Как мы видели выше, вопрос о равномерной сходимости интерполяционных полиномов к интерполируемой функции при неограниченном росте числа точек интерполяции является сложным, в общем случае успеха можно добиться лишь специальным подбором узлов. Вопросы сходимости сильно упрощаются, если в качестве приближающих функций используются кусочно-полиномиальные функции. Они называются сплайнами и теория сплайн-интерполяции бурно развивается с сороковых годов XX-го столетия.

Можно отметить, что кусочно-полиномиальные функции (сплайны) возникли уже на заре математического анализа в работах Лейбница и особенно в трудах Эйлера при разработке прямых методов вариационного исчисления. Английское слово "сплайн" означает балка, рейка. Оно стало математическим термином по праву: американские инженеры и чертежники издавна использовали гибкие рейки для ручной интерполяции функций, заданных значениями на конечном числе точек.

Перейдем к точным определениям. Непрерывная функция

$$g : [a, b] \to \mathrm{R}$$

называется **сплайном**, если существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

такое, что на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция g является некоторым полиномом. Таким образом, ограничение $g \mid_{[x_{k-1}, x_k]}$ является полиномом. Для простоты мы обозначим его как

$$g_k : [x_{k-1}, x_k] \to \text{R}.$$

Определение 1. *Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть заданы узлы*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \qquad n \in N.$$

Говорят, что функция $g(x) = S_n^m(f; x)$ является для f интерполяционным сплайном степени $m \geq 1$, если выполняются условия:

1) g непрерывна на $[a,b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{k-1},x_k]$

$$g(x)=g_k(x),$$

где $g_k(x)$ — некоторый полином степени $\le m$, т. е. имеет вид

$$g_k(x)=\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^j;$$

2) для каждого узла x_j $(j=0,\ldots,n)$

$$g(x_j)=f(x_j);$$

3) если $m\ge 2$, то $g\in C^{(m-1)}[a,b]$.

Сплайны представляют удобный аппарат приближения функций конечной гладкости. Мы рассмотрим подробнее лишь наиболее употребительные на практике сплайны первой степени $(m=1)$ и кубические сплайны $(m=3)$.

При исследовании порядка приближения нам потребуется понятие модуля непрерывности для функции $f \in C[a,b]$. Напомним определение и некоторые свойства. *Модуль непрерывности* $\omega(f,\delta)$ определяется следующим образом: для фиксированного положительного числа $\delta \in (0, b-a]$

$$\omega(f,\delta) := \sup_{x',x'' \in [a,b], |x'-x''| \le \delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Из определения непосредственно следует, что модуль непрерывности является монотонно неубывающей функцией переменной δ, $\delta \in (0, b-a]$. Кроме того, условие $f \in C[a,b]$ равносильно равенству

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f;\delta) = 0,$$

в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

Принято выделять подпространства непрерывных функций посредством фиксации свойства модуля непрерывности. Одним из наиболее употребительных подпространств является класс $\mathrm{Lip}\,\alpha$ (Липшиц-альфа), где $\alpha \in (0,1]$ – фиксированное число.

По определению, $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ означает существование некоторой постоянной $M > 0$ такой, что для всех $x', x'' \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha.$$

Очевидно, условие $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ равносильно неравенству

$$\omega(f; \delta) \leq M\delta^\alpha$$

с некоторой постоянной $M > 0$. Отметим также, что если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in \mathrm{Lip}\,1$, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Действительно, для любого отрезка $[x', x''] \subset [a, b]$ по формуле Лагранжа о конечных приращениях можно записать: $\exists \xi \in (x', x'')$ такое, что

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x'),$$

поэтому

$$|f(x'') - f(x')| \leq M|x'' - x'|$$

с постоянной

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| < \infty.$$

С другой стороны, функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, не имеет производной в точке нуль, т. е. не является непрерывно дифференцируемой, но она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $M = 1$, так как

$$|f(x'') - f(x')| = ||x''| - |x'|| \leq |x'' - x'|.$$

Модуль непрерывности характеризует максимальное колебание функции на отрезке длиной не больше δ.