4.1.1. Метод половинного деления

Метод половинного деления (дихотомии, бисекции, вилки). Задана функция $y = f(x)$ определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, её график представлен на рис. 9. После решения задачи локализации нам известно, что на рассматриваемом интервале $[a, b]$ расположен один корень x^*, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, который требуется уточнить до заданной точности ε.

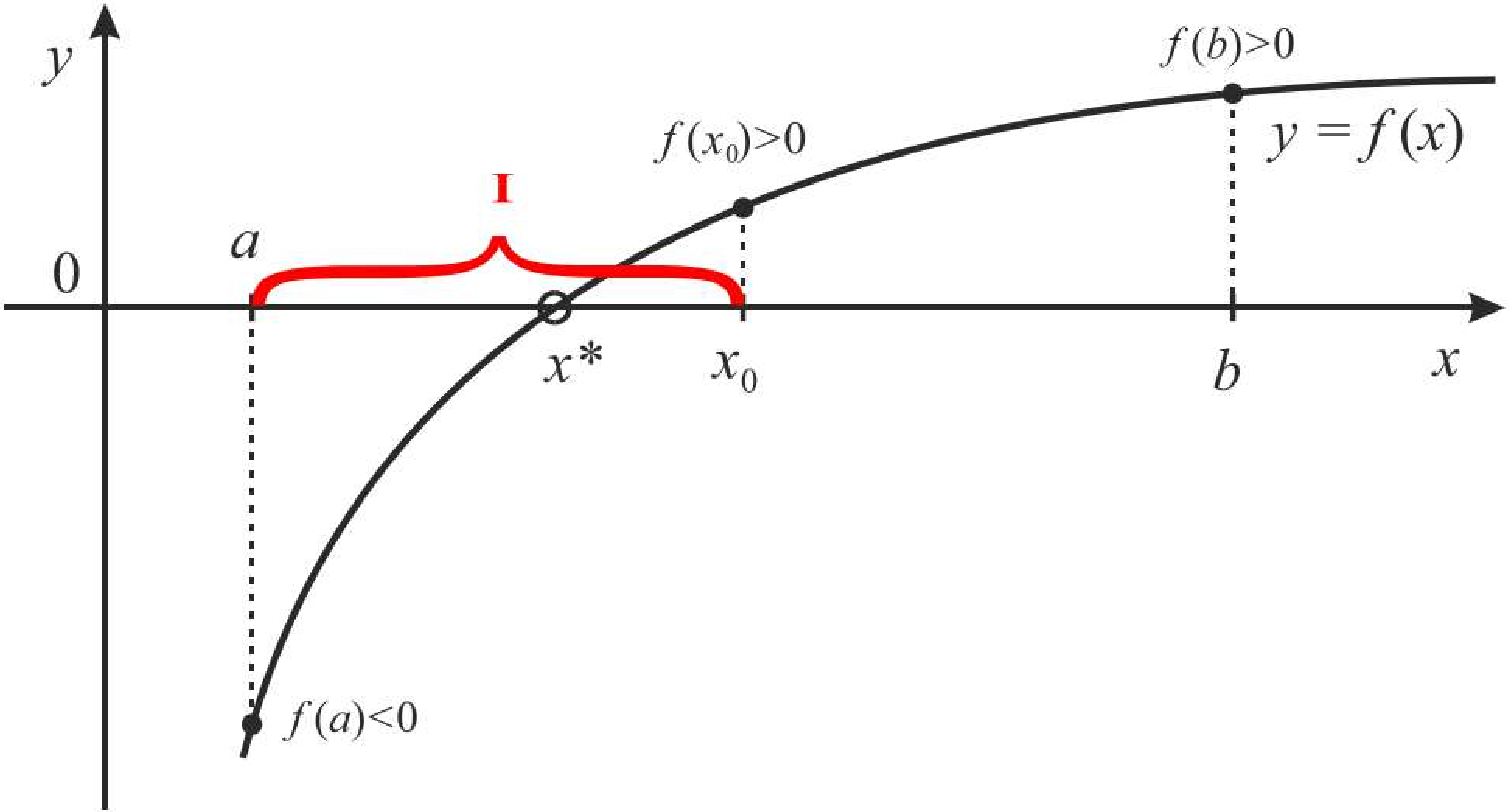

Рис. 10 – Первое приближение метода дихотомии

В качестве начального приближения корня принимается середина заданного интервала:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Как видно из рис. 10 начальное приближение разбивает заданный интервал $[a, b]$ на два равных интервала $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$. Далее проводится вычисление значения функции $f(x)$ в точке x_0. Найденное значение $f(x_0)$ и известные значения функции на концах заданного интервала $[a, b]$ – $f(a)$ и $f(b)$ порождают следующие взаимоисключающие ситуации:

а) если $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, то корень находится на интервале $[a, x_0]$;

б) если $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, то корень находится на интервале $[x_0, b]$;

в) если $f(x_0)=0$, то точка x_0 является корнем нелинейного уравнения.

Следовательно, вычисленное значение функции в точке x_0 позволяет уменьшить промежуток существования корня $[a, b]$ (случай а) и б)) или определить его значение (случай в)). Ситуация в) зачастую реализуется в случае приближенного $\left|f(x_0)\right|<\delta\approx 0$ вычисления функции.

Отрезок, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$. Вторая половина отрезка $[a, b]$, на которой $f(x)$ не меняет знак, из дальнейших расчетов исключается.

В качестве следующего приближения корня принимается середина нового отрезка

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

как показано на рис. 11 и рассмотрение повторяется по аналогии с предыдущим.

Таким образом, k-ое приближение вычисляется

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

После каждой итерации промежуток существования корня уменьшается ровно в два раза, а после k итераций в 2^k раз:

