Квадратуры Гаусса–Лежандра

До настоящего времени мы рассматривали формулы для численного интегрирования только на равномерных сетках. Это сильно упрощает формулы, но и порождает существенный недостаток этих методов — за счет того, что точки выбираются эквидистантно, происходит быстрое накопление погрешностей аппроксимации. Бороться с этим можно, конечно, уменьшая шаг сетки и, таким образом, увеличивая время расчета интеграла. Это не существенно, если мы вычисляем простые интегралы, однако может стать принципиальным препятствием при вычислении многомерных интегралов. В этом случае возможно также существенно снизить вычислительные затраты, не уменьшая при этом точности расчетов. Делается это при помощи т.н. квадратур высокой точности, к которым относится и квадратуры Гаусса–Лежандра.

Идею метода поясняет рис. 2.2. В методе трапеций погрешности аппроксимации суммируются для каждого интервала (рис. 2.2а), причем при заданном шаге мы не можем уменьшить погрешность, поскольку краевые точки интервала жестко заданы. Напротив, в методе высокоточных квадратур функция на искомом интервале аппроксимируется полиномом, который в зависимости от его параметров пересекает искомую функцию в нескольких точках (например, в двух в случае квадратичной функции) и эти точки мы можем подобрать таким образом, чтобы скомпенсировать наилучшим образом погрешности аппроксимации с разными знаками (см. рис. 2.2б). Далее, значение интеграла вычисляется на рассматриваемом интервале как сумма значений функции в данных точках с соответствующими весами (по аналогии с формулами для равномерных сеток). При этом, как правило, высокая точность расчетов достигается уже для аппроксимирующих полиномов невысокой степени (2–6).

В *квадратурах Гаусса–Лежандра* изначально рассматривается задача вычисления интеграла на отрезке $[-1, 1]$:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx I_G = \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i), \tag{2.7}$$

где w_i — веса с которыми берутся значения функции в точках x_i. Положения точек и веса функций вычисляются точно для квадратур любого порядка [7]. На практике, однако, редко используются квадратуры выше 10-го порядка. В табл. 2.4 приведены значения аргумента и соответствующие веса для нескольких первых квадратур.

Как перейти от квадратуры (2.7) для интервала интегрирования $[-1, 1]$ к вычислению интеграла в произвольном интервале? Ответ прост — надо ввести замену переменных

$$\xi = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)x,$$

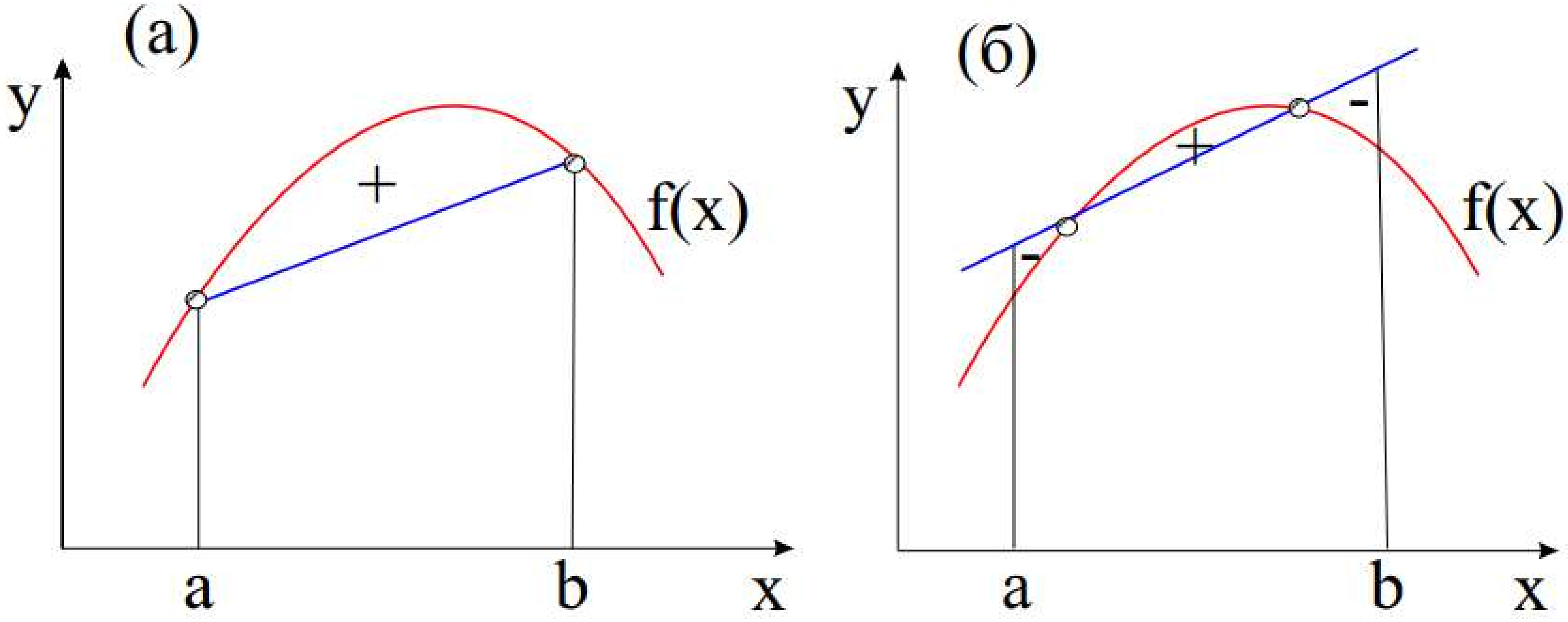

Рис. 2.2: Аппроксимация подынтегральной функции $f(x)$ с помощью (а) кусочно-линейной функции на равномерной сетке (метод трапеций) и (б) полиномиальной интерполирующей функции на неравномерной сетке (метод квадратур). Знаками "+" и "−" отмечены погрешности аппроксимации. Видно, что в методе квадратур погрешности могут быть скомпенсированы за счет выбора оптимальных узлов.

при которой

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(\xi(x))\, dx.$$

Окончательно получаем *квадратуру Гаусса-Лежандра* для произвольного интервала интегрирования:

$$I = \int_a^b f(\xi)\, d\xi \approx I_G = \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(\xi_i), \tag{2.8}$$

где

$$\xi_i = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) x_i.$$

Квадратуры Гаусса-Лежандра требуют минимум вычислений для достижения заданной точности интегрирования.