23

30

<u>Методы решения</u>

1) Метод Ньютона. Задаётся вектор начал приближ. Для опред след итераций используется следующее превращ;

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + J^{-1}(x_i^k) F_i(x_i^k)$$, где J^{-1} - матрица, обратная матрице Якоби

2) Метод простой итерации аналогичен методу рассмотр. для одного уравнения

Задаётся вектор начал приближ. Исходная СЛАУ преобразуется к эквивалентному виду

Если итерационный процесс сходится (условие

$$M_{ij} = \max\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right| \quad \|M\| < 1$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \end{cases}$$

Скорость сходимости метода сильно зависит от вида конкретно подобранной функции φ_i, которые должны одновременно

31

удовлетворять условиям эквивалентности к исходн системе, а так же обеспеч. сходимость итерац. процесса

(Посмотреть пример в случае 1-го нелинейного ур-я)

Для Темы 2. Лаб работа 1 Решение нелин. ур-ий

2. Итерационные методы решения нелинейных ур-ий

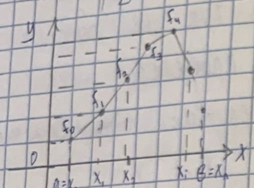
Доп { 3. Комбинированные методы решения
4. Решение систем нелин. ур-й

10.10.22

<u>Тема 3. Интерполяция и аппроксимация</u>

<u>Основные понятия и определения</u>

Интерполяция - восстанав. функции на заданном интервале по известным её знач. в конечном множ точек, принадл её функции



Если приращ функц пропорц приращ аргумент (линейн интерпол) функция заменяется ломаной, состоящей из отрезков прямой соедин пары соседних значений

Интерпол заключается в построении по таблице значений функций её выражен. чаще всего многочлена (полинома) степени на 1 меньше чем число заданных значений. Формулы для построения такого многочлена назыв интерп формулами (~~ф~~ Лагранжа, Ньютона, Стирлинга, Бесселя

Задача интерполяции закл:
на отрезке AB заданы $n+1$ точек x_i $(x_0, \dots x_n)$ называемые узлами интерпол и значение некоторой

функции $f(x)$ в этих точках.

$f(x_0) = y_0$ $f(x_1) = y_1$ $f(x_i) = y_i$

Требуется построить интерпол функцию $F(x)$ принимающую в узлах интерпол. те же значения, что и $f(x)$

$F(x_0) = y_0$ $F(x_1) = y_1$ $F(x_i) = y_i$

Геометрически это означает, что требуется найти некоторую кривую определённого типа проходящую через заданный набор x_i y_i до n

В такой постановке задача интерполяц может иметь бесчислен множество решений либо не иметь решений. Однако задача становится однознач разрешимой если вместо $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n удовлетворяющ. условиям

Все методы интерпол разделяются на локальные и глобальные.

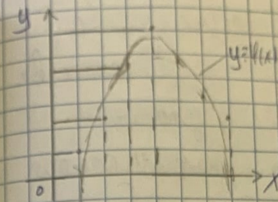
В случае локальной (сплайн) на каждом интервале $[x_i; x_{i+1}]$ строится отдельный полином

$$f(x)=\begin{cases} f_1 [x_0; x_1] \\ f_2 [x_1; x_2] \\ \dots \\ f_n [x_{n-1}; x_n] \end{cases}$$

В случае глобальной интерп отыскивается единый полином на всём интервале AB при этом искомый полином называется интерполяционным полиномом

Аппроксимация

Аппроксимация функции закл в приближ замене заданной функции $f(x)$ некоторой функции $\varphi(x)$ так чтобы отклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$ было наименьшим



Функция $\varphi(x)$ назыв аппроксимир.
Необходимость аппроксим функции возникает в 2-ух случаях 1) $f(x)$ имеет сложное аналит. описание вызывающее трудности при её использовании. 2) Аналит. описание неизбежно, при этом необходимо иметь аналит описание приближённо представляющее $f(x)$.

