4.2.4. Метод простых итераций (МПИ)

Теперь рассмотрим более общий итерационный метод уточнения корней. Для этого представим исходное уравнение (1.1) в равносильном виде

$$x = \phi(x).$$

Пусть нам известно начальное приближение к корню x_0 ($x_0 \in [a, b]$). Подставив его в правую часть, получим новое приближение $x_1 = \phi(x_0)$, затем аналогичным образом получим $x_2 = \phi(x_1)$. Продолжая данный процесс, получаем последовательность чисел

$$x_{k+1} = \phi(x_k).$$

При определенных свойствах функции $\phi(x)$ последовательность $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ сходится к корню уравнения $f(x) = 0$. Необходимо установить при каких условиях итерационный процесс будет сходящимся.

Рассмотрим графически процесс получения приближенного решения в методе простых итераций. При решении необходимо отыскать точку пересечения кривой $y = \phi(x)$ и прямой $y = x$ являющейся биссектрисой координатного угла.

На рис. 33–39 представлены разные варианты кривой $y = \phi(x)$, которая может представлять собой любую функцию.

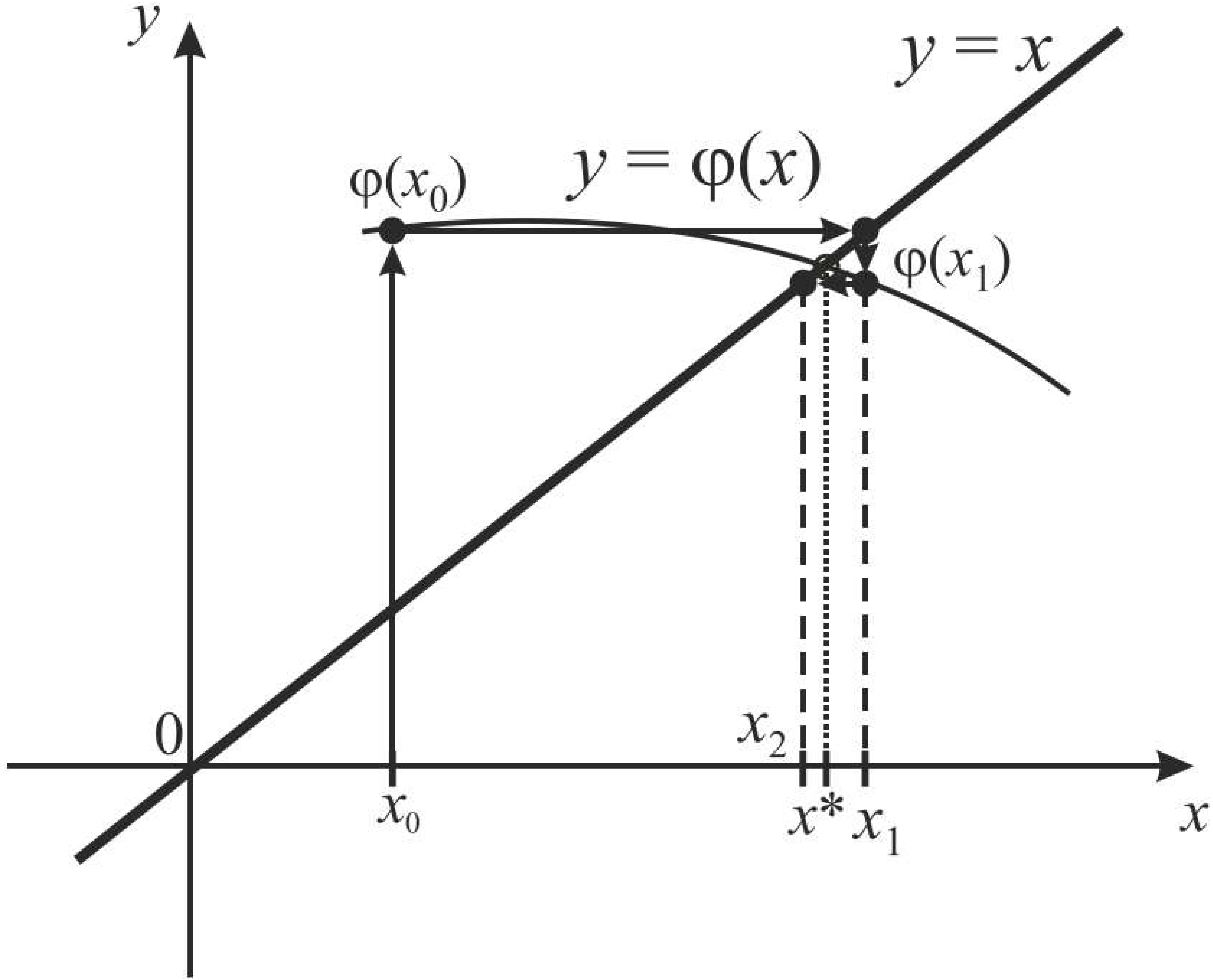
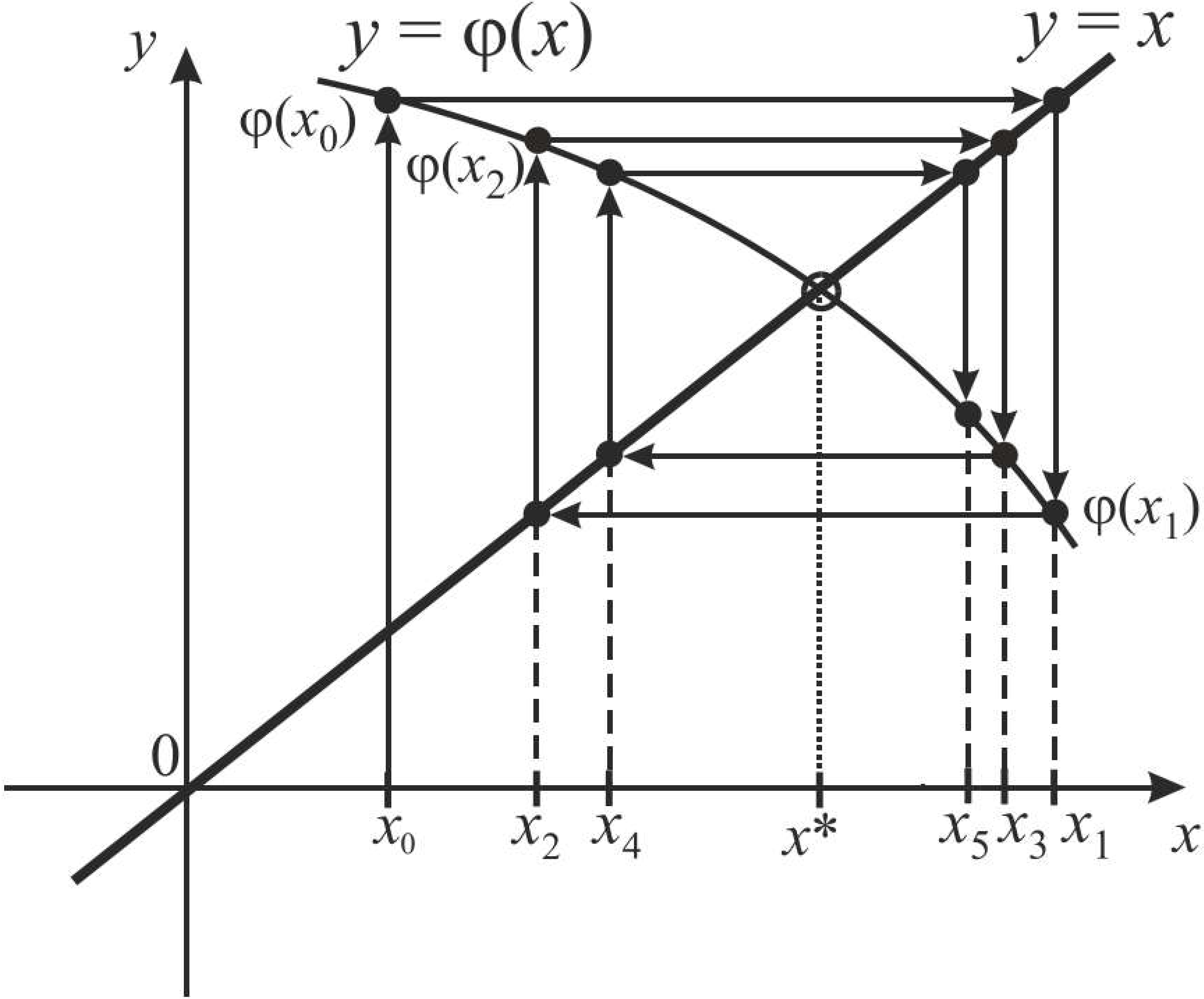
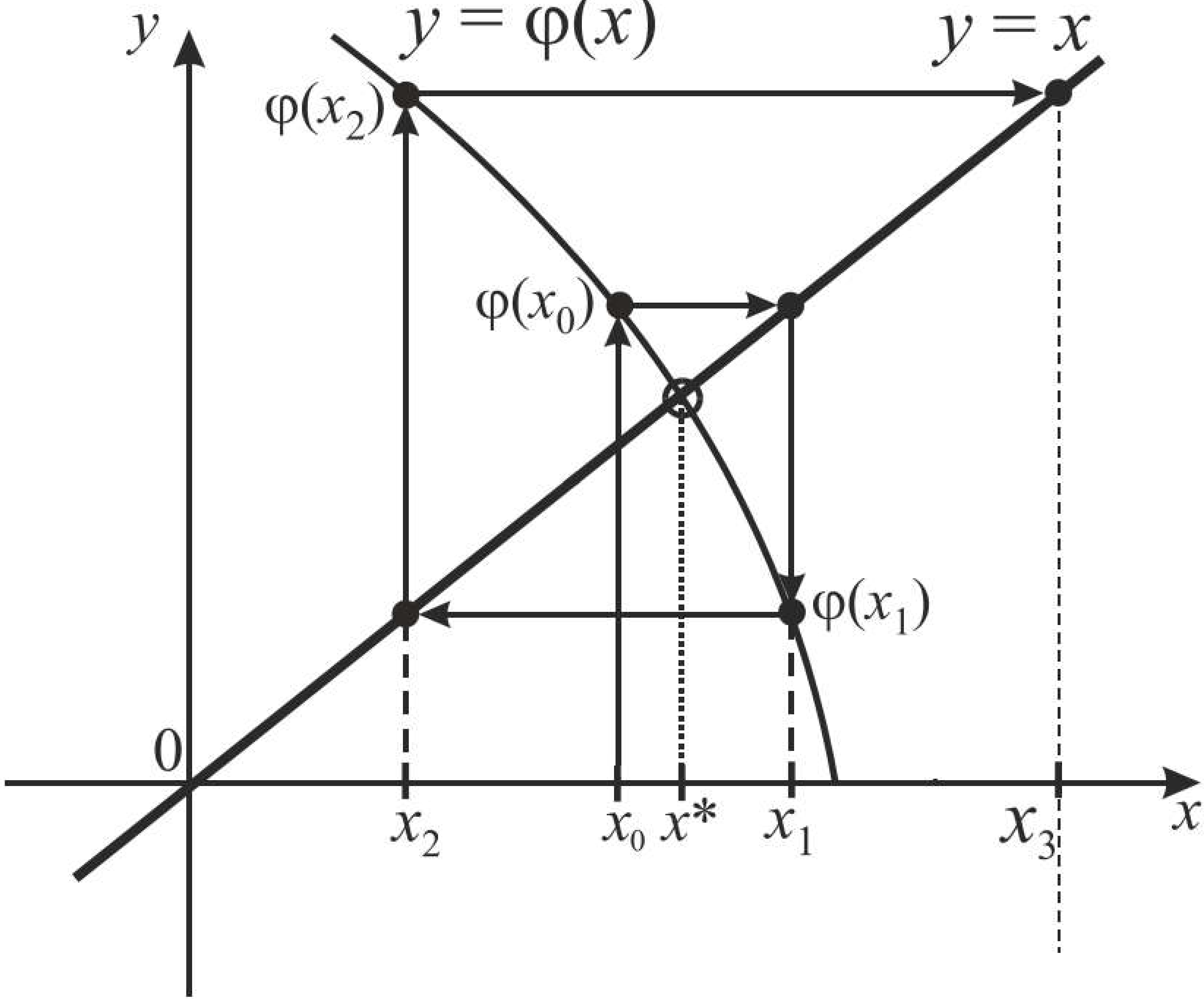


