Вычислить определённый интеграл $\int_{2}^{5}\frac{dx}{\ln x}$ приближённо:

а) методом левых прямоугольников;
б) методом правых прямоугольников.

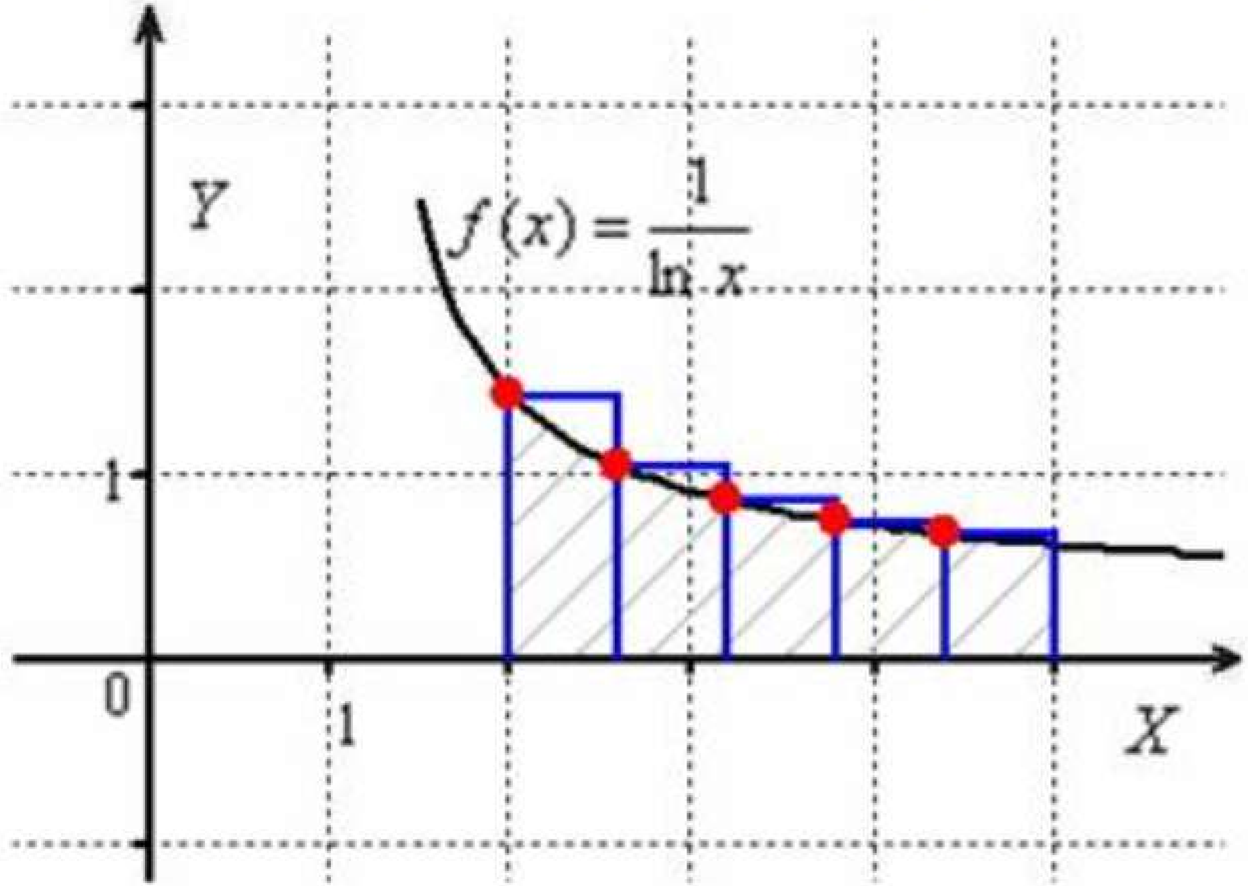
Промежуток интегрирования разделить на $n=5$ равных отрезков, результаты вычислений округлять до 0,001

Решение: признАюсь сразу, я специально выбрал такое малое значение n – из тех соображений, чтобы всё было видно на чертеже – за что пришлось поплатиться точностью приближений.

