Logică computațională
Curs 7

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Rafinările rezoluției

- impun restricții asupra clauzelor care rezolvă, pentru a eficientiza procesul rezolutiv

Notație

- $S \vdash_{\text{Res}}^{st} \square$ ”din mulțimea *S* de clauze s-a derivat clauza vidă prin aplicarea strategiei *st* a rezoluției propoziționale”

Completitudinea și corectitudinea

- Toate rafinările şi strategiile rezolutive păstrează completitudinea şi corectitudinea.
- Combinarea lor poate impune prea multe restricții și deși mulțimea inițială de clauze este inconsistentă, s-ar putea să nu se poată deriva clauza vidă.
- sunt complete:
  - rezoluţia generală + strategia eliminării
  - rezoluţia generală + strategia mulţimii suport
  - rezoluţia generală + strategia mulţimii suport + strategia eliminării
  - rezoluția liniară + strategia eliminării
  - rezoluţia liniară + strategia mulţimii suport
- nu sunt complete:
  - rezoluția blocării + strategia eliminării
  - rezoluția blocării + strategia mulţimii suport
  - rezoluția blocării + rezoluția liniară
  - rezoluţia unitară
  - rezoluția de intrare

Rezoluţia blocării (lock resolution)

- introdusă de Boyer în 1971

- fiecare apariţie de literal din mulţimea de clauze este indexat arbitrar cu un întreg
- *restricţia:* literalii care rezolvă din clauzele părinţi trebuie să aibă **cei mai mici indici** din aceste clauze
- literalii din rezolvenţi moştenesc indicii de la clauzele părinţi, iar în cazul moştenirii a doi literali identici, se păstrează cel cu indicele mai mic

- este foarte eficientă şi uşor de implementat, se recomandă combinarea ei cu strategia saturării pe nivele

Teorema de corectitudine și completitudine

- Teorema de completitudine

  Fie S o mulţime de clauze în care fiecare literal este indexat în mod arbitrar cu un întreg. Dacă S este inconsistentă, atunci există o deducţie din mulțimea S a clauzei vide prin rezoluţia blocării.

- Teorema de corectitudine

  Fie S o mulţime de clauze în care fiecare literal este indexat în mod arbitrar cu un întreg. Dacă din S se deduce prin rezoluţia blocării clauza vidă, atunci S este inconsistentă.

Exemple (1)

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția blocării:

- $S = \{ \neg r , p \vee \neg q , r \vee p \vee q , \neg q \vee \neg p \}$

Rezolvare

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția blocării:

$S = \{_{(1)}\neg r\ ,\ _{(6)}p \vee {}_{(2)}\neg q\ ,\ _{(8)}r \vee {}_{(3)}p \vee {}_{(5)}q\ ,\ _{(4)}\neg q \vee {}_{(7)}\neg p\}$

$C_1 \overset{\text{not.}}{\equiv} {}_{(1)}\boldsymbol{\neg r}$

$C_2 \overset{\text{not.}}{\equiv} {}_{(2)}\boldsymbol{\neg q} \vee {}_{(6)}p$

$C_3 \overset{\text{not.}}{\equiv} {}_{(3)}\boldsymbol{p} \vee {}_{(5)}q \vee {}_{(8)}r$

$C_4 \overset{\text{not.}}{\equiv} {}_{(4)}\boldsymbol{\neg q} \vee {}_{(7)}\neg p$

$\xRightarrow{\text{TCC}}$ S este consistentă

Exemple (2)

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția blocării:

- $S = \{ \neg r , p \vee \neg q , r \vee p \vee q , \neg q \vee \neg p \}$

- $S = \{ p \vee q , \neg p \vee q , p \vee \neg q , \neg p \vee \neg q \}$

Rezolvare

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția blocării:

$S = \{{}_{(5)}p \vee {}_{(4)}\ q\ ,\ {}_{(1)}\neg\, p \vee {}_{(6)}\ q\ ,\ {}_{(7)}p \vee {}_{(2)} \neg\, q\ ,\ {}_{(8)} \neg\, p \vee {}_{(3)} \neg\, q\ \}$

$C_1 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(4)}\, q \vee {}_{(5)}\, p$

$C_2 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(1)} \neg\, p \vee {}_{(6)}\, q$

$C_3 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(2)} \neg\, q \vee {}_{(7)}\, p$

