Как решать СЛАУ методом Крамера за пять простых шагов

Пусть необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Шаг 1

Мы должны выделить все числа, которые присутствуют в данной системе (для наглядности мы выделили их разными цветами). Всего их должно быть двенадцать – по четыре в каждой строке. Если у неизвестного нет своего числа, ставим «1».

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 7 \\ 1x - 3y + 2z = 5 \\ 1x + 1y + 1z = 3 \end{cases}$$

Шаг 2

Выписываем первые три столбца в матрицу. Количество матриц в решении всегда на одну больше, чем количество уравнений, входящих в систему, т.е. в данном случае нам понадобится 4 матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Δ (дельта) – определитель матрицы

Шаг 3

Теперь мы должны вычислить основной определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 * (-3) * 1 + 2 * 2 * 1 + 3 * 1 * 1) -$$

$$-(3 * (-3) * 1 + 1 * 2 * 1 + 2 * 1 * 1) =$$

$$= (-3 + 4 + 3) - (-9 + 2 + 2) = 4 - (-5) = 9$$

Внимание!

Если вы получили $\Delta=0$, значит:

- Система не имеет решений (при $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$, ... $\Delta_n \neq 0$);
- Система имеет бесконечное множество решений (при $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, $\Delta_z=0$, ... $\Delta_n=0$).

Шаг 4

Теперь нам необходимо вычислить определители для x, y, z.

4.1. Найдем определитель Δ_x. Для этого подставим вместо красного (первого) столбца желтый столбец свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 * (-3) * 1 + 2 * 2 * 3 + 3 * 5 * 1 -$$

$$-3 * (-3) * 3 - 7 * 2 * 1 - 2 * 5 * 1 =$$

$$= (-21 + 12 + 15) - (-27 + 14 + 10) =$$

$$= 6 - (-3) = 9$$

4.2. Найдем определитель Δ_y. Для этого подставим вместо синего (второго) столбца желтый столбец свободных членов:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 * 5 * 1 + 7 * 2 * 1 + 3 * 1 * 3 -$$

$$-3 * 5 * 1 - 1 * 2 * 3 - 7 * 1 * 1 =$$

$$= (5 + 14 + 9) - (15 + 6 + 7) =$$

$$= 28 - 28 = 0$$

4.3. Найдем определитель Δ_z. Для этого подставим вместо зеленого (третьего) столбца желтый столбец свободных членов:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 * 5 * 1 + 7 * 2 * 1 + 3 * 1 * 3 -$$

$$-3 * 5 * 1 - 1 * 2 * 3 - 7 * 1 * 1 =$$

$$= (-9 + 10 + 7) - (-21 + 5 + 6) =$$

$$= 8 - (-10) = 18$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Шаг 5

Далее попеременно делим Δ_x, Δ_y, Δ_z на Δ и, таким образом, находим решение заданной системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{9} = 0;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2$$

Ответ: $x = 1;\ y = 0;\ z = 2$

Для проверки достаточно подставить полученные числа в систему и доказать равенство всех частей.