4.2.1. Метод Ньютона

Метод Ньютона (метод касательных, метод линеаризации, метод Ньютона-Рафсона) является одним из популярнейших итерационных методов решения нелинейных уравнений, т.к. он отличается простотой и быстрой сходимостью. Выражение для итерационного процесса можно получить двумя способами, первый опирается на геометрическое представление, а второй на аналитическое разложение заданной нелинейной функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Получим выражение, для итеративной последовательности исходя из геометрического представления метода (рис. 25). В качестве начального приближения x_0 примем правую границу интервала локализации b. Вычисляем в этой точке значение функции $f\left(x_0\right)$ на рис. 25 определенное значение соответствует точке

$\boldsymbol{B}$. Проводим через точку $\boldsymbol{B}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ касательную к кривой $y=f\left(x\right)$. Эта касательная пересекается с осью абсцисс в точке x_1, которая в дальнейшем рассматривается в качестве следующего приближения и является искомым параметром.

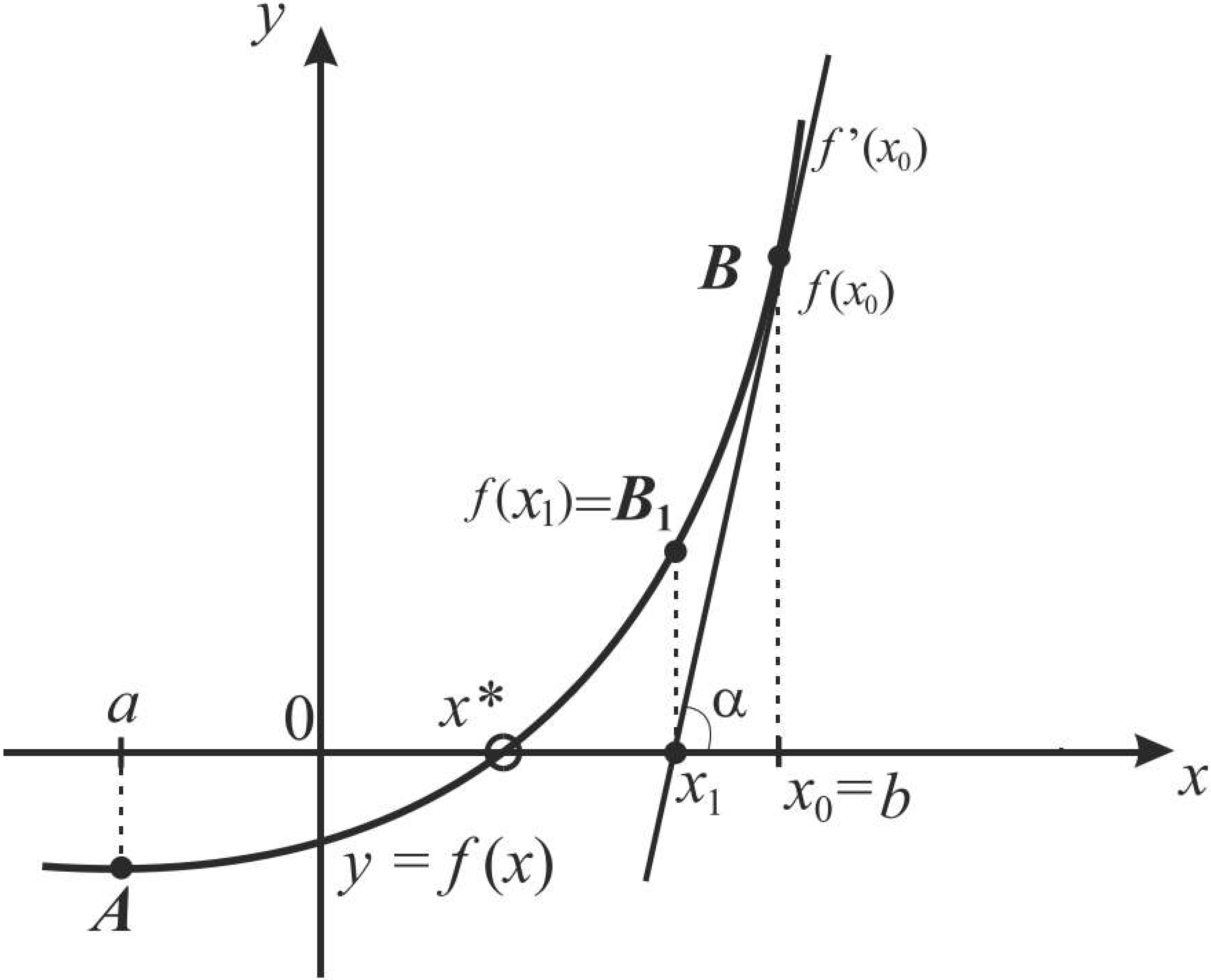


Рис. 25 – Визуализация процесса построения решения
с помощью метода касательных

Значение новой точки x_1 можно достаточно легко определить, опираясь на математическое выражение для тангенса угла $\boldsymbol{\alpha}$ в прямоугольном треугольнике

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0).$$

Данное выражение позволяет определить искомую величину x_1 в следующем виде

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Для нахождения следующего приближения x_2 вычисляется значение функции в точке x_1, на рис. 26 это точка $\boldsymbol{B}_1(x_1, f(x_1))$ и вычисляется первая производная в точке x_1, т.е. проводится касательная через точку $\boldsymbol{B_1}$ к функции $y = f\left(x\right)$.

