3) Метод ~~Релаксации~~ релаксации — исходная СЛАУ приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \ldots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + c_n = 0 \end{cases}$$

$$b_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\begin{cases} \psi_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^{n} b_{1j} x_j^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} = c_2 - x_2^{(0)} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} b_{2j} x_j^{(0)} \\ \psi_n^{(0)} = c_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} x_j^{(0)} \end{cases}$$

В качестве начального приближения задаётся нулевой вектор, на каждом шаге необходимо обратить в ноль максимальная невязку

$$\psi_s^{(k)} = \delta x_s^{(k)} \Rightarrow \psi_s^{(k+1)} = 0, \quad \psi_i^{(k+1)} = \psi^{(k)} + b_{is}\,\delta x_s^{(k)}$$

$|\psi^{(k)}| \leq \varepsilon$ При достижении ε:

$$x_i \approx x_i^0 + \sum_{q} \delta x_i^{(s)}$$

Тема 2. Решение нелинейных уравнений

Основные понятия

В общем случае нелин. уравн. с ~~од~~ 1 неизвестн. записывается в след. виде:

$f(x) = 0$, где $f(x)$ — непрерывная функция аргумента x. Простой однократный корень уравнения x^* обращает функцию в 0

Если точки x^* вместе с функцией обращ. в 0 и её производные до k-1 порядка включит., то x^* называется корнем k-той кратности. В зависимости от $f(x)$ нелинейные уравнения подразделяются на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраческое уравн. — уравн., в котором $f(x)$ имеет алгебраический вид

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

a_i — коэффициент

Трансцендентные - уравн. в котором F(x) содержит тригоном. показат., логарифм. и другие функции

Методы решения

нелинейных уравн.

1) Прямые

2) Итерационные

Прямые (точные, аналитич.) - позволяют записать решение в виде соотношения либо формулы, при этом знач. корней могут быть вычислены по этой формуле за конечное число

Итерационные - позволяют решить любое ~~не~~ нелин. уравн., с помощью численных методов, которые позволяют получить приближённое значение корней с ~~за~~заданной точностью. При численном подходе задача о решении нелин. уравн. распадается

на несколько подзадач

1) Анализ кол-ва хар-ра, располож. корней. Возможны варианты:

- Корень 1
- Бесконечное множество
- Корней нет
- Имеется несколько решений, как действительных, так и

2) Локализация корней (разбиение на интервал, выбор начал. приближ. к каждому корню)

3) Уточнение каждого или интерес. нас корня с требуемой точностью

Локализация корней

Для отделения корней нелинейн. уравн. необходимо:

1) Убедиться, что на рассматр. интервале есть корень

2) Быть уверенным, что этот корень

единственный на отрезке, [illegible]

~~Дл~~ Для реализации этапа локализ. используют аналитический, графический, табличный способ.

1) ~~А~~ Аналит. - Если функция непрерывна на AB, а на концах её знач. имеют разные знаки, то на этом отрезке есть хотя бы один корень. Для обеспечения единственности необходимо, чтобы функция была монотонной на этом отрезке

2) Графич. - используется в том случае когда можно построить график функции $y=f(x)$, что даёт наглядное представление о кол-ве и расположении ~~кр~~ нолей функции, то есть выделить промежутки внутри которых только один корень. В ряде случаев $y=f(x)$ может быть представлена в эквивалентном виде

3) Табличный - легко реализуется на вычислительных машинах. Интервал AB разбив. на ряд интервал с шагом h. на границах каждого интервала проводим сравнение знаков функции

$f(x_1) \times f(x_i) < 0$

Для того чтобы убедиться проскочил ли корень необходимо уменьшить шаг и повторить процесс, если кол-во не измен.

26.09.22

Уточнение корней

Процесс уточн. корней разделяется на 3 категории:

1) Интервальные
2) Итерационные
3) Комбинированные

Интервальные методы имею 2 границы $A_i B_i$ на которых проводится анализ знака функции. Данные методы относятся к абсолютно сходящимся

Итерационные методы обладают условной сходимостью, при этом выполнение этого условия необходимо и достаточ для получения уточнен решения с заданной точностью (ε)

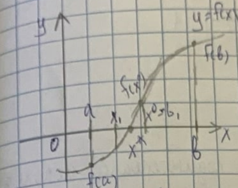
Комбинированные позволяют объеденить преимущества интервального метода (абсолют сходимость и скорость итерационного, при этом проверка условий сходимости не происходит

Интервальные методы

1) Метод половинного деления
2) Метод золотого сечения
3) Метод хорд
4) Метод Риддерса

Метод половинного деления (бисекции дихотомии). На отрезке АВ расположен один корень (x^*) который необходимо уточнить

