Метод Зейделя

Метод Зейделя — метод является модификацией метода Якоби.

Суть: при вычислении очередного $(n+1)-го$ приближения к неизвестному xi при $i\ >1$ используют уже найденные $(n+1)-е$ приближения к неизвестным $x1,\ x2,\ \ldots,\ xi\ —1$, а не $n-oe$ приближение, как в методе Якоби.

Матричная запись:

$$x_i{}^{(n+1)} = b_{i1}x_1{}^{(n+1)} + b_{i2}x_2{}^{(n+1)} + \ldots + b_{i,i-1}x_{i-2}{}^{(n+1)} + b_{i,i+1}x_{i+1}{}^{(n)} +$$

$$+ \ldots + b_{im}x_m{}^{(n)} + d_i$$

$$i = 1,\ 2, \ldots m \ldots$$

За условия сходимости и критерий окончания итераций можно принять такие же значения, как и в методе Якоби.

Пример

Решить СЛАУ методом Зейделя. Пусть матрица системы уравнений А — симметричная и положительно определенная. Следовательно, если выбрать начальное приближение, метод Зейделя сойдется. Дополнительных условий на малость нормы некоторой матрицы не накладывается.

<u>Как решать?</u>

Решим 3 системы уравнений:

$$\text{open}\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{matrix}, \text{open}\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{matrix}, \text{open}\begin{matrix} 2x_1 - 0,5x_2 = 3 \\ 2x_1 + 0,5x_2 = 1 \end{matrix}$$

Приведем системы к удобному для итерации виду:

$$\text{open}\begin{matrix} {x_1}^{(n+1)} = -0,5{x_2}^{(n)} + 1,5 \\ {x_2}^{(n+1)} = 0,5{x_1}^{(n+1)} + 0,5 \end{matrix}, \text{open}\begin{matrix} {x_1}^{(n+1)} = -2{x_2}^{(n)} + 3 \\ {x_2}^{(n+1)} = 2{x_1}^{(n+1)} - 1 \end{matrix}, \text{open}\begin{matrix} 2x_1 - 0,5x_2 = 3 \\ 2x_1 + 0,5x_2 = 1 \end{matrix}.$$

Отличительная особенность, условие сходимости выполнено только для первой системы:

$$\text{open}B|| < 1$$

Вычисляем 3 первых приближения к каждому решению:

1-ая система: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 0,375 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,3125 \\ 0,1563 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,4219 \\ 0,2109 \end{pmatrix}$

Решение: $x_1 = 1,4$, $x_2 = 0,2$. Итерационный процесс сходится.

2-ая система: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} -15 \\ -31 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 65 \\ 129 \end{pmatrix}$

Итерационный процесс разошелся.

Решение: $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

3-я система: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Итерационный процесс зациклился.

Решение: $x_1 = 1,\ x_1 = 2$