4.1.2. Метод золотого сечения

Технология метода золотого сечения применяется для нахождения корней нелинейных уравнений интервальным способом.

Метод основан на делении локализованного отрезка $[a, b]$, на три неравные части, т.е. внутри рассматриваемого интервала появляются две новые точки x_1, x_2. Для определения координат этих точек применяется правило золотого сечения.

Правило золотого сечения: отношение всего отрезка к большей его части равно отношению большей части отрезка к меньшей. На рис. 12 представлена графическая иллюстрация правила золотого сечения. Математически данное правило можно представить в виде следующих выражений:

$$\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a}=\Phi, \quad \frac{b-a}{x_2-a}=\frac{x_2-a}{b-x_2}=\Phi,$$

где **Ф** – число Фидия, имеющее точное значение в виде математического выражения:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

или приближенное числовое значение 1,618.

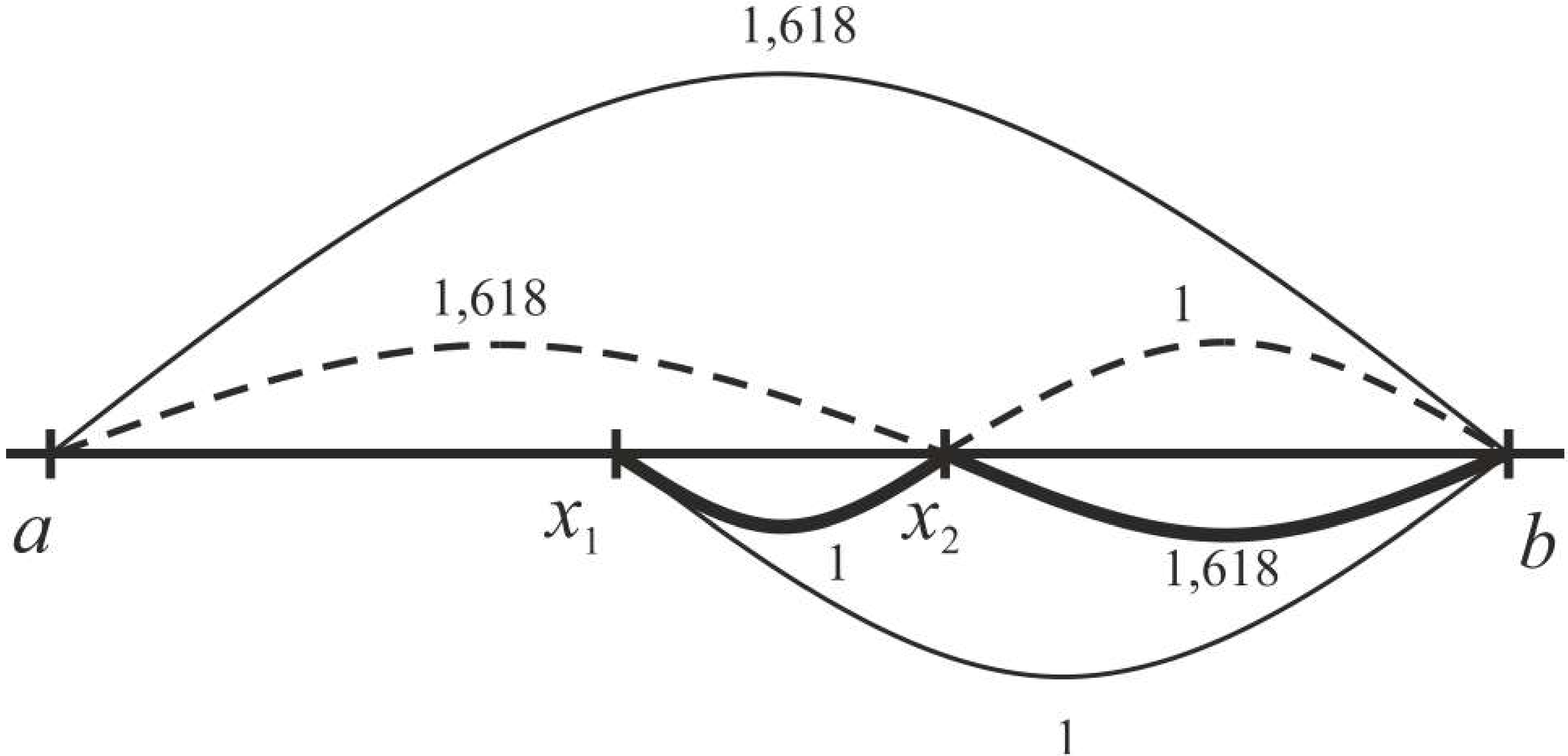

Рис. 12 – Визуализация правила золотого сечения

Используя данное правило на рассматриваемом интервале [a, b] определяются две точки x_1, x_2.

