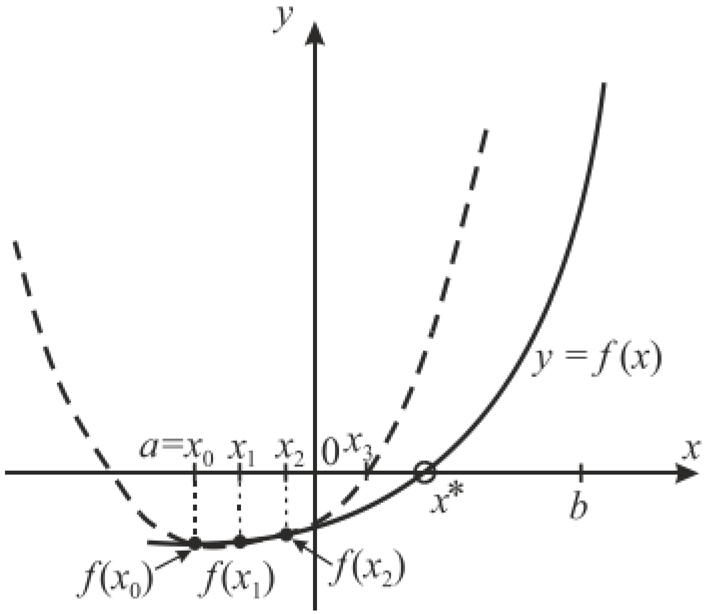
4.2.5. Метод Мюллера (D. E. Muller)

Метод Мюллера (или парабол) состоит в приближенной замене заданной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом второй степени (параболой, на рис. 41 и 42 она нанесена пунктирной линией), построенным по значениям функции в трех точках x_0, x_1, x_2 и последующим нахождением координаты точки пересечения этой параболы с осью абсцисс, т.е. решения квадратного уравнения. Иными словами, в методе Мюллера используется не линейная аппроксимация, как в методах Ньютона и секущих, а квадратичная.

Как следует из определения метода Мюллера для начала итерационного процесса необходимо задать три начальных приближения: нулевое x_0, первое x_1 и второе x_2. На практике поступают следующим образом: за нулевое приближение выбирают одну из границ интервала локализации (левую рис. 41а или правую рис. 41б), а в качестве первого и второго приближения выбирают величины $x_1 = x_0 \pm \varepsilon$ и $x_2 = x_0 \pm 2\varepsilon$, где ε – заданная погрешность.

а)



б)

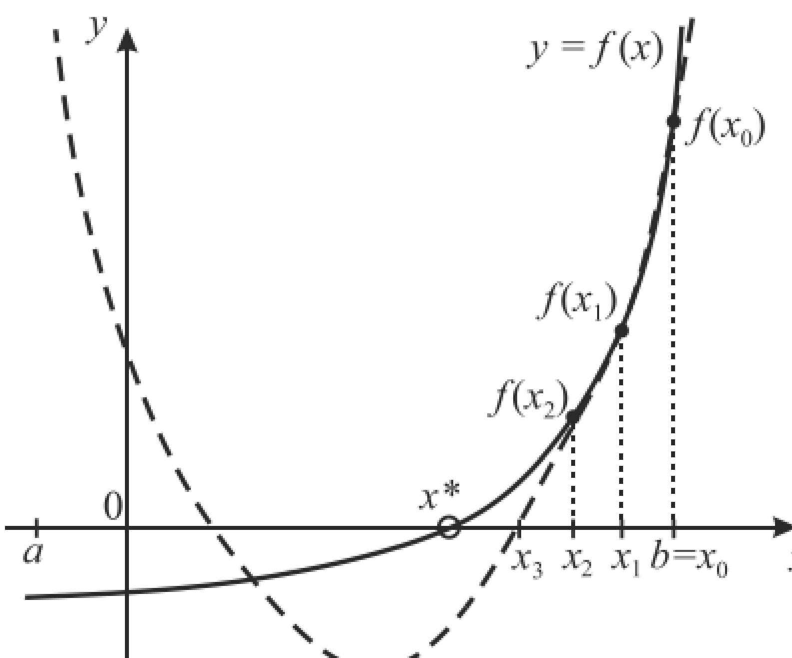


Рис. 41 – В качестве начальных данных для первого приближения по методу Мюллера выбрана: *а*) левая или *б*) – правая, граница локализованного интервала