Рис. 33 – Процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 1



y
y = φ(x)
y = x
φ(x0)
φ(x2)
φ(x1)
0
x0
x2
x4
x*
x5
x3
x1
x

Рис. 34 – Процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 2



y
y = φ(x)
y = x
φ(x2)
φ(x0)
φ(x1)
0
x2
x0
x*
x1
x3
x

Рис. 35 – Расходящийся процесс решения методом простой итерации – вариант 3

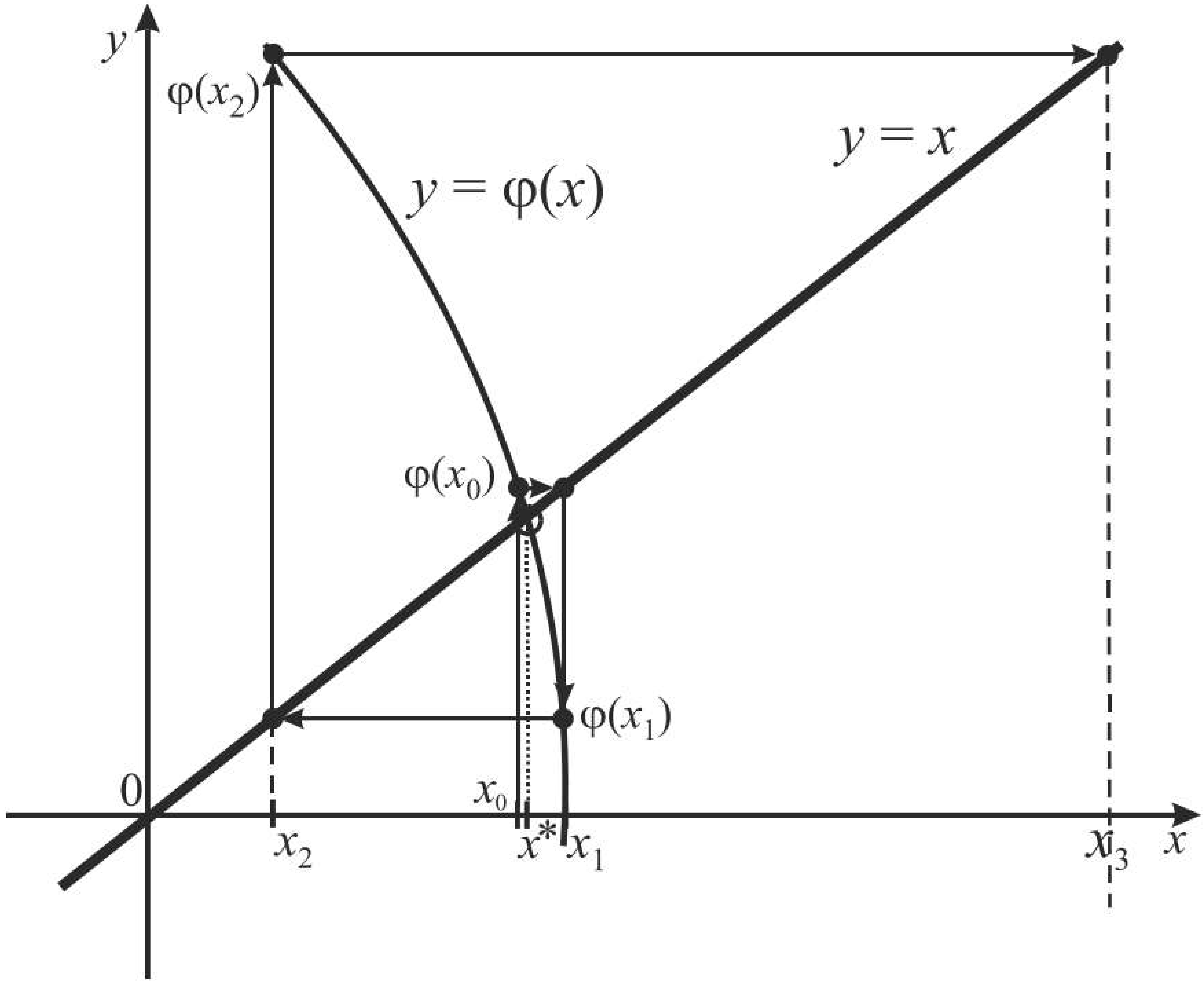

y
φ(x2)
y = x
y = φ(x)
φ(x0)
φ(x1)
0
x0
x2
x*
x1
x3
x

Рис. 36 – Расходящийся процесс решения методом простой итерации – вариант 4