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}, \; x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}.$$

Как видно из рис. 12 и полученных выражений точки x_1, x_2 являются симметричными относительно как границ, так и середины отрезка $[a, b]$:

$$a - x_1 = x_2 - b,$$

$$a - x_2 = x_1 - b.$$

Следовательно, зная одну точку (x_1 или x_2) золотого сечения, вторую можно найти, используя одно из выражений:

$$x_1 = a + b - x_2,$$

$$x_2 = a + b - x_1.$$

Во вновь найденных точках x_1 и x_2 вычисляются значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Затем проводится сравнение знаков функций на границах интервала и внутренних точках, в результате определяется новый интервал, на котором содержится искомый корень функции (рис. 13).

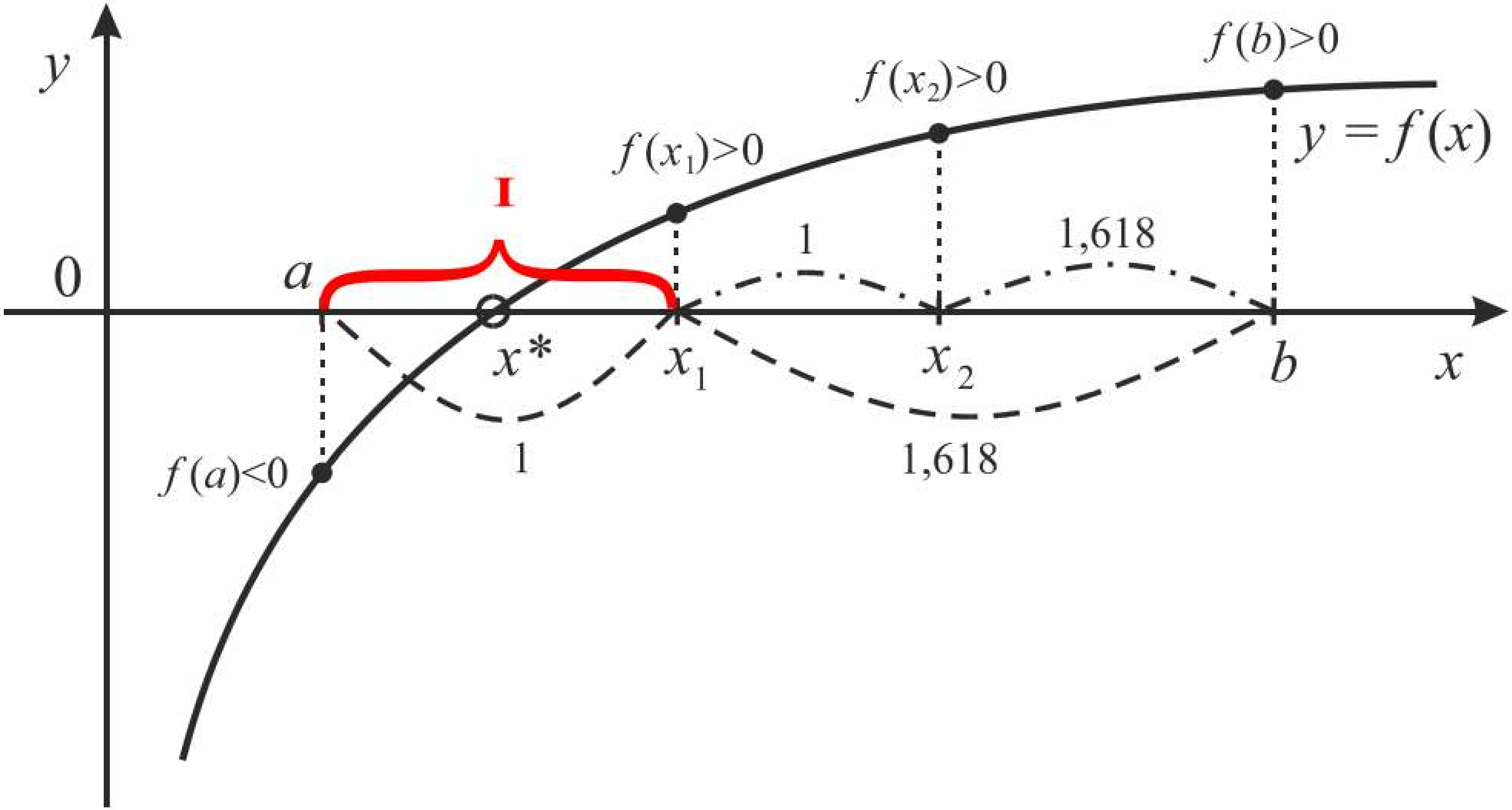

Рис. 13 – Первое приближение метода золотого сечения

В процессе сравнения возможна реализация одного из трех случаев:

1) если $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, то в качестве нового отрезка будет выбран интервал $[a, x_1]$ (рис. 13),
2) если $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, то в качестве следующего интервала выбирается отрезок $[x_1, x_2]$ (рис. 14),
3) если $f(x_2) \cdot f(b) < 0$, то новым отрезком становится интервал $[x_2, b]$.