$C_4 \overset{\text{not.}}{=} {}_{(3)} \neg\, q \vee {}_{(8)} \neg\, p$

$C_5 = \text{Res}_q^{\,lock}(C_1, C_3) = {}_{(5)}\, \boldsymbol{p}$

$C_6 = \text{Res}_p^{\,lock}(C_2, C_5) = {}_{(6)}\, q$

$C_7 = \text{Res}_q^{\,lock}(C_4, C_6) = {}_{(8)} \neg\, \boldsymbol{p}$

$C_8 = \text{Res}_p^{\,lock}(C_5, C_7) = \square$

$\overset{\text{TCC}}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

Observație!!!!!!

$$C_1 \overset{\text{not.}}{\equiv} q \vee p$$

$$C_4 \overset{\text{not.}}{\equiv} \neg q \vee \neg p$$

$$A \vee l, B \vee \neg l \vdash_{res} A \vee B$$

$$\text{Res}_p(C_1, C_4) = q \vee \neg q \equiv \text{T}$$

$$\text{Res}_q(C_1, C_4) = p \vee \neg p \equiv \text{T}$$

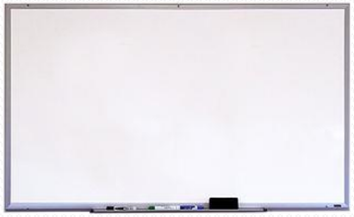
$$\square \equiv \mathbf{F}$$

$$\mathbf{U} \wedge \neg \mathbf{U} \equiv \mathbf{F} \qquad \neg(q \vee p) \equiv \neg q \wedge \neg p \neq \neg q \vee \neg p$$

Exerciții (1)

- rezoluția blocării + strategia eliminării nu e completă
  - $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

    $C_1 =_{(2)} p \vee_{(1)} q,\ C_2 =_{(3)} \neg p \vee_{(4)} q,\ C_3 =_{(5)} p \vee_{(6)} \neg q,\ C_4 =_{(8)} \neg p \vee_{(7)} \neg q$



Exerciții (1)

- rezoluția blocării + strategia eliminării nu e completă
  - $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

    $C_1 =_{(2)} p \vee_{(1)} q$, $C_2 =_{(3)} \neg p \vee_{(4)} q$, $C_3 =_{(5)} p \vee_{(6)} \neg q$, $C_4 =_{(8)} \neg p \vee_{(7)} \neg q$

$\cancel{C_?} = \text{Res}_p^{\,lock}(C_2, C_3) = \cancel{{}_{(4)}q \vee_{(6)} \neg q}$ conform str. eliminării este o clauză tautologică, deci se va elimina

$\cancel{C_?} = \text{Res}_q^{\,lock}(C_1, C_4) = \cancel{{}_{(2)}p \vee_{(8)} \neg p}$ conform str. eliminării este o clauză tautologică, deci se va elimina

Nu se mai rezolvă clauze noi, deci nu putem ajunge la □, deci, am ajunge la concluzia greșită că S nu e inconsistentă.

Exerciții (1)

- rezoluția blocării fără strategia eliminării e completă
  - $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

    $C_1 = {}_{(2)}p \vee_{(1)} q$, $C_2 = {}_{(3)}\neg p \vee_{(4)} q$, $C_3 = {}_{(5)}p \vee_{(6)} \neg q$, $C_4 = {}_{(8)}\neg p \vee_{(7)} \neg q$

$C_5 = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_2, C_3) = {}_{(4)}q \vee_{(6)} \neg q$

$C_6 = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_4, C_5) = {}_{(6)}\neg q \vee_{(8)} \neg p$

$C_8 = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_6, C_1) = {}_{(2)}p \vee {}_{(8)}\neg p$

$C_9 = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_8, C_2) = {}_{(4)}q \vee {}_{(8)}\neg p$

$C_{10} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_9, C_4) = {}_{(8)}\neg p$

$C_{11} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_{10}, C_3) = {}_{(6)}\neg q$ $\quad \overset{\text{TCC}}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

$C_{12} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_{11}, C_1) = {}_{(2)}p$

$C_{13} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_{12}, C_{10}) = \square$

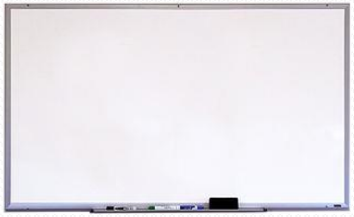
Exerciții (1)

