В технических вычислениях часто применяется формула Чебышева для приближенного интегрирования.

Пусть снова требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Лагранжа P (x), взяв на отрезке [a, b] некоторые n значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — **какие угодно точки отрезка [a,b]:**

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) + \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n). \qquad (1)$$

Получим следующую приближенную формулу интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_a^b P(x)\,dx; \qquad (2)$$

после некоторых вычислений она примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n), \qquad (3)$$

где коэффициенты Ci вычисляются по формулам

$$C_i=\int_a^b \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\,dx. \qquad (4)$$

Формула (3) громоздка и неудобна для вычислений, так как коэффициенты C_i выражаются сложными дробями.

Чебышев поставил обратную задачу: задать не абсциссы x1,x2,x3,...,x_n, а коэффициенты $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ и определить абсциссы $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$.

Коэффициенты C_i - задаются так, чтобы формула (3) была возможно проще для вычислений. Очевидно, что это будет тогда, когда все коэффициенты C_i равны между собой: C1 = C2 = ... = C_n.

Если обозначить общее значение коэффициентов C1, C2, ..., C_n через C_n то формула (3) примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_n[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)]. \qquad (5)$$

Формула (5) представляет вообще приближенное равенство, но если f(x) есть многочлен степени не выше n — 1, то равенство будет точным. Это обстоятельство и позволяет определить вели- чины C_n ,x1,x2, ..., x_n.

Чтобы получить формулу, удобную для любого промежутка интегрирования, преобразуем отрезок интегрирования [a, b] в отрезок [—1, 1]. Для этого положим $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t;$ тогда при t=-1 будет x=a, при t=1 будет x=b.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt,$$

где через ф (t) обозначена функция от t, стоящая под знаком интеграла. Таким образом, задача интегрирования данной функции f(x) на отрезке [a, b] всегда может быть сведена к интегрирова- нию некоторой другой функции ф(x) на отрезке [—1, 1].

Итак, задача свелась к тому, чтобы в формуле

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)] \qquad (6)$$

подобрать числа C_n ,x1,x2, ..., x_n так, чтобы эта формула была точной для всякой функции f(x) вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}. \qquad (7)$$

Заметим, что

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}\right), \text{ если } n \text{ — число нечетное;} \\ 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{n-1}\right), \text{ если } n \text{ — число четное.} \end{cases} \qquad (8)$$

С другой стороны, сумма, стоящая в правой части равенства (6), на основании (7) будет равна

$$C_n [na_0 + a_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots + a_{n-1} (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})]. \quad (9)$$

Приравнивая выражения (8) и (9), получим равенство, которое должно быть справедливо при любых $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) = C_n [na_0 + a_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +$$
$$+ a_2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots + a_{n-1} (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})].$$

Приравниваем коэффициенты при $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ **в левой и правой частях равенства:**

$$\left.\begin{array}{l} 2 = C_n n, \text{ или } C_n = \frac{2}{n}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Из последних n — 1 уравнений находим абсциссы $x1, x2, x3, \dots, x_n$. Эти решения найдены Чебышевым для различных значений n. Ниже приводятся найденные им решения в случаях, когда число n промежуточных точек равно 3, 4, 5, 6, 7, 9:

Число ординат n	Коэф-фициент C_n	Значения абсцисс $x_1, x_2, \dots, x_n$	Число ординат n	Коэф-фициент C_n	Значения абсцисс $x_1, x_2, \dots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0{,}707107$ $x_2 = 0$	7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0{,}883862$ $x_2 = -x_6 = 0{,}529657$ $x_3 = -x_5 = 0{,}323912$ $x_4 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0{,}794654$ $x_2 = -x_3 = 0{,}187592$	9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0{,}911589$ $x_2 = -x_8 = 0{,}601019$ $x_3 = -x_7 = 0{,}528762$ $x_4 = -x_6 = 0{,}167906$ $x_5 = 0$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0{,}832498$ $x_2 = -x_4 = 0{,}374541$ $x_3 = 0$			
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0{,}866247$ $x_2 = -x_5 = 0{,}422519$ $x_3 = -x_4 = 0{,}266635$			

