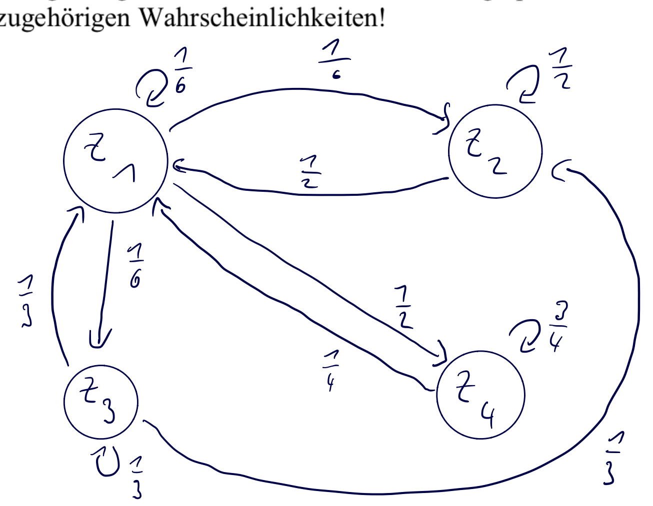
Aufgabe 1 – Markov-Ketten **33 Punkte**

Es gilt ein sehr abstraktes Betriebssystem zu betrachten, welches lediglich aus den Zuständen *Datei lesen (Z_1)*, *Datei drucken (Z_2)*, *Datei speichern (Z_3)* und *Leerlauf (Z_4)* besteht. Gegeben Sei die folgende Zustandsübergangsmatrix Q_2:

$$Q_2 = \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array} \quad mit\ Q_2 = (q_{ij}) : i,j \in \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$$

a) Zeichnen Sie für die dazugehörige Markov-Kette den Zustandsgraphen mit allen Zuständen, Übergängen und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten! **5 Punkte**



b) Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeitsvektoren π_t für $t \in [1,4]: t \in \mathbb{N}$. Dabei soll angenommen werden, dass sich das System zu Beginn im Zustand *4* befindet. $\pi_{t,i}$ beschreibt dann die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das System zum diskreten Zeitpunkt t im Zustand i befindet. Aus der Aufgabenstellung folgt also der initiale Zustand $\pi_{1,4}$. $\pi_{4,2}$ wäre die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das System zum Zeitpunkt 4 in Zustand *2* befindet. **8 Punkte**

$$\pi_0 = (0\ 0\ 0\ 1)$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot Q_2 = (0\ 0\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{4}\ 0\ 0\ \tfrac{3}{4})$$

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot Q_2 = (\tfrac{1}{4}\ 0\ 0\ \tfrac{3}{4}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{24} + \frac{3}{16} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{8} + \frac{9}{16}\right) = \left(\frac{11}{48} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{11}{16}\right)$$

$$\pi_3 = \pi_2 \cdot Q_2 = \left(\frac{11}{48} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{11}{16}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{288} + \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{11}{64} \quad \frac{11}{288} + \frac{1}{48} + \frac{1}{72} \quad \frac{11}{288} + \frac{1}{72} \quad \frac{11}{96} + \frac{33}{64}\right) = \left(\frac{47}{192} \quad \frac{7}{96} \quad \frac{5}{96} \quad \frac{121}{192}\right)$$

$$\pi_4 = \pi_3 \cdot Q_2 = \left(\frac{47}{192} \quad \frac{7}{96} \quad \frac{5}{96} \quad \frac{121}{192}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{42}{1152} + \frac{7}{192} + \frac{5}{288} + \frac{121}{768} \quad \frac{42}{1152} + \frac{7}{192} + \frac{5}{288} \quad \frac{42}{1152} + \frac{5}{288} \quad \frac{47}{384} + \frac{121}{256}\right)$$

$$= \left(\frac{581}{2304} \quad \frac{109}{1152} \quad \frac{67}{1152} \quad \frac{457}{768}\right)$$

c) Berechnen Sie die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten $p_i: i \in \{1,2,3,4\}$, bei denen sich die Markov-Kette im Zustand Z_i befindet. **15 Punkte**

$$(p_1\ p_2\ p_3\ p_4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (p_1\ p_2\ p_3\ p_4) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{4}p_4 = p_1 \\ \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + 0p_4 = p_2 \\ \frac{1}{6}p_1 + 0p_2 + \frac{1}{3}p_3 + 0p_4 = p_3 \\ \frac{1}{4}p_1 + 0p_2 + 0p_3 + \frac{3}{4}p_4 = p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} p_1 = \frac{4}{15} \\ p_2 = \frac{2}{15} \\ p_3 = \frac{1}{15} \\ p_4 = \frac{8}{15} \end{array}$$

d) Was lässt sich mit Hilfe der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten ausdrücken? Vergleichen Sie die Ergebnisse von b) und c). Was stellen Sie fest und woraus resultiert die festgestellte Eigenschaft? **5 Punkte**

In jeden Zeitschritt nähert sich $\pi_{t,i}$ der stationären Zustandswahrscheinlichkeit p_i an. Bis $\lim_{t \to \infty} \pi_{t,i} = p_i$.

Aufgabe 2 – Geburts- und Sterbeprozesse **9 Punkte**

Ein Prozessor erhält Tasks gemäß eines Poisson-Prozesses mit einer Rate von *200* Tasks/Stunde. Die Abarbeitungsdauer ist exponentialverteilt mit einer Rate von *10* Tasks/Minute.

a) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Tasks im System. **3 Punkte**

$\lambda = 200 \frac{T}{h}$ $\mu = 10 \frac{T}{m} = 600 \frac{T}{h}$

$\rho = \frac{200 \frac{T}{h}}{600 \frac{T}{h}} = \frac{1}{3}$ $EN = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

Die mittlere Anzahl an Tasks im System ist $\frac{1}{2}$

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sich 2 Tasks im System befinden. **3 Punkte**

$P(X=2) = (1-\rho)\rho^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{27}}}$

c) Nachdem zwei Tasks angekommen sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der nächsten Minute der nächste Task ankommt? **3 Punkte**

Aufgabe 3 – Warteschlangenmodelle **6 Punkte**

Als Referenzmodell für Warteschlangen wird oft eine Telefonzentrale genutzt. Anrufe mit exponentialverteilter Dauer gehen mit exponentialverteilten Zwischenabständen ein und werden von n Telefonisten entgegengenommen. Sind alle Telefonisten gerade beschäftigt, so werden neu ankommende Anrufer in eine (beliebig lange) Warteschlange eingereiht.

a) Klassifizieren Sie das System in der in der Vorlesung vorgestellten Kendall-Notation. **1 Punkte**

$M|M|n$ $(M|M|n|\infty)$

b) In der Telefonzentrale gehen durchschnittlich 20 Anrufe pro Minute ein. Es gibt nun nur einen Bediener. Wie lange muss ein Anrufer im Durchschnitt warten, wenn die mittlere Länge der Warteschlange 20 beträgt? **5 Punkte**

$EQ = 20$ $\lambda = 20$

$EW = \frac{EQ}{\lambda} = \frac{20}{20} = 1$

Der Anrufer muss im Schnitt eine Minute warten