Вычислим *шаг* разбиения *(длину каждого промежуточного отрезка)*:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-2}{5}=0,6$$

Метод *левых прямоугольников* получил своё называние из-за того,



что *высОты* прямоугольников на промежуточных отрезках равны *значениям функции* **в левых** концах данных отрезков:

$$f(2) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443; \quad f(2{,}6) = \frac{1}{\ln 2{,}6} \approx 1{,}047; \quad f(3{,}2) = \frac{1}{\ln 3{,}2} \approx 0{,}860; \quad f(3{,}8) \approx 0{,}749; \quad f(4{,}4) \approx 0{,}675$$

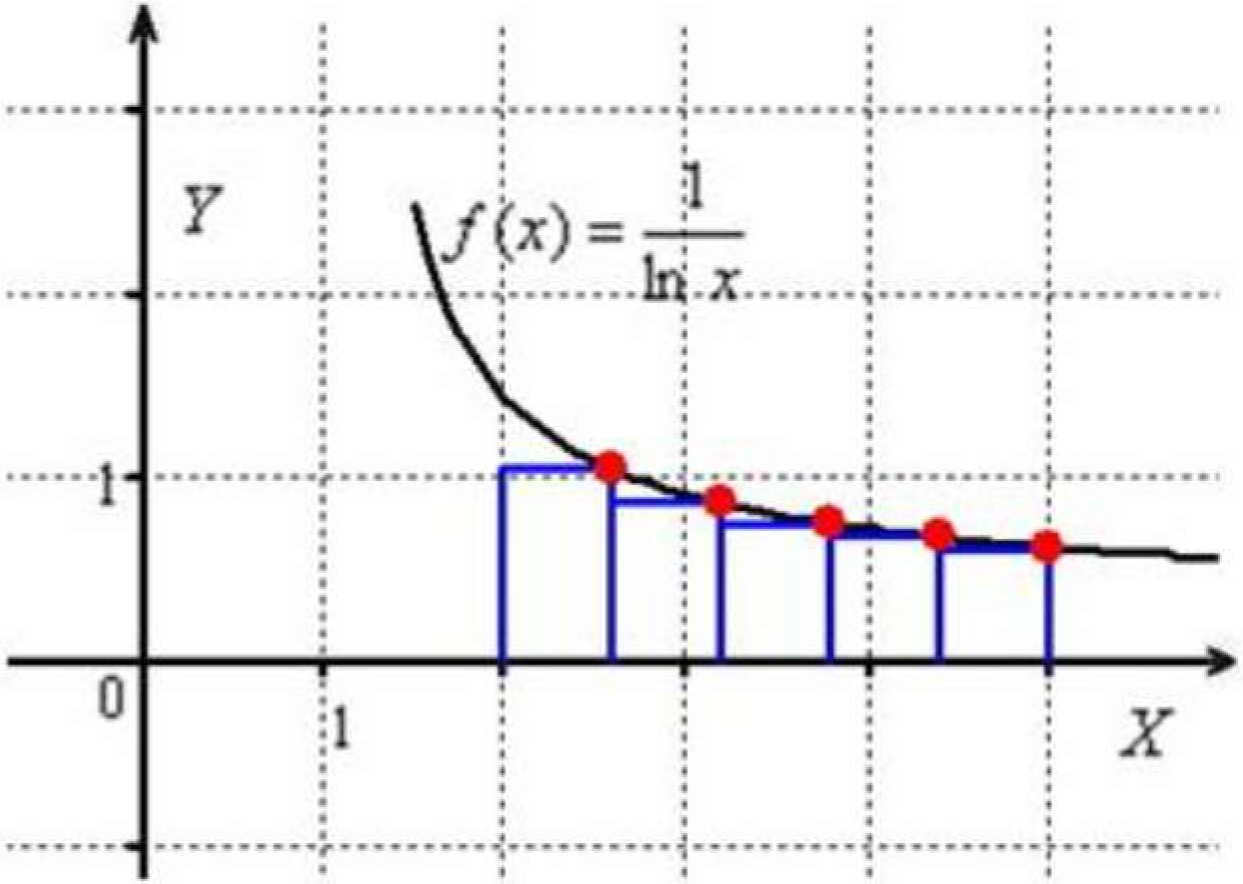
Ни в коем случае не забываем, что округление следует проводить до трёх знаков после запятой – **это существенное требование условия**, и «самодеятельность» здесь чревата пометкой «оформите задачу, как следует».

