Метод Эйлера (явный).

Метод Эйлера играет важную роль в теории численных методов решения ОДУ, хотя и не часто используется в практических расчетах из-за невысокой точности. Вывод расчетных соотношений для этого метода может быть произведен несколькими способами: с помощью геометрической интерпретации, с использованием разложения в ряд Тейлора, конечно разностным методом (с помощью разностной аппроксимации производной), квадратурным способом (использованием эквивалентного интегрального уравнения).

Рассмотрим вывод соотношений метода Эйлера геометрическим способом. Решение в узле x_0 известно из начальных условий рассмотрим процедуру получения решения в узле x_1 рис.4.1.

График функции $y^{(h)}$, которая является решением задачи Коши (1), представляет собой гладкую кривую, проходящую через точку (x_0, y_0) согласно условию $y(x_0) = y_0$, и имеет в этой точке касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси Ох равен значению производной от решения в точке x_0 и равен значению правой части дифференциального уравнения в точке (x_0, y_0) согласно выражению $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. В случае небольшого шага разностной сетки $\boldsymbol{h}$ график функции и график касательной не успевают сильно разойтись друг от друга и можно в качестве значения решения в узле x_1 принять значение касательной y_1, вместо значения неизвестного точного решения $y_{1ист}$. При этом допускается погрешность $|y_1 - y_{1ист}|$ геометрически представленная отрезком CD на рис.4.1. Из прямоугольного треугольника ***ABC*** находим ***CB=BA*** $\mathbf{tg}(CAB)$ или $\Delta y = hy'(x_0)$. Учитывая, что $\Delta y = y_1 - y_0$ и заменяя производную $y'(x_0)$ на правую часть дифференциального уравнения , получаем соотношение $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Считая теперь точку (x_1, y_1) начальной и повторяя все предыдущие рассуждения, получим значение y_2 в узле x_2.

Погрешность метода Эйлера.

На каждом шаге метода Эйлера допускается *локальная* погрешность по отношению к точному решению, график которого проходит через крайнюю левую точку отрезка. Геометрически локальная погрешность изображается отрезком CD на первом шаге, C'D' на втором и т.д. Кроме того, на каждом шаге, начиная со второго, накапливается *глобальная* погрешность представляющая собой разность межу численным решением и точным решением исходной начальной задачи (а не локальной). Глобальная погрешность на втором шаге изображена отрезком C'E' на рис.4.1.

Локальная ошибка на каждом шаге выражается соотношением $\varepsilon_k^h = \dfrac{y''(\xi)}{2} h^2$, где $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$. Глобальная погрешность метода Эйлера $\varepsilon_{ГЛ}^h = Ch$ в окрестности $\boldsymbol{h}$=0 ведет себя как линейная функция, и, следовательно, метод Эйлера имеет первый порядок точности относительно шага $\boldsymbol{h}$.