12.8. Метод конечных разностей решения краевых задач для оду

Постановка задачи: найти решение линейного дифференциального уравнения

$u'' + q(x)u' - e(x)u = z(x),\ x \in [a,b]$, (1)

удовлетворяющего краевым условиям: $u(a) = \varphi,\ u(b) = \psi$. (2)

Теорема. Пусть $q(x), e(x), z(x) \in C_2[a,b];\ e(x) \geq 0$. Тогда существует единственное решение поставленной задачи.

К данной задаче сводится, например, задача об определении прогибов балки, которая на концах опирается шарнирно.

Основные этапы метода конечных разностей:

1) область непрерывного изменения аргумента ([a,b]) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами:
$x_i = a + hi,\ i = 0,..,n,\ n = (b-a)/h$.

2) Искомая функция непрерывного аргумента x, приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке, т.е.
$u(x) \rightarrow u_h = (u_0, \ldots, u_n)$. Функция u_h называется сеточной.

3) Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. Такая замена называется разностной аппроксимацией.

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки, которые находятся из решения алгебраических уравнений.

Аппроксимация производных.

Для аппроксимации (замены) первой производной можно воспользоваться формулами:

$u'(x_i) \approx L_h^{(+)} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ - правая разностная производная,

$u'(x_i) \approx L_h^{(-)} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ - левая разностная производная,

$u'(x_i) \approx L_h^{(0)} = \left(L_h^{(+)} + L_h^{(-)}\right)/2 = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ - центральная разностная производная.

т.е., возможно множество способов аппроксимации производной.

Все эти определения следуют из понятия производной как предела: $u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$.

Опираясь на разностную аппроксимацию первой производной можно построить разностную аппроксимацию второй производной:

$$u''(x_i) = \left(u'(x_i)\right)' \approx \frac{u'(x_{i+1}) - u'(x_i)}{h} = \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = L_h^{(2)} u_i \quad (3)$$

Аналогично можно получить аппроксимации производных более высокого порядка.

Определение. Погрешностью аппроксимации n- ой производной называется разность: $\delta(x) = u^{(n)}(x) - L_h^{(n)} u(x)$.

Для определения порядка аппроксимации используется разложение в ряд Тейлора.

Рассмотрим правую разностную аппроксимацию первой производной:

$$\delta(x_i) = u'(x_i) - L_h^{(+)} u(x_i) = u'(x_i) - \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

$$u_{i+1} = u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + h^2/2u''(x_i) + \ldots$$

$$\delta(x_i) = u'(x_i) - \frac{u(x_i) + hu'(x_i) + h^2/2u''(x_i) - u_i}{h} = h/2u''(x_i)$$

Т.е. правая разностная производная имеет **первый по h** порядок аппроксимации.

Аналогично и для левой разностной производной.

Центральная разностная производная имеет **второй порядок аппроксимации**.

Аппроксимация второй производной по формуле (3) также имеет второй порядок аппроксимации.

Для того чтобы аппроксимировать дифференциальное уравнение необходимо в нем заменить все производные их аппроксимациями. Рассмотрим задачу (1), (2) и заменим в(1) производные:

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

В результате получим:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - e_i u_i = z_i, \; i = 1,..,n-1,$$
$$u_0 = \varphi, u_n = \psi \qquad (4)$$

Порядок аппроксимации исходной задачи равен 2, т.к. вторая и первая производные заменены с порядком 2, а остальные – точно.

Итак, вместо дифференциальных уравнений (1), (2) получена система линейных уравнений для определения u_i в узлах сетки.

Схему можно представить в виде:

$u_0 = \varphi$

$(2 - q_i h) u_{i-1} - (4 + 2h^2 e_i) u_i + (2 + q_i h) u_{i+1} = 2h^2 z_i$

$i = 1, \dots, n-1$

$u_n = \psi$

т.е., получили систему линейных уравнений с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ 2 - q_1 h & -(4 + 2h^2 e_1) & 2 + q_1 h & 0 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 2 - q_2 h & -(4 + 2h^2 e_2) & 2 + q_2 h & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 \quad \dots\dots & 2 - q_{n-1} h & -(4 + 2h^2 e_{n-1}) & 2 + q_{n-1} h \\ 0 & 0 & 0 \quad \dots\dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Данная матрица является трехдиагональной, т.е. все элементы, которые расположены не на главной диагонали и двух прилегающих к ней диагоналях равны нулю.

Решая полученную систему уравнений, мы получим решение исходной задачи.

Для решения таких СЛАУ имеется экономичный **метод прогонки**.

