§5. Формула Симпсона.

Площадь малой криволинейной трапеции S_i в методах, описанных выше, приближается площадью фигуры, ограниченной сверху прямой, т.е. полиномом первой степени. Понятно, что эту фигуру можно ограничить и полиномом более высокой степени. Наиболее известен метод, в котором используется так называемый полином Ньютона второй степени

$$y = y(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})y(x_{i-1}, x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_i)y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

где $y(x_{i-1}, x_i)$ и $y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ –так называемые разделенные разности, числа, являющиеся комбинацией $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$, $y(x_{i+1})$.

Полином Ньютона строится на смежных отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, через три точки (x_{i-1},y_{i-1}), (x_i,y_i), (x_{i+1},y_{i+1}) и является параболой. Чтобы найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой параболой, можно аналитически взять интеграл:

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})y(x_{i-1}, x_i) + (x - x_{i-1})(x - x_i)y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \right) dx =$$

$$= h\frac{y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}}{3}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{\substack{i \\ шаг\,2}} S_i = \sum_{\substack{i=1 \\ шаг\,2}}^{n-1} h\frac{y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}}{3}$$