Обычно для аппроксим. использ классы самых простейших функций

1) Линейные комбинации функций то есть функции из классов полиномов $1, x, x^2, \dots x^n$ не выше n (аппроксим алгебраич многочленом заданной степени)

2) Линейные комбинации функций $\sin(a_k x)$, $\cos(a_k x)$ (аппроксим тригоном многочленом или отрезок ряда ФОЕ

3) Комбин экспонент функций с вышеуказанными. В качестве критерия согласия исп 3 условия

1) Точность совпадения знач искомой функции экспериментов и табличн

2) Сумма квадратов отклонений значений искомой и табл функции минимально (критерий среднеквадратичной аппроксим.)

3) Максимальное по абсолют. величине из отклонений значение искомой и табличной функции минимально (критерий равномерной аппроксим)

Интерполяционный полином

1. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть на отрезке AB заданы $n+1$ разных знач аргумента $x_0, x_1, \dots, x_i, x_n$ и известны для функции $f(x)=y$ соответствующие значения $f(x_0)=y_0, \dots$

Требуется построить полином $L_n(x)$ в степени не выше n, имеющий в заданных узлах те же значения, что и функция. Будем искать решение $L_n(x)$ в виде суммы

$L_n(x) = L_0(x) + L_1(x) + \dots + L_n(x)$, где

$L_i(x)$ полином в степени n

$$\begin{cases} L_i(x_k) = y_k, & \text{if } i = k \\ L_i(x_k) = 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

Так как искомый полином обращается в полином в n точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ то он имеет вид

$L_i(x) = C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$,

$$\begin{cases} x = x_i \\ L_i(x_i) = y \end{cases}$$

$y_i = C_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)$

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)}}$$ – интерпол. полином Лагранжа

Как показывают расчёты полином Лагранжа имеют малую погрешн при небольшом кол-ве узлов ($n \le 20$). При большом n метод Лагранжа не сходится (погрешность не убывает с ростом n).

Частный случай $n=1$ имеет линейную интерполяцию $L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

$n=2$ $L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$n=3$ $L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

Интерполяционная формула Ньютона

Пусть в равно стоящих точках $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots n$, где h – шаг интерполяции

Заданы значения $y_i = f(x_i)$ для функции $y = f(x)$. Требуется подобрать полином степени не выше n

$P_n(x)$ – ?

Введём конечные разности для последовательности y_i: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

...

$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

Тогда $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$, $m = 0, 1, \dots, n$

Опуская выкладки окончательно получим 1 интерполяционную формулу Ньютона

$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$, 23

$q = \frac{x - x_0}{h}$ - q - число шагов интерполяции от начальной x_0 до точки x

Данная формула используется для интерполяции функции в окрестности начал. x_0, где q по абс. величине мало

В частный случай: $n = 1$ - линейная формула интерполяции

$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$ $\quad P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Применяется вблизи конца таблицы

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

1 интерполяц. формула используется для интерполиров. вперёд - по потоку, а 2 для интерполиров назад - против потока

Интерполяционные формулы Гаусса

Пусть точка x лежит в окрестности середины интервал, содерж $2n+1$ равностоящих с шагом h точек и для функции $y = f(x)$ известные её значения в этих узлах

$x_i = x_0 + ih \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$

Требуется построить полином $P(x)$ степенью не выше $2n$, такой что $P(x_i) = y_i$

Интерполяц формула удовлет. в этим требованиям записывается как 1-ая интерполяц формула Гаусса

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \dots$$

Интерполяционная формула Стирлинга

Взяв среднее арифметическое формулы Гаусса получим формулу Стирлинга

$$P_n(x) = y_0 + q\,\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots(q^2-(n+1)^2)}{(2n)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots(q^2-(n+1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Интерполяционная формула Бесселя

$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+ \frac{(q-\frac{1}{2})\,q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$\ldots + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+ \frac{(q-\frac{1}{2})\,q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}$$

Формула Стирлинга для интерполирования при значения q близких 0. На практике $|q| \le 0{,}25$

Формула Бесселя использ для интерпол при $q \approx 0{,}5$. На практике $0{,}25 \le |q| \le 0{,}75$

