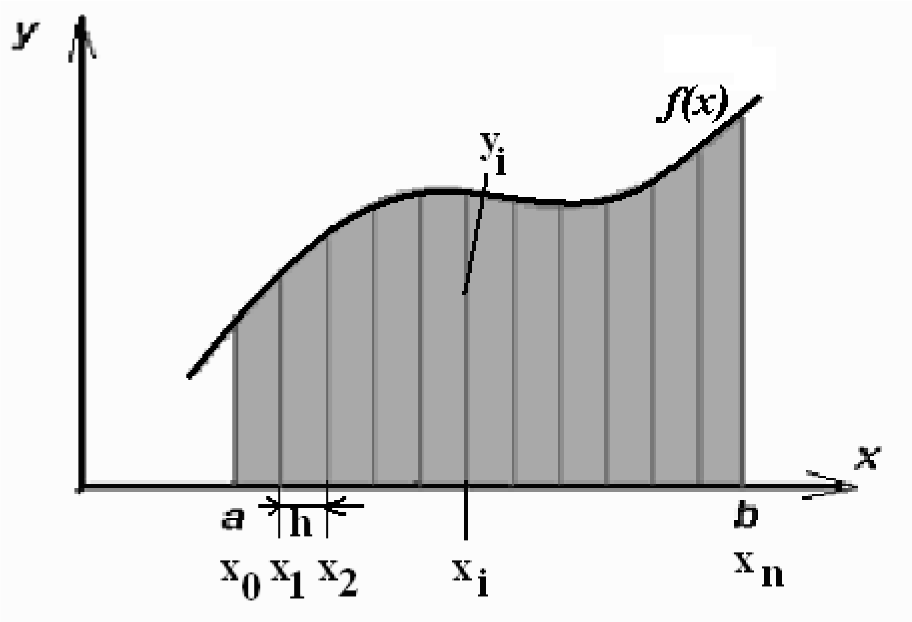
Для методов первой группы отрезок интегрирования [a, b] разобьем на n равных частей, таким образом определим (n+1) точку $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Число разбиений n выбирают.



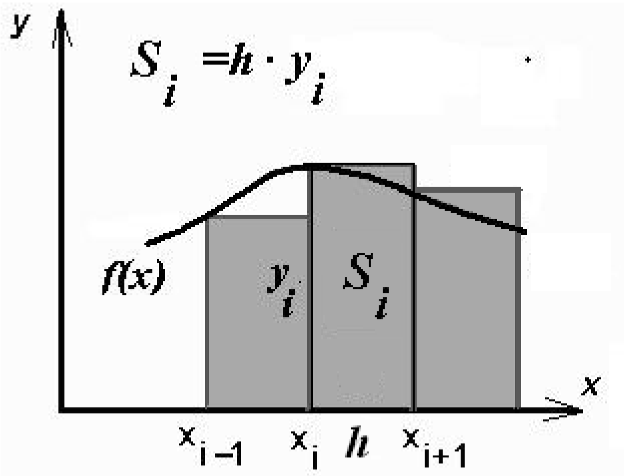
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a;$$

$$x_i = a + i * h$$

$$x_n = b$$

Здесь i –номер точки, h -шаг интегрирования, соответствующие значения функции будем обозначать $y_i = f(x_i)$.



В методе прямоугольников криволинейную трапецию, ограниченную функцией f(x) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ заменяют на прямоугольник. В **методе прямоугольников слева** высота прямоугольника выбирается равной $y_i = f(x_i)$ – значение функции в крайней левой точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (см.рис.). Площадь этого прямоугольника $S_i = h \cdot y_i$. Тогда интеграл приближенно может быть найден с помощью суммы

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (*)$$

Суммирование ведется с учетом того, что в первом прямоугольнике слева в качестве высоты выступает y_0, а в последнем прямоугольнике справа (внутри отрезка интегрирования [a, b]), в качестве высоты выступает y_{n-1}.

