Метод половинного деления (дихотомии, бисекции, вилки). Задана функция $y = f(x)$ определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, её график представлен на рис. 9. После решения задачи локализации нам известно, что на рассматриваемом интервале $[a, b]$ расположен один корень x^*, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, который требуется уточнить до заданной точности ε.

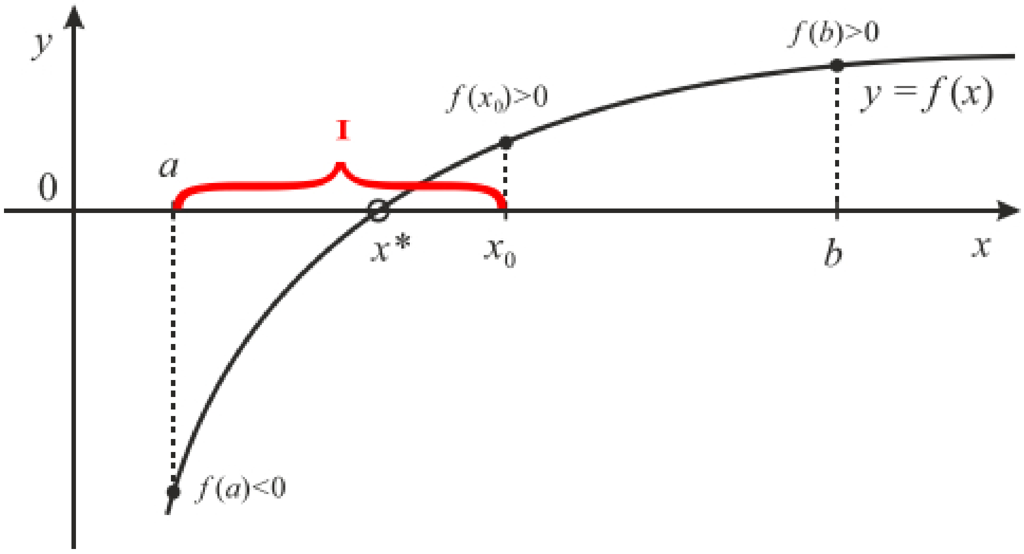

Рис. 10 – Первое приближение метода дихотомии

В качестве начального приближения корня принимается середина заданного интервала:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Как видно из рис. 10 начальное приближение разбивает заданный интервал $[a, b]$ на два равных интервала $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$. Далее проводится вычисление значения функции $f(x)$ в точке x_0. Найденное значение $f(x_0)$ и известные значения функции на концах заданного интервала $[a, b]$ – $f(a)$ и $f(b)$ порождают следующие взаимоисключающие ситуации:

а) если $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, то корень находится на интервале $[a, x_0]$;

б) если $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, то корень находится на интервале $[x_0, b]$;

в) если $f(x_0) = 0$, то точка x_0 является корнем нелинейного уравнения.

Следовательно, вычисленное значение функции в точке x_0 позволяет уменьшить промежуток существования корня $[a, b]$ (случай а) и б)) или определить его значение (случай в)). Ситуация в) зачастую реализуется в случае приближенного $|f(x_0)| < \delta \approx 0$ вычисления функции.

Отрезок, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$. Вторая половина отрезка $[a, b]$, на которой $f(x)$ не меняет знак, из дальнейших расчетов исключается.

В качестве следующего приближения корня принимается середина нового отрезка

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

как показано на рис. 11 и рассмотрение повторяется по аналогии с предыдущим.

