Пример 29. *Построить кубический сплайн через метод моментов при условии, что*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1;$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Решение.

Возьмем первый частичный промежуток $[x_0, x_1] = [0, 1/2]$:

$$g(x) = \frac{M_0}{2}x^2 + (M_1 - M_0)\frac{x^3}{3} + g'(0) + g(0).$$

На втором частичном промежутке $[x_1, x_2] =[1/2,1]$

$$g(x) = \frac{M_1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{M_2 - M_1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right).$$

По определению интерполяционного сплайна третьего порядка на каждом частичном промежутке сплайн должен быть полиномом степени не выше чем третья. Как легко заметить, первое условие по-нашему построению выполнилось. Нам осталось найти следующие неизвестные величины:

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad g'(0), \quad g'(1/2), \quad g(0), \quad g(1/2).$$

Эти неизвестные мы находим из двух оставшихся условий из определения сплайна.

Второе условие — условие интерполяции, т. е.

$$g(x_0) = f(x_0) = y_0,$$

$$g(x_1) = f(x_1) = y_1,$$

$$g(x_2) = f(x_2) = y_2.$$

Условия интерполяции сразу нам дадут значения двух из неизвестных: $g(x_0)$ и $g(x_1)$. А именно,

$$g(0) = y_0 = 0,$$

$$g(1/2) = y_1 = 1.$$

Потребуем выполнение третьего условия. Получим

$$g(x_2) = \frac{M_1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{M_2 - M_1}{3}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^3 + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = y_2.$$

Следовательно,

$$\frac{M_1}{8} + \frac{M_2 - M_1}{24} + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 0. \tag{5.2}$$

С условиями интерполяции завершили.

Переходим к условиям непрерывности. Ясно, что сплайн третьего порядка может иметь разрывы только во внутренних точках. Внутренней точкой в нашем примере является только $x_1 = 1/2$.

Непрерывность сплайна во внутренних точках означает, что

$$g(x_1 - 0) = g(x_1 + 0).$$

Следовательно,

$$\frac{M_0}{8} + \frac{M_1 - M_0}{24} + \frac{1}{2}g'(0) = 1. \tag{5.3}$$

Аналогично, непрерывность первой производной:

$$g'(x_1 - 0) = g'(x_1 + 0).$$

Получим

$$\frac{M_0}{2} + \frac{M_1 - M_0}{4} + g'(0) = g'\left(\frac{1}{2}\right). \tag{5.4}$$

Отметим, что условие непрерывности второй производной выполнено автоматически за счет построения метода моментов.

Таким образом, получили три уравнения (5.2), (5.3) и (5.4) для нахождения оставшихся пяти неизвестных.

Добавим еще два условия естественного сплайна, т. е.

$$g''(x_0) = g''(x_2) = 0.$$

Из двух этих условий получим, что $M_0 = M_2 = 0$.

Таким образом, получили следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} g'(0) = 2 - \frac{M_1}{12}, \\ g'\left(\frac{1}{2}\right) = -4 - \frac{M_1}{6}, \\ \frac{M_1}{4} + g'(0) = g'\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Отсюда получим, что $M_1 = -18, g'(0) = 7/2$ и $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

Все неизвестные найдены. Осталось записать сплайн третьего порядка:

$$g(x) = \begin{cases} -6x^3 + \frac{7}{2}x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -9\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - x + \frac{3}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

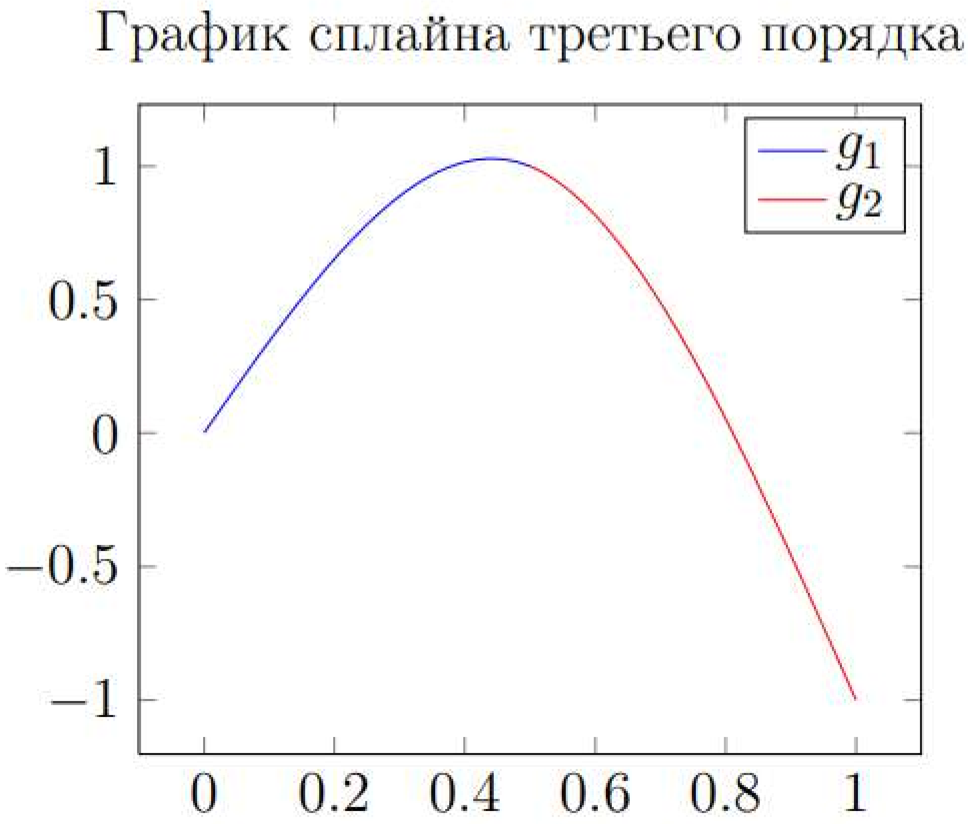

Рис. 18: График сплайна третьего порядка.