- rezoluția blocării + strategia eliminării nu e completă
  - $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

    $C_1 =_{(2)} p \vee_{(1)} q$, $C_2 =_{(3)} \neg p \vee_{(4)} q$, $C_3 =_{(5)} p \vee_{(6)} \neg q$, $C_4 =_{(8)} \neg p \vee_{(7)} \neg q$
- rezoluția blocării + strategia mulţimii suport nu e completă
  - $p \to (q \to r), r \wedge s \to t, u \to s \wedge \neg t \vdash p \wedge q \to \neg u$

    $C_1 =_{(3)} \neg p \vee_{(2)} \neg q \vee_{(1)} r$, $C_2 =_{(6)} \neg r \vee_{(5)} \neg s \vee_{(4)} t$, $C_3 =_{(8)} \neg u \vee_{(7)} s$, $C_4 =_{(10)} \neg u \vee_{(9)} \neg t$, $C_5 =_{(11)} p$, $C_6 =_{(12)} q$, $C_7 =_{(13)} u$

    $Y = \{C_5, C_6, C_7\}$



Exerciții (1)

- rezoluția blocării + strategia mulţimii suport nu e completă
  - $p \to (q \to r), r \wedge s \to t, u \to s \wedge \neg t \vdash p \wedge q \to \neg u$

    $C_1 = {}_{(3)}\neg p \vee {}_{(2)}\neg q \vee {}_{(1)} r$, $C_2 = {}_{(6)}\neg r \vee {}_{(5)}\neg s \vee {}_{(4)} t$, $C_3 = {}_{(8)}\neg u \vee {}_{(7)} s$, $C_4 = {}_{(10)}\neg u \vee {}_{(9)}\neg t$, $C_5 = {}_{(11)} p$, $C_6 = {}_{(12)} q$, $C_7 = {}_{(13)} u$

    $Y = \{C_5, C_6, C_7\}$

În această indexare, nu rezolvă nici o clauză urmând strategia mulțimii suport, deci am ajunge la falsa concluzie că S este consistentă.

Exerciții (1)

- rezoluția blocării fără strategia mulţimii suport:

$p \to (q \to r), r \wedge s \to t\ , u \to s \wedge \neg\, t \vdash p \wedge q \to \neg\, u$

$C_1 = {}_{(3)}\neg p \vee {}_{(2)}\neg q \vee {}_{(1)} r$, $C_2 = {}_{(6)}\neg r \vee {}_{(5)}\neg s \vee {}_{(4)} t$, $C_3 = {}_{(8)}\neg u \vee {}_{(7)} s$,
$C_4 = {}_{(10)}\neg u \vee {}_{(9)}\neg t$, $C_5 = {}_{(11)} p$, $C_6 = {}_{(12)} q$, $C_7 = {}_{(13)} u$

$C_8 = \mathrm{Res}_t^{\,lock}(C_2, C_4) = {}_{(5)}\neg s \vee {}_{(6)}\neg r \vee {}_{(10)}\neg u$

$C_9 = \mathrm{Res}_s^{\,lock}(C_8, C_3) = {}_{(6)}\neg r \vee {}_{(8)}\neg u$

$C_{10} = \mathrm{Res}_r^{\,lock}(C_1, C_9) = {}_{(2)}\neg q \vee {}_{(3)}\neg p \vee {}_{(8)}\neg u$

