МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА

Еще раз обратим внимание, что в **методе Гаусса** в процессе преобразования расширенной матрицы $\boldsymbol{B}$ системы к ступенчатому виду идет последовательное движение по строкам сверху вниз; затем по ступенчатой матрице $\boldsymbol{B}_1$ составляется новая система, равносильная исходной, из которой последовательным движением снизу вверх находятся значения неизвестных (если система определенная) или выражения базисных неизвестных через свободные (если система неопределенная).

При этом в процессе преобразований базисные неизвестные исключаются **только из всех последующих уравнений**.

Метод Жордана-Гаусса отличается тем, что каждая базисная неизвестная исключается **из всех уравнений**, кроме одного, т.е. не только из всех последующих уравнений, но и всех предыдущих.

Продемонстрируем это на примерах.

Пример 1. Решите методом Жордана-Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13 \end{cases}.$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу B системы и будем проводить элементарные преобразования ее строк методом Жордана-Гаусса.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -7 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 19 & 17 & 11 & -12 \\ 0 & -19 & -18 & -12 & 12 \\ 0 & 25 & 19 & 18 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 19 & 17 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 25 & 19 & 18 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-6) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -131 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-\frac{1}{131}) \\ (-1) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = B_1.$$

Матрица B приведена к ступенчатому виду B_1, ее ранг равен 4. Одновременно к ступенчатому виду A_1 приведена и матрица системы A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг также равен 4. Следовательно, система совместна (по теореме Кронекера-Капелли). И так как число неизвестных 4 равно рангу системы, то система определенная (имеет единственное решение). Все неизвестные базисные. Система, соответствующая матрице B_1, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}. \qquad (*)$$

В каждом уравнении одна (базисная) неизвестная.

Решение системы $\overline{X} = (1; 0; -2; 2)$.

Заметим, что матрица A_1 имеет диагональный вид; более того, она единичная.

Ее вектор-столбцы (и вектор-строки) называются единичными векторами

$\bar{a}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\bar{a}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\bar{a}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\bar{a}_4 = (0; 0; 0; 1)$.

Про систему уравнений вида (*) принято говорить, что **она приведена к единичному базису** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$.

Пример 2. Методом Жордана-Гаусса решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3 \end{cases}.$$

Решение.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & -8 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ (-2)\ (3)\ (-5) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) = B_1.$$

Запишем систему, соответствующую матрице B_1:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -8 \end{cases}. \qquad (**)$$

Базисные неизвестные - x_1 и x_2; остальные x_3 и x_4 - свободные. Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -8 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Базисное решение системы: $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = -8$, $x_2 = -5$, $\overline{X}_{баз} = (-8; -5; 0; 0)$.

В нем свободные неизвестные равны нулю, а базисные равны свободным членам системы (**).

Заметим, что система (**) приведена к единичному базису $\bar{a}_1 = (0,1)$, $\bar{a}_2 = (1,0)$ с базисными неизвестными x_1 и x_2.

Возникает вопрос: можно ли взять другие неизвестные в качестве базисных и получить новое базисное решение? Для ответа на него продолжим элементарные преобразования матрицы B_1:

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) = B_2.$$

Матрице B_2 соответствует система

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_2 - x_1 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_1 + 2x_4 = 8 \end{cases} \qquad (***)$$

с базисными неизвестными x_2 и x_3 и свободными неизвестными x_1 и x_4.

Система (***) приведена к единичному базису $\bar{a}_2 = (1,0)$, $\bar{a}_3 = (0,1)$.

При этом одно базисное неизвестное x_2 сохранилось, а второе (x_1) заменилось на x_3. Принято в этом случае говорить, что система (***) получена из системы (**) путем **однократного замещения** переменных (неизвестных).

Новое общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_2 = 3 + x_1 - x_4 \\ x_3 = 8 + x_1 - 2x_4 \end{cases},$$

а новое базисное решение $\overline{X}_{1баз} = (0; 3; 8; 0)$.

А сколько еще (других) базисных решений можно получить?

Так как число базисных неизвестных равно рангу r системы, а число всех неизвестных равно n, то число различных наборов по r переменных из n переменных равно числу сочетаний $\left(C_n^r\right)$ из n элементов по r элементов.

В нашем случае $n = 4$, $r = 2$, поэтому максимально возможное число различных базисных решений системы равно $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Читатель легко убедится самостоятельно, что данная система имеет именно 6 различных базисных решений. Кроме указанных это будут:

$$\overline{X}_{2баз} = (-3; 0; 5; 0); \overline{X}_{3баз} = (2; 0; 0; 5); \overline{X}_{4баз} = (0; -1; 0; 4); \overline{X}_{5баз} = (0; 0; 2; 3).$$