4.2.2. Модифицированный метод Ньютона

Рассмотренный выше метод Ньютона требует вычисления производной $f'(x_k)$ на каждом k-том шаге. Данное обстоятельство существенно снижает эффективность метода касательных. Поэтому в случаях, когда вычисление производной сопряжено с существенными затратами машинного времени, целесообразно использовать модифицированный (огрубленный, видоизменённый или упрощённый) метод Ньютона (рис. 29).

Модификация заключается в замене $f'(x_k)=f'(x_0)$, в этом случае производная $f'(x_k)$ вычисляется только один раз в точке начального приближения x_0:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

Первая итерация, проводимая по модифицированному методу Ньютона, полностью совпадает с классическим методом Ньютона. На рис. 29 при геометрической интерпретации получается, что на первом шаге определяется угол наклона α касательной к оси абсцисс, который во всех последующих приближениях остается постоянным.

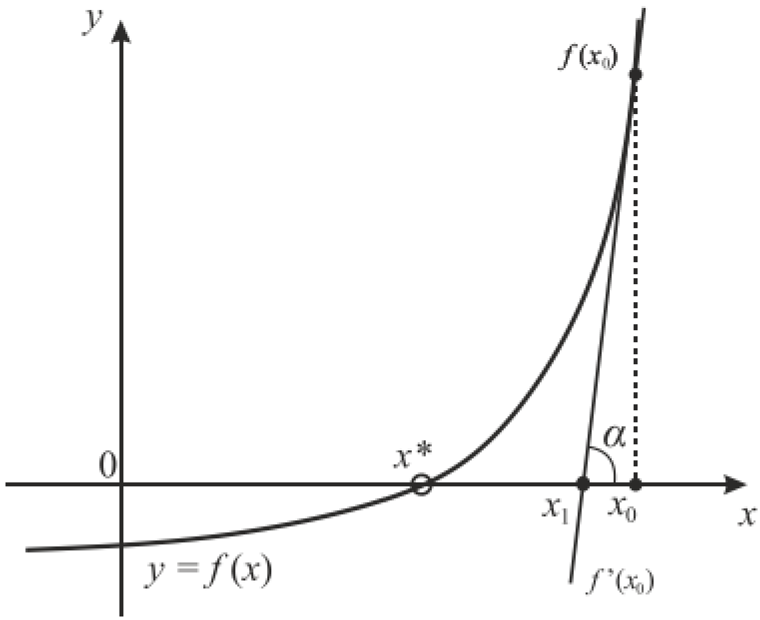

Рис. 29 – Первое приближение по модифицированному методу Ньютона

При выполнении второго итерационного шага проводится линия параллельная касательной к функции в точку x_0 и пересекающая функцию в точке $f(x_1)$, а точка её пересечения с осью абсцисс определяет новое значение x_2. На рис. 30 представлен процесс определения второго приближения по модифицированному методу Ньютона.

Как видно из сравнения рис. 30 и 26 данная модификация утрачивает высокую скорость сходимости, которую обеспечивал метод Ньютона, так как процесс не реагирует на изменение угла наклона при приближении решения к искомому корню.

Пример. Найти решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

используя модифицированный метод Ньютона на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. По аналогии с классическим методом Ньютона находится первая производная заданной функции

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^2 + x}{5} - 1,2 \right)' = 3x^2 - \frac{2x+1}{5}.$$

