Замечания: 1) С ростом степени производн. необходимо увеличив. кол-во точек (кол-во узлов на 1 больше чем степень производной)

2) Для повыш порядка точности необходимо увелич ~~уз~~ числа узлов сверх минимального

3) Степень h в знаменателе соответствует степени производной

$f''' - ?$

Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

ОДУ позволяют описать следующие процессы: 1) Движение системы взаимодейст мат. точек

2) Химич. кинетики

3) Электр цепей

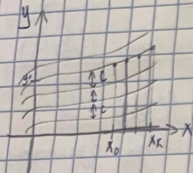
4) Сопротивл материалов (статистика прогиб упругого стержня)

Численные методы решения задачи Коши

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка в общ виде:

[1] $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Из математике известно, что общ решение содержит произвол. const C, однопараметричем семейством интеграл кривых

[2] $y(x) = \int f(x;y)dx + C$



Для выбора конкретн интегр ~~для~~ кривой следует: определить знач. const C,

для этого достаточно задать при каком-либо знач $x=x_0$, знач $y=y_0$.

Задача Коши (Единственная задача) позволяет получить единств решение ~~для~~ уравнения [1]. Формулируется:

Найти решен уравн [1] с нач. усл. $y = y_0$ $x=x_0$, при нахождении приближ решен в уравн 1 вычисление проводится с расчётным шагом $h = \frac{x_k - x_0}{n}$.

Решения задачи 1 для уравн [1] на интервале $[x_i; x_{i+1}]$ может быть записано аналогично виду [2]

[3] $y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x;y)dx$

Для приближ решен уравн [3] заменим в нём интеграл какой-либо квадратурн. формулой числ интегр

ЛП = $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x;y)dx = h f(x_i, y_i)$

$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i; y_i)$ – явный метод Эйлера

Методы Эйлера

ПП = $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = hf(x_{i+1}; y_{i+1})$ –

$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}; y_{i+1})$ – неявный метод Эйлера

Трап $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = \frac{h}{2}[f(x_i;y_i) + f(x_{i+1};y_{i+1})]$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i;y_i) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})]$ – неявный метод 2-го порядка точности

Если из явной формулы Эйлера определить $\tilde{y}_{i+1}$, а y_{i+1} вычисляется по формуле неявного метода 2-го порядка, то полученная пара формул называется формулой Эйлера с пересчётом и имеет 2-ой порядок точности. $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

[illegible]

С.П. $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx = h f\left(x_i + \frac{h}{2}; y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right)$

$$\begin{cases} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2} \\ y_{i+\frac{1}{2}} = y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \end{cases}$$

Полученные формулы являются методом Предиктор-корректор

Методы Рунге-Кутты

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{n=1}^{q} C_n K_n^i(h)$$

$K_1^i(h) = f(x_i; y_i)$

$K_2^i(h) = f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} K_1^i h)$

$K_3^i(h) = f(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{32} K$

$K_q^i(h) = f(x_i + \alpha_q h, y_i + \beta_{q\,q-1} K_1^i h + \beta$

α_n C_n, β_{in} — параметры метода, которые выбираются из усл, чтобы метод имел максим. высокий порядок точности.

$K_n^i(h)$ представляет собой правую часть уравн при различных знач аргументов их вычисл занимает основн время, а называют этапом метода

Простейшим 1-но этапным методом $q=1$ является метод Эйлера.

Наиболее распростран являются методы Рунге-Кутты 2, 3, 4 порядка.

При $q = 2$ получаем однопараметр семейство двух этапных методов Рунге-Кутта 2-го порядка точности

$q=2$ $K_1^i = f(x_i; y_i)$

$K_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2a}; y_i + \frac{h}{2a} K_1^i\right)$

$y_{i+1} = y_i + h\left[(1-a)K_1^i + a K_2^i\right]$

$a = \frac{1}{2}$ $a = 1$

3-ех этапный метод Рунге-Кутта

$q=3$

I) $k_1^i = f(x_i; y_i)$

$k_2^i = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}k_1^i)$ $k_3^i = f(x_i + h; y_i - hk_1^i + 2hk_2^i)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1^i + 4k_2^i + k_3^i]$

