5. Сплайн-интерполяция

Как мы видели выше, вопрос о равномерной сходимости интерполяционных полиномов к интерполируемой функции при неограниченном росте числа точек интерполяции является сложным, в общем случае успеха можно добиться лишь специальным подбором узлов. Вопросы сходимости сильно упрощаются, если в качестве приближающих функций используются кусочно-полиномиальные функции. Они называются сплайнами и теория сплайн-интерполяции бурно развивается с сороковых годов XX-го столетия.

Можно отметить, что кусочно-полиномиальные функции (сплайны) возникли уже на заре математического анализа в работах Лейбница и особенно в трудах Эйлера при разработке прямых методов вариационного исчисления. Английское слово "сплайн" означает балка, рейка. Оно стало математическим термином по праву: американские инженеры и чертежники издавна использовали гибкие рейки для ручной интерполяции функций, заданных значениями на конечном числе точек.

Перейдем к точным определениям. Непрерывная функция

$$g : [a, b] \to \mathrm{R}$$

называется **сплайном**, если существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

такое, что на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция g является некоторым полиномом. Таким образом, ограничение $g \ |_{[x_{k-1},x_k]}$ является полиномом. Для простоты мы обозначим его как

$$g_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathrm{R}.$$

Определение 1. *Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть заданы узлы*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \qquad n \in N.$$

Говорят, что функция $g(x) = S_n^m(f; x)$ является для f интерполяционным сплайном степени $m \geq 1$, если выполняются условия:

1) g непрерывна на $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$

$$g(x) = g_k(x),$$

где $g_k(x)$ — некоторый полином степени $\leq m$, т. е. имеет вид

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{kj} x^j;$$

2) для каждого узла x_j $(j = 0, \dots, n)$

$$g(x_j) = f(x_j);$$

3) если $m \geq 2$, то $g \in C^{(m-1)}[a, b]$.

Сплайны представляют удобный аппарат приближения функций конечной гладкости. Мы рассмотрим подробнее лишь наиболее употребительные на практике сплайны первой степени $(m = 1)$ и кубические сплайны $(m = 3)$.

При исследовании порядка приближения нам потребуется понятие модуля непрерывности для функции $f \in C[a, b]$. Напомним определение и некоторые свойства. *Модуль непрерывности* $\omega(f, \delta)$ определяется следующим образом: для фиксированного положительного числа $\delta \in (0, b - a]$

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x', x'' \in [a,b], |x' - x''| \leq \delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Из определения непосредственно следует, что модуль непрерывности является монотонно неубывающей функцией переменной δ, $\delta \in (0, b - a]$. Кроме того, условие $f \in C[a, b]$ равносильно равенству

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0,$$

в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

Принято выделять подпространства непрерывных функций посредством фиксации свойства модуля непрерывности. Одним из наиболее употребительных подпространств является класс $\mathrm{Lip}\,\alpha$ (Липшиц-альфа), где $\alpha \in (0, 1]$ — фиксированное число.

По определению, $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ означает существование некоторой постоянной $M > 0$ такой, что для всех $x', x'' \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^{\alpha}.$$

Очевидно, условие $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ равносильно неравенству

$$\omega(f; \delta) \leq M\delta^{\alpha}$$

с некоторой постоянной $M > 0$. Отметим также, что если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in \mathrm{Lip}\,1$, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Действительно, для любого отрезка $[x', x''] \subset [a, b]$ по формуле Лагранжа о конечных приращениях можно записать: $\exists \xi \in (x', x'')$ такое, что

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x'),$$

поэтому

$$|f(x'') - f(x')| \leq M|x'' - x'|$$

с постоянной

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| < \infty.$$

С другой стороны, функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, не имеет производной в точке нуль, т. е. не является непрерывно дифференцируемой, но она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $M = 1$, так как

$$|f(x'') - f(x')| = ||x''| - |x'|| \leq |x'' - x'|.$$

Модуль непрерывности характеризует максимальное колебание функции на отрезке длиной не больше δ.

