2.3.2 Метод Якоби.

Представим матрицу A в виде

$$A = L + D + U,$$

где L и U — нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали, D — диагональная матрица.

Построим итерационный метод Якоби:

$$D\overrightarrow{u}^{(k+1)} + (L+U)\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f},$$

откуда

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{G}\overrightarrow{u^{(k+1)}} + \underbrace{D^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

Ответ на вопрос сходимости метода Якоби к точному решению дают следующие теоремы

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Якоби): *метод Якоби сходится к $\overrightarrow{u}^*$, если выполнено условие* ***диагонального преобладания:***

$$|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk|}$$

Теорема 2 (критерий сходимости метода Якоби): *для сходимости метода Якоби к* $\overrightarrow{u}^*$ *необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы.