Матричный метод решения состоит в следующем.

Пусть дана система линейных уравнений с nнеизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Её можно переписать в матричной форме: AX = B, где A — основная матрица системы, B и X — столбцы свободных членов и решений системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Умножим это матричное уравнение слева на A^{-1} — матрицу, обратную к матрице A: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

Так как $A^{-1}A = E$, получаем $X = A^{-1}B$. Правая часть этого уравнения даст столбец решений исходной системы. Условием применимости данного метода (как и вообще существования решения неоднородной системы линейных уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных) является невырожденность матрицы A. Необходимым и достаточным условием этого является неравенство нулю определителя матрицы A: $\det A \neq 0$.

Для однородной системы линейных уравнений, то есть когда вектор B = 0, действительно обратное правило: система AX = 0 имеет нетривиальное (то есть не нулевое) решение только если $\det A = 0$. Такая связь между решениями однородных и неоднородных систем линейных уравнений носит название альтернативы Фредгольма.

Пример решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4; \\ 2x - y + 5z = 23; \\ x + 7y - z = 5; \end{cases}$$

Убедимся в том, что определитель матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений не равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 10 - 1 - 105 + 4 = -103;$$

Следующим шагом будет вычисление алгебраических дополнений для элементов матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных. Они понадобятся для нахождения обратной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -34;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

Теперь найдём союзную матрицу и транспонируем её, потом подставим в формулу для нахождения обратной матрицы.

$$C^* = \begin{pmatrix} -34 & 7 & 15 \\ -5 & -2 & -19 \\ 9 & -17 & -7 \end{pmatrix};$$

$$(C^*)^T = \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C^*)^T$$

Подставляя переменные в формулу, получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{-103} \cdot \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix};$$

Найдем неизвестные. Для этого перемножим обратную матрицу и столбец свободных членов.

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Итак, **x=2; y=1; z=4.**