Вычислим площадь ступенчатой фигуры, которая равна сумме площадей прямоугольников:

$$I_{5(лев)} \approx h \cdot f(2) + h \cdot f(2{,}6) + h \cdot f(3{,}2) + h \cdot f(3{,}8) + h \cdot f(4{,}4) =$$
$$= h \cdot (f(2) + f(2{,}6) + f(3{,}2) + f(3{,}8) + f(4{,}4)) =$$
$$= 0{,}6 \cdot (1{,}443 + 1{,}047 + 0{,}860 + 0{,}749 + 0{,}675) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 4{,}773 = 2{,}864$$

Таким образом, площадь **криволинейной трапеции**: $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 2{,}864$. Да, приближение чудовищно грубое *(завышение хорошо видно на чертеже)*, но и пример, повторюсь, демонстрационный. Совершенно понятно, что, рассмотрев бОльшее количество промежуточных отрезков (измельчив разбиение), ступенчатая фигура будет гораздо больше похожа на криволинейную трапецию, и мы получим лучший результат.

При использовании «правого» метода *высОты* прямоугольников равны *значениям функции* **в правых** концах промежуточных отрезков:



Вычислим недостающее значение $f(5)=\dfrac{1}{\ln 5}\approx 0{,}621$ и площадь ступенчатой фигуры:

$I_{5(прав)} \approx h\cdot f(2{,}6)+h\cdot f(3{,}2)+h\cdot f(3{,}8)+h\cdot f(4{,}4)+h\cdot f(5)=$

$=h\cdot(f(2{,}6)+f(3{,}2)+f(3{,}8)+f(4{,}4)+f(5))=$

$=0{,}6\cdot(1{,}047+0{,}860+0{,}749+0{,}675+0{,}621)=$

$=0{,}6\cdot 3{,}952=2{,}371$ – тут, что и следовало ожидать, приближение сильно занижено:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}\approx 2{,}371$$

Запишем формулы в общем виде. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, и он разбит на n равных частей: $[a=x_0;\ x_1], [x_1;\ x_2], [x_2;\ x_3], \dots, [x_{n-1};\ x_n=b]$, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно вычислить приближенно по формулам:

$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})]$ – левых прямоугольников;

$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\dots+f(x_n)]$ – правых прямоугольников;

(формула в следующей задаче) – средних прямоугольников,

где $h=\dfrac{b-a}{n}$ – шаг разбиения.

В чём их формальное различие? В первой формуле нет слагаемого $f(x_n)$, а во второй - $f(x_0)$

На практике рассчитываемые значения $f(x_i)$ удобно заносить в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,6	3,2	3,8	4,4	5
$f(x_i)$	1,443	1,047	0,860	0,749	0,675	0,621

а сами вычисления проводить в Экселе. И быстро, и без ошибок:

Ответ: а) $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 2{,}864$;   б) $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 2{,}371$

Наверное, вы уже поняли, в чём состоит метод средних прямоугольников:

<u>Пример 2</u>

Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ методом прямоугольников с точностью до 0,01. Разбиение промежутка интегрирования начать с $n = 5$ отрезков.

