4.1.4. Метод Риддерса (C. J. F. Ridders)

Рассмотренный ранее метода хорд основан на замене исходной заданной функции $f(x)$ прямой проходящей через две точки на функции $f(a)$ и $f(b)$. Идея метода Риддерса заключается в замене непрерывной исходно заданной функции $f(x)$ на отрезке [a, b] экспоненциальной функцией. Таким образом, нахождение решения будет заключаться в определении координаты точки $x = x_0$, полученной путем пересечения оси абсцисс Ox с экспоненциальной функцией, проходящей через три точки $\boldsymbol{A}(a; f(a))$, $\boldsymbol{C}(c; f(c))$ и $\boldsymbol{B}(b; f(b))$. Для построения экспоненциальной функции необходимо ввести третью дополнительную точку c, в качестве третьей точки в методе Риддерса выбирается середина локализованного интервала [a, b] вычисляемая по формуле:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

На концах локализованного интервала и найденной средней точки определяются значения функции, т.е. $f(a)$, $f(b)$ и $f(c)$. Через определенные значения функции (точки ***A***, ***C*** и ***B***) строится экспоненциальная зависимость, на рис. 22 она нанесена пунктирной линией.

Координата точки пересечения (x_0) экспоненты с осью абсцисс определяется по формуле:

$$x_0 = c + (c - a) \cdot \frac{\operatorname{sign}\left[f(a) - f(b) \right] \cdot f(c)}{\sqrt{f(c)^2 - f(a) \cdot f(b)}},$$

где функция $\operatorname{sign}(x)$ определяет знак числа x с помощью следующего выражения

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Полученное значение x_0 разбивает интервал локализации $[a, b]$ на два под интервала $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, для каждого под интервала проводится проверка на смену знака функции. В качестве нового интервала для продолжения процесса уточнения выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для случая рассмотренного ранее выбирается отрезок $[x_0, b]$, так как $f(x_0) \cdot f(b) < 0$ см. рис. 23.

Процесс нахождения следующего приближения к корню представлен на рис. 24. Он заключается в определении середины нового интервала, координаты точки c_1. Последующего определения значений функции в точках a_1, c_1 и b_1. Через найденные точки $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$ проводится новая экспоненциальная функция и определяется новое приближение x_1, как точка пересечения экспоненты с осью абсцисс и т.д.

Основным достоинством метода Риддерса является, тот факт, что он обладает сверхлинейной сходимостью. Порядок сходимости метода Риддерса $\alpha = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$, что позволяет за каждые две итерации удвоить количество значащих цифр в получаемом результате расчета. Также метод Риддерса не накладывает, каких либо ограничений на вид заданной функции $f(x)$, при этом метод обладает всеми преимуществами рассмотренных ранее методов, т.е. безусловной сходимостью.