Пример 22. *Пусть* $f(x) = |x|, [a, b] = [-1, 1]$. *Найти* $\omega(f; x)$.

Решение.

При фиксированном x_0 и δ скачок функции $f(x) = |x|$ на интервале $[x_0, x_0 + \delta]$ не превосходит δ. Следовательно, $\omega(f; \delta) = \delta$.

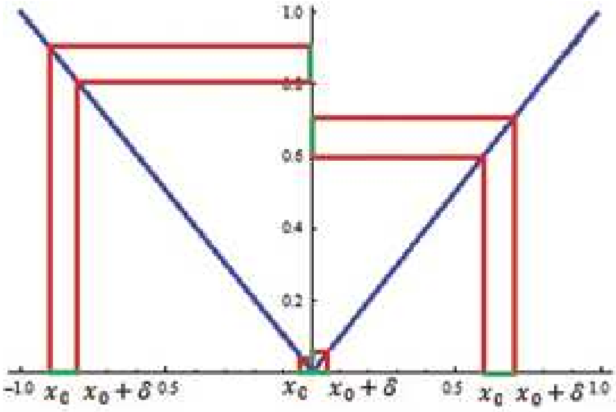

Рис. 14: График функции $f(x) = |x|$.

Пример 23. *Пусть* $f(x) = \sqrt{x}, [a, b] = [0, 10]$. *Найти* $\omega(f; x)$.

Решение.

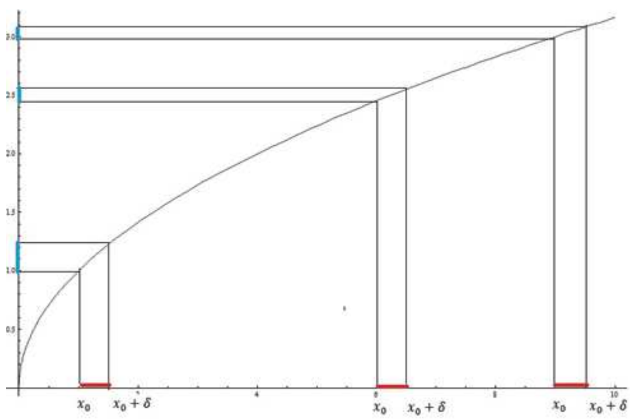

Рис. 15: График функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Ясно, что при фиксированном x_0 и δ скачок функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале $[x_0, x_0 + \delta]$ увеличивается с приближением x_0 к началу координат. Следовательно,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{x_0, \in [0, 10-\delta]} |\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + \delta}| = \sqrt{\delta}.$$

Пример 24. *Пусть* $f(x) = \sqrt{x}, [a, b] = [1, 10]$. *Найти* $\omega(f; x)$.

Решение.

По аналогии с примером 23, легко понять, что $\omega(f; \delta) = \sqrt{1 + \delta} - 1$.

5.1 Сплайны первой степени

Рассмотрим сплайн первой степени $g(x) = S_n^1(f;x)$ для

$$f \in C[a,b], \quad a = x_0 < \ldots < x_n = b.$$

По определению интерполяционного сплайна $g \in C[a,b]$, $g(x_k) = f(x_k),\ k = 0,1,...,n$, кроме того, на любом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$

$$g(x) = g_k(x) = a_k x + b_k.$$

Таким образом, речь идет об аппроксимации $f \in C[a,b]$ ломаными, т. е. непрерывными кусочно-линейными функциями.

