Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса–Жордана

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу **A** для заданной системы уравнений:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Выбираем элемент, расположенный на пересечении первого столбца и первой строки расширенной матрицы, он отличен от нуля ($a_{11} = 1$).

Делим все элементы первой строки на диагональный элемент a_{11}, т.к. в нашем случае $a_{11} = 1$, то матрица **A** не изменяется.

Вычитаем первую строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки:

из строки 2 вычитаем: $4 \times$ строку 1;

из строки 3 вычитаем: $9 \times$ строку 1;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4-4\times1 & 2-4\times1 & 1-4\times1 & 1 \\ 9-9\times1 & 3-9\times1 & 1-9\times1 & 3 \end{array}\right).$$

В результате получаем матрицу, в которой первые элементы каждой строки (кроме первой) равны нолю в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 3 \end{array}\right).$$

В дальнейших расчетах первая строка и первый столбец в полученной матрице не участвуют, т.е. они условно вычеркиваются или замораживаются.

Переходим к рассмотрению элемента второй строки и второго столбца, так как он не равен нулевой, то делим все элементы второй строки на диагональный элемент $a_{22} = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{-2} & \dfrac{-3}{-2} & \dfrac{1}{-2} \\ 0 & -6 & -8 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -6 & -8 & 3 \end{array}\right).$$

Вычитаем вторую строку, умноженную на второй элемент третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigg| & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \bigg| & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6-(-6)\times 1 & -8-(-6)\times\frac{3}{2} & \bigg| & 3-(-6)\times-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

После вычислений получаем верхнюю треугольную матрицу, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \bigg| & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \bigg| & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \bigg| & 0 \end{pmatrix}.$$

На следующем этапе, с помощью элементарных преобразований, все коэффициенты, расположенные над главной диагональю расширенной матрицы превращаем в ноль. Для этого вычитаем из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, взятый из предпоследней строки, для того, чтобы в предпоследней строке остался только один коэффициент, стоящий на главной диагонали равный единице. Далее, к строке 3 добавим строку 2, умноженную на -3, и строку 2 поделим на -2.

Вычитаем третью строку, умноженную на третий элемент соответствующей строки:

из строки 2 вычитаем: 3/2 × строку 3;
из строки 1 вычитаем: 1 × строку 3.
Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Из первой строки вычитаем вторую строку, умноженную на второй элемент первой строки:
из строки 1 вычитаем: 1 × строку 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = 0$.