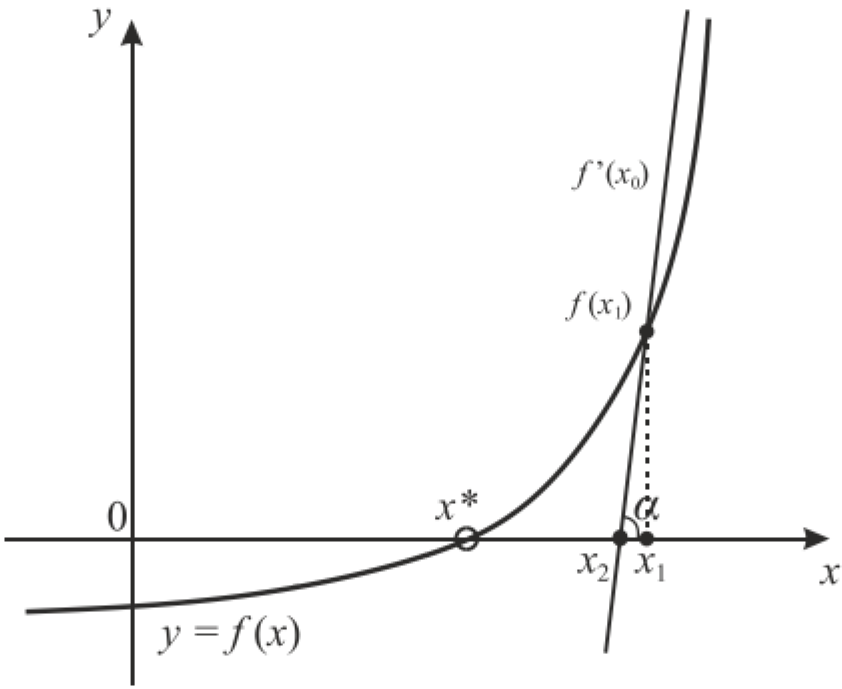

Рис. 30 – Второе приближение по модифицированному методу Ньютона

За начальную точку x_0, так же выбирается правая граница заданного интервала (т.е. точка b = 1,5). В данной начальной точке вычисляются значение функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425$$

и первой производной

$$f'(1,5) = 3 \cdot 1,5^2 - \frac{2 \cdot 1,5 + 1}{5} = 5,95.$$

Оба вычисленных значения подставляются в выражение для определения координаты точки пересечения касательной с осью абсцисс

$$x_1 = 1,5 - \frac{1,425}{5,95} = 1,26050.$$

Полученное значение x_1 также сравнивается с начальным x_0 для проверки достигнутой точности

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| \le \varepsilon \text{ или } \left|1,26050 - 1,5\right| = 0,23950 < 0,001.$$

Как видно требуемое условие по точности не выполнено, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Как видно первая итерация полностью совпадает с классическим методом Ньютона.

Для выполнения второй итерации необходимо вычислить, только значение функции в точке x_1

$$f(1{,}26050) = 1{,}26050^3 - \frac{1{,}26050^2 + 1{,}26050}{5} - 1{,}2 = 0{,}23290,$$

а значение первой производной берется с предыдущей итерации, т.е. в точке x_0. Следовательно, знаменатель в модифицированном методе Ньютона является постоянным и равен 5,95.

Вновь вычисленное значение функции в точке x_1 подставляются в выражение для определения координаты следующей точки пересечения касательной $f'(x_0)$ с осью абсцисс

$$x_2 = 1{,}26050 - \frac{0{,}23290}{5{,}95} = 1{,}22136.$$

Найденная координата x_2 сравнивается с координатой, вычисленной на предыдущем шаге x_1, для определения точности вычислений

$$|1{,}22136 - 1{,}26050| = 0{,}03914 < 0{,}001.$$

Поскольку требуемая точность не достигнута, то процедура нахождения решения продолжается.

Механизм нахождения решения нелинейного уравнения модифицированным методом Ньютона сведен в табл. 12.

Из табл. 12 видно, что после шестой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1{,}20046 - 1{,}20119| = 0{,}00073 < 0{,}001.$$

В то же время проведенная проверка условие достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности показывает, что необходимо продолжить процесс уточнения искомого решения. Только решение, полученное после седьмой итерации, удовлетворяет требуемому условию, т.е. $|f(x_7)| < \delta$.

Ответ. Решение заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ получено модифицированным методом Ньютона за семь итераций и соответствует $x = 1{,}20018$.

Проводя анализ полученного решения по модифицированному методу Ньютона и по методу касательных, можно отметить, что модификация приводит к значительному увеличению числа итераций и при этом значение функции в полученном решении x значительно уступает классическому методу Ньютона.