Существование и единственность интерполяционного сплайна первой степени получаются тривиально. Действительно, нахождение $g_k(x) = a_k x + b_k$ геометрически сводится к построению отрезка прямой, проходящей через 2 точки с координатами $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$. Кроме того, мы можем интерпретировать $g_k(x) = a_k x + b_k$ как интерполяционный полином Лагранжа степени ≤ 1, построенный по двум узлам x_{k-1}, x_k. По доказанному ранее такой полином существует, определяется единственным образом и может быть представлен по формуле Лагранжа на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ в явном виде как

$$g(x) = g_k(x) = f(x_{k-1})\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Равенства $g(x_k) = f(x_k)$ и $g(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ очевидны.

Рассмотрим аппроксимационные свойства сплайнов первой степени. Отметим, прежде всего, *представление типа Лагранжа*:

$$S_n^1(f;x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ s_j(x),$$

где $s_j(x)$ – *фундаментальные сплайны первой степени* со стандартным свойством $s_j(x_k) = \delta_{kj}$. Мы можем написать их в явном виде. Для крайних узлов

$$s_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - a} & \text{при} \quad a \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{при} \quad x_1 \leq x \leq b; \end{cases}$$

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a \leq x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{b - x_{n-1}} & \text{при} \quad x_{n-1} \leq x \leq b; \end{cases}$$

и при любом $1 \le j \le n-1$, т. е. для внутренних узлов

$$s_j(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ a \le x \le x_{j-1}, \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \ \text{ при } \ x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \ \text{ при } \ x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0 \ \text{ при } \ x_{j+1} \le x \le b. \end{cases}$$

Норма оператора S_n^1 легко вычисляется и равна 1 при любом n, так как

$$\sum_{j=0}^{n} |s_j(x)| \equiv \sum_{j=0}^{n} s_j(x) \equiv 1.$$

В силу ограниченности нормы оператор S_n^1 должен обладать хорошими аппроксимационными свойствами. Мы получим оценки погрешности интерполяции с использованием модуля непрерывности интерполируемой функции или ее производной, а также диаметра разбиения $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, определяемого стандартно как

$$\delta_n = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Теорема 8. *Для каждой функции $f \in C[a,b]$ ее интерполяционный сплайн $S_n^1(f;x)$, построенный по сетке $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ с диаметром разбиения δ_n, имеет следующие свойства:*

$$1) \ \|f(x) - S_n^1(f;x)\|_{C[a,b]} \le \omega(f, \delta_n);$$

$$2) \ S_n^1(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad \textit{при} \quad \delta_n \to 0.$$

Отметим простое следствие теоремы. Если $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, то существует постоянная M такая, что $\omega(f, \delta_n) \le M\delta_n^\alpha$. Поэтому

$$\|f(x) - S_n(f;x)\|_{C[a,b]} = O(\delta_n^\alpha).$$

Для непрерывно дифференцируемых функций погрешность интерполяции допускает более сильную оценку.

Теорема 9. *Пусть $f \in C^1[a,b]$, $S_n^1(f;x)$ – ее интерполяционный сплайн первой степени, построенный по узлам $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ с диаметром δ_n. Тогда*

$$\|f(x) - S_n^1(f;x)\|_{C[a,b]} \le \frac{\delta_n}{4}\omega(f', \delta_n).$$

Следствие 9.1. *Если* $f' \in Lip\,\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$, *то*

$$\|f(x) - S_n^1(f;x)\|_{C[a,b]} = O(\delta_n^{1+\alpha}).$$

Следствие 9.2. *Для любой функции* $f \in C^2[a,b]$

$$\|f(x) - S_n^1(f;x)\|_{C[a,b]} \leq \frac{\delta_n^2}{4}\|f''(x)\| = O(\delta_n^2). \tag{5.1}$$

В частности, если интерполяционный полином построен по равноотстоящим узлам с шагом $h = \delta_n = \frac{b-a}{n}$, *то*

$$\|f(x) - S_n^1(f;x)\|_{C[a,b]} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отметим так называемое "свойство насыщаемости" сплайна первой степени, которое заключается в следующем: дальнейшее увеличение порядка гладкости интерполируемой функции, например, требование $f \in C^r[a,b]$, $r \geq 3$, не приводит к лучшим оценкам погрешности аппроксимации, чем оценка $O(\delta_n^2)$ для дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Невозможность дальнейшего повышения порядка малости погрешности за счет порядка гладкости интерполируемой функции можно демонстрировать на простом примере.