Таким образом, k-ое приближение вычисляется

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

После каждой итерации промежуток существования корня уменьшается ровно в два раза, а после k итераций в 2^k раз:

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

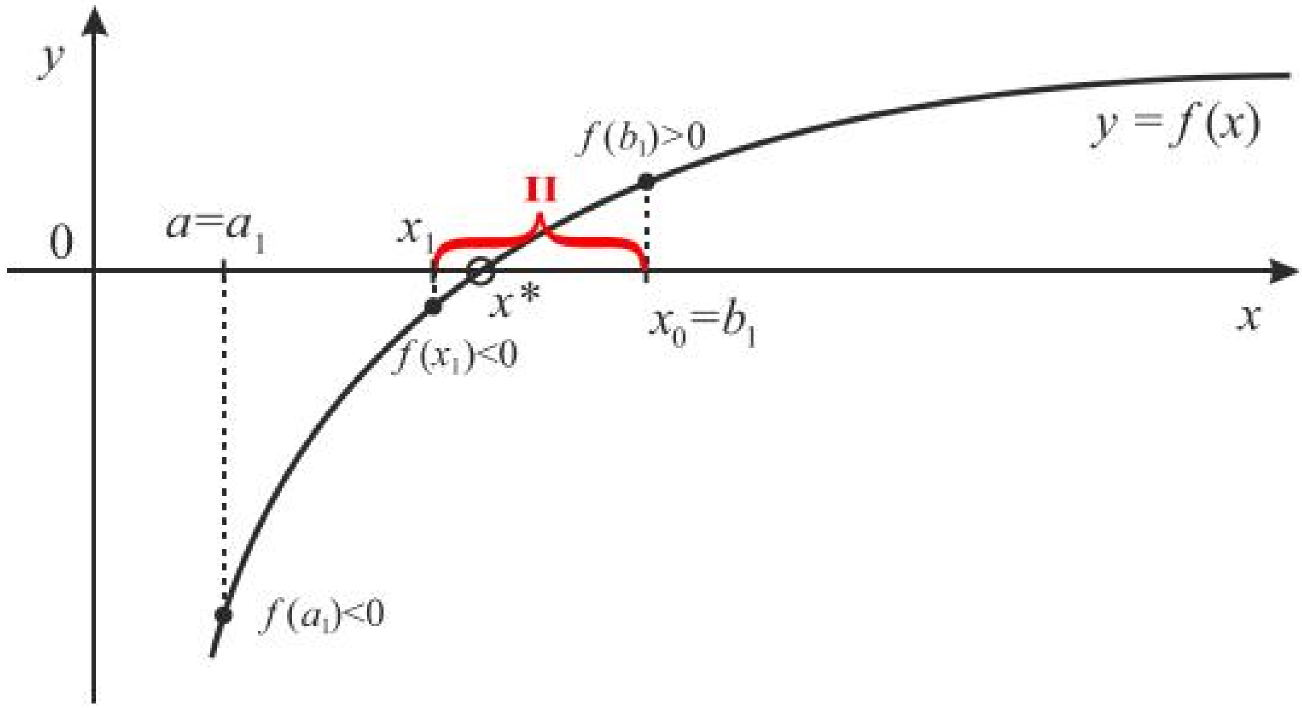

Рис. 11 – Второе приближение метода дихотомии

Завершение итерационного процесса осуществляется после достижения заданной точности, т.е. при выполнении условия

$$\left|b_k - a_k\right| \le 2\varepsilon \text{ или } \left|x_k - x^*\right| \le \varepsilon .$$

Объединяя вместе две последние формулы, получаем выражение для априорной оценки абсолютной погрешности, дающее возможность определить количество шагов (итераций) метода половинного деления необходимых для определения корня с заданной точностью ε, для этого нужно вычислить наименьшее натуральное число k, удовлетворяющее условию

$$\frac{b-a}{2^k} < 2\varepsilon .$$

Метод половинного деления сходится всегда, т.е. обладает безусловной сходимостью. Он чрезвычайно прост, т.к. требует лишь вычисления значений функции $f(x)$ и, поэтому применим для решения любых уравнений.

