Пример. Найти корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

с помощью метода половинного деления на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Вначале определяется значение функции на одной из границ заданного интервала (в нашем случае это точка, являющаяся началом интервала $a = 1$)

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6\,.$$

Далее вычисляется координата середины заданного интервала

$$x_0 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$f(1,25) = 1,25^3 - \frac{1,25^2 + 1,25}{5} - 1,2 = 0,190625\,.$$

Полученное значение функции в точке x_0 позволяет провести анализ смены знака функции и выбрать новый интервал, на котором функция меняет знак. В данном случае осуществляется замена точки b на x_0. В результате заданный первоначальный интервал сузился до [1; 1,25].

Для вновь определенного интервала проводится проверка достигнутой точности

$$|b-a| \le 2\varepsilon \text{ или } |1,25-1| = 0,25 < 0,002.$$

Как видно новый интервал не удовлетворяет требуемому условию по точности, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Для этого проводится повторное вычисление координаты середины нового интервала

$$x_1 = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$$

и значение функции в этой точке

$$f(1,125) = 1,125^3 - \frac{1,125^2 + 1,125}{5} - 1,2 = -0,254297.$$

Проверяется условие достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности

$$\left|f\left(x_1\right)\right| < \delta,$$

$$\left|-0,254297\right| < 0,001.$$

Проведенное сравнение подтверждает необходимость продолжения процесса уточнения искомого решения.

Используя полученное значение функции в точке x_1, определяется интервал, на котором функция меняет знак.

Таким образом, точка a заменяется на x_1, а исследуемый интервал уменьшается до [1,125; 1,25] и процедура нахождения решения продолжается.

Механизм нахождения решения заданного нелинейного уравнения методом половинного деления целесообразно свести в таблицу.

Из табл. 7 видно, что после восьми приближений получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,201172-1,199219|=0,001953<0,002\,.$$

Отметим, что значение функции, определенное после восьмой итерации также меньше δ.

Для справки, точным решением заданного нелинейного уравнения является $x^* = 1,2$.

<u>Ответ.</u> Решением заданного нелинейного уравнения на рассматриваемом интервале является $x = 1,200195$, которое получено с требуемой точностью $\varepsilon = \delta = 0,001$.

Таблица 7 – Решение нелинейного уравнения методом дихотомии

k	a	$f(a)$	b	x	$f(x)$
0	1	-0,6	1,5	1,25	0,190625
1	1	-0,6	1,25	1,125	-0,254297
2	1,125	-0,2543	1,25	1,1875	-0,044971
3	1,1875	-0,044971	1,25	1,21875	0,069452
4	1,1875	-0,044971	1,21875	1,203125	0,011408
5	1,1875	-0,044971	1,203125	1,195313	-0,016988
6	1,195313	-0,016988	1,203125	1,199219	-0,002842
7	1,199219	-0,002842	1,203125	1,201172	0,004270