Пример 1. Рассмотрим сколь угодно гладкую функцию $f_0(x) = x^2$ на отрезке $[-1,1]$ и сетку с равноотстоящими узлами

$$x_k = -1 + kh, \quad h = 2/n, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Пусть n – нечетное число. Тогда один из частичных отрезков имеет вид $[-h/2, h/2]$, и на этом отрезке, очевидно, $S_n^1(f_0, x) \equiv h^2/4$. Поэтому

$$\|f_0(x) - S_n^1(f;x)\|_{C[a;b]} \geq |f_0(0) - S_n^1(f;0)| = h^2/4.$$

Если n – четное число, то полученная оценка снизу для погрешности интерполяции также верна (покажите!).

Замечание. Обратите внимание, что в предыдущих рассуждениях речь идет об оценках погрешности, гарантированных для всех функций из заданных классов функций. Понятно, что для конкретной функции аппроксимация может быть намного лучше. Например, если взять непрерывную, кусочно-линейную функцию, то погрешность тождественно равна нулю при подходящем выборе сетки.

Пример 25. *Для функции $f(x) = e^{\sin \pi x}$ построить сплайн первого порядка по узлам*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/6, \quad x_2 = 1/2.$$

Решение.

Ясно, что значения функции в узловых точках соответственно равны

$$y_0 = 1, \quad y_1 = e^{1/2}, \quad y_2 = e.$$

$$S_2^1(f, x) = \begin{cases} 1 + 6(\sqrt{e} - 1), & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right] \\ \sqrt{e} + 3(e - \sqrt{e})(x - 1/6), & x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

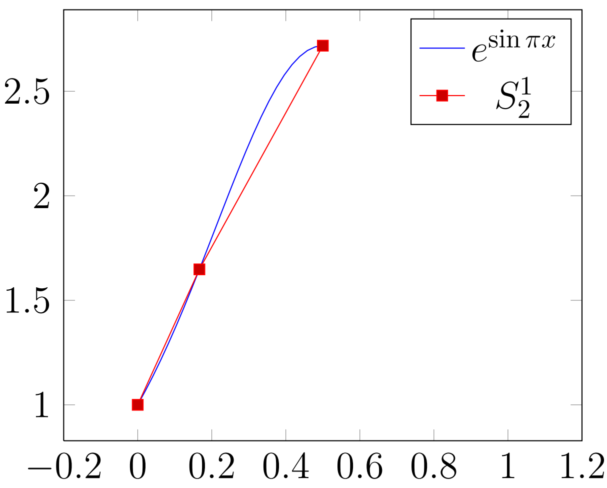

Рис. 16: График сплайна первого порядка и функции $f(x)$.

Пример 26. *Для функции $f(x) = e^x$ записать сплайн первого порядка по равноотстоящим узлам*

$$x_i = ih, \quad h\frac{1}{n}, \quad i = \overline{0, n},$$

и оценить погрешность.

Решение.

$$S_2^1(f, x) = e^{x_{k-1}} + \frac{e^{x_k} - e^{x_{k-1}}}{h}(x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n.}$$

Используя формулу (5.1), получим

$$\|f(x) - S_2^1(f, x)\| \le \frac{\delta_2^2}{4}\|f''(x)\| = \frac{h^2 e}{4}.$$

Пример 27. *Построить сплайн, приближающий функцию* $\sin x$ *на отрезке* $[0, \pi/2]$ *с точностью* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение.

