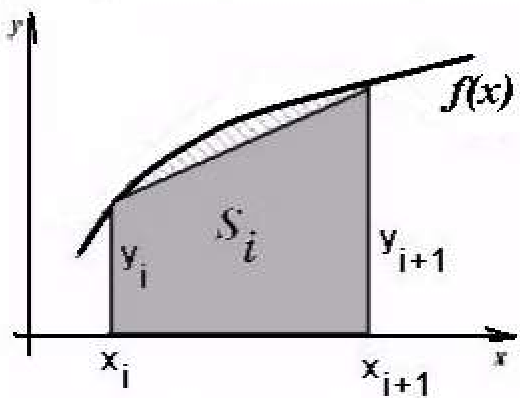
§4.Метод трапеций.

В методе трапеций криволинейная трапеция на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется на прямолинейную, основаниями которой являются отрезки y_{i+1} и y_i. Площадь трапеции

$$S_i = h\frac{y_{i+1} + y_i}{2}$$

$$I = \sum_{i=0}^{n} S_i = \sum_{i=0}^{n} h\frac{y_{i+1} + y_i}{2} = h\frac{y_0 + y_n}{2} + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$



Пример

Вычислим по методу трапеций значение определенного интеграла $\int_1^2 \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}\right)dx$ с точностью до $0,01$.

Решение

Согласно условию задачи $a = 1;\ b = 2,\ f\left(x\right) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60};\ \mathbf{open}\delta_n| \le 0,01$.

Найдем n, которое равно количеству точек разбиения отрезка интегрирования, с помощью неравенства для оценки абсолютной погрешности $\mathbf{open}\delta_n| \le \underset{x\in[a;b]}{max}\ \mathbf{open}f\ ''\ (x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$. Сделаем мы это следующим образом: мы найдем значения n, для которых будет выполняться неравенство $\underset{x\in[a;b]}{max}\ \mathbf{open}f\ ''\ (x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \le 0,01$. При данных n формула трапеций даст нам приближенное значение определенного интеграла с заданной точностью.

Для начала найдем наибольшее значение модуля второй производной функции на отрезке $[1;\ 2]$.

$$f'\left(x\right) = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}\right)' = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$f\ ''\left(x\right) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\right)' = x^2$$

Вторая производная функция является квадратичной параболой $f\ ''\ (x) = x^2$. Из ее свойств мы знаем, что она положительная и возрастает на отрезке $[1;\ 2]$. В связи с этим $\underset{x\in[a;b]}{max}\ \mathbf{open}f\ ''\ (x)| = f\ ''\left(2\right) = 2^2 = 4$.

В приведенном примере процесс нахождения $\underset{x\in[a;b]}{max}\ \mathbf{open}f\ ''\ (x)|$ оказался достаточно простым. В сложных случаях для проведения вычислений можно обратиться к наибольшим и наименьшим значениям функции. После рассмотрения данного примера мы приведем альтернативный метод нахождения $\underset{x\in[a;b]}{max}\ \mathbf{open}f\ ''\ (x)|$.

$$4 \cdot \frac{(2-1)^3}{12n^2} \le 0,01 \Rightarrow n^2 \ge \frac{100}{3} \Rightarrow \operatorname{open} n| \ge 5,7735$$

Количество элементарных интервалов, на которые разбивается отрезок интегрирования n является натуральным числом. Для поведения вычислений возьмем n равное шести. Такое значение n позволит нам достичь заданной точности метода трапеций при минимуме расчетов.

Вычислим шаг: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$.

Найдем узлы $x_i = a + i \cdot h,\ i = 1,\ 0, \ldots,\ n$, определим значения подынтегральной функции в этих узлах:

$$i = 0:\ x_0 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow$$

$$f\left(x_0\right) = f\left(1\right) = \frac{1}{12} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{60} = 0,4$$

$$i = 1:\ x_1 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow$$

$$f\left(x_1\right) = f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{6} - \frac{1}{60} \approx 0,5266$$

$$\ldots$$

$$i = 6:\ x_{10} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{6} = 2 \Rightarrow$$

$$f\left(x_6\right) = f\left(2\right) = \frac{1}{12} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{60} \approx 1,9833$$

Результаты вычислений запишем в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$
$f(x_i)$	$0,4$	$0,5266$	$0,6911$	$0,9052$	$1,1819$

Подставим полученные результаты в формулу трапеций:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}\right)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left(f\left(x_0\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) + f\left(x_n\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (0,4 + 2 \cdot (0,5266 + 0,6911 + 0,9052 + 1,1819 + 1,5359) + 1,9833) \approx 1,0054$$

Для проведения сравнения вычислим исходный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}\right)dx = \left(\frac{x^5}{60} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{60}\right)\Big|_1^2 = 1$$

Как видим, полученной точности вычислений мы достигли.

Ответ: $\int_1^2 \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}\right)dx \approx 1,0054$