### 2.3.3 Метод Зейделя.

Матрица $A$ разбивается так же, как и в методе Якоби, но итерационный процесс строится иначе:

$$(L + D)\overrightarrow{u}^{(k+1)} + U\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f},$$

откуда

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{G}\,\overrightarrow{u}^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

Ответ на вопрос сходимости метода Зейделя к точному решению дают следующие теоремы

**Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Зейделя):** *метод Зейделя сходится к $\overrightarrow{u}^*$, если исходная матрица $A$ — вещественная, симметричная и положительно определенная.*

**Теорема 2 (критерий сходимости метода Зейделя):** *для сходимости метода Зейделя к $\overrightarrow{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

*по модулю не превосходили единицы.*

**Пример.**

Найти область допустимых значений параметров $\alpha$ и $\beta$, при которых метод Зейделя сходится для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

**Решение.**

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \lambda\beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \lambda\beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda^3\alpha^3 - 2\lambda^2\alpha\beta^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2},$$

причем $\alpha \neq 0$, так как в этом случае матрица $A$ вырождается и детерминант, выписанный в начале решения, равен нулю при любых $\lambda$, а значит, по критерию сходимости, метод сходиться не будет. Используя критерий сходимости метода Зейделя, получаем

$$\lambda_3 \leq 1,$$

и окончательно

$$|\beta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha|, \quad \alpha \neq 0$$