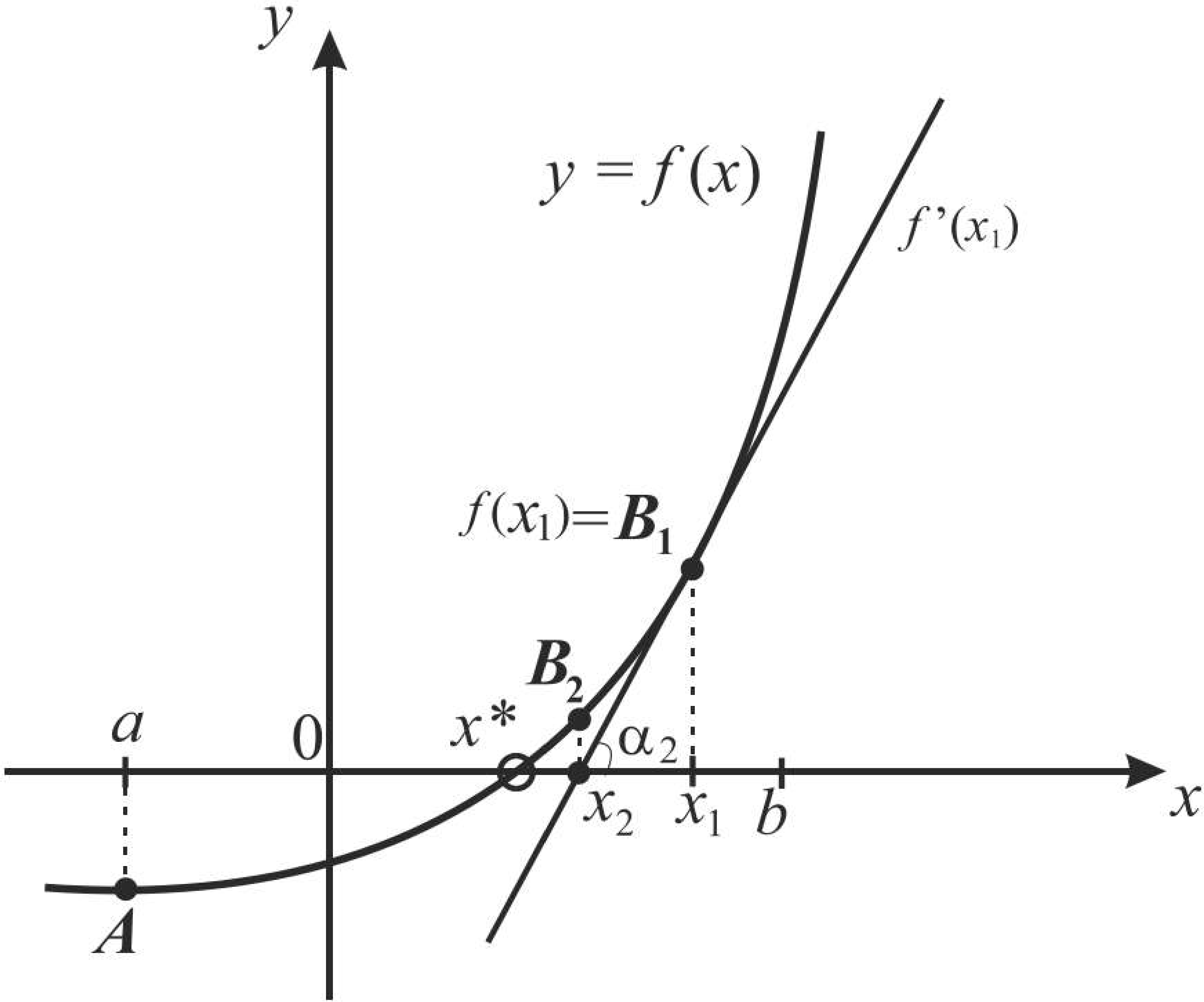

y
y = f(x)
f'(x1)
f(x1)=B1
B2
x*
α2
a
0
x2
x1
b
x
A

Рис. 26 – Второе приближение по методу касательных

Математическое выражение для нахождения x_2 имеет вид

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогично находятся все последующие приближения x_3, x_4, и т.