2.2.4. Метод Гаусса–Жордана

Метод Гаусса – Жордана (метод полного исключения неизвестных) – метод используется для решения квадратных СЛАУ и нахождения обратной матрицы, является модификацией метода Гаусса.

Алгоритм

1. Выбирается первый слева столбец расширенной матрицы, в котором есть хоть один отличный от нуля элемент.
2. Если значение самого верхнего элемента в этом столбце является нулевым, то производится замена всей первой строки расширенной матрицы на другую строку матрицы, у которой этот элемент отличен от нуля.
3. Все элементы первой строки делятся на верхний элемент выбранного столбца.
4. Из оставшихся строк вычитают первую строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) ноль.

5. Далее проводится аналогичная процедура с эквивалентной матрицей, получающейся из исходной расширенной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.

6. Данная процедура повторяется $n - 1$ раз, в результате проведенных действий получается верхняя треугольная матрица.
7. Вычитая из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.
8. Повторяем предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получаем единичную матрицу и решение на месте вектора свободных членов (с ним необходимо проводить все те же преобразования).
9. Чтобы получить обратную матрицу, нужно применить все операции в том же порядке к единичной матрице.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Для заданной СЛАУ выписываем расширенную матрицу:

$$\left(\mathbf{A}\middle|\vec{\boldsymbol{b}}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Пусть все диагональные элементы ненулевые, т.е. $a_{ii} \neq 0$.

Прямой ход (приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду, т.е. образование нулей под главной диагональю).

Разделим первую строку расширенной матрицы $(\mathbf{A}|\vec{\boldsymbol{b}})$ на **ведущий элемент** a_{11}, получим $a_{1j}^{(1)} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, j-столбец матрицы, $b_1^{(1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований получаем нули в первом столбце под главной диагональю $a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - a_{1j}^{(1)} a_{21}$, $a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - a_{1j}^{(1)} a_{31}$, …, $a_{nj}^{(1)} = a_{nj} - a_{1j}^{(1)} a_{n1}$, аналогичные преобразования проводятся и со столбцом свободных членов $b_2^{(1)} = b_2 - b_1^{(1)} a_{21}$, $b_3^{(1)} = b_3 - b_1^{(1)} a_{31}$, …, $b_n^{(1)} = b_n - b_1^{(1)} a_{n1}$.

Получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right).$$

Продолжаем выполнять аналогичные операции со второй, третьей и т.д. до n-строки, используя формулы:

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{a_{ij}^{(k-1)}}{a_{ii}^{(k-1)}},\ b_i^{(k)} = \frac{b_i^{(k-1)}}{a_{ii}^{(k-1)}},$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k)} a_{ik}^{(k-1)},\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k)} a_{ik}^{(k-1)}.$$

При условии, что $k = 1, 2, 3, \dots, n$; $i = k + 1, k + 2, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Получаем верхнюю треугольную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n)} \end{array}\right).$$

Обратный ход (приведение верхней треугольной матрицы к единичной, т.е. образования нулей над главной диагональю).

Используя формулы:

$$a_{ij}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k)} a_{ik}^{(i)},$$
$$b_{i}^{(k-1)} = b_{i}^{(k-1)} - b_{k}^{(k)} a_{ik}^{(i)}$$

при условии, что $k = n$, $n - 1$, $n - 2$, …, 1; i =1, 2, 3, …, $k - 1$, j = 1, 2, 3, …, n.

Окончательно получаем:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_3^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n)} \end{array}\right).$$

Из полученной матрицы следует, что $x_i = b_i^{(i)}$.