с точностью ε



$\varepsilon = 0{,}01$ $\varepsilon = 0{,}001$

$f(a) \times f(b) < 0$

В качестве начального приближ принимается середина ab. Исследуется знак функции на концах отрезков ax_0 и $x_0 b$. Отрезок на котором функция меняет знак содержит искомый корень поэтому его принимают в качестве нового отрезка $a_1 b_1$, вторую половину интервала отбрасывают. Проверяется условие остановки $|a_1 - b_1| < 2\varepsilon$, иначе переходим к следующей итерации

При выдаче результата обязательная проверка условия достаточности

$|F(x_i)| < \varepsilon$

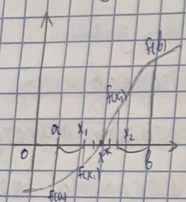
Для оценки кол-ва итераций требуемых

для достижения данной точности используют выражение $N = int(\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}) + 1$

$b-a=1$ $\quad \varepsilon = 10^{-6}$ $\quad N = \cancel{20}\ 19$

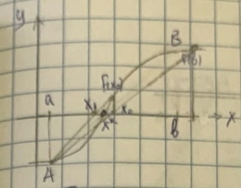
Метод золотого сечения

Интервал ав разбивается на 3 подинтервала используя правило золотого сечения. Проводим проверку подинтервалов на знак функции на подинтервалах. Проверка условия остановки для выбранного интервала. Анализируем достат. условие.



Метод хорд

Методы половинного деления и золотого не учитывают значение функц на концах интервала, а только знак. Метод хорд принимает во внимание знач функции в пограничных точках



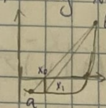
$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\boxed{x = x_0 \quad y = 0}$$

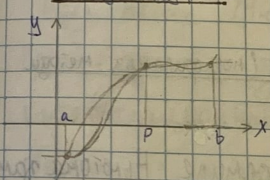
$$x_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

Примечание: для функции имеющей резкий рост и протяжённую область вдоль оси абсцисс метод хорд сходится крайне медленно



Метод Риддерса



$$x_{k+1} = \beta + (\beta - x_{k-1}) \frac{\text{sign}[f(x_{k-1}) - f(x_k)]\, f(\beta)}{\sqrt{f(\beta)^2 - f(x_{k-1}) f(x_k)}}$$

$$\beta = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \qquad \text{sign}[x] = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Обладает сверхлинейной сходимостью

Итерационные методы. Процедура численного определ приближ знач корня ~~[illegible]~~ нелин уравн начинается с выбора начал приближ к корню

В результате решения получается последовательность приближений, каждый шаг называется итерацией. В результате итераций получается последоват приближ

которая назыв. итер. послед. Если с ростом k решение стремится к точному значению $\lim\limits_{k \to \infty} \{x_k\} = x^*$, процесс сходится. Сходимость обозначает, что погрешность каждого следующ. приближ меньше предыдущего

$$|x^* - x_{k+1}| < q|x^* - x_k|^{\alpha} \quad q > 0 \quad \alpha \geq 1$$

α и q определяются методом уточнения корня

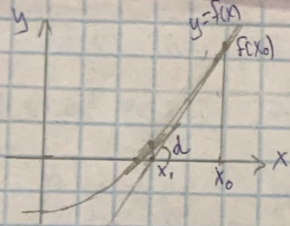
Главным показателем скорости сходимости является значение α, которое назыв. порядком сходимости. Если $\alpha = 1$ погрешность с каждым шагом убывает линейно, если $\alpha > 1$, то сверхлинейная сходимость

$\alpha = 1$ - линейная сходимость

Метод Ньютона (касательных)

Известно нач. приближ. к корню x_0

23



$$tg\,\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

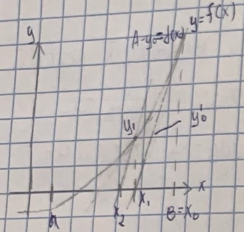
Сходимость метода Ньютона $\alpha = 2$

Для выполнения условия сходимости итер процесса необходимо выбрать такое нач приближ x_0, где знак функции умножем на второй производной совпадали.