II) $k_1^i = f(x_i; y_i)$ $k_2^i = f(x_i + \frac{h}{3}; y_i + \frac{h}{3}k_1^i)$

$k_3^i = f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hk_2^i)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(k_1^i + 3k_3^i)$

$q=4$

I) $k_1^i = f(x_i; y_i)$

$k_2^i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1^i)$ $k_3^i = f(x_i + \frac{h}{2} y_i + \frac{h}{2}k_2^i)$

$k_4^i = f(x_i + h\, y_i + hk_3^i)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i]$

II) $k_1 = f(x_i; y_i)$ $k_2 = f(x_i + \frac{h}{4}; y_i + \frac{h}{4}k_1)$

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}hk_2)$ $k_4 = f(x_i + h; y_i + hk_1 -$
$- 2hk_2 + 2hk_3)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)$

Численное решение Задачи Коши для систем ОДУ

Система ОДУ (общий вид):

$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1, y_2, \dots y_n)$

$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y})$

Задача Коши формулируется след образом: Найти решение систему ОДУ с начал. усл. $y_i(x_0) = y_i^0$

К решения задачи Коши сводится также задачи Коши для ОДУ высших порядков

$$\frac{d^{(n)}y}{dx} = f(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = \varphi_0 \quad y^{(1)}(x_0) = \varphi_1 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = \varphi_{n-1}$$

Путём замены переменных

$$z_k(x) = y^{(k)}(x)$$

① Для решения систем ОДУ полностью применимы все рассмотренные ранее методы, путём обобщения на случай векторных величин

Пример

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$x \in [a, b] \quad \underset{\text{нач усл}}{} \begin{cases} y(a) = y^0 \\ y'(a) = z^0 \end{cases}$$

С помощью замены переменных

$$z(x) = y'(x) \quad z'(x) = y''(x)$$

Уравн. сводится к системе 2-ух ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases} \quad \begin{cases} y(a) = y^0 \\ z(a) = z^0 \end{cases}$$

Пример метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i; y_i, z_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + h g(x_i; y_i; z_i)$$

Методом Эйлера решить задачу Коши ОДУ 2-го порядка

$$y'' + 3xy' - 2y = 1{,}5 \quad x \in [0{,}5; 1]$$

$$y(0{,}5) = 1$$

$$y'(0{,}5) = 0{,}5 \quad h = 0{,}1$$

Решение жёстких ОДУ

Рассмотрем ранее примеры содержали ОДУ которые надёжно решались явными медтодома, но имеется класс методов, представ. собой жёсткие (системы) ОДУ для которых явных методы практически неприменимы, так как требуется исключительно малое значение шага.

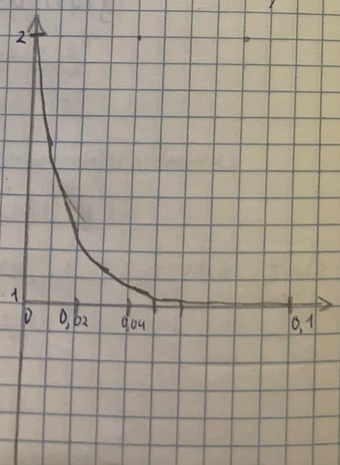
Пример. Задача Коши

$y' = -100y + 100 \quad y(0) = 2$

Данное уравн. имеет точное решение

$y = 1 + e^{-100x}$

x	y
0	2
0,01	1,367879
0,02	1,135335
0,03	1,049787
0,04	1,018316
0,05	1,00673
0,06	1,002479
0,07	1,000912
0,08	1,000335
0,09	1,000123
0,1	1,000045



Получим числен. реш. методом Эйлера $h = 0{,}02$

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i) = (1 - 100h)y_i + 100h = 2 - y_i$

$y_0 = 2 \qquad h = 0{,}01 \quad y_{i+1} = 1$

$y_1 = 0$

$y_2 = 2 \quad y_3 = 0$

~~h=0,001~~ Только с $h = 0{,}001$ реш. приближ. к точн.