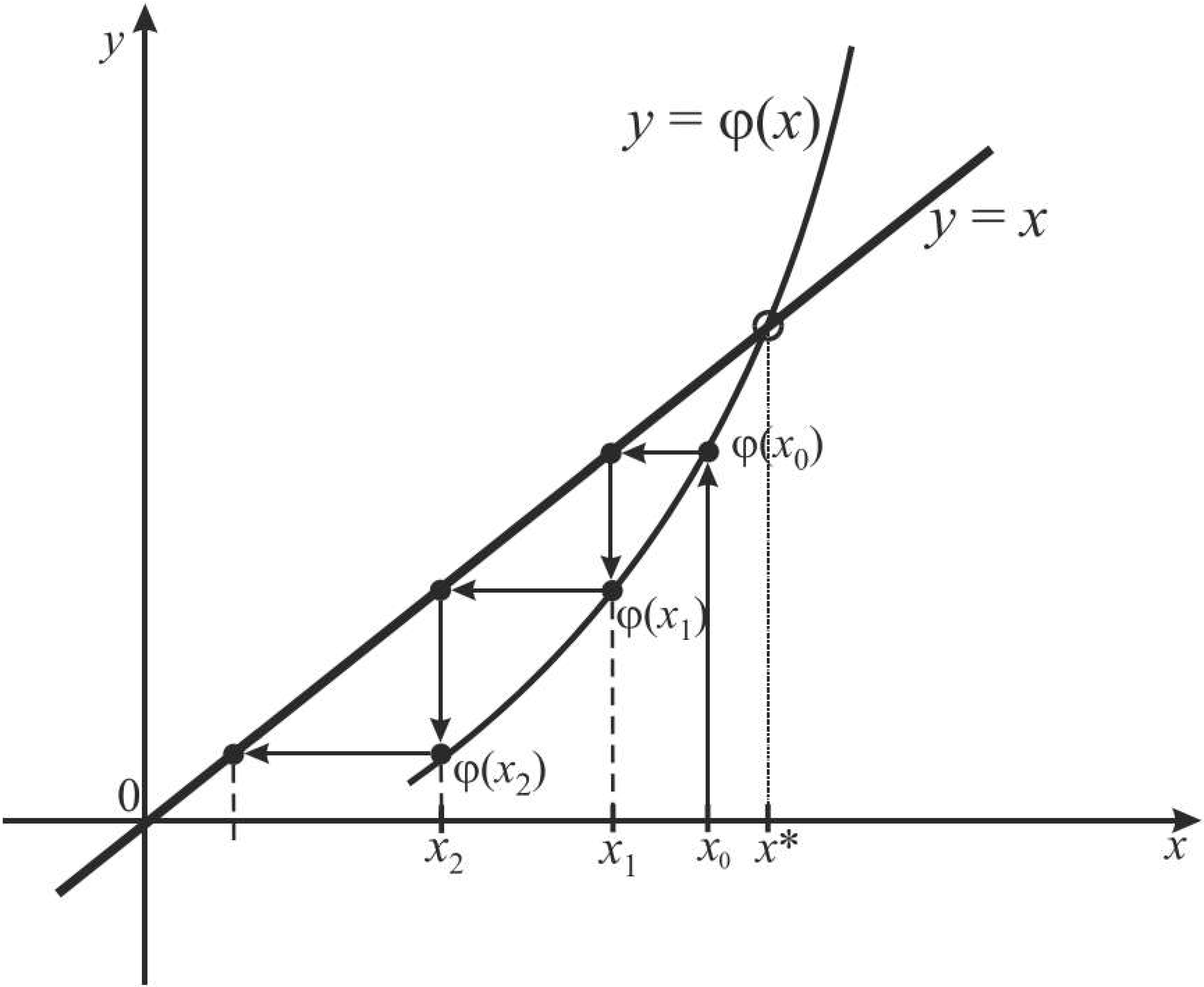

y
y = φ(x)
y = x
φ(x0)
φ(x1)
φ(x2)
0
x2
x1
x0
x*
x

Рис. 37 – Расходящийся процесс решения методом простой итерации – вариант 5

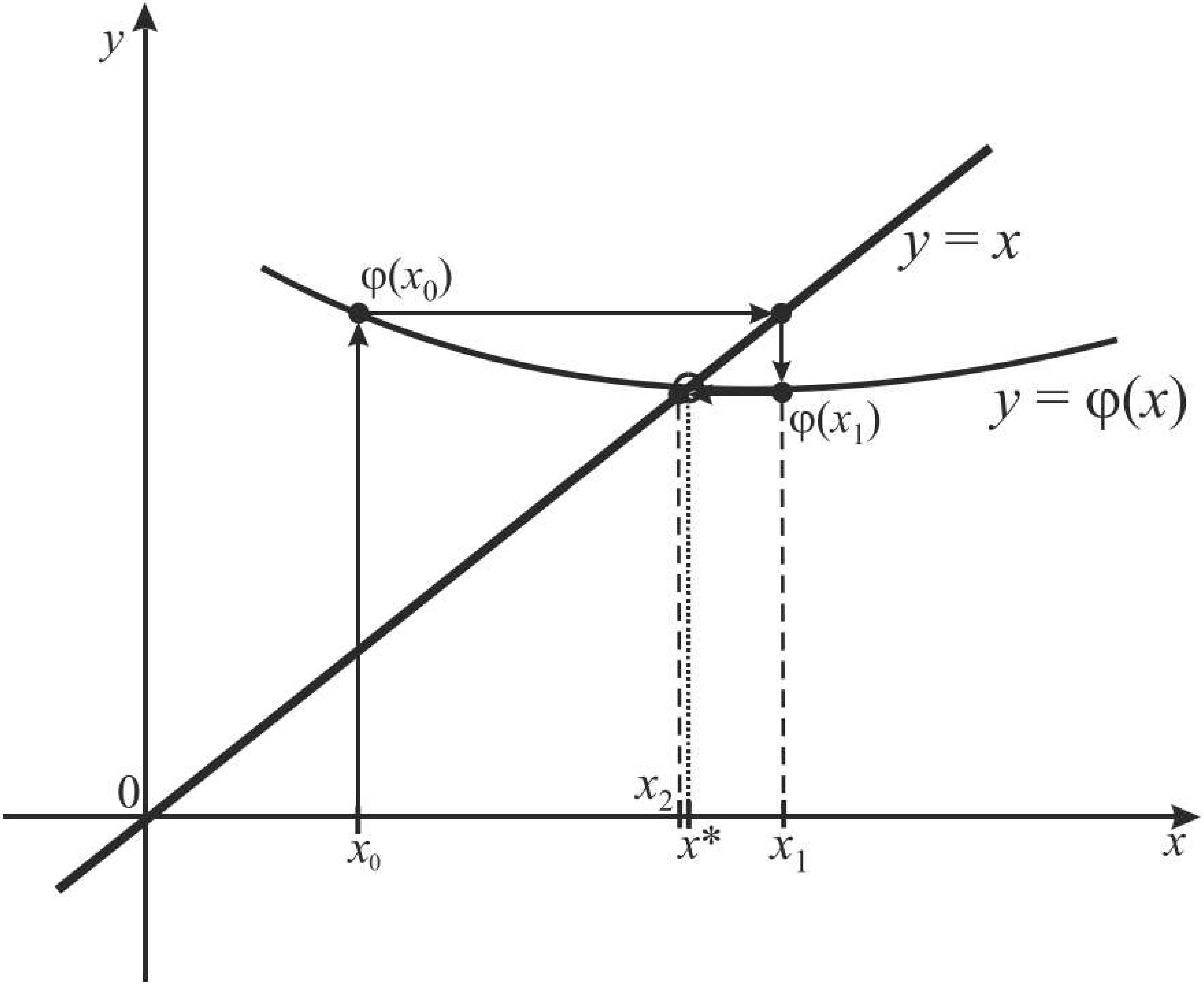
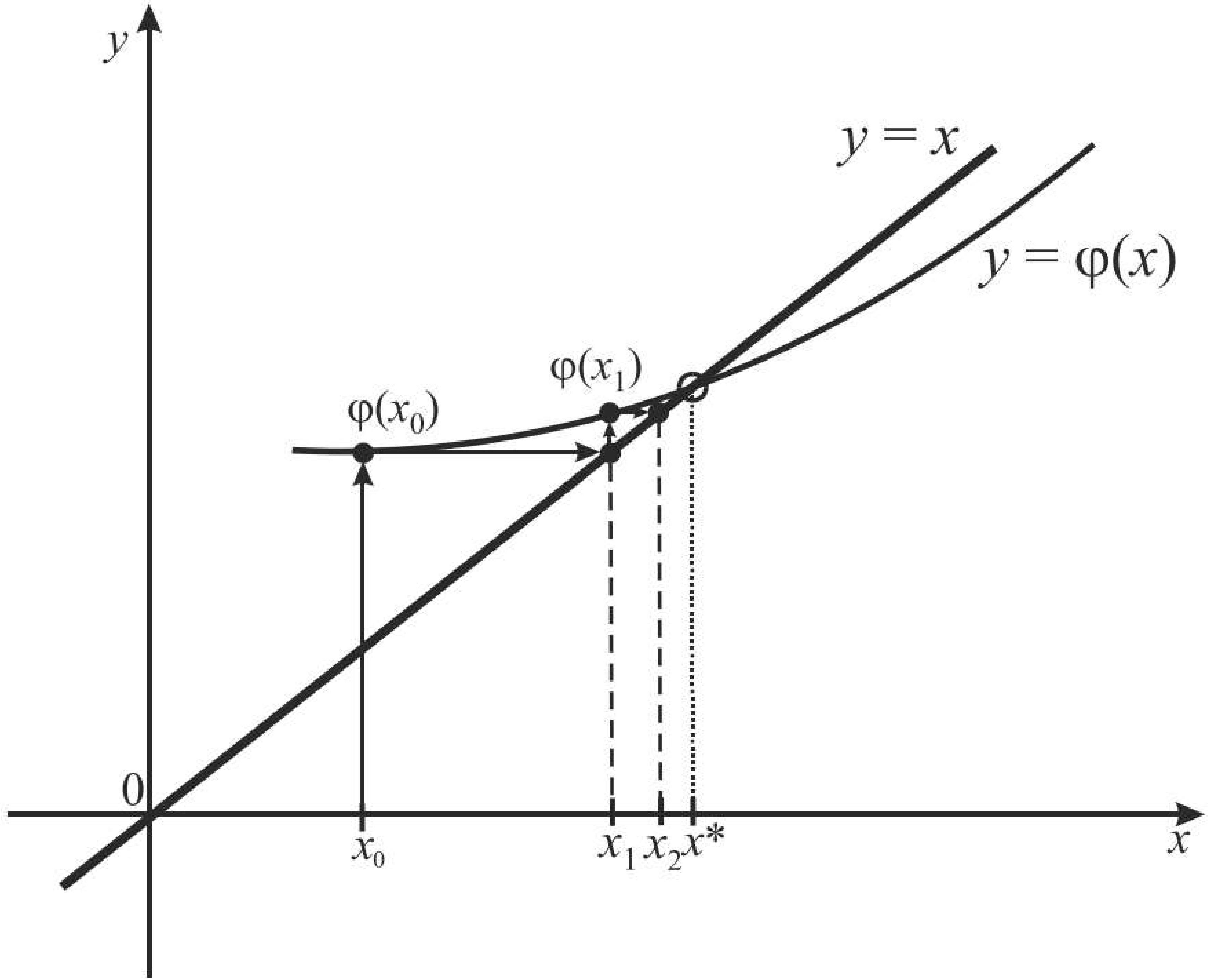