Рассмотрим метод прогонки для СЛАУ:

$$-c_1x_1+b_1x_2=f_1$$
$$a_ix_{i-1}-c_ix_i+b_ix_{i+1}=f_i,\ i=2,\dots,n-1$$
$$a_nx_{n-1}-c_nx_n=f_n \qquad \textbf{(1)}$$

Решение данной системы ищем в виде:

$x_i=\alpha_ix_{i+1}+\beta_i$ (2)

Подставляя в первое уравнение, получим:

$$-c_1\alpha_1x_2-c_1\beta_1+b_1x_2=f_1$$
$$\alpha_1=\frac{b_1}{c_1},\quad \beta_1=-\frac{f_1}{c_1}$$

Здесь учтено, что данное соотношение должно выполняться при любом x_2

Так как

$x_{i-1}=\alpha_{i-1}x_i+\beta_{i-1}$, (3)

то подставляя (3) во второе уравнение, получим:

$$a_i(\alpha_{i-1}x_i+\beta_{i-1})-c_ix_i+b_ix_{i+1}=f_i$$
$$(a_i\alpha_{i-1}-c_i)x_i+a_i\beta_{i-1}-b_ix_{i+1}=f_i$$
$$x_i=\frac{b_i}{c_i-a_i\alpha_{i-1}}x_{i+1}-\frac{f_i-a_i\beta_{i-1}}{c_i-a_i\alpha_{i-1}}$$

Сравнивая с (2) получим

$$\alpha_i = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = -\frac{f_i - a_i\beta_{i-1}}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}.$$

Таким образом, можно найти все $\alpha_i, \beta_i, i = 1,..,n-1$.

Тогда из последнего уравнения (1) находим:

$$a_n\left(\alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}\right) - c_n x_n = f_n,$$
$$x_n = -\frac{f_n - a_n\beta_{n-1}}{c_n - a_n\alpha_{n-1}}$$

Затем последовательно находим:

$$x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}$$
$$x_{n-2} = \alpha_{n-2}x_{n-1} + \beta_{n-2}$$

....

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1$$

Таким образом, **алгоритм метода прогонки** можно представить в виде:

1) Находим $\alpha_1 = \dfrac{b_1}{c_1}, \quad \beta_1 = -\dfrac{f_1}{c_1}$

2) Для i=1,n-1: $\alpha_i = \dfrac{b_i}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = -\dfrac{f_i - a_i\beta_{i-1}}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}$ (4)

3) Находим $x_n = -\dfrac{f_n - a_n\beta_{n-1}}{c_n - a_n\alpha_{n-1}}$

4) Для i=n-1 до 1 находим: $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$

Теорема. Пусть коэффициенты a_i, b_i системы уравнений при i =2, 3, …, n–1 отличны от нуля и пусть

$|c_i| \ge |b_i| + |a_i|$ при i =1, 2, 3, …, n. **Тогда прогонка корректна и устойчива**.

При выполнении этих условий знаменатели в алгоритме метода прогонки не обращаются в нуль и, кроме того, погрешность вычислений, внесенная на каком либо шаге вычислений, не будет возрастать при переходе к следующим шагам. Данное условие есть ни что иное, как условие диагонального преобладания.

Для нашей краевой задачи имеем :

$$u_0 = \varphi$$
$$(2 - q_i h)u_{i-1} - (4 + 2h^2 e_i)u_i + (2 + q_i h)u_{i+1} = 2h^2 z_i$$
$$i = 1, \ldots, n-1$$
$$u_n = \psi$$
$$c_i = 4 + 2h^2 e_i,\ b_i = 2 + q_i h,\ a_i = 2 - q_i h,\ f_i = 2h^2 z_i,\ \ i = 2, \ldots, n-1$$
$$c_1 = 4 + 2h^2 e_1,\ \ b_1 = 2 + q_1 h,\ f_1 = 2h^2 z_1 - (2 - q_1 h)\varphi,$$
$$c_n = -1,\ a_n = 0,\ f_n = \psi$$

Тогда: $\alpha_1 = \dfrac{b_1}{c_1}$, $\beta_1 = -\dfrac{f_1}{c_1}$, $\alpha_i = \dfrac{b_i}{c_i - a_i \alpha_{i-1}}$, $\beta_i = -\dfrac{f_i - a_i \beta_{i-1}}{c_i - a_i \alpha_{i-1}}$,

$$u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i,\ \ i = 1, \ldots, n-1,\ u_0 = \varphi,\ u_n = \psi$$

Для нашей задачи условие устойчивости имеет вид:

$$|4 + 2h^2 b_i| \ge |2 - q_i h| + |2 + q_i h|.$$

Пусть

$h \le \dfrac{2}{\max|q_i|}$. (6)

$$2 \ge h \max|a_i| \ge h|a_i| = \pm h a_i$$

$$2 - h a_i \ge 0,\quad 2 + h a_i \ge 0,\ \textit{т.е.}\ |2 - h a_i| + |2 + h a_i| = 2 - h a_i + 2 + h a_i = 4$$

Тогда $|4 + 2h^2 b_i| \ge 4,\ b_i \ge 0$

Пример. Найти решение задачи:

$$u''(x) + 4u'(x) - u(x) = x,\quad u(0) = 0, u(1) = 1$$

Выпишем разностную схему

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 4\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u_i = x_i$$

$$u_0 = 0, u_n = 1$$