1. Приближение функций алгебраическими полиномами

1.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. Предполагаем, что $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$. Для непрерывной функции f будем рассматривать следующую задачу.

Задача. Найти алгебраический полином $L_n(f; x)$ наименьшей степени и такой, что

$$L_n(f; x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$L_n(f; x)$ называют интерполяционным полиномом Лагранжа, а точки x_j ($j = 1, \ldots n$) – узлами интерполяционного полинома Лагранжа или узлами интерполирования.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C[a, b]$ и заданных узлов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ интерполяционный полином $L_n(f; x)$ степени не выше $n - 1$ существует и определяется единственным образом.*

Далее приведем основное представление для полинома Лагранжа в виде явной формулы, включающей узлы интерполирования $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и значения интерполируемой функции в этих точках. Основное представление интерполяционного полинома Лагранжа имеет вид

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x),$$

где

$$l_k(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (x - x_j) \Big/ \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (x_k - x_j) =$$

$$= \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Отметим, что $l_k(x)$ называются **фундаментальными полиномами Лагранжа**. В узлах интерполирования получаем

$$l_k(x_j) = \delta_{k_j} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j \end{cases}.$$

Часто удобнее пользоваться другой записью основного представления. Рассмотрим произведение

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j).$$

Легко видеть, что

$$l_k(x) = \frac{A}{B},$$

где

$$A = \frac{\omega_n(x)}{x - x_k}, \qquad B = \omega_n'(x_k) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n}(x_k - x_j),$$

так как

$$\omega_n'(x) = (x - x_2)\dots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n) +$$

$$\dots + (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).$$

Таким образом, получаем следующее, равносильное основному, представление

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)}. \tag{1.1}$$

Пример 1. *Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции* $f(x) = x^2$ *по узлам*

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Решение.

Имеем три узла, т. е. $n = 3$. Применив основное представление полинома Лагранжа, получим

$$L_n(f; x) = f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_2)l_3(x) = l_1(x) + l_3(x),$$

где

$$l_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$l_3(x) = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Таким образом,

$$L_3(f; x) = x^2.$$

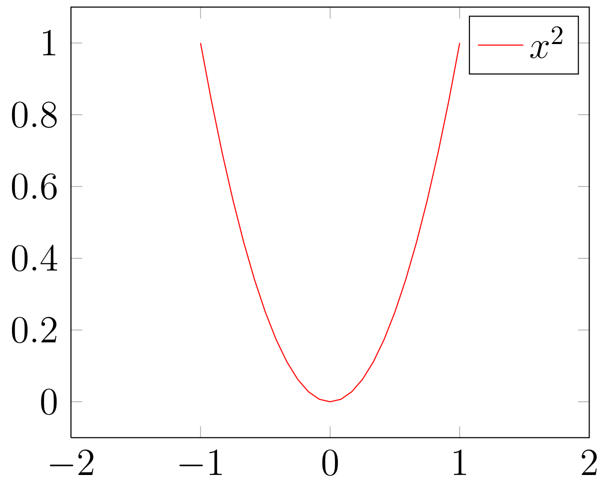

Рис. 1: График полинома Лагранжа.

Пример 2. *Используя $\omega_n(x)$, построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x) = x^4$ по узлам*

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Решение.

Имеем три узла, т. е. $n = 3$. Используя второе представление полинома Лагранжа, а именно формулу (1.1), получаем

$$L_3(f;x) = f(x_1)\frac{\omega_3(x)}{(x-x_1)\omega_3'(x_1)} + f(x_2)\frac{\omega_3(x)}{(x-x_2)\omega_3'(x_2)} + f(x_3)\frac{\omega_3(x)}{(x-x_3)\omega_3'(x_3)},$$

где

$$\omega_3(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

В нашем случае имеем

$$\omega_3(x) = (x+1)x(x-1) = x^3 - x,$$

$$\omega_3'(x) = 3x^2 - 1.$$

В итоге,

$$L_3(f;x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(x+1)(3-1)} + \frac{(x+1)x(x-1)}{(x-1)(3-1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = x^2.$$

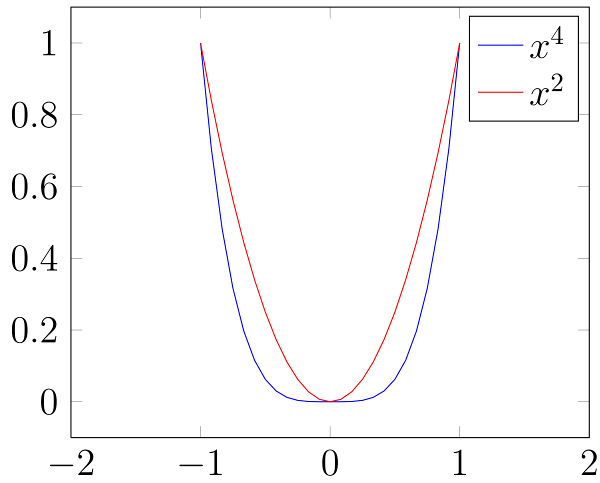

Рис. 2: График полинома Лагранжа и интерполируемой функции.

Задания для самостоятельного решения.

1. Построить интерполяционый полином Лагранжа для функции $f(x) = x^3$ по узлам
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

2. Используя $\omega_n(x)$, построить интерполяционый полином Лагранжа для функции $f(x) = x^6$ по узлам
$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$$