Пример. Найти корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1{,}2$$

с помощью метода Ньютона на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Первым действием определяется первая производная заданной функции

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^2 + x}{5} - 1{,}2 \right)' = 3x^2 - \frac{2x+1}{5}.$$

В качестве начальной точки x_0 выбираем правую границу заданного интервала (в нашем случае это точка b = 1,5). Далее в данной начальной точке вычисляется значение функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425$$

и ее первой производной

$$f'(1,5) = 3 \cdot 1,5^2 - \frac{2 \cdot 1,5 + 1}{5} = 5,95.$$

Полученные значения подставляются в выражение для вычисления координаты точки пересечения касательной с осью абсцисс

$$x_1 = 1,5 - \frac{1,425}{5,95} = 1,26050.$$

Полученное значение x_1 сравнивается с начальным x_0 для проверки достигнутой точности

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| \le \varepsilon \text{ или } \left|1,26050 - 1,5\right| = 0,23950 < 0,001.$$

Как видно требуемое условие по точности не выполнено, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Для этого проводится повторное вычисление значения функции в точке x_1

$$f(1,26050) = 1,26050^3 - \frac{1,26050^2 + 1,26050}{5} - 1,2 = 0,23290$$

и значение первой производной в этой же точке

$$f'(1,26050) = 3 \cdot 1,26050^2 - \frac{2 \cdot 1,26050 + 1}{5} = 4,06241.$$

Вычисленные значения функции и ее производной в точке x_1 подставляются в выражение для определения координаты следующей точки пересечения касательной $f'(x_1)$ с осью абсцисс

$$x_2 = 1,26050 - \frac{0,23290}{4,06241} = 1,20317 .$$

Используя полученное значение координаты x_2 и предыдущее x_1, определяется погрешность

$$\left|1{,}20317-1{,}26050\right|=0{,}05733<0{,}001.$$

Таким образом, погрешность уменьшилась, но требуемая точность не достигнута, а следовательно, процедуру нахождения решения необходимо продолжить.

Процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом Ньютона представлен в табл. 11. Из табл. 11 видно, что после четвертой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$\left|1{,}2-1{,}200009\right|=0{,}00009<0{,}001.$$

Таблица 11 – Решение нелинейного уравнения методом Ньютона

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,5	1,425	5,95
1	1,26050	0,23290	4,06241
2	1,20317	0,01158	3,66161
3	1,200009	3,41E-05	3,64006
4	1,2	2,98E-10	3,64

Также осуществляется проверка условия достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности, т.е. $\left|f\left(x_4\right)\right| < \delta$. Стоит отметить, что значение функции, определенное после четвертой итерации, отличается от нуля в десятом знаке после запятой.

<u>Ответ.</u> Решение заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получено методом Ньютона за четыре итерации и соответствует $x = 1{,}2$.