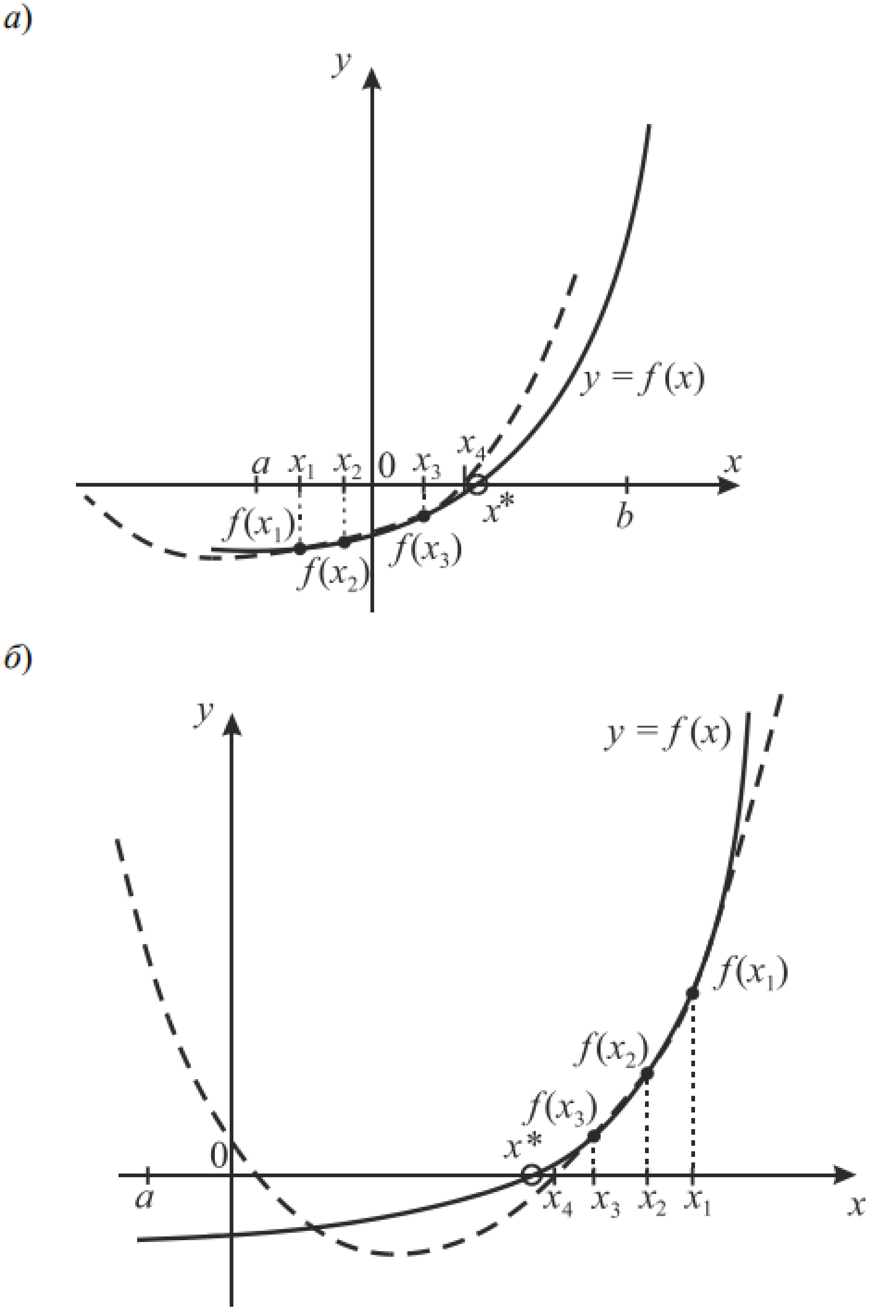


Рис. 42 – Второе приближение метода Мюллера (для левой – *а*), правой – *б*) границы)

Эти значения используются для нахождения последующего (третьего) приближения x_3. Затем, значения x_1, x_2 и x_3 используют для определения четвертого приближения x_4 (см. рис. 42) и т.д.

