

Logică computațională

Curs 4

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Sisteme axiomatice

- Axiomele geometriei
- Axiomele aritmeticii

Sistemul axiomatic al calculului propozițional

- propus de Hilbert; deductiv, formal
- $P = (\Sigma_P, F_P, A_P, R_P)$
 - $\Sigma_P = Var_propoz \cup Conective \cup \{ (,) \}$
 - $Var_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \dots \}$
 - $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$
 - $F_P =$ mulțimea formulelor propoziționale corect construite
 - - *baza*: $p_i \in F_P, i=1,2,\dots$
 - - *inducția*: dacă $U, V \in F_P$ atunci:
 $\neg U \in F_P, U \wedge V \in F_P, U \vee V \in F_P, U \rightarrow V \in F_P, U \leftrightarrow V \in F_P$
 - - *închiderea*: toate formulele din F_P se obțin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.

Axiome și reguli de inferență

- $A_P = \{A_1, A_2, A_3\}$ scheme axiomatice
 - $A_1: U \rightarrow (V \rightarrow U)$
 - $A_2: (U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$
 - $A_3: (U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$
- $R_P = \{m_P\}$ – o singură regulă de inferență „*modus ponens*”
 - $U, U \rightarrow V \vdash V$
„din faptele U și $U \rightarrow V$ se deduce (inferă) V ”

Definiția deducției

- Fie formulele U_1, U_2, \dots, U_n numite ipoteze și V formulă propozițională. Spunem că **V este deductibilă din U_1, U_2, \dots, U_n** și notăm $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n \vdash V$, dacă există o secvență de formule (f_1, f_2, \dots, f_m) astfel încât $f_m = V$ și $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ avem:
 - $f_i \in A_p$;
 - $f_i \in \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$;
 - $f_j, f_k \vdash_{m_p} f_i, j < i$ și $k < i$
- Secvența (f_1, f_2, \dots, f_m) se numește **deducția lui V din U_1, U_2, \dots, U_n** .

Noțiunea de teoremă

- **Definiția 1.8.** O formulă $U \in F_P$, astfel încât $\emptyset \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numește *teoremă*.
- **Observație:** Teoremele sunt formule care sunt deductibile doar din axiome și folosind regula modus ponens.

Teorema de deducție și inversa sa

- **Teorema de deducție**

Dacă $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n \vdash V$, atunci $U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \vdash U_n \rightarrow V$.

- **Inversa teoremei de deducție**

Dacă $U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \vdash U_n \rightarrow V$ atunci $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n \vdash V$.

Generalizarea

$U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n \vdash V$ dacă și numai dacă

$U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \vdash U_n \rightarrow V$ dacă și numai dacă

$U_1, U_2, \dots, U_{n-2} \vdash U_{n-1} \rightarrow (U_n \rightarrow V)$ dacă și numai dacă

...

$U_1 \vdash U_2 \rightarrow (\dots U_{n-1} \rightarrow (U_n \rightarrow V) \dots)$ dacă și numai dacă

$\vdash U_1 \rightarrow (U_2 \rightarrow (\dots U_{n-1} \rightarrow (U_n \rightarrow V) \dots))$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1}$

Consecințele teoremei de deducție

- $\vdash U \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow V)$
- $\vdash (U \rightarrow V) \rightarrow ((V \rightarrow Z) \rightarrow (U \rightarrow Z))$ legea silogismului
- $\vdash (U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow (V \rightarrow (U \rightarrow Z))$ legea permutării premizelor
- $\vdash (U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow (U \wedge V \rightarrow Z)$ legea reuniunii premizelor
- $\vdash (U \wedge V \rightarrow Z) \rightarrow (U \rightarrow (V \rightarrow Z))$ legea separării premizelor

Proprietățile logicii propozițiilor

- **Problemele decizionale** în logica propozițiilor:
 - „Este o formulă propozițională o teoremă sau nu?”
 - „Este o formulă deductibilă dintr-o mulțime de formule?”
- **Teorema de corectitudine**

Dacă $\vdash U$ **atunci** $\models U$. (Validitatea sintactică implică validitatea semantică)
- **Teorema de completitudine**

Dacă $\models U$ **atunci** $\vdash U$. (Validitatea semantică implică validitatea sintactică)
- **Teorema de corectitudine și completitudine**

$\vdash U$ **dacă și numai dacă** $\models U$.

Consecințele teoremei de corectitudine și completitudine

1) *Logica propozițiilor este necontradictorie:*

nu pot avea loc simultan $\vdash U$ și $\vdash \neg U$.

2) *Logica propozițiilor este coerentă:*

nu orice formulă propozițională este teoremă.

3) *Logica propozițiilor este decidabilă:*

se poate decide dacă o formulă propozițională este sau nu teoremă.