Возьмем равноотстоящие узлы

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \delta_n = h = \frac{\pi}{2n}.$$

Найдем минимальное возможное n, при котором точность ε будет обеспечена. Существует f'' и ясно, что $|f''(x)| \le 1, x \in [0, \pi/2]$, поэтому по третьей оценке имеем

$$\|f(x) - S_n^1(f, x)\| \le \frac{\delta_n^2}{4} \le \varepsilon.$$

Следовательно, минимальное $n = 249$. Имеем

$$x_k = \frac{\pi k}{498}, y_k = \sin x_k = \sin \frac{\pi k}{498}.$$

На отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ сплайн равен

$$y_{k-1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h}(x - x_{k-1}).$$

Таким образом,

$$\sin x \approx S_{249}^1(f, x) = y_{k-1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h}(x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}.$$

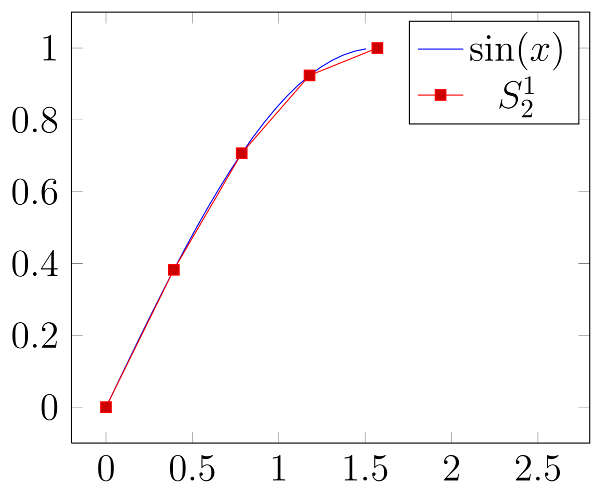

Рис. 17: График сплайна первого порядка и функции $f(x)$.

5.2 Кубические сплайны

Для заданной функции $f \in C[a, b]$ и узлов $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ сплайн третьей степени, т. е. кубический сплайн

$$g(x) = S_n^3(f; x)$$

определяется тремя условиями:

I) на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$g(x) = g_k(x) = a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + a_{k3}x^3$$

– полином третьей степени;

II) для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$g(x_k) = f(x_k);$$

III) $g \in C^2[a, b]$, т. е. g, g', g'' непрерывны на $[a, b]$. Это условие фактически сводится к дважды гладкой склейке на внутренних узловых точках полиномов g_k из соседних частичных отрезков: для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ должны выполняться равенства

$$g_k(x_k) = g_{k+1}(x_k), \;\; g_k'(x_k) = g_{k+1}'(x_k), \;\; g_k''(x_k) = g_{k+1}''(x_k).$$

Условиями I–III кубический сплайн определяется не единственным образом, поскольку число неизвестных коэффициентов a_{kj} равно $4n$, а число уравнений для их определения равно $4n - 2$. А именно, $n + 1$ уравнение дано условиями интерполирования и $3(n-1)$ уравнений предоставлены условиями дважды гладкой склейки на внутренних узловых точках.

Таким образом, нужны еще 2 условия. Дополнительные условия вида $g(a) = g(b)$, $g'(a) = g'(b)$ обычно применяются для периодических функций с периодом $T = b - a$.

Для непериодических функций наиболее употребительными являются так называемые естественные кубические сплайны, они определяются присоединением следующих дополнительных условий: $g''(a) = g''(b) = 0$.

Теорема 10. *Для каждой функции $f \in C[a, b]$ ее естественный кубический сплайн $g(x) = S_n^3(f; x)$, построенный по сетке $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, существует и определяется единственным образом.*

В заключение приведем без доказательства теорему, показывающую свойство насыщения кубических сплайнов.

