Пример. Решить СЛАУ матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 23, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Запишем заданную СЛАУ в матрично-векторном виде:

$$\mathbf{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}},$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Убедимся в том, что определитель основной матрицы **А** составленный из коэффициентов при неизвестных СЛАУ не равен нулю. В противном случае, решить систему матричным методом будет не возможно.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 7\cdot 2 -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 7\cdot 5 =$$

$$= 3 + 10 - 14 - 1 + 4 - 105 = -103.$$

Так как полученный определитель отличен от нуля, то для матрицы **A** можно найти обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Для нахождения обратной матрицы необходимо вычислить алгебраические дополнения для элементов матрицы, состоящих из коэффициентов при неизвестных.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 7 & -1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-5\cdot 7=-34,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-\left[2\cdot(-1)-5\cdot 1\right]=7,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=2\cdot 7-(-1)\cdot 1=15,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-\left[2\cdot(-1)-(-1)\cdot 7\right]=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-(-1)\cdot 1=-2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -[3 \cdot 7 - 2 \cdot 1] = -19,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -\left[3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2\right] = -17,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\left[3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2\right] = -7.$$

Далее составляется союзная матрица **A’**, элементами которой являются вычисленные алгебраические дополнения A_{ij}:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -34 & 7 & 15 \\ -5 & -2 & -19 \\ 9 & -17 & -7 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица **A’**, транспонируется, т.е. в результате проведенных действий получается присоединённая матрица $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}')^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix}.$$

Присоединённая матрица $\mathbf{A}^*$ делится на ранее вычисленный определитель $|\mathbf{A}|$, в результате получается обратная матрица по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*.$$

Подставляем переменные в формулу, получаем:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-103}\begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения неизвестных остается только, перемножим обратную матрицу и столбец свободных членов: $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{b}}$.

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Выполняем проверку полученного решения $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_2 = 4$, для этого подставляем его в матричную форму исходной системы уравнений $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$. Данное равенство должно обратиться в тождество, в противном случае, где-то допущена ошибка. Рассчитаем невязки

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$.