Чтобы получить выражение для определения нового приближения x_{k+1} по трем известным точкам x_{k-2}, x_{k-1} и x_k применяется интерполяционный полином Лагранжа второго порядка

$$L_2\left(f\left(x\right)\right) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 .$$

Для нахождения коэффициентов b_0, b_1 и b_2 используется условие прохождения данного интерполяционного полинома через три точки $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$. Таким образом, составляется система из трех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_0 x_{k-2}^2 + b_1 x_{k-2} + b_2 = f\left(x_{k-2}\right), \\ b_0 x_{k-1}^2 + b_1 x_{k-1} + b_2 = f\left(x_{k-1}\right), \\ b_0 x_k^2 + b_1 x_k + b_2 = f\left(x_k\right). \end{cases}$$

В результате решения полученного СЛАУ определяются искомые коэффициенты b_0, b_1 и b_2. Полученный полином Лагранжа позволяет определить координату x_{k+1} в которой функция $L_2(f(x))$ обращается в ноль. Для этого решается квадратное уравнение стандартным образом.

В итоге получается расчетная формула для метода Мюллера в следующем виде:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2C\left(x_k - x_{k-1}\right)}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}},$$

здесь $$A = qf\left(x_k\right) - q\left(1+q\right) f\left(x_{k-1}\right) + q^2 f\left(x_{k-2}\right),$$

$$B = (2q+1) f\left(x_k\right) - \left(1+q\right)^2 f\left(x_{k-1}\right) + q^2 f\left(x_{k-2}\right),$$

$$C = \left(1+q\right) f\left(x_k\right),$$

$$q = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}.$$

Знак в знаменателе перед корнем всегда выбирается так, чтобы абсолютное значение знаменателя было максимальным. Правильный выбор знака перед квадратным корнем позволяет получить одно из двух решений x_{k+1}, которое находится ближе к x_k. На практике поступают следующим образом, анализируется знак коэффициента B, если $B > 0$, то знак перед корнем выбирается положительным, иначе $B < 0$ – отрицательным, т.е. используется функция $\mathrm{sign}(B)$ определяющая знак числа B.

Метод Мюллера обладает сверхлинейной сходимостью с порядком сходимости 1,84.

Пример. Уточнить решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

применив метод Мюллера на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Чтобы запустить итерационный процесс по методу Мюллера необходимо задать три начальных точки. В качестве первой x_0 выбирается правая граница интервала, точка $b = 1,5$, а вторая и третья вычисляется с помощью выражения

$x_1 = x_0 - \varepsilon = 1,5 - 0,001 = 1,499$ и $x_2 = x_0 - 2\varepsilon = 1,5 - 0,002 = 1,498$.

В каждой точке вычисляется значение функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425,$$

$$f(1,499) = 1,499^3 - \frac{1,499^2 + 1,499}{5} - 1,2 = 1,41905,$$

$$f(1,498) = 1,498^3 - \frac{1,498^2 + 1,498}{5} - 1,2 = 1,41312.$$

Заданные точки и определенные в них значения функций применяются для определения вспомогательных переменных

$$q = \frac{1,498 - 1,499}{1,499 - 1,5} = 1,$$

$$A = 1 \cdot 1,41312 - 1 \cdot (1+1) \cdot 1,41905 + 1^2 \cdot 1,425 = 8,594\text{e-}06,$$

$$B=(2\cdot 1+1)\cdot 1{,}41312-(1+1)^2\cdot 1{,}41905+1^2\cdot 1{,}425=-0{,}01187,$$

$$C=(1+1)\cdot 1{,}41312=2{,}82623.$$

Определенные значения используются для вычисления координаты новой точки x_3, определяющей место пересечения параболы с осью абсцисс

$$x_3=1{,}498-\frac{2\cdot 2{,}82623\cdot(1{,}498-1{,}499)}{-0{,}01187-\sqrt{(-0{,}01187)^2-4\cdot 8{,}594\text{e-}06\cdot 2{,}82623}}=$$

$$=1{,}19199.$$

Вычисленное значение x_3 сравнивается с x_2 и проверяется на достижение заданной точности

$$|x_2-x_1|\le\varepsilon \text{ или } |1{,}19199-1{,}498|=0{,}30601<0{,}001.$$

Требуемая точность после первой итерации не достигнута, следовательно, процедура уточнения корня должна быть продолжена.