Данное условие накладывает ограничения на функцию, (должна быть монотонмой на рассматриваемом отрезке ав)

23.09.22

Модифицированный метод Ньютона



$f(x_0) \times f''(x_0) > 0$

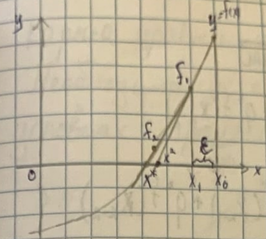
$$x_{(k+1)} = x_{(k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

Метод секущих (модификация метода Ньютона)

1-ую производную в формуле Ньютона заменяют конечно-разностным аналогом

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{(k+1)} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



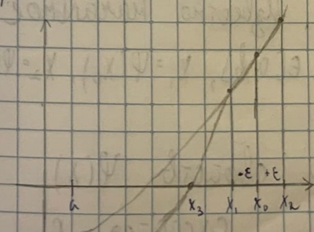
В отличие от метода Ньютона для запуска необходимо задать 2 начальных приближения (x_0, x_1)

$x_1 = x_0 + \varepsilon$

При $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$ остановка

Метод Мюлера (парабол)

Идея метода Мюлера заключается в приближённой замене $y=f(x)$ интерполяционным полиномом 2-ой степени (параболой), построенный по 3-ем точкам у которого решение определяется точк. й пересечения с осью абсцисс



$$x_{k+1} = x_k - (x_k - x_{k-1}) \frac{2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}$$

$$A = q f(x_k) - q(1+q) f(x_{k-1}) + q^2 f(x_{k-2})$$

$$C = (1+q) f(x_k)$$

$$B = (2q+1) f(x_k) - (1+q)^2 f(x_{k-1}) + q^2 f(x_{k-2})$$

$$q = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

Знак в знаменателе перед корнем выбир так, чтобы абсолют значен знам было максимальным. Метод Мюллера обладает сверхлинейной сходимостью

Метод простой итерации

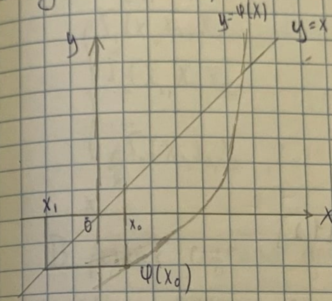
Рассмотрим более общий итерационный метод уточнения корня. Рассмотрим исходн уравн $F(x)=0$, преобразуем его к виду $\Rightarrow x = \varphi(x)$. Известно начальное приближение $x_0 \in [a,b]$, $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$ ...

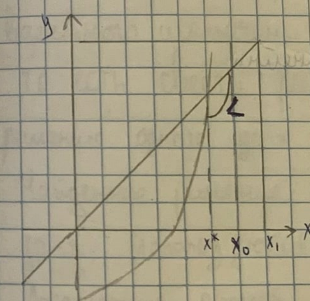
$x_{k+1} = \varphi(x_k)$

При определении свойств $\varphi(x)$ последоват. x_1, x_2 ... сходится к

корню уравнения $F(x)=0$

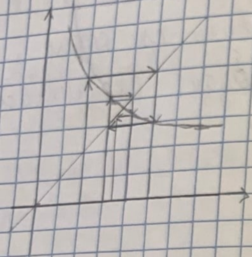
Необходимо установить при каких условиях процесс будет сходящийся





Условие сходимости

$|\varphi'(x)| < 1$



Пример

$$x^3 - x - 1 = 0 \qquad I \in [1, 2]$$

Решение систем нелинейных уравнений

Система лин. уравн. записывается в следующем виде

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

x

В редких случаях для решения такой системы можно применить метод последовательного исключения неизвестных, то есть свести решение исходной к решению одного ур-я с 1-ой неизвестной. Найденное решение подставляется в предыд ур-я. Используются численные методы. Локализация корней опирается на априорные знания поставленной физической задачи. В случае 2-ух уравн возможна графо локализация

23

Методы решения

1) Метод Ньютона. Задаётся вектор начал приближ. Для опред след итераций используется следующее превращ:

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \Delta X_i^{(k)}$$

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + J^{-1}(X_i^k) F_i(X_i^k)$$, где J^{-1} - матрица, обратная матрице Якоби

2) Метод простой итерации аналогичен методу рассмотр. для одного уравнения

Задаётся вектор начал приближ. Исходная СЛАУ преобразуется к эквивалентному виду

Если итерационный процесс сходится (условие

$$M_{ij} = \max\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right| \quad \|M\| < 1$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \end{cases}$$

Скорость сходимости метода сильно зависит от вида конкретно подобранной функции φ_i, которые должны одновременно

удовлетворять условиям эквивалентности к исходн системе, а так же обеспеч сходимость итерац. процесса

(Посмотреть пример в случае 1-го нелинейного ур-я)

Для Темы 2. Лаб работа 1 Решение нелин. ур-ий

2. Итерационные методы решения нелинейных ур-ий

Доп { 3. Комбинированные методы решения
4. Решение систем нелин. ур-ий

10.10.22

Тема 3. Интерполяция и аппроксимация

Основные понятия и определения

Интерполяция - восстанав. функции на заданном интервале по известным её знач. в конечном множ точек, принадл