Определенный таким образом новый интервал $[a_1, b_1]$, заключающий в себе решение нелинейного уравнения, заново делится на неравные части согласно правилу золотого сечения, как показано на рис. 14.

Стоит отметить, что в методе золотого сечения, как и в методе половинного деления для выбора нового отрезка нужно знать только знаки функции, а не её значение.

В отличие от метода половинного деления метод золотого сечения сходится быстрее, поскольку на каждом итерационном шаге отрезок уменьшается не в два, а в три раза.

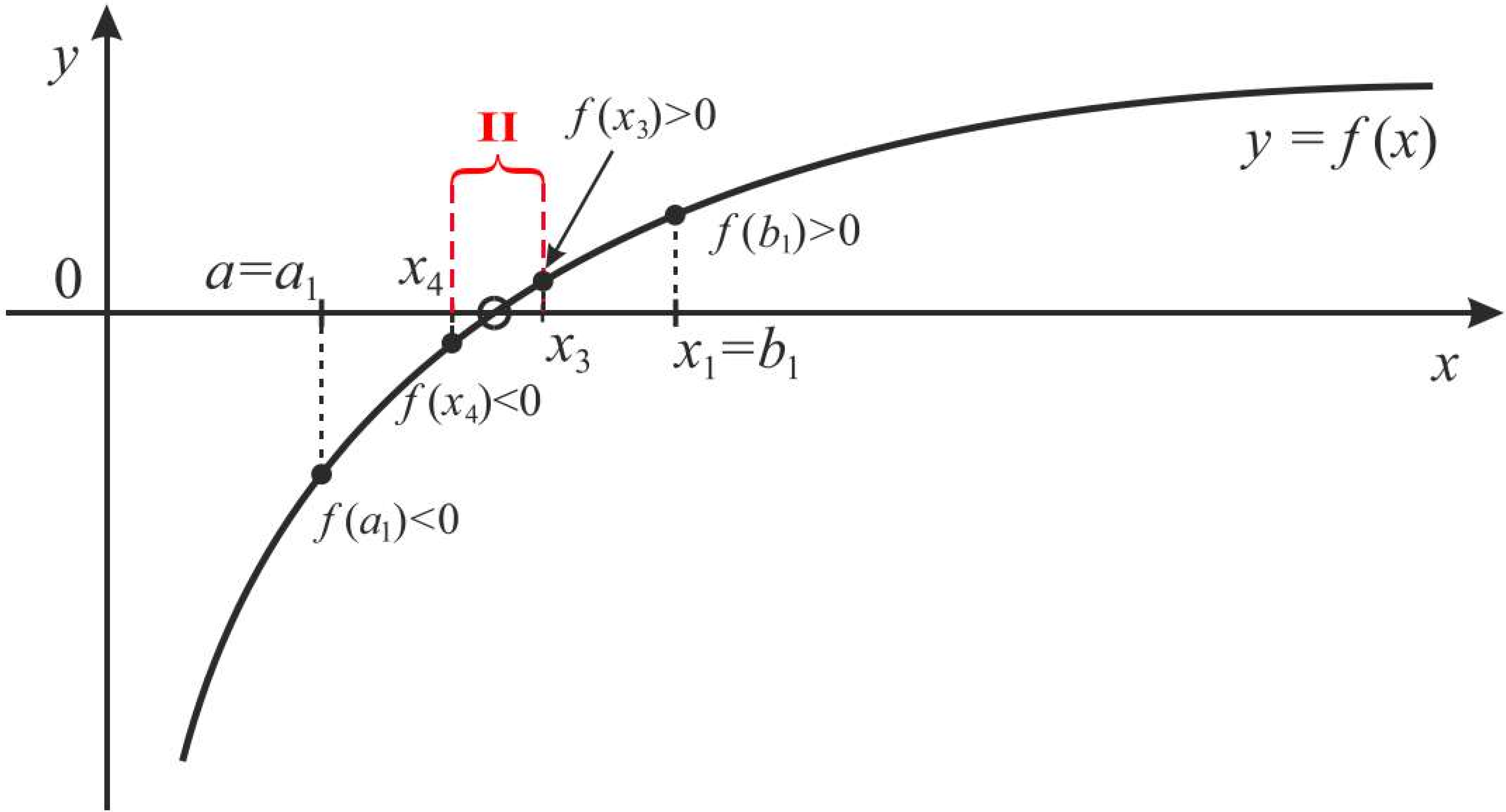

Рис. 14 – Второе приближение метода золотого сечения