Метод дихотомии может быть легко реализован по следующему алгоритму:

1. Задать начальные данные:
   a) концы интервала a и b,
   b) функцию $y = f(x)$,
   c) точность ε и δ.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Вычислить $x = \dfrac{a+b}{2}$.
4. Если $\left|b-a\right| \le 2\varepsilon$, то x – искомый корень.
5. Вычислить $f(x)$.
6. Если $\left|f(x)\right| < \delta$, то x – искомый корень и остановка.
7. Если $f(a)\cdot f(x) < 0$, то $b = x$ и перейти к п.3; иначе $a = x$, $f(a) = f(x)$ и перейти к п.3.

Недостатком метода половинного деления является достаточно медленная сходимость.

С каждым шагом погрешность приближенного значения уменьшается в два раза, т.е.

$$\left|x - x_{k+1}\right| < \frac{1}{2}\left|x - x_k\right|,$$

поэтому данный метод является методом с линейной сходимостью.

Количество итераций N требуемых для достижения заданной точности ε определяется выражением

$$k > \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon},\ N = \operatorname{int}\left(\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}\right) + 1$$

где $\operatorname{int}(x)$ – целая часть числа x.

Например, при $b - a = 1$ и $\varepsilon = 10^{-6}$ получим $N = 19$.

Пример. Найти корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

с помощью метода половинного деления на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Вначале определяется значение функции на одной из границ заданного интервала (в нашем случае это точка, являющаяся началом интервала $a = 1$)

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6\,.$$

Далее вычисляется координата середины заданного интервала

$$x_0 = \frac{1 + 1,5}{2} = 1,25$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$f(1,25) = 1,25^3 - \frac{1,25^2 + 1,25}{5} - 1,2 = 0,190625\,.$$

Полученное значение функции в точке x_0 позволяет провести анализ смены знака функции и выбрать новый интервал, на котором функция меняет знак. В данном случае осуществляется замена точки b на x_0. В результате заданный первоначальный интервал сузился до [1; 1,25].

Для вновь определенного интервала проводится проверка достигнутой точности

$$|b-a| \le 2\varepsilon \text{ или } |1,25-1| = 0,25 < 0,002 .$$

Как видно новый интервал не удовлетворяет требуемому условию по точности, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Для этого проводится повторное вычисление координаты середины нового интервала

$$x_1 = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$$

и значение функции в этой точке

$$f(1,125) = 1,125^3 - \frac{1,125^2 + 1,125}{5} - 1,2 = -0,254297 .$$

Проверяется условие достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности

$$|f(x_1)| < \delta,$$

$$|-0,254297| < 0,001 .$$

Проведенное сравнение подтверждает необходимость продолжения процесса уточнения искомого решения.

Используя полученное значение функции в точке x_1, определяется интервал, на котором функция меняет знак.

Таким образом, точка a заменяется на x_1, а исследуемый интервал уменьшается до [1,125; 1,25] и процедура нахождения решения продолжается.

Механизм нахождения решения заданного нелинейного уравнения методом половинного деления целесообразно свести в таблицу.

Из табл. 7 видно, что после восьми приближений получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,201172 - 1,199219| = 0,001953 < 0,002 .$$

Отметим, что значение функции, определенное после восьмой итерации также меньше δ.

Для справки, точным решением заданного нелинейного уравнения является $x^* = 1{,}2$.

Ответ. Решением заданного нелинейного уравнения на рассматриваемом интервале является $x = 1{,}200195$, которое получено с требуемой точностью $\varepsilon = \delta = 0{,}001$.

Таблица 7 – Решение нелинейного уравнения методом дихотомии

k	a	$f(a)$	b	x	$f(x)$
0	1	-0,6	1,5	1,25	0,190625
1	1	-0,6	1,25	1,125	-0,254297
2	1,125	-0,2543	1,25	1,1875	-0,044971
3	1,1875	-0,044971	1,25	1,21875	0,069452
4	1,1875	-0,044971	1,21875	1,203125	0,011408
5	1,1875	-0,044971	1,203125	1,195313	-0,016988
6	1,195313	-0,016988	1,203125	1,199219	-0,002842
7	1,199219	-0,002842	1,203125	1,201172	0,004270
8	1,199219	-0,002842	1,201172	1,200195	0,000711