5.2 Конечно- разностные аппроксимации производных

Пусть отрезок [a,b] разбит на n (n>2) равных частей точками $\{x_i\}: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$. Разность между соседними значениями аргумента постоянна, т.е. шаг $n = x_i - x_{i-1} \left(i = 1, 2, \ldots, n \right)$. Далее, пусть на отрезке [*a*,*b*] определена функция *y=f(x),* значения которой в точках равны $y_i = f(x_i) \left(i = 0, 1, 2, \ldots, n \right)$.

Запишем выражения для первой производной функции в точке с помощью конечных разностей:

а) аппроксимация с помощью разностей вперед (правых разностей)

$$y'(x_1) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1); \quad (4)$$

б) аппроксимация с помощью разностей назад (левых разностей)

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad \Delta x_i = x_{i-1} - x_i = -h, \quad \Delta y_i = y_{i-1} - y_i$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad (5)$$

Аппроксимация производной с помощью центральных разностей представляет собой среднее арифметическое соотношений (4) и (5)] точках $\{x_i\}$ $(i=1,...,n-1)$.

Отметим, что соотношения (4) и (6) не позволяют вычислить производную в точке $x_n=b$, а (5) и (6) - в точке $x_0=a$.

Можно показать, что для функции *y=f(x),* имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно, погрешность аппроксимации производных разностями вперед и назад имеет один и тот же порядок *0(h),* а погрешность аппроксимации центральными разностями (6) для функции *y=f(x),* имеющей непрерывную производную до третьего порядка включительно, имеет порядок $0(h^2)$.

Приближенное значение производной второго порядка в точке выразим через значения функции y_{i-1}, y_i, y_{i+1} . Для этого представим вторую производную с помощью правой разности:

$$y''(x_i) \approx \frac{\Delta y_i'}{\Delta x_i}, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h, \quad \Delta y_i' = y_{i+1}' - y_i',$$

а производные первого порядка y_{i+1}' и y_i' - с помощью левых разностей:

$$y_{i+1}' = y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{i+1}' = y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

и окончательно получим

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad (i=1,2,...,n-1). \quad (7)$$

Погрешность последней аппроксимации имеет порядок для функции *y=f(x)*, имеющей непрерывную производную до четвертого порядка включительно на отрезке[*a,b*]. Естественно, что представление (7) с помощью конечных разностей позволяет вычислять значения второй производной только во внутренних точках отрезка.

Например, для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$y' = -2y$

можно использовать метод прямых разностей, чтобы аппроксимировать решение на сетке с шагом h:

$y_{i+1} \approx y_i + h*(-2y_i)$

$= (1-2h)*y_i$

Для определения значений функции на каждой точке сетки, необходимо задать начальное условие y0, а затем применять формулу для каждой последующей точки сетки.