Применение метода неопределённых коэффициентов основано на следующих двух теоремах.

Теорема №1 *(о многочлене, тождественно равном нулю).*

Если при произвольных значениях аргумента x значение многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, заданного в стандартном виде, равно нулю, то все его коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_n равны нулю.

Теорема №2 *(следствие теоремы № 1).*

Пусть и $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, и $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$.
Для того чтобы $f(x) = g(x)$необходимо и достаточно, что бы $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$
Рассмотрим примеры, иллюстрирующие использование метода неопределенных коэффициентов.

Деление многочлена на многочлен.

Пример 1. Выполнить деление многочлена $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ на многочлен $x^2 - x + 1$.

Решение: Надо найти такие многочлены Q(x) и R(x), что $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4 = (x^2 - x + 1)\ Q(x) + R(x)$, причём степень многочлена R(x) меньше степени многочлена $(x^2 - x + 1)$. Из того, что степень произведения многочленов равна сумме их степеней, следует, что степень многочлена Q(x) равна 5 – 2 = 3.

Многочлены Q(x) и R(x) имеют вид:

$Q(x) = q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$,
$R(x) = r_1x + r_0$.
Подставим Q(x) и R(x): $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4 = (x^2 - x + 1)(q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0) + r_1x + r_0$.

Раскроем скобки в правой части равенства:

$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4 =$
$= q_3x^5 + q_2x^4 + q_1x^3 + q_0x^2 - q_3x^4 - q_2x^3 - q_1x^2 - q_0x + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0 + r_1x + r_0 =$
$= q_3x^5 + (q_2 - q_3)x^4 + (q_1 - q_2 + q_3)x_3 + (q_0 - q_1 + q_2)x^2 + (q_1 - q_0 + r_1)x + q_0 + r_0$.

Для отыскания неизвестных коэффициентов получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} q_3 = 1 \\ q_2 - q_3 = 0 \\ q_1 - q_2 + q_3 = -6 \\ q_0 - q_1 + q_2 = 2 \\ q_1 - q_0 + r_1 = 0 \end{cases}$$

$q_0 + r_0. = -4$, решая которую, получаем $q_3 = 1$, $q_2 = 1$, $q_1 = -6$, $q_0 = -5$, $r_1 = 1$, $r_0 = 1$.

Ответ: $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x - 5$, $R(x) = x + 1$.

Метод неопределенных коэффициентов - это метод решения дифференциальных уравнений второго порядка, который позволяет найти общее решение уравнения путем поиска коэффициентов в уравнении. Метод используется для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для иллюстрации рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$y'' - 3y' + 2y = x$

Для решения этого уравнения методом неопределенных коэффициентов предположим, что решение имеет вид:

$y = Ax^2 + Bx + C$

Тогда первая и вторая производные функции y будут:

$y' = 2Ax + B$

$y'' = 2A$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим:

$2A - 3(2Ax+B) + 2(Ax^2+Bx+C) = x$

Выражая коэффициенты x^2, x и свободный член, получим:

$2A + 2Ax^2 - 6Ax + 2Bx^2 - 6Bx + (2C-x) = 0$

Таким образом, чтобы уравнение было выполнено для любого значения x, коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны между собой. Это означает, что:

$2A + (2B - 6A)x + (2C - 6B - x) = 0$

С учетом того, что это соответствует уравнению при всех значениях x, коэффициенты при каждой степени должны быть равны нулю. Это приводит к системе уравнений:

$2A = 0$

$2B - 6A = 0$

$2C - 6B - 1 = 0$

Решая эту систему уравнений, находим:

$A = 0$

$B = 0$

$C = 1/2$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$y = 1/2$

Использование метода неопределенных коэффициентов позволяет находить общее решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, используя аналитическое решение и системы уравнений.