Теорема 11. *Пусть* $f \in C[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, δ_n *— диаметр разбиения этой сетки и интерполяционный кубический сплайн третьего порядка* $S_n^3(f;x)$ *удовлетворяет соответствующим краевым условиям. Если* $f \in C^r[a,b]$, $r = 1,2,\ldots$, *то*

$$\|f(x) - S_n^3(f;x)\|_{C[a;b]} = \begin{cases} O(\delta_n^r) \text{ при } r \leq 4; \\ \\ O(\delta_n^4) \text{ при } r \geq 4. \end{cases}$$

Построение кубического сплайна через моменты.

Пусть $M_i \equiv S''(x_i), i = \overline{0,n}$ – моменты сплайна в узлах x_i. Возьмем конкретный сегмент $[x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$. Так как на нем S'' является полиномом первого порядка, то

$$g''(x) = M_{k-1} + \frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}).$$

Далее интегрируя, восстанавливаем производную и сам сплайн:

$$g'(x) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x} g''(t)dt + g'(x_{k-1}), \quad k = \overline{1,n},$$

$$g(x) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x} g'(t)dt + g(x_{k-1}), \quad k = \overline{1,n}.$$

Таким образом, построим кубический сплайн на всем отрезке $[a,b]$. Он будет обладать непрерывной второй производной. Условия интерполяции $g(x_k) = f(x_k), k = \overline{0,n}$, дадут

$$g(x) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x} g'(t)dt + f(x_{k-1}), \quad k = \overline{1,n}$$

и еще останется условие

$$g(x_n) = f(x_n).$$

Кроме того, надо потребовать непрерывности сплайна и его первой производной во внутренних точках:

$$g(x_{k-1}-0)=g(x_k+0),\quad k=1,\ldots,n-1,$$

$$g'(x_{k-1}-0)=g'(x_k+0),\quad k=1,\ldots,n-1.$$

Пример 28. *Построить кубический сплайн через метод момент при условии, что*

$$x_0=0,\quad x_1=1/2,\quad x_2=1;$$

$$y_0=0,\quad y_1=1,\quad y_2=-1.$$

Решение.

Полагаем, что

$$g''(x)=M_{k-1}+\frac{M_k-M_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1}),\quad x\in[x_{k-1},x_k],\quad k=\overline{1,2}.$$

Восстановим первую производную

$$g'(x)=\int\limits_{x_{k-1}}^{x} g''(t)dt+g'(x_{k-1})=$$

$$=M_{k-1}(x-x_{k-1})+\frac{M_k-M_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\frac{(x-x_{k-1})^2}{2}+g'(x_{k-1}).$$

Теперь восстановим саму функцию, т.е. сплайн на каждом отрезке $[x_k-1,x_k],\ k=\overline{1,n}$:

$$g(x)=\int\limits_{x_{k-1}}^{x} g'(t)dt+g(x_{k-1})=$$

$$=M_{k-1}\frac{(x-x_{k-1})^2}{2}+\frac{M_k-M_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\frac{(x-x_{k-1})^3}{6}+g'(x_{k-1})(x-x_{k-1})+g(x_{k-1}).$$

Пример 29. *Построить кубический сплайн через метод моментов при условии, что*

$$x_0=0,\quad x_1=1/2,\quad x_2=1;$$

$$y_0=0,\quad y_1=1,\quad y_2=-1.$$

Решение.

Возьмем первый частичный промежуток $[x_0, x_1] = [0, 1/2]$:

$$g(x) = \frac{M_0}{2}x^2 + (M_1 - M_0)\frac{x^3}{3} + g'(0) + g(0).$$

На втором частичном промежутке $[x_1, x_2]$ =[1/2,1]

$$g(x) = \frac{M_1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{M_2 - M_1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right).$$

По определению интерполяционного сплайна третьего порядка на каждом частичном промежутке сплайн должен быть полиномом степени не выше чем третья. Как легко заметить, первое условие по-нашему построению выполнилось. Нам осталось найти следующие неизвестные величины:

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad g'(0), \quad g'(1/2), \quad g(0), \quad g(1/2).$$

Эти неизвестные мы находим из двух оставшихся условий из определения сплайна.

