Пример. После локализации корня определен конечный интервал [1; 1,5], на котором находится единственный корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2 .$$

Требуется найти приближенное значение корня заданного уравнения с точностью до третьего знака после запятой, используя метод золотого сечения.

Решение. В начале вычисляются координаты двух внутренних точек согласно рассмотренного ранее правила золотого сечения:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi} = 1,5 - \frac{1,5-1}{1,618} \approx 1,19098\,,$$

$$x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi} = 1 + \frac{1,5-1}{1,618} \approx 1,30902\,.$$

Далее определяются значения функции в найденных точках и на концах заданного интервала

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6,$$

$$f(1,19098) = 1,19098^3 - \frac{1,19098^2 + 1,19098}{5} - 1,2 = -0,03257,$$

$$f(1,30902) = 1,30902^3 - \frac{1,30902^2 + 1,30902}{5} - 1,2 = 0,43855,$$

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425.$$

С помощью найденных значений функций определяется интервала, где функция меняет знак. В рассматриваемом примере функция сменила знак на интервале от x_1 до x_2. Следовательно, результатом первого приближения является новый интервал, где $a_1 = 1{,}19098$, $b_1 = 1{,}30902$, который используется для последующего уточнения решения.

Второе приближение также начинается с определения новых координат на оси абсцисс по правилу золотого сечения:

$$x_1 = 1{,}30902 - \frac{1{,}30902 - 1{,}19098}{1{,}618} \approx 1{,}23606,$$

$$x_2 = 1{,}19098 + \frac{1{,}30902 - 1{,}19098}{1{,}618} \approx 1{,}26394.$$

Во вновь найденных точках вычисляются значения функции

$$f(1,19098) = -0,03257\,,$$

$$f(1,23606) = 1,23606^3 - \frac{1,23606^2 + 1,23606}{5} - 1,2 = 0,13575\,,$$

$$f(1,26394) = 1,26394^3 - \frac{1,26394^2 + 1,26394}{5} - 1,2 = 0,24688\,,$$

$$f(1,30902) = 0,43855\,.$$

Проводится анализ смены знака функции на трех полученных интервалах, из которого видно, что смена знака происходит на первом интервале [1,19098; 1,23606].

Перед переходом к третьему приближению проводится проверка на соответствие вновь полученного интервала требованию точности

$$\left|b_2 - a_2\right| < 2\varepsilon ,$$

$$\left|1,23606 - 1,19098\right| = 0,04509 < 0,002 .$$

Как видно необходимо продолжение процесса уточнения искомого решения.

В табл. 8 представлен процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом золотого сечения.

Таблица 8 – Решение нелинейного уравнения методом золотого сечения

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
0	1	-0,6	1,5	1,425	1,19098	-0,03257	1,30902	0,43855
1	1,19098	-0,03257	1,30902	0,43855	1,23606	0,13575	1,26394	0,24688
2	1,19098	-0,03257	1,23606	0,13575	1,20820	0,03007	1,21884	0,06980
3	1,19098	-0,03257	1,20820	0,03007	1,19755	-0,00888	1,20162	0,00591
4	1,19755	-0,00888	1,20162	0,00591	1,19911	-0,00325	1,20007	0,00025
5	1,19911	-0,00325	1,20007	0,00025				

После нескольких повторений процедуры расчета при $k = 5$ было получено решение, которое удовлетворяет заданной точности

$$\left|1,20007 - 1,19911\right| = 0,00096 < 0,002 .$$

Таким образом, полученное решение соответствует середине найденного интервала

$$x = \frac{1,19911 + 1,20007}{2} = 1,19959 .$$

Напомним, что решаемое нелинейное уравнение имеет точное решение $x^* = 1,2$.

<u>Ответ.</u> Получено решение x = 1,19959 заданного нелинейного уравнения с требуемой точностью ε = 0,001 за 5 приближений.

Оба рассмотренные метода половинного деления и золотого сечения являются пассивными, так как осуществляются по жестко определенному плану, в котором не учитываются определенные значения функции. Можно предположить, что учет определенных значений функции может улучшить процесс нахождения решения нелинейного уравнения.