_{\theta}^{\mathrm{Pr}}(C_4, C_5) = \square$, deci, pe baza teoremei din curs $\Rightarrow\ \vdash U$

Exemplu (3)
obținerea mulțimii de clauze

$$\overset{?}{\vdash} (\exists x)(\forall y)(\,P(x) \wedge \neg\, P(y)\,) \vee \neg(\exists\, z)P(z) \overset{\text{not.}}{=} U$$

$$\neg\, U \equiv \neg\,((\exists x)(\forall y)(\,P(x) \wedge \neg\, P(y)\,) \vee \neg(\exists\, z)P(z))$$

$$\neg\, U \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee P(y)\,) \wedge (\exists\, z)P(z)$$

$$\neg\, U \equiv (\exists\, z)(\forall x)(\exists y)\ (\,(\neg P(x) \vee P(y)\,) \wedge P(z)\,) = (\neg\, U)^{P}$$

$$z \leftarrow a,\ y \leftarrow f\,(x)$$

$$(\neg\, U)^{S} = (\forall x)(\,(\neg P(x) \vee P(\,f\,(x))\,) \wedge P(a)\,)$$

$$(\neg\, U)^{Sq} = (\neg P(x) \vee P(\,f\,(x))\,) \wedge P(a) = (\neg\, U)^{C}$$

$$C_1 = \neg P(x) \vee P(\,f\,(x))$$

$$C_2 = P(a)$$

$$S = \{\, C_1, C_2\}$$

Exemplu (3) aplicarea metodei rezoluției

$S=\{ C_1, C_2\}$

$\text{Rez}_{\theta}^{\text{Pr}}(C_1, C_2) = P(f(a)) = C_3$

$\theta=[x\leftarrow a]$

$\text{Rez}_{\lambda}^{\text{Pr}}(C_1, C_3) = P(f(f(a))) = C_4$

$\lambda=[x\leftarrow f(a)]$

Ciclu infinit, deci nu putem decide dacă formula este sau nu teoremă.

Completitudinea și corectitudinea

- Toate rafinările şi strategiile rezolutive păstrează completitudinea şi corectitudinea.
- Combinarea lor poate impune prea multe restricții și deși mulțimea inițială de clauze este inconsistentă, s-ar putea să nu se poată deriva clauza vidă.
- sunt complete:
  - rezoluţia generală + strategia eliminării
  - rezoluţia generală + strategia mulţimii suport
  - rezoluţia generală + strategia mulţimii suport + strategia eliminării
  - rezoluția liniară + strategia eliminării
  - rezoluţia liniară + strategia mulţimii suport
- nu sunt complete:
  - rezoluția blocării + strategia eliminării
  - rezoluția blocării + strategia mulţimii suport
  - rezoluția blocării + rezoluția liniară
  - rezoluţia unitară
  - rezoluția de intrare

Completitudinea rezoluției de intrare

Definiții:

- O *clauză* se numește *pozitivă* dacă aceasta conține literali pozitivi.
- O *clauză* se numește *negativă* dacă aceasta conține doar literali negativi.
- O clauză se numește *clauză Horn* dacă aceasta conține un singur literal pozitiv, ceilalți fiind negativi.

Teoremă:

- Rezoluția de intrare este completă pe o mulțime de clauze Horn, cu o clauză negativă ca și clauză de vârf (PROLOG).

  - H_i: $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n \rightarrow v$, $i \in \{1, \ldots, k\}$
  - C: $n_1 \wedge n_2 \wedge \ldots \wedge n_m$?

Limbajul Prolog - ”o privire pe furiș”

- tată(B,C):-bărbat(B),părinte(B,C).
- mamă(M,C):-femeie(M),părinte(M,C).
- fiu(P,S):-bărbat(S),părinte(P,S).
- Fiică(P,D):-femeie(D),părinte(P,D).
- frate(A,F):-părinte(P,A),părinte(P,F).

- părinte(”Petru”,”Vlad”)
- părinte(”Petru”,”Bogdan”)

- ? frate(“Vlad”,“Bogdan”)?

Problemă de modelare

- Toate păsările colibri sunt bogat colorate.
- Păsările mari nu se hrănesc cu miere.
- Păsările care nu se hrănesc cu miere nu sunt bogat colorate.
- Piky este o pasăre colibri.

- Toate păsările colibri sunt păsări mici.

Transformarea din limbaj natural în limbaj logic

”pasărea x este bogat colorată” $\stackrel{\text{not.}}{=} B(x)$

”pasărea x se hrănește cu miere” $\stackrel{\text{not.}}{=} H(x)$

”pasărea x este o parsăre colibri” $\stackrel{\text{not.}}{=} C(x)$

”pasărea x este mică” $\stackrel{\text{not.}}{=} M(x)$

Constantă: Piky $\stackrel{\text{not.}}{=} a$

$U_1=(\forall \mathrm{x})\ (C(x)\rightarrow B(x))$

$U_2=(\forall \mathrm{x})\ (\neg M(x)\rightarrow\neg H(x))$

$U_3=(\forall \mathrm{x})\ (\neg H(x)\rightarrow\neg B(x))$

$U_4=C(a)$

$V=(\forall x)(C(x)\ \rightarrow M(x))$