На второй итерации проводится вычисление значения функции только во вновь найденной точке x_3

$$f(1{,}19199)=1{,}19199^3-\frac{1{,}19199^2+1{,}19199}{5}-1{,}2=-0{,}02894$$

и пересчет вспомогательных переменных

$$q=\frac{1{,}19199-1{,}498}{1{,}498-1{,}499}=306{,}00945,$$

$$A=306{,}00945\cdot(-0{,}02894)-306{,}00945\cdot(1+306{,}00945)\cdot 1{,}41312+$$
$$+306{,}00945^2\cdot 1{,}41905=114{,}67914,$$

$$B=(2\cdot 306{,}00945+1)\cdot(-0{,}02894)-(1+306{,}00945)^2\cdot 1{,}41312+$$
$$+306{,}00945^2\cdot 1{,}41905=-328{,}04507,$$

$$C=(1+306{,}00945)\cdot(-0{,}02894)=-8{,}88387.$$

Полученные значение подставляются в выражение для определения координаты следующей точки x_4 пересечения параболы с осью абсцисс

$$x_4 = 1{,}19199 - \frac{2 \cdot (-8{,}88387) \cdot (1{,}19199 - 1{,}498)}{-328{,}04507 - \sqrt{(-328{,}04507)^2 - 4 \cdot 114{,}67914 \cdot (-8{,}88387)}} =$$
$$= 1{,}20020.$$

Вновь найденная координата x_4 сравнивается с координатой, вычисленной на предыдущем шаге x_3, для оценки точности вычислений

$$|1{,}20020 - 1{,}19199| = 0{,}00821 < 0{,}001.$$

Видно, что погрешность уменьшилась почти в сорок раз, но требуемой точности достигнуть не получилось, значит, итерационный процесс следует продолжить. Процесс решения методом Мюллера сведен в табл. 15.

Анализируя данные в табл. 15 видно, что после третьей итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1{,}20000 - 1{,}20020| = 0{,}00020 < 0{,}001.$$

Таблица 15 – Уточнение решения нелинейного уравнения методом Мюллера.

k	x_{k-2}	$f(x_{k-2})$	x_{k-1}	$f(x_{k-1})$
0	1,5	1,425	1,499	1,41905
1	1,499	1,41905	1,498	1,41312
2	1,498	1,41312	1,19199	-0,02894

k	x_k	$f(x_k)$	q	A
0	1,498	1,41312	1	8,594e-06
1	1,19199	-0,02894	306,00945	114,67914
2	1,20020	0,00073	-0,02683	0,00024

k	B	C	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	-0,01187	2,82623	1,19199	-0,02894
1	-328,04507	-8,88387	1,20020	0,00073
2	0,02911	0,00071	1,20000	4,786e-07

Кроме того, вычисленное значение функции в найденной точке, также существенно меньше заданной точности.

Ответ. Найдено численное решение методом Мюллера заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ после третьей итерации и равно $x = 1{,}20000$.

Рассмотрим общий случай, когда к виду исходной функции $f(x)$ не предъявляются дополнительные требования (условие монотонности), а в качестве трех начальных точек выбраны границы отрезка локализации корня ($a = x_2$ и $b = x_0$) и его середина (x_1) согласно рис. 43.

В этом случае в методе Мюллера необходимо дополнительно проводить контроль смены знака функции на интервалах, по аналогии с интервальными методами. Блок контроля смены знака функции определяет значение функции $f(x)$ во вновь найденной координате x_3 пересечения параболы с осью абсцисс и анализирует знаки функции в трех точках x_0, x_2 и x_3.