Таким образом, приближенное вычисление интеграла на от- резке [— 1, 1] производится по следующей формуле Чебышева:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right],$$

где n — какое-либо из чисел 3, 4, 5, 6, 7 или 9, а $x_i, \dots, x_n$ - числа, приведенные в таблице. В качестве n нельзя брать число 8 или числа, превосходящие 9; в этом случае система уравнений (10) дает мнимые корни. Когда заданный интеграл имеет пределы интегрирования a и b, формула Чебышева принимает вид

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)\right],$$

где $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, а x_i имеют указанные в таблице значения.

Пример. Вычислить $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \ (= \ln 2)$.

Решение. Прежде всего заменой переменной преобразуем этот интеграл в новый интеграл, у которого границы интегрирования будут -1 и 1: $x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$. Тогда $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}$. Вычислим последний интеграл, приняв $n = 3$, по формуле Чебышева:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\, dt = \frac{2}{3} [f(0{,}707107) + f(0) + f(-0{,}707107)].$$

Так как $f(0{,}707107) = 0{,}269752$, $f(0) = 0{,}333333$, $f(-0{,}707107) = 0{,}436130$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t} = \frac{2}{3} (0{,}269752 + 0{,}333333 + 0{,}436130) = \frac{2}{3} \cdot 1{,}039215 = 0{,}692810 \approx 0{,}693.$$

Сравнивая этот результат с результатами вычисления по формулам прямоугольников, по формуле трапеций и формуле Симпсона (см. пример в предыдущем параграфе), мы замечаем, что результат, полученный нами по формуле Чебышева (с тремя промежуточными точками), лучше согласуется с истинным значением интеграла, чем результат, полученный по формуле трапеций (с девятью промежуточными точками).
Отметим, что теория приближенного вычисления интегралов получила дальнейшее развитие в работах академика А. Н. Крылова (1863-1945).

3.Метод Чебышева.

$x_{k+1} = x_k - (f(x_k))/f'(x_k) - (f(x_k) * f''(x_k)) / 2(f'(x_k))^3$;

Интервал изоляции [-7;-6].

k	x_k	$X_{k+1} - X_k$	F(xk)	f'(xk)	f''(xk)
0	-7	0,562781	39	-69,7228	59,49799
1	-6,43722	0,192484	8,031607	-42,1906	39,63389
2	-6,24474	0,017682	0,61162	-35,0733	34,43372
3	-6,22705	-9,4E-05	-0,0032	-34,4683	33,98989
4	-6,22715		4,59E-05	-34,4715	33,99224

$x_1 = -7 - (39)/(-69.7228) - 39 * 59.49799 / 2(-69.7228)^3 = -6.43722$

Интервал изоляции [1;2].

k	x_k	$X_{k+1} - X_k$	F(xk)	f'(xk)	f''(xk)
0	1	0,164886	-0,5	2,653426	-1,75977
1	1,164886	0,030778	-0,08653	2,361084	-1,78572
2	1,195665	0,005303	-0,01471	2,306053	-1,79024
3	1,200968	0,000904	-0,0025	2,296556	-1,79101
4	1,201872		-0,00043	2,294937	-1,79114

$x_1 = 1 - (-0.5)/(2,653426) - (-0.5) * (-1,75977) / 2(2,653426)^3 = 1,164886$

Интервал изоляции [3;4].

k	x_k	$X_{k+1} - X_k$	F(xk)	f'(xk)	f''(xk)
0	4	-0,27529	-0,9375	-3,04332	-1,96997
1	3,724709	-0,05873	-0,17427	-2,50185	-1,96366
2	3,665978	-0,01066	-0,03072	-2,38656	-1,96215
3	3,655322	-0,00188	-0,0054	-2,36566	-1,96187
4	3,653439		-0,00095	-2,36196	-1,96182

$x_1 = 4 - (-0,9375)/(-3,04332) - (-0,9375) * (-1.96997) / 2(-3,04332)^3 = 3,724709$