$y_{i+1} = 0{,}9 y_i + 0{,}1$

Воспользуемся неявным методом Эйлера

$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}; y_{i+1})$

$y_{i+1} = \frac{100h + y_i}{1 + 100h} \qquad h = 0{,}1$

$y_0 = 2$

$y_1 = 1{,}091$

$y_2 = 1{,}008$

$y_3 = 1{,}0007$

Даже при очень крупном шаге решение качественно правильное

Данный пример показывае что получить ~~знач~~ реш рациональнее с помощью неявного метода Эйлера.

В приведён уравн коэф. различаются на 2 порядка, причём коэф. при старш. производной самый маленький

Рассмотр. уравн в общем виде

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y$$

$\alpha < 0$ $\quad x \geq 0$

$|\alpha| \gg 1$ $\quad y(0) = y_0$

$y = y_0 e^{\alpha x}$ – точн реш.

Поскольку при $\alpha < 0$ точн реш явл. убывающим. Для числ реш должна выполняться цепочка неравенств

$$\|y_{i+1}\| \leq \|y_i\| \leq \|y_{i-1}\| \leq \ldots \leq \|y_0\|$$

известная с теорией как принцип максимума

Методы решения которых удовлетворяют этим условиям называются <u>α устойчивыми</u> методами

Запишем для уравн явный метод Эйлера и двухэтапный метод Рунге-Кутта

$$y_{i+1} = y_i + h\alpha y_i = (1+\alpha h) y_i = r_1 y_i \quad h \leq \frac{1}{|\alpha|}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\alpha(y_i + \alpha y_i h/2) = (1 + \alpha h + \alpha^2 \frac{h^2}{2}) y_i = r_2 y_i \quad \frac{2}{|\alpha|}$$

Используя данные формулы можно выразить послед. каждого y_{i+1} через y_i через коэф r. Для выполн принципа максим.

$|y_{i+1}| \leq r_1 |y_i|$, $r \in [0, 1]$

В результате получаем огранич на шаг интегр $\Rightarrow h \leq \frac{1}{|\alpha|}$, $h \leq \frac{2}{|\alpha|}$

Рассмотрим простейш неявный метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \alpha \cdot y_{i+1} = y_i / (1 - \alpha h) = r_1 y_i$$

В получ уравн условие на r выполняется при любом α, следовательно имеет принцип ~~метод~~ максим. $\Rightarrow$

не имеет огранич по α на шаг интегр

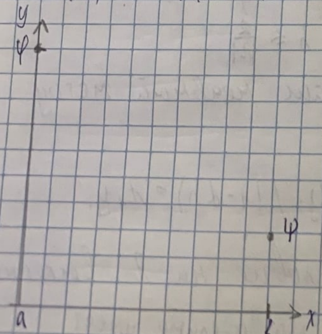
Таким образом является а устойчивым

Метод конечн разностей для краевых задач ОДУ

Дано линейн. диффеpенц. уравн удовлетв. краевым услов. Найти решение ОДУ на интервале $[a, b]$

$$u'' + q(x)u' - e(x)u = z(x)$$

$$u(a) = \varphi \quad u(b) = \psi$$



1) Заменяем непрерывн аргумент дискретной сеткой

$$x \to x_i = a + \frac{i(b-a)}{N} \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

2) Заменяем функц

$$u \to u_i \qquad u' \to \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$u'' \to \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

2) Подставляем получен. разлож в исходное ОДУ, в результате получаем СЛАУ

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - e_i u_i = z_i, \quad i = 1, 2 \ldots$$

3) Преобразуем полученное уравн группируя слаг относительно u_i u_{i-1} u_{i+1}

$$\begin{cases} (2 - q_i h) u_{i-1} - (4 + 2h^2 e_i) u_i + (2 + q_i h) u_{i+1} = 2h^2 z_i \\ u_n = \psi \\ u_0 = \varphi \end{cases}$$

Матрица данной СЛАУ имеет трехдиагонал вид

Для решения полученной СЛАУ применяется метод Прогонки

$$\begin{cases} -c_0 u_0 + b_0 u_1 = f_0 \\ a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = f_i \\ a_n u_{n-1} - c_n u_n = f_n \end{cases}$$