В том случае когда $q = 0{,}5$

формула Бесселя может быть представлена в следующем виде:

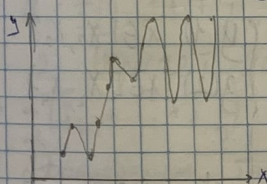
$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n\frac{(1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1))^2}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2}$$

Называется формулой интерполирования на середине

III Интерполирование сплайнами

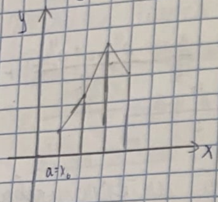
При интерполир большого числа узлов (>50) необходимо работать с многочленами высокой степени, что приводит к колебан многочленов между узлами сетки



Поэтому на практике для большого кол-ва узлов используется локальная интерполяция сплайнами кусочными многочленами

~~Кусочн~~

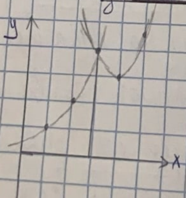
Кусочно-линейная интерполяция



$$f(x) = \begin{cases} f(1) & x \in [x_0; x_1] \\ f(2) & x \in [x_1; x_2] \\ \dots & \\ f(k) & x \in [x_{n-1}; x_n] \end{cases}$$

Самый простой полином 1-ой степени он создаёт ломанную состоящ из 2-ух отрезков которые проходят через 2 точки. Для получения формул используем полином Лагранджа для каждого интервала $[x_i; x_{i+1}]$

Кусочно-квадратичная



$$f(x) = \begin{cases} g(1) & x \in [x_0, x_2] \\ g(2) & x \in [x_2, x_4] \\ \dots & \\ g(k) & x \in [x_{n-2}, x_n] \end{cases}$$

Недостатком является резкое изменение кривизны в общих узлах (x_2)

Простейший подход сглаживания суть состоит в подмене данной функции в рассматр отрезках наилучшим линейным среднеквадратич. приближением

1) Для таблично заданной функции надо найти $S(x)$ составленную из линейных функций, чтобы $f(x) \approx S_i(x)$ для всех x $(S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i))$ в смысле минимума квадрата отклонений

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} (f(x_k) - S_i(x_k))^2 = min.$$

В результате нахождения a_i b_i методом наим. квадратов

$$a_i = \frac{1}{3}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}) \quad b_i = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1})$$

2) Пересчёт данной таблицы $S_i(x_i) = \frac{1}{3}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1})$ $i = 1, 2, \dots, N-1$

Доопределим таблицу значениями

$S_0(x_0) = f_0$ $S_N(x_n) = f_N$

В результате получаем новую табл функцию в которой сохраняется

Характер поведения исходной

Описанн процедура называется усреднен по 3 точкам. И является простым частным случаем линейного фильтра

Кусочно-кубическая

Функция $S(x)$ называ куб. сплайном, если существует N куб полиномов $S_k(x)$ с коэф. $S_{k,0}(x)$, $S_{k,1}(x)$, $S_{k,2}(x)$, $S_{k,3}(\,)$, которые удовлетворяют след усл.:

1) $S(x) = S_k(x) = S_{k,0} + S_{k,1}(x-x_k) + S_{k,2}(x-x_k)^2 + S_{k,3}(x-x_k)^3$, то есть куб сплайн состоит из куб полиномов

2) Кусочно куб. интерп задаётся совокупностью точек $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$

3) Кусочно куб представл состояло из кривых, которые являются гладкими непрерывными функциями $\Rightarrow$ 2 и 1 производные должны быть непрерывны

$S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ На практике использую
$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ сплайн следующего
... вида:

$S_3(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$

Для задания сплайна a_i, b_i, c_i, d_i подбираются так, чтобы выполнялось усл. $S_3(x_i) = y_i$, а S', S'', S''' были непрерывными

Лем о сплайнах

1) Смыкающий (чертёжный) существует единст. куб сплайн который имеет 1 произв с граничн усл.
$S'(a) = D_0$, $S'(b) = D_N$, смыкающ сплайн имеет определ наклон в опр точках