д. Формула для $k + 1$ приближения будет иметь вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

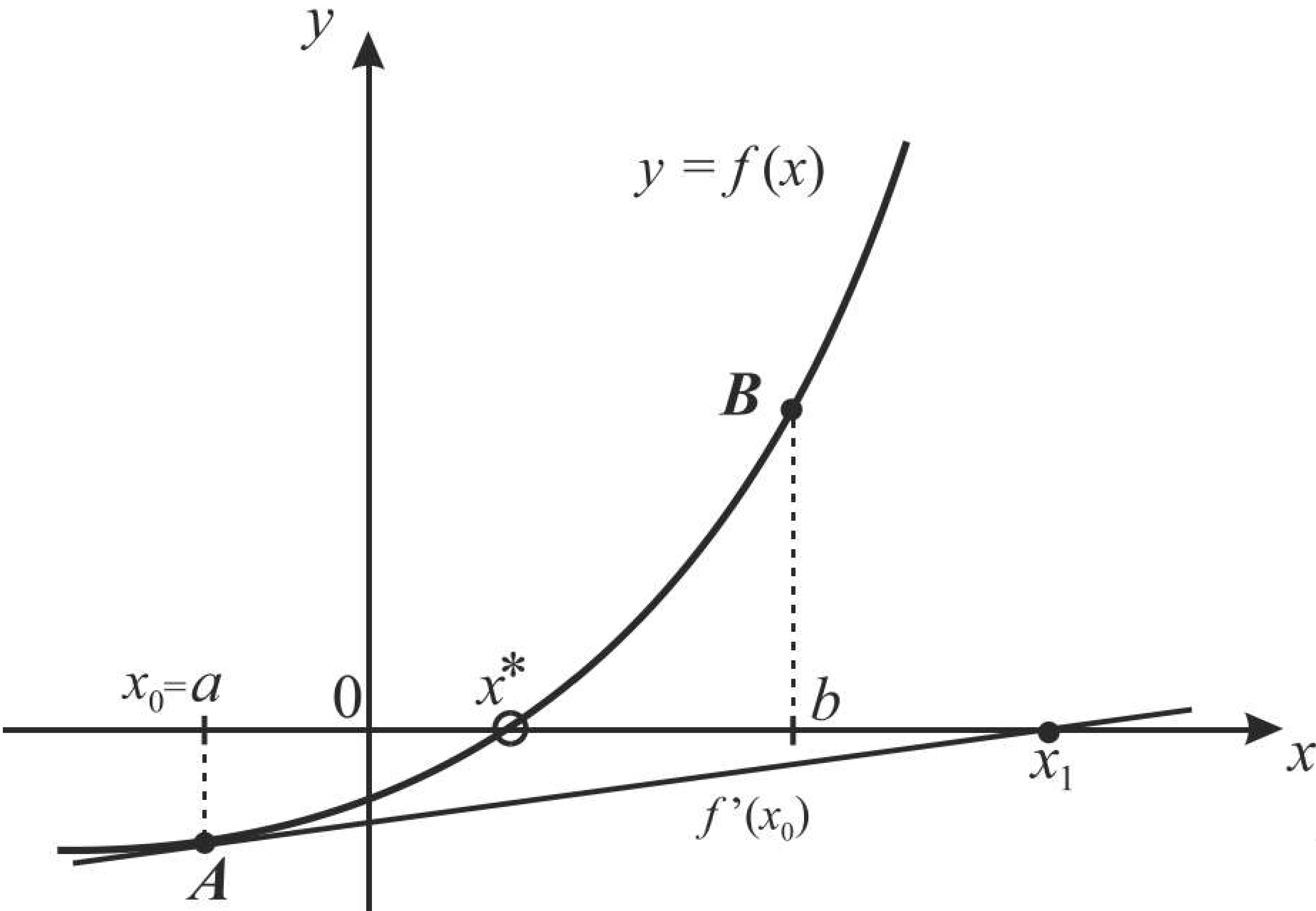
Отсюда вытекает условие применимости метода: функция $f(x)$ должна быть дифференцируемой, и её первая производная $f'(x)$ в окрестности корня не должна менять знак.