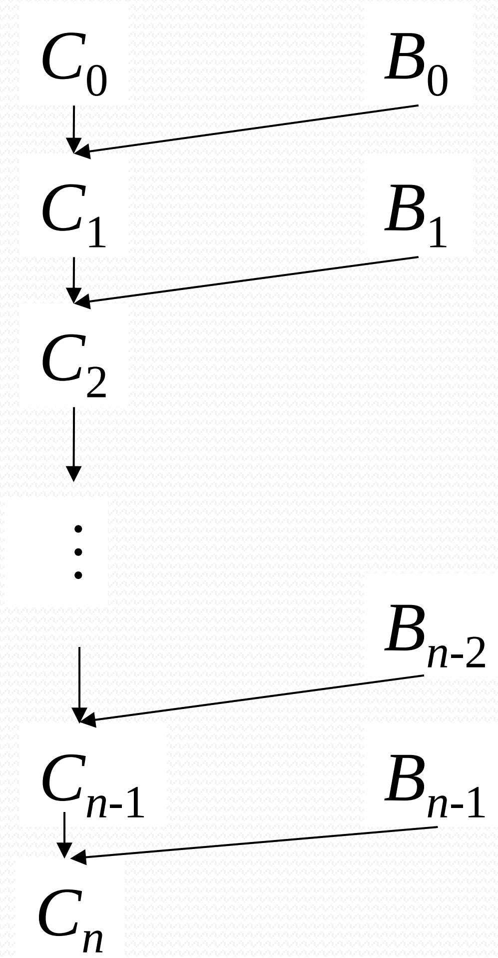
$C_{11} = \mathrm{Res}_q^{\,lock}(C_{10}, C_6) = {}_{(3)}\neg p \vee {}_{(8)}\neg u$

$C_{12} = \mathrm{Res}_p^{\,lock}(C_{11}, C_5) = {}_{(8)}\neg u$ $\qquad \overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

$C_{13} = \mathrm{Res}_u^{\,lock}(C_{12}, C_7) = \square$

Rezoluţia liniară

- Loveland 1970
- procesul rezolutiv este liniar: la fiecare pas una dintre clauzele părinte este rezolventul obţinut la pasul anterior
- Arborele de derivare corespunzător procesului rezolutiv liniar are forma:



  - C_0 clauză vârf
  - $C_1, C_2, \ldots, C_n$ clauze centrale
  - $B_0, B_1, \ldots, B_{n\text{-}1}$ clauze laterale
  - $\forall i=1,2,\ldots,n$, are loc: $C_i = \mathrm{Res}\,(C_{i\text{-}1}, B_{i\text{-}1})$

Teorema de corectitudine și completitudine

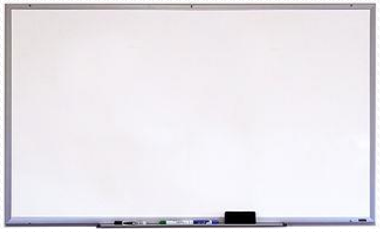
- Mulțimea S de clauze este inconsistentă, dacă și numai dacă $S \vdash_{\mathrm{Res}}^{lin} \square$.

Exerciții (2)

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția liniară:

- $S = \{p \vee q\ ,\neg\ p \vee q\ , p \vee \neg\ q\ , \neg\ p \vee \neg\ q\ \}$

$C_1 = p \vee q$ $C_2 = \neg\ p \vee q$ $C_3 = p \vee \neg\ q$ $C_4 = \neg\ p \vee \neg\ q$



$C_1 = p \vee q$ $C_2 = \neg p \vee q$ $C_3 = p \vee \neg q$ $C_4 = \neg p \vee \neg q$

$C_5 = q$ $C_3 = p \vee \neg q$

$C_6 = p$ $C_4 = \neg p \vee \neg q$

$C_7 = \neg q$ $C_5 = q$

$C_8 = \square$

$\xRightarrow{TCC}$ S este inconsistentă

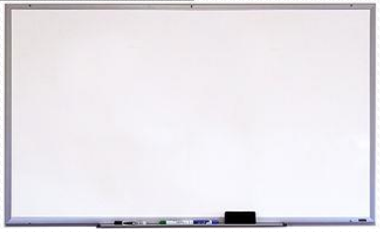
Exerciții (2)

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rezoluția liniară:

- $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$

- $S = \{\neg r, p \vee \neg q, r \vee p \vee q, \neg q \vee \neg p\}$ (+strategia eliminării)

$\boxed{C_1 = \neg r}$ $\boxed{C_2 = p \vee \neg q}$ $\boxed{C_3 = r \vee p \vee q}$ $\boxed{C_4 = \neg q \vee \neg p}$



$C_1 = \neg r$ $\quad$ $C_2 = p \vee \neg q$ $\quad$ $C_3 = r \vee p \vee q$ $\quad$ $C_4 = \neg q \vee \neg p$