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

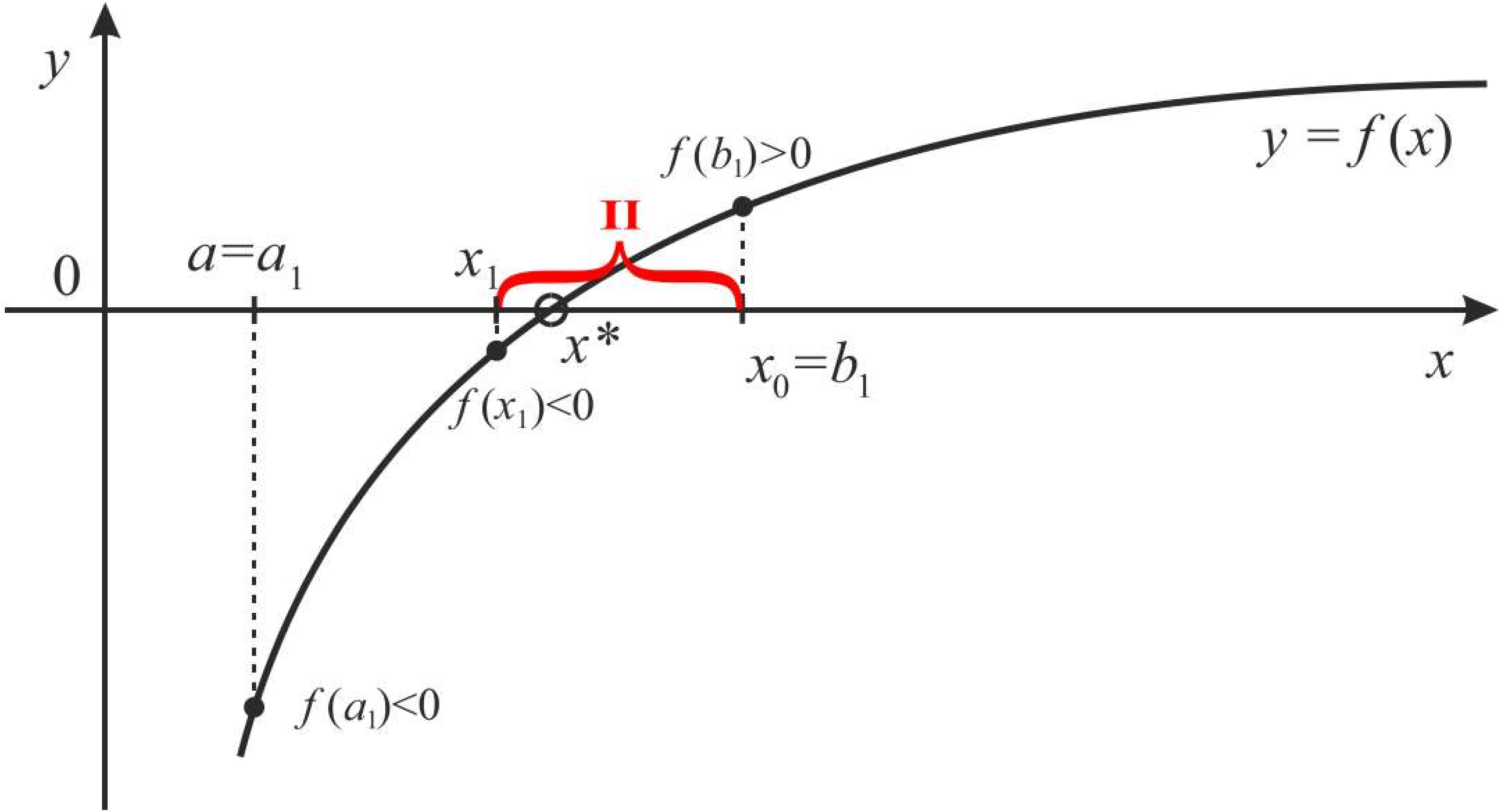

Рис. 11 – Второе приближение метода дихотомии

Завершение итерационного процесса осуществляется после достижения заданной точности, т.е. при выполнении условия

$$|b_k - a_k| \le 2\varepsilon \text{ или } |x_k - x^*| \le \varepsilon .$$

Объединяя вместе две последние формулы, получаем выражение для априорной оценки абсолютной погрешности, дающее возможность определить количество шагов (итераций) метода половинного деления необходимых для определения корня с заданной точностью ε, для этого нужно вычислить наименьшее натуральное число k, удовлетворяющее условию

$$\frac{b-a}{2^k} < 2\varepsilon .$$

Метод половинного деления сходится всегда, т.е. обладает безусловной сходимостью. Он чрезвычайно прост, т.к. требует лишь вычисления значений функции $f(x)$ и, поэтому применим для решения любых уравнений.

Метод дихотомии может быть легко реализован по следующему алгоритму:

1. Задать начальные данные:
   a) концы интервала a и b,
   b) функцию $y = f(x)$,
   c) точность ε и δ.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Вычислить $x = \dfrac{a+b}{2}$.
4. Если $|b-a| \le 2\varepsilon$, то x – искомый корень.
5. Вычислить $f(x)$.
6. Если $|f(x)| < \delta$, то x – искомый корень и остановка.
7. Если $f(a) \cdot f(x) < 0$, то $b = x$ и перейти к п.3;

иначе $a = x$, $f(a) = f(x)$ и перейти к п.3.

Недостатком метода половинного деления является достаточно медленная сходимость.

С каждым шагом погрешность приближенного значения уменьшается в два раза, т.е.

$$\left|x - x_{k+1}\right| < \frac{1}{2}\left|x - x_k\right|,$$

поэтому данный метод является методом с линейной сходимостью.

Количество итераций N требуемых для достижения заданной точности ε определяется выражением

$$k > \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon},\ N = \mathrm{int}\left(\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}\right) + 1$$

где $\mathrm{int}(x)$ – целая часть числа x.

Например, при $b - a = 1$ и $\varepsilon = 10^{-6}$ получим $N = 19$.