

Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу \mathbf{A} для заданной системы уравнений:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

На первом этапе метода Гаусса приводим расширенную матрицу к верхнему треугольному виду. Для этого обнулим коэффициенты, стоящие при x_1 во второй, третьей и четвертой строке. Чтобы достичь требуемого результата первая строка последовательно умножается: а) на 2 и вычитается из второй строки; б) на 3 и вычитается из третьей строки; в) на 2 и вычитается из четвертой строки, в результате получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - 3I \\ IV - 2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right).$$

Полученная матрица соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -20. \end{cases}$$

Далее обнулим коэффициенты при x_2 в третьей и четвертой строчке. Для этого: третья строка умножается на 5 и вычитается из нее вторая умноженная на 4, полученный результат разделится на 18; четвертая строка умножается на 5 и вычитается из второй, умноженной на 7, результат вычитания делится на 18, после проведенных преобразований расширенная матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ (5III - 4II) / 18 \\ (5IV - 7II) / 18 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array} \right).$$

Результирующая матрица соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ -x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

Наконец избавимся от коэффициента при x_3 в четвертом уравнении. С этой целью к четвертой строке прибавляется третья строка, умноженная на 2, а результат сложения делится на 5, выполненные преобразования привели расширенную матрицу к верхнему треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} (IV + 2III) / 5$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

По найденной треугольной матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ -x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

На этом прямой ход метода Гаусса завершён.

На втором этапе разрешаются полученные уравнения в обратном порядке. Неизвестные находятся последовательно, начиная с последнего уравнения — $x_4 = -2$; полученное решение для x_4 подставляется в третье уравнение, из которого определяется $x_3 = -1$; далее из второго уравнения при подстановке найденных x_4 и x_3 вычисляется $x_2 = 2$; наконец из первого уравнения по известным x_4 , x_3 и x_2 находится $x_1 = 1$.

Ответ. СЛАУ имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$.