Второе условие — условие интерполяции, т. е.

$$g(x_0) = f(x_0) = y_0,$$

$$g(x_1) = f(x_1) = y_1,$$

$$g(x_2) = f(x_2) = y_2.$$

Условия интерполяции сразу нам дадут значения двух из неизвестных: $g(x_0)$ и $g(x_1)$. А именно,

$$g(0) = y_0 = 0,$$

$$g(1/2) = y_1 = 1.$$

Потребуем выполнение третьего условия. Получим

$$g(x_2) = \frac{M_1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{M_2 - M_1}{3}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^3 + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = y_2.$$

Следовательно,

$$\frac{M_1}{8} + \frac{M_2 - M_1}{24} + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 0. \tag{5.2}$$

С условиями интерполяции завершили.

Переходим к условиям непрерывности. Ясно, что сплайн третьего порядка может иметь разрывы только во внутренних точках. Внутренней точкой в нашем примере является только $x_1 = 1/2$.

Непрерывность сплайна во внутренних точках означает, что

$$g(x_1 - 0) = g(x_1 + 0).$$

Следовательно,

$$\frac{M_0}{8} + \frac{M_1 - M_0}{24} + \frac{1}{2}g'(0) = 1. \tag{5.3}$$

Аналогично, непрерывность первой производной:

$$g'(x_1 - 0) = g'(x_1 + 0).$$

Получим

$$\frac{M_0}{2} + \frac{M_1 - M_0}{4} + g'(0) = g'\left(\frac{1}{2}\right). \tag{5.4}$$

Отметим, что условие непрерывности второй производной выполнено автоматически за счет построения метода моментов.

Таким образом, получили три уравнения (5.2), (5.3) и (5.4) для нахождения оставшихся пяти неизвестных.

Добавим еще два условия естественного сплайна, т. е.

$$g''(x_0) = g''(x_2) = 0.$$

Из двух этих условий получим, что $M_0 = M_2 = 0$.

Таким образом, получили следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} g'(0) = 2 - \frac{M_1}{12}, \\ g'\left(\frac{1}{2}\right) = -4 - \frac{M_1}{6}, \\ \frac{M_1}{4} + g'(0) = g'\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Отсюда получим, что $M_1 = -18, g'(0) = 7/2$ и $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

Все неизвестные найдены. Осталось записать сплайн третьего порядка:

$$g(x) = \begin{cases} -6x^3 + \frac{7}{2}x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -9\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - x + \frac{3}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

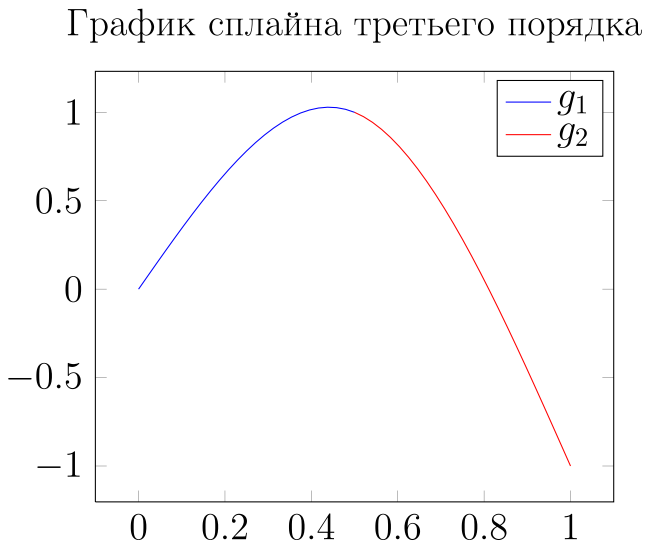

Рис. 18: График сплайна третьего порядка.

Задание для самостоятельного решения.

Решить задачу из предыдущего примера со следующими краевыми условиями

$$g'(0) = 1, \quad g'(1) = 2.$$