Замечание. Если вместо правой границы b для начального приближения x_0 взять левую a, то проводя касательную к функции $y = f\left(x\right)$ в точке $\boldsymbol{A}\left(a, f\left(a\right)\right)$, получаемая точка пересечения касательной с осью абсцисс x_1, как видно из рис. 27, находится за пределами интервала локализации корня. Таким образом, процесс выбора начального приближения в методе Ньютона требует особого внимания и будет подробно рассмотрен в дальнейшем.

Рассмотрим второй способ получения выражения для определения x_{k+1}. Для этого предполагается, что заданная функция $f(x)$ является непрерывной и минимум дважды дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, внутри которого находится один искомый корень x^*.

На рассматриваемом интервале уже имеется одна точка x_k, являющаяся начальным приближением x_0, т.е. $k = 0$. В заданной точке наша функция имеет значение $f(x_k)$, а также первую $f'(x_k)$ и вторую производную $f''(x_k)$. Между заданной точкой x_k и искомым решением x^* имеется некоторое малое расстояние, тогда для определения значения функции в точке x^* применяем разложение в ряд Тейлора, ограниченное до членов со второй производной

$$f\left(x^*\right)=f\left(x_k\right)+f'\left(x_k\right)\left(x^*-x_k\right)+\frac{1}{2}f''\left(x_k\right)\left(x^*-x_k\right)^2.$$



Так как точка x^* является точным решением, то значение функции в этой точке обращается в ноль. В результате получается квадратное уравнение для нахождения корня x^*

$$f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x^* - x_k)^2 = 0 .$$

Поскольку расстояние между точками x_k и x^* мало, то квадратом их разности можно пренебречь и результирующее уравнение будет линейным. Поскольку в процессе получения точного решения x^* от бесконечного ряда Тейлора осталось только два слагаемых, то полученное решение будет отличаться от точного. Определенная таким образом точка обозначается x_{k+1} и определяется с помощью следующего выражения

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} .$$

Следовательно, второе слагаемое с дробью является тем самым приращением, на которое новая точка приближается к точному решению нелинейного уравнения на каждой итерации.

Для окончания итерационного процесса используются стандартное условие

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| \leq \varepsilon .$$

Замечание. В методе Ньютона нет необходимости задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения, а достаточно задать только точку x_0 являющуюся начальным приближением.