Метод Монте-Карло

Пусть треб вычислить m-кратный интеграл по области D лежащий в m-мерном единич кубе. Выбираем m равномерно распр на отрезке $(0;1)$ последоват случ чисел, тогда точки M_i можно рассматривать как случ равномер распредел в единич кубе. Пусть из общ числа N случ точек, n попали в область D, остальные $N-n$ оказались вне области D, тогда при достаточно большом кол-ве N точек формула:

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$$

Указанный способ можно применять к вычисл кратн интегралов и произвол области D, если существ замена перемен при которой новая обл интегр будет заключена m-мерном единич кубе

Тема 5. Численное дифференцирование

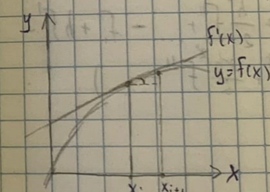
Дано $y = f(x)$ $\quad f'(x) - ?$

Когда применяется:

1) Дифференцир таблично-заданной функции
2) Вычисление производн в процессе числен счёта (Метод Ньютона)
3) Упрощен аналитич заданной функции

Конечно-разностная аппроксимация

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



От непрерывн функций переходим к дискретной

$x \to x_i \quad f \to f_i$

$$\boxed{f'_R(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}} \qquad h = x_{i+1} - x_i$$

правая конечно-разностная формула

$$\boxed{f'_L(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}$$ левая конечно-разностная

$$\boxed{f'_C(x) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}}$$ средняя

Погрешность аппроксимации

Произведём оценку погрешности формулы правой конечно

Разложим функцию f_{i+1} в ряд Тэйлора

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f_i + h f_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i'''$$

$$f_R'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{f_i + h f_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \ldots - R}{h} = f_i' + \underbrace{f_i'' \frac{h}{2} + \ldots}_{O(h)}$$

Порядок точности 1-ый

$$f_L'(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

$$f_c'(x) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2h}\left(f_i + h f_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \ldots - f_i + h f_i' - \right.$$
$$\left. - \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f''' - \ldots\right) = \frac{1}{2h}\left(2h f_i' + \frac{2h^3}{6} f''' + \ldots\right)$$

$$f' = f_i' + \frac{h^2}{6} f_i'''$$

Пример вычислить приближ значен производн от функц $y = \sin(x)$ на интервале $x[0, \frac{\pi}{2}]$ с шагом $(h) = \frac{\pi}{6}$

$$f(0) = 0$$

$$f_R'(x) = \frac{f_2 - f_1}{h}$$

$$f_R'(x) = \frac{f_3 - f_2}{h}$$

	x_i	f_i
1	0	0
2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{\pi}{3}$	0,866
4	$\frac{\pi}{2}$	1

Метод неопределённых коэффициентов

① Для определения весов в конечно-разностн. выраж. используется метод неопр. коэф.

$$f_i' \approx \frac{\alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2}}{h}$$

α, β, γ – неопр. коэф. (искомые величины)

Алгоритм

1) Разложим f_i, f_{i+1}, f_{i+2} в ряд Тэйлора

$f_i = f_i$

$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f'' + \ldots$

$f_{i+2} = f_i + 2hf' + \frac{(2h)^2}{2} f_i'' + \ldots$

2) Подставляем в исходное уравнение соответствующ. разлож.

$$f_i' \approx \frac{\alpha f_i + \beta (f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f'' + \ldots) + \gamma (f_i + 2hf_i' + \frac{(2h)^2}{2} f'' + \ldots)}{h}$$

3) Раскрываем скобки и группируем относительно f_i, f_i', f_i''

$$f_i' = \frac{1}{h}\Big[\underbrace{f_i(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0} + \underbrace{f_i' h(\beta + 2\gamma)}_{=1} + \underbrace{f_i'' \frac{h^2}{2}(\beta + 4\gamma)}_{=0} + \underbrace{f''' \frac{h^3}{6}(\beta + 8\gamma)}_{=O(h^2)} + \ldots$$

Получаем СЛАУ для нахождения коэф.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \alpha = -\frac{3}{2} \\ \beta + 2\gamma = 1 & \beta = 2 \\ \beta + 4\gamma = 0 & \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\beta + 2\gamma = -2\gamma$

$$f_i' = -\frac{3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$

Формулы для старших производных

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1}' - f_{i-1}'}{h} = \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}{h} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$f_i'' \approx \frac{\alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2}}{h^2} = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \alpha = 1 \\ \beta + 2\gamma = 0 & \beta = -2 \\ \beta + 4\gamma = 2 & \gamma = 1 \end{cases}$$

Замечания: 1) С ростом степени производн. необходимо увеличив. кол-во точек / кол-во узлов на 1 больше чем степень производной)

2) Для повыш порядка точности необходимо увелич ~~уз~~ числа узлов сверх минимального

3) Степень h в знаменателе соответствует степени производной

$f''' - ?$

Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

ОДУ позволяют описать следующие процессы: 1) Движение системы взаимодейст. мат. точек

2) Химич. кинетики

3) Электр. цепей

4) Сопротивл. материалов (Статистика прогиб упругого стержня)

Численные методы решения задачи Коши

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка в общ виде:

[1] $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Из математике известно, что общ решение содержит произвол. const C, однопараметрическим семейством интеграл кривых