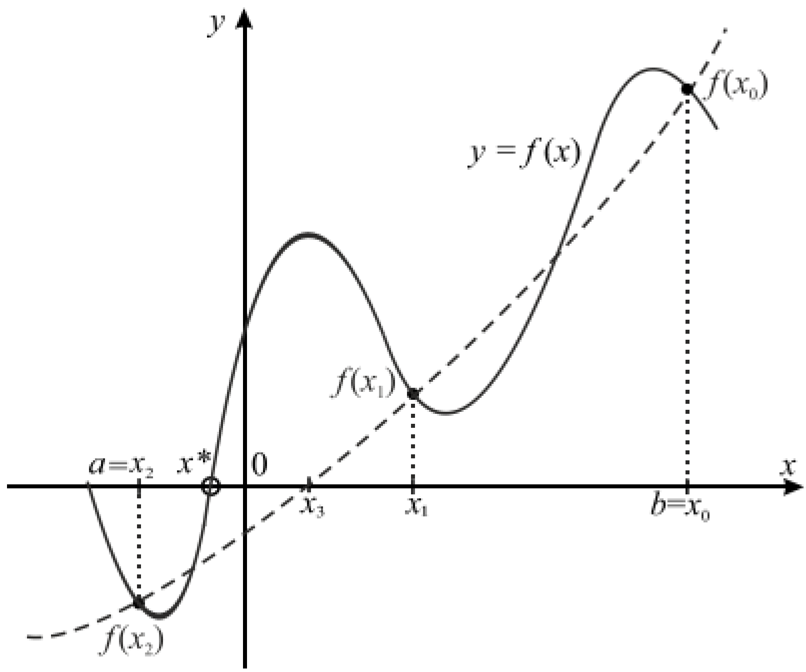


Рис. 43 – Начальные данные и первое приближение по методу Мюллера для функции произвольного вида

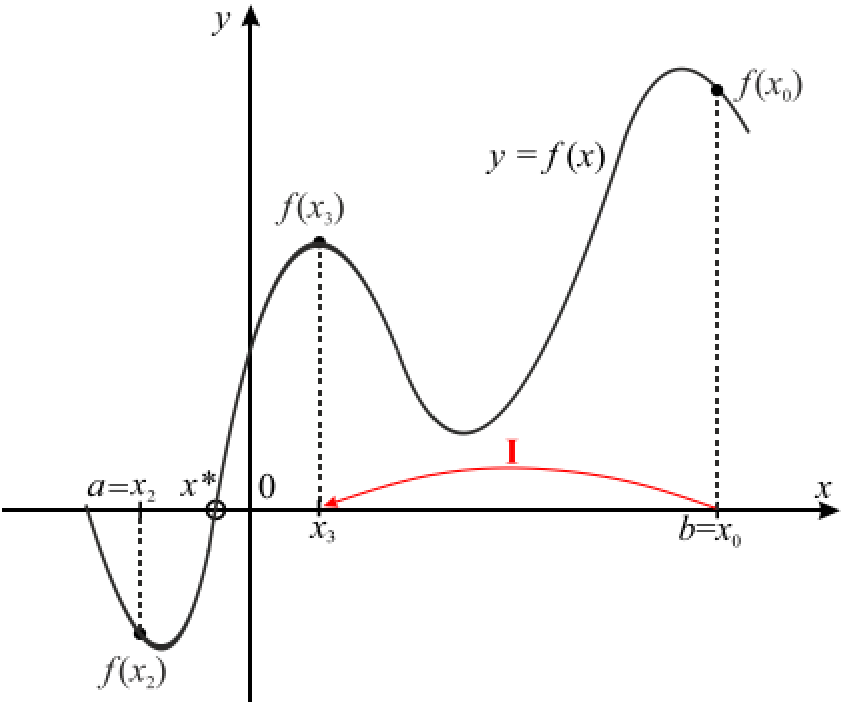


Рис. 44 – Анализ знаков функции и выбор нового интервала для метода Мюллера

В результате анализа остается только один интервал, на котором функция меняет знак, т.е. точка b перемещается в точку x_3. Работа блока представлен на рис. 44.