y
y = x
φ(x₀)
y = φ(x)
φ(x₁)
0
x₂
x₀
x*
x₁
x

Рис. 38 – Сходящийся процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 6



y
y = x
y = φ(x)
φ(x_1)
φ(x_0)
0
x_0
x_1
x_2
x*
x

Рис. 39 – Сходящийся процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 7.

Пусть $x = x^*$ – корень уравнения. Выберем начальное приближение в точке x_0. Следующее приближении x_1, в соответствии с уравнением, будет равно $\phi(x_0)$. Для того, чтобы отобразить x_1 на графике можно провести через точку (x_0, $\phi(x_0)$) прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с прямой $y = x$, а затем в точке пересечения этих прямых опустить перпендикуляр на ось абсцисс, который и отметит положение точки x_1. Аналогично получаются все последующие приближения. Из рис. 33, 34, 38, 39 видно, что итерационный процесс сходятся к искомому корню x^*, а на рис. 35–37 с каждой новой итерацией получаемое решение удаляется от искомого решения, т.е. итерационный процесс является расходящимся.

Математически условие сходимости можно установить следующим образом. Представим k и $k + 1$ приближения в форме

$$x_k = x^* + \varepsilon_k ,$$

$$x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1} .$$

где ε_k и ε_{k+1} – отклонения приближений от корня.

Функцию $\varphi(x)$ вблизи точки x^* приближенно заменим первыми двумя членами ряда Тейлора. Тогда итерационная формула примет вид

$$x^* + \varepsilon_{k+1} \approx \phi(x^*) + \varepsilon_k \phi'(x^*).$$

Но поскольку x^* является корнем уравнения, то первые слагаемые в правой и левой части этого выражения тождественно равны и, следовательно

$$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k \phi'(x^*).$$

Для сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы погрешность на каждом шаге убывала, т.е.