Условие устойчивости

$$|4 + 2h^2 e_i| \geq |2 - q_i h| + |2 + q_i h| \Rightarrow h \leq \frac{2}{\max|q_i|}$$

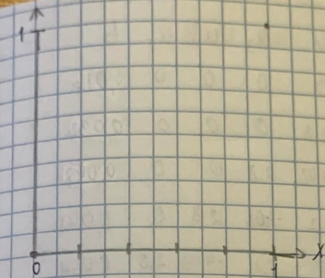
Пример ~~Вз~~ Решить краевую задачу для ОДУ 2-го порядка

$$u'' + 4u' - u = x$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases} \quad x \in [0; 1] \quad h = 0{,}2 \leq \frac{2}{4}$$

$$N = 5$$

$$x_i = a + i \cdot 0{,}2$$



$u_0 = u(0) = 0$

$u_1 = u(0{,}2)$

$u_2 = u(0{,}4)$

$u_3 = u(0{,}6)$

$u_4 = u(0{,}8)$

$u_5 = u(1) = 1$

$$(2 - 4 \cdot 0{,}2) u_{i-1} - (4 + 2 \cdot 0{,}2^2 \cdot (1)) u_i + (2 + 4 \cdot 0{,}2) u_{i+1} = 2h^2 x_i$$

$$\underbrace{1{,}2}_{a} u_{i-1} - \underbrace{4{,}08}_{c} u_i + \underbrace{2{,}8}_{b} u_{i+1} = 0{,}08 x_i$$

$$\begin{cases} 1\, u_0 = 0 \\ 1{,}2 u_{i-1} - 4{,}08 u_i + 2{,}8 u_{i+1} = 0{,}08 x_i \\ 1\, u_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ 1{,}2 u_0 - 4{,}08 u_1 + 2{,}8 u_2 = 0{,}08 \cdot 0{,}2 \\ 1{,}2 u_1 - 4{,}08 u_2 + 2{,}8 u_3 = 0{,}08 \cdot 0{,}4 \\ 1{,}2 u_2 - 4{,}08 u_3 + 2{,}8 u_4 = 0{,}08 \cdot 0{,}6 \\ 1{,}2 u_3 - 4{,}08 u_4 + 2{,}8 u_5 = 0{,}08 \cdot 0{,}8 \\ u_5 = 1 \end{cases}$$

108

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	b
1	0	0	0	0	0	0
1,2	-4,08	2,8	0	0	0	0,016
0	1,2	-4,08	2,8	0	0	0,032
0	0	1,2	-4,08	2,8	0	0,048
0	0	0	1,2	-4,08	2,8	0,064
0	0	0	0	0	1	1

$$a_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i a_i + C_i} \qquad B_{i+1} = \frac{F_i - A_i B_i}{A_i a_i + C_i}$$

$$X_{i+1} = \alpha_{i+1} \cdot X_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad X_n = \frac{F_n - A_n B_n}{A_n \alpha_n + C_n}$$

$$\alpha_1 = -\frac{B}{C} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \beta_1 = \frac{F_0}{C_0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha_2 = -\frac{B_1}{A_1 a_1 + C_1} = -\frac{2,8}{1,2 \cdot 0 - 4,08} = 0,686$$

$$\beta_2 = \frac{F_1 - A_1 B_1}{A_1 a_1 + C_1} = \frac{0,016}{-4,08} = -0,004$$

$$\alpha_3 = +\frac{0,004}{1,2 \cdot 0,686 - 4,08} = \frac{-5}{4071}$$

$$\beta_3 = \frac{0,032 + 1,2 \cdot 0,004}{1,2 \cdot 0,686 - 4,08} = -\frac{2}{177}$$

$$\alpha_4 = -\frac{\frac{2}{177}}{1,2 \cdot \frac{5}{4071} + 4,08} = -\frac{575}{207696} \qquad \beta_4 = \frac{0,048 + 1,2 \cdot \frac{2}{177}}{-1,2 \cdot 0,004 - 4,08} = -\frac{2270}{150627}$$

$$\alpha_5 = -\frac{150617}{1,2 \cdot \frac{575}{207696} + 4,08} = -0,0037 \qquad \beta_5 = \frac{0,064 + 1,2}{} = -0,02$$