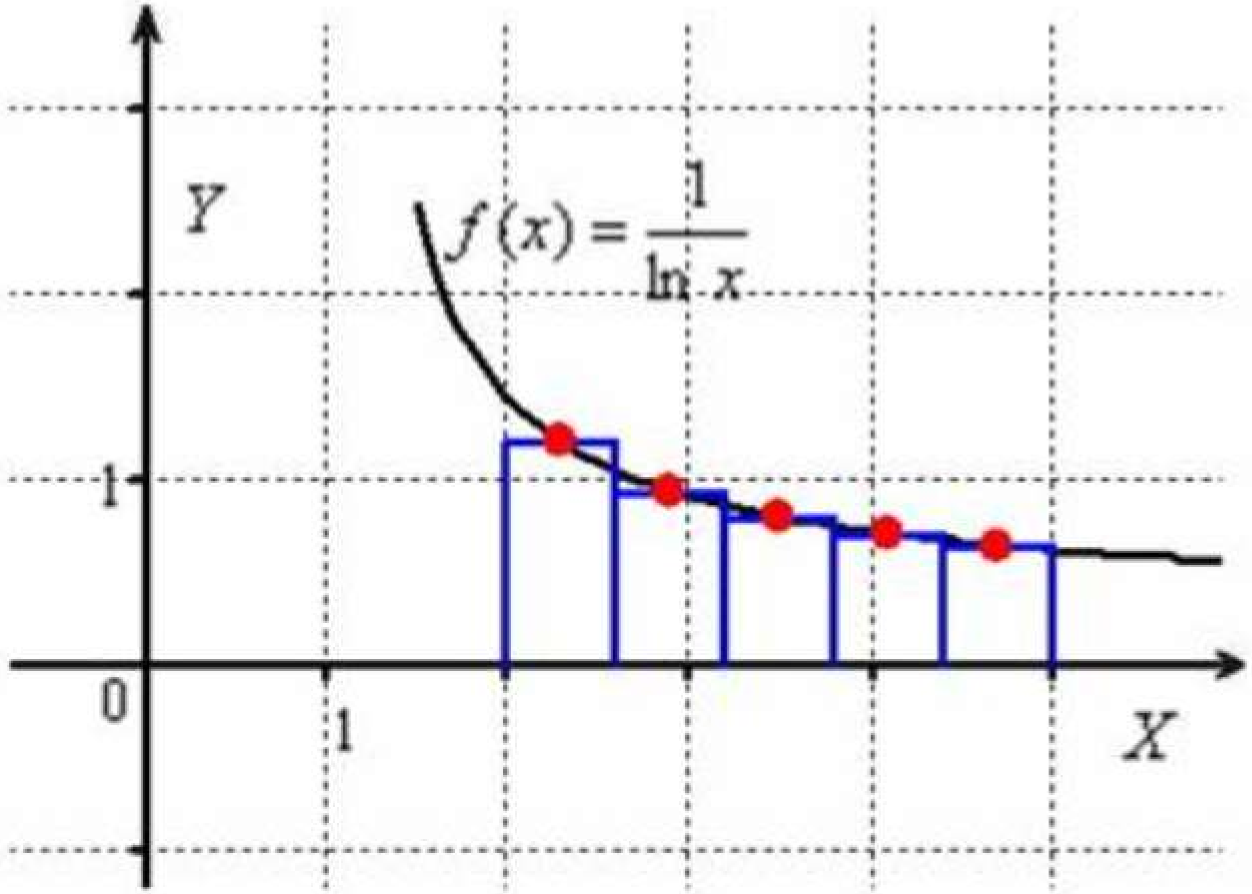
Решение: во-первых, обращаем внимание, что интеграл нужно вычислить **с точностью до 0,01**. Что подразумевает такая формулировка?

Если в предыдущей задаче требовалось **прОсто округлить** результаты до 3 знаков после запятой *(а уж насколько они будут правдивы – не важно)*, то здесь найденное приближённое значение площади $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx *.**$ должно отличаться от истины $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} = S$ не более чем на $\varepsilon = 0{,}01$.

И во-вторых, в условии задачи не сказано, какую модификацию метода прямоугольников использовать для решения. И действительно, какую?

По умолчанию всегда используйте метод средних прямоугольников

Почему? А он при прочих равных условиях *(том же самом разбиении)* даёт гораздо более точное приближение. Это строго обосновано в теории, и это очень хорошо видно на чертеже:



В качестве высот прямоугольников здесь принимаются *значения функции*, вычисленные **в серединах** промежуточных отрезков, и в общем виде формула приближённых вычислений запишется следующим образом:

$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \ldots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right]$, где $h = \frac{b-a}{n}$ – шаг стандартного «равноотрезочного» разбиения $[a = x_0; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-1}; x_n = b]$.

Следует отметить, что формулу средних прямоугольников можно записать несколькими способами, но чтобы не разводить путаницу, я остановлюсь на единственном варианте, который вы видите выше.

Вычисления, как и в предыдущем примере, удобно свести в таблицу. Длина промежуточных отрезков, понятно, та же самая: $h = 0,6$ – и очевидно, что расстояние между серединами отрезков равно этому же числу. Поскольку требуемая точность вычислений составляет $\varepsilon = 0,01$, то значения $f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ нужно округлять «с запасом» – 4-5 знаками после запятой:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,6	3,2	3,8	4,4	5
$x_i + \frac{h}{2}$	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	
$f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$	1,2006	0,9392	0,7982	0,7087	0,6462	

Вычислим площадь ступенчатой фигуры:

$$I_5 \approx 0,6 \cdot (1,2006 + 0,9392 + 0,7982 + 0,7087 + 0,6462) = 0,6 \cdot 4,2930 = 2,5758$$