2) Естеств сплайн существ 1 куб сплайн со свобод граничн усл. $S''(a) = 0$, $S''(b) = 0$

Сплайн допускает свободный наклон на краях для обеспечения положения которое миним колеб кривой

3) Экстраполяционный – сущ единст куб сплайн который использ для экстраполирования по внутр узлам чтобы определить $S''(a) \to x_1, x_2$

$S''(b) \Rightarrow x_4, x_3$

4) Сплайн заканч параболой – сущ... такой что

$S''(x) \equiv 0\ [x_0, x_1]$ $S''(x) \equiv 0\ [x_{n-1}, x_n]$

5) Сплайн с заданной кривизной в крайних точках – сущ... с заданным знач 2-ой производной в крайних точках $S''(a) =$

24.10.22

Аппроксимация

При большом кол-ве узлов >50 интерполяция приводит к необходимости работать с полиномами высокой степени, что является неприемлимым с точки зрения вычислений, а также склонности многочленов к колебаниям, поэтому на практике применяют либо кусочные многочлены (сплайны) либо аппроксимацию. Если исходные данные получены в результате эксперт измерений, то точного совпадения не нужно, результат представляется в виде диапазона. Это условие означает, что интерполирующая функция проходит не через точно заданную точку, а в их окрестности.

Метод наименьших квадратов

1) Необходимо определить величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ которые нельзя определить непосредственно, но известно, что они линейно зависимы, а коэфф. ~~это~~ можно получить в

результате измерений, то есть мы имеем переопределённую СЛАУ. Решение этой системы может быть получено решением задачи минимизации, выполняя дифференцир. минимиз. функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{iN} x_N - b_i)$$

приходим к линейной системе которая N уравн., N неизвестных

2) Требуется дать приближ. аналит. описание по таблич. заданным данным. Из каких-либо соображений подбир. аппроксимирующая функция $y = \varphi(x)$, а параметры подбираются так, что Σ квадратов отклонений вычисляемых значений аппроксимирующих функций от заданной была минимальной

Линеаризация данных по методу наименьших квадратов

Техника линеаризации применяется для подгонки кривых позволяющ. при преобразовании переменных получить линейную зависимость $y = Ax + B$. Основные приёмы представлены в таблицах

N	функция	линеар. функц	замена перемен. и const
1	$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$; $Y = y$
2	$y = \frac{A}{x+B}$	$y = \frac{-1}{B}(xy) + \frac{A}{B}$	$X = xy$; $Y = y$
3	$y = \frac{x}{Ax+B}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$
4	$y = A\ln(x) + B$	$y = A\ln(x) + B$	$X = \ln(x)$; $Y = y$
5	$y = Ce^{Ax}$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x$; $Y = \ln(y)$; $B = \ln(C)$
6	$y = Cx^{A}$	$\ln(y) = A\ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x)$; $Y = \ln(y)$; $B = \ln(C)$

Пусть задано N большое точек с

~~по~~ различным абсциссам x и x^*

Величина среднеквадратич ошибки когда каждая частная производная

$$(E(A))^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(f(x_k) - y_k)^2\right)$$

выражения по неизвестным (A B) будет обращаться в 0, A; B - решение нормальной системы линейных уравнений вида

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)A + NB = \sum_{k=1}^{N} y_k \quad \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)A + \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)B = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

решает данное СЛАУ на фоне когда A, B

Пример. Аппроксимировать таблично заданную функцию по 5 точкам полиномом 1 степени. Построить ~~пол~~ график функции

K	X_k	y_k
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	2
4	4	3,5

$$\left(\sum_{k=1}^{5} x_k\right)A + 5\cdot B = \sum_{k=1}^{5} y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{5} x_k^2\right)A + \left(\sum_{k=1}^{5} x_k\right)B = \sum_{k=1}^{5} x_k y_k$$

$$\begin{cases} 10A + 5B = 8,5 \\ 30A + 10B = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0,8 \\ B = 0,1 \end{cases}$$