В **методе прямоугольников справа** на каждом отрезке [x_i, x_{i+1}] строится прямоугольник с высотой y_{i+1} (см. рис). Интеграл приближенно находится с помощью суммы

$$I = h\sum_{i=1}^{n} y_i\ ,$$

которая отличается от формулы для метода прямоугольников слева только пределами суммирования.

В **методе средних** в качестве высоты прямоугольника выбирается значение функции в точке, посередине отрезка [x_i, x_{i+1}], то есть

$$y_{i+1/2} = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \text{ и } I = h\sum_{i=0}^{n} y_{i+1/2}$$

Название метода прямоугольников, таким образом, зависит от того, в какой точке отрезка [x_i, x_{i+1}], выбирается высота этого прямоугольника.

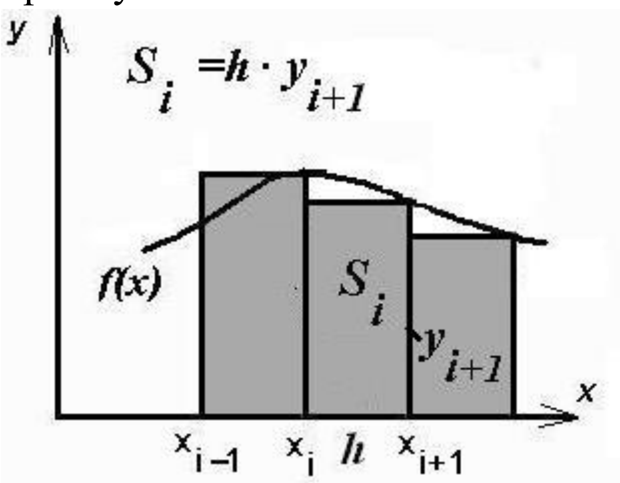


Рис. Замена криволинейной трапеции прямоугольником в методе прямоугольников справа.

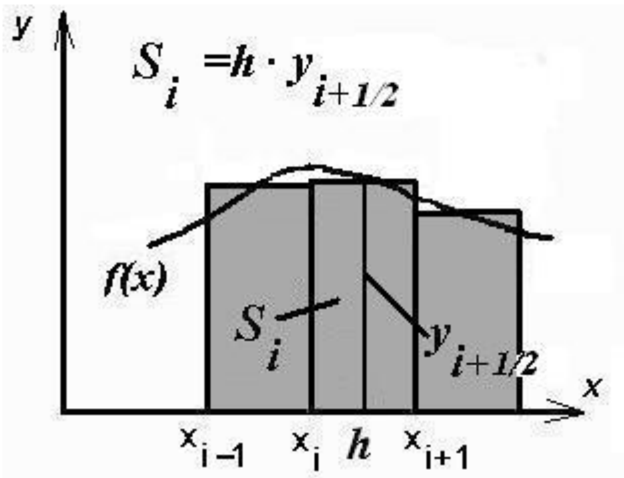


Рис. Замена криволинейной трапеции прямоугольником в методе средних.

Бывает, что подынтегральная функция задана в виде таблицы. Тогда расчет ведется с переменным шагом интегрирования. Считают, что шаг метода переменный и вычисляется по формулам $h_i=x_{i+1}-x_i$ –слева и $h_i=x_i-x_{i-1}$- справа.

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок [*a*, *b*] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда *a* = 0, *b* = 3 , $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$

$x_k = a + k \cdot \Delta x$

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} =3$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4,5$

$f(x_0) = 2^2 = 4$

$f(x_1) = 2,5^2 = 6,25$

$f(x_2) = 3^2 = 9$

$f(x_3) = 3,5^2 = 12,25$

$f(x_4) = 4^2 = 16$

$f(x_5) = 4,5^2 = 20,25$.

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25) = \frac{1}{2} \cdot 67,75 = 33,875$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$