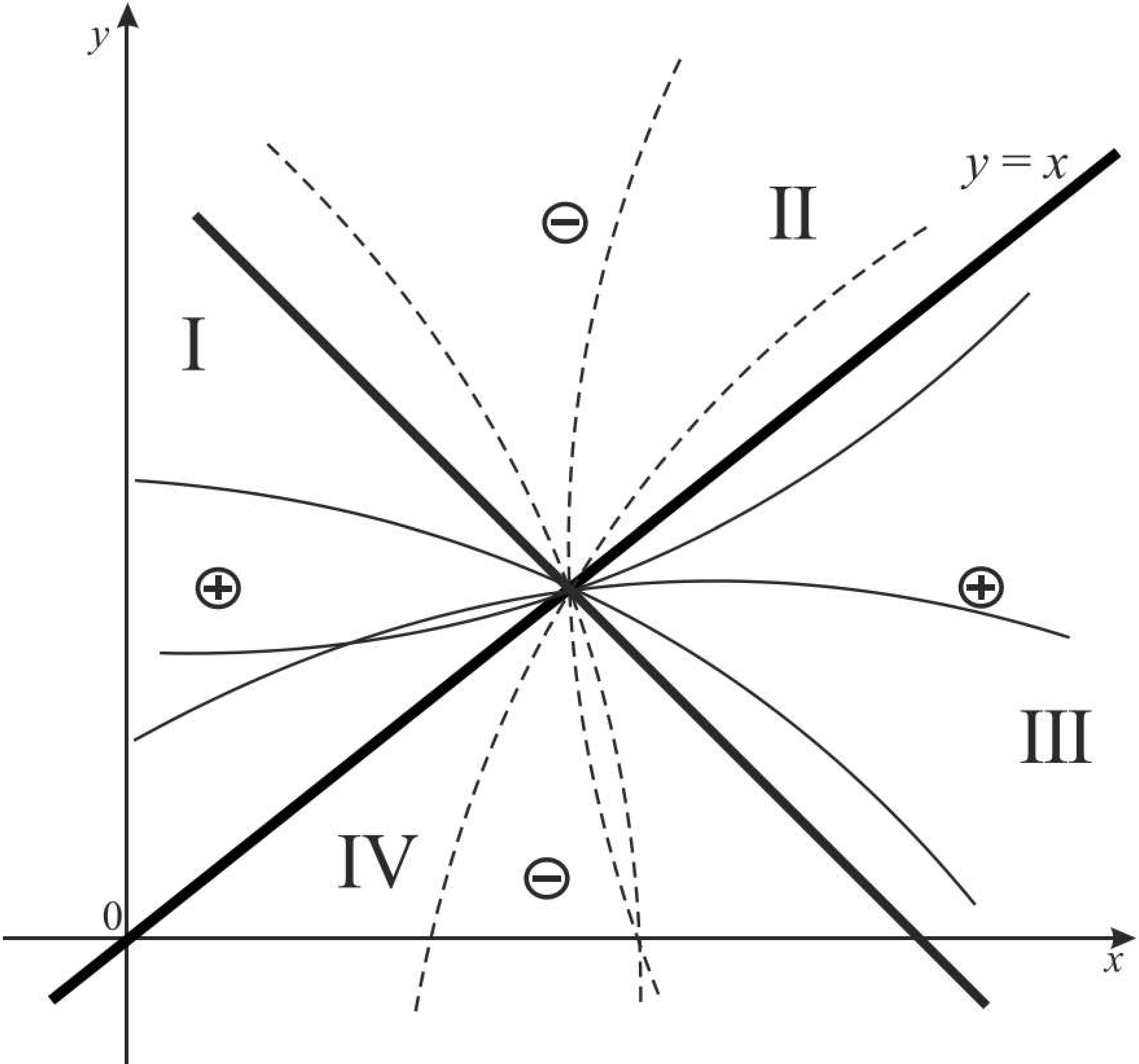
$$|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|,$$

откуда следует, что в окрестности корня должно выполняться условие

$$\left|\phi'(x)\right| < 1.$$

Таким образом, для того чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо, чтобы абсолютная величина производной $\phi'(x)$ в окрестности корня была меньше единицы. Если это условие выполняется на отрезке $[a, b]$ на котором локализован корень, то в качестве начального приближения можно взять любую точку из этого отрезка $x_0 \in [a, b]$. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной $\left|\phi'(x)\right|$: чем меньше $\left|\phi'(x)\right|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.

На рис. 40 выделены области **I** и **III**, в которых итерационный процесс сходится и области **II** и **IV**, где он расходится. Процесс приближения к корню может сходиться либо в виде монотонных приближений (ломаная линия в виде ступеньки рис. 39) реализуется, если $\phi'(x) > 0$, либо двухсторонних (ломаная линия в виде спирали рис. 33, 34 и 38) при $\phi'(x) < 0$.



y
y = x
II
I
III
IV
0
x