4.1.3. Метод хорд

Метод хорд (пропорциональных частей, линейной интерполяции) предназначен для уточнения корня на интервале $[a, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Поскольку нам известны значения функции на концах интервала, т.е. $f(a)$ и $f(b)$, то вместо того чтобы делить отрезок пополам целесообразно разделить его пропорционально значениям функции в начальных точках $f(a):f(b)$. Таким образом, нахождение решения заключается в определении координаты точки $x = x_0$, полученной путем пересечения оси абсцисс Ox и прямой линией (хордой) проходящей через точки $\boldsymbol{A}(a; f(a))$ и $\boldsymbol{B}(b; f(b))$.

Геометрическая интерпретация метода пропорциональных частей представлена на рис. 15 для случая с монотонной функции $f(x)$ и на рис. 16 для случая, когда заданная функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$ имеет немонотонное поведение.

Запишем уравнение прямой (хорды), проходящей через точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Для нахождения точки $x = x_0$ являющейся местом пересечения хорды с осью абсцисс Ox (имеющей уравнение $y = 0$) получим уравнение

$$x_0 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбирается тот из двух $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для обоих рассмотренных выше случаев выбираем отрезок $[a, x_0]$, так как $f(a) \cdot f(x_0) < 0$.

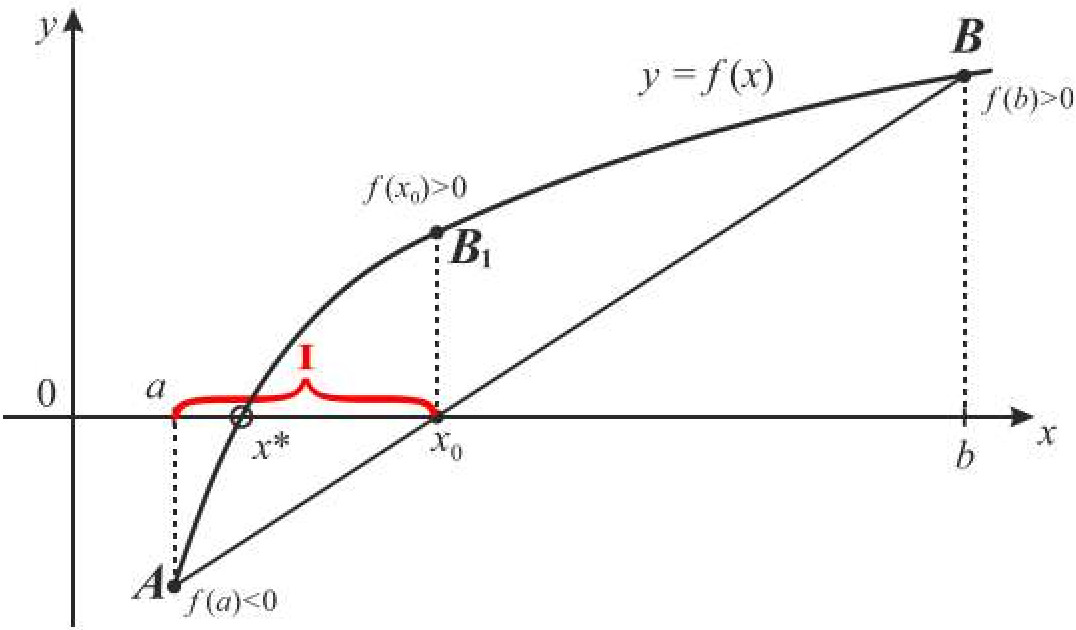

Рис. 15 – Графическое представление первой итерации метода хорд для монотонной функции

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбирается тот из двух $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для обоих рассмотренных выше случаев выбираем отрезок $[a, x_0]$, так как $f(a) \cdot f(x_0) < 0$. Следующая итерация состоит в определении нового приближения x_1 как точки пересечения хорды $\boldsymbol{AB_1}$ с осью абсцисс (рис. 17 и 18) и т.д.

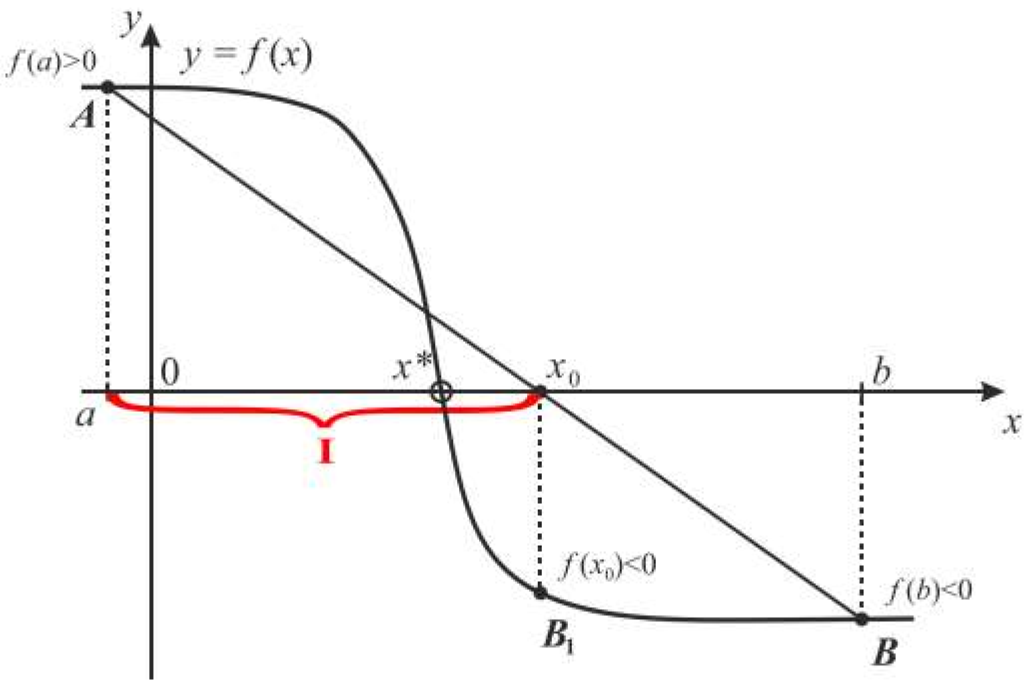

Рис. 16 – Схематичное представление первой итерации метода хорд для функции с немонотонным поведением

