1.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. Предполагаем, что $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$. Для непрерывной функции f будем рассматривать следующую задачу.

Задача. Найти алгебраический полином $L_n(f; x)$ наименьшей степени и такой, что

$$L_n(f; x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$L_n(f; x)$ называют интерполяционным полиномом Лагранжа, а точки x_j ($j = 1, \ldots n$) – узлами интерполяционного полинома Лагранжа или узлами интерполирования.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C[a, b]$ и заданных узлов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ интерполяционный полином $L_n(f; x)$ степени не выше $n - 1$ существует и определяется единственным образом.*

Далее приведем основное представление для полинома Лагранжа в виде явной формулы, включающей узлы интерполирования $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и значения интерполируемой функции в этих точках. Основное представление интерполяционного полинома Лагранжа имеет вид

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x),$$

где

$$l_k(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (x - x_j) / \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (x_k - x_j) =$$

$$= \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

Отметим, что $l_k(x)$ называются **фундаментальными полиномами Лагранжа**. В узлах интерполирования получаем

$$l_k(x_j) = \delta_{k_j} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j \end{cases} .$$

Часто удобнее пользоваться другой записью основного представления. Рассмотрим произведение

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j).$$

Легко видеть, что

$$l_k(x) = \frac{A}{B},$$

где

$$A = \frac{\omega_n(x)}{x - x_k}, \qquad B = \omega_n'(x_k) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n}(x_k - x_j),$$

так как

$$\omega_n'(x) = (x - x_2)\dots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n) +$$

$$\ldots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Таким образом, получаем следующее, равносильное основному, представление

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)}. \tag{1.1}$$

Пример 1. *Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции* $f(x) = x^2$ *по узлам*

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$