$C_1 = \underline{\neg r}$ $\quad$ $C_3 = \underline{r} \vee p \vee q$

$C_5 = p \vee \underline{q}$ $\quad$ $C_2 = p \vee \underline{\neg q}$

$C_6 = \underline{p}$ $\quad$ $C_4 = \neg q \vee \underline{\neg p}$

$C_7 = \underline{\neg q}$ $\quad$ $C_3 = r \vee p \vee \underline{q}$

$C_4 = \neg q \vee \underline{\neg p}$ $\quad$ $C_8 = \underline{r} \vee \underline{p}$ $\quad$ $C_1 = \underline{\neg r}$

$C_1 = \underline{\neg r}$ $\quad$ $C_9 = \underline{\neg q} \vee \underline{r}$ $\quad$ $C_6 = \underline{p}$

$C_3 = r \vee p \vee \underline{q}$ $\quad$ $C_7 = \underline{\neg q}$ $\quad$ $C_5 = p \vee \underline{q}$

$C_8 = r \vee p$ $\quad$ $C_6 = p$

3. Mai sus...
Începem cu alte 2 clauze care revolvă
Și reîncercăm (backtracking)...
Tot nu ajungem la clauza vidă

$\xRightarrow{TCC}$ S este consistentă

1. Nu îl mai luăm tot pe C_4, nu avem altă opțiune, revenim un pas mai sus

2. nu avem altă opțiune, revenim mai sus

Observație:

- rezoluția liniară furnizează o strategie la nivel de implementare: *căutarea cu revenire*
  - la fiecare iterație, pentru clauza centrală pot exista mai multe posibile clauze laterale
  - după ce au fost utilizate toate posibilele clauze laterale, dar nu s-a obținut clauza vidă, se revine la iterația precedentă
  - consistența mulțimii de clauze este demonstrată după o căutare completă fără derivarea clauzei vide

Cazuri particulare ale rezoluției liniare

- **Rezoluția unitară** (*unit*): clauzele centrale au *cel puţin* o *clauză părinte unitară* (conţine un singur literal)
- **Rezoluția de intrare** (*input*): clauzele *laterale* sunt clauze *iniţiale* (de intrare)

Teorema de echivalenţă dintre rezoluţia unit şi cea input

- Fie mulţimea S de clauze. $S \vdash_{\text{Res}}^{input} \square$ dacă şi numai dacă $S \vdash_{\text{Res}}^{unit} \square$.

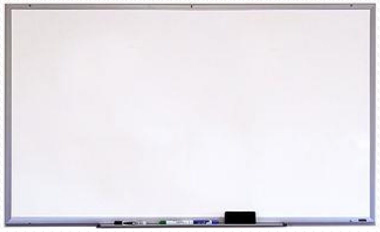
- **corectitudinea**: Dacă $S \vdash_{\text{Res}}^{input/unit} \square$ atunci S este inconsistentă
- **incompletitudinea:** există mulţimi inconsistente de clauze din care nu se poate deriva clauza vidă folosind rezoluţia input sau rezoluţia unit.

Exerciții (3)

Verificați inconsistența mulțimilor următoare de clauze utilizând rafinările input și unit:

- $S = \{ \neg r , p \vee \neg q , r \vee q , \neg q \vee \neg p \}$

$\boxed{C_1 = \neg r}$ $\boxed{C_2 = p \vee \neg q}$ $\boxed{C_3 = r \vee q}$ $\boxed{C_4 = \neg q \vee \neg p}$



Input (cl. lat. sunt din mulț. init.) și unit (C_5,...C_8 au cel puțin un părinte unit.)

$C_1 = \neg r$ $C_2 = p \vee \neg q$ $C_3 = r \vee q$ $C_4 = \neg q \vee \neg p$

$C_1 = \underline{\neg r}$ $C_3 = \underline{r} \vee q$

$C_5 = \underline{q}$ $C_2 = p \vee \underline{\neg q}$

$C_6 = \underline{p}$ $C_4 = \neg q \vee \underline{\neg p}$

$C_7 = \underline{\neg q}$ $C_3 = r \vee \underline{q}$

$C_8 = \underline{r}$ $C_1 = \underline{\neg r}$

$C_9 = \square$

$\overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S este inconsistentă

Tipuri de metode

	Semantice	**Sintactice**
Directe	Tabela de adevăr FNC	Deducția (*mp*)
prin **Respingere**	FND Tabele semantică	Rezoluția (generală, strategia eliminării, strategia saturării pe nivele, strategia mulțimii suport, rafinarea rezoluției blocării, rafinarea rezoluției liniare, cazuri particulare: input și unit)