После завершения первого приближения переходят к повторному определению координаты x_4 – середины нового интервала ($a = x_2$ и $b = x_3$). Через значения функции в узлах $f(x_2)$, $f(x_3)$ и $f(x_4)$ строится новая парабола (на рис. 45 она нанесена штриховой линией) и определяется координата её пересечения с осью абсцисс x_5. Блок анализа смены знака функции позволяет выбрать новый интервал путем переноса левой границы a во вновь найденную точку x_5.

Если проверку смены знака функции не проводить, то может реализоваться случай, когда действительных корней квадратного уравнения не будут, т.е. ветки параболы не пересекаются с осью абсцисс (рис. 46).

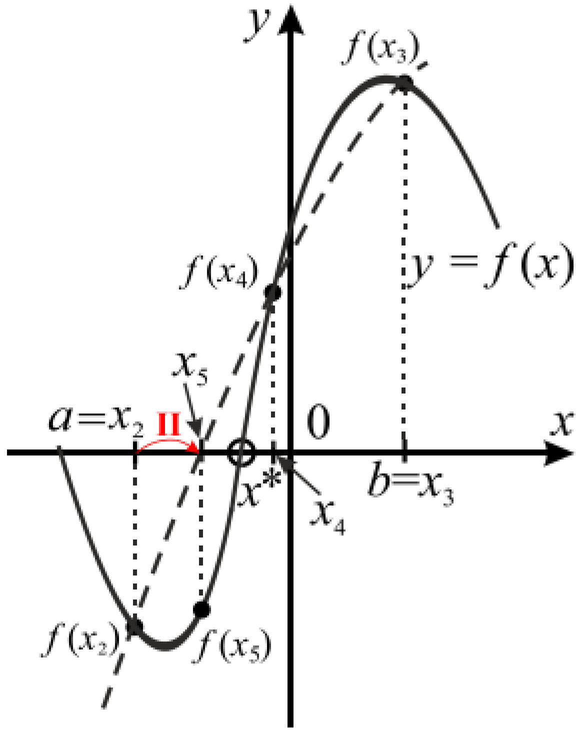


Рис. 45 – Второе приближение метода Мюллера

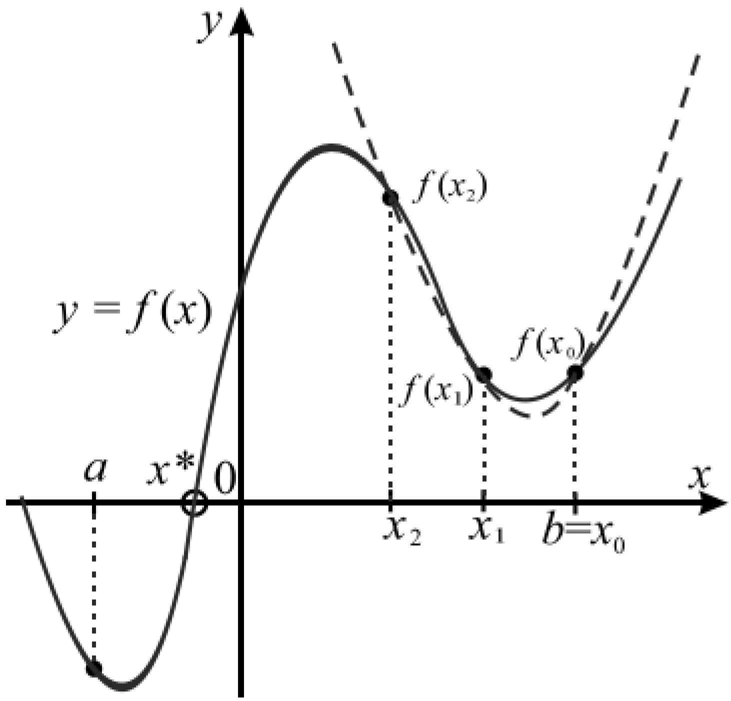


Рис. 46 – Если блока анализа функции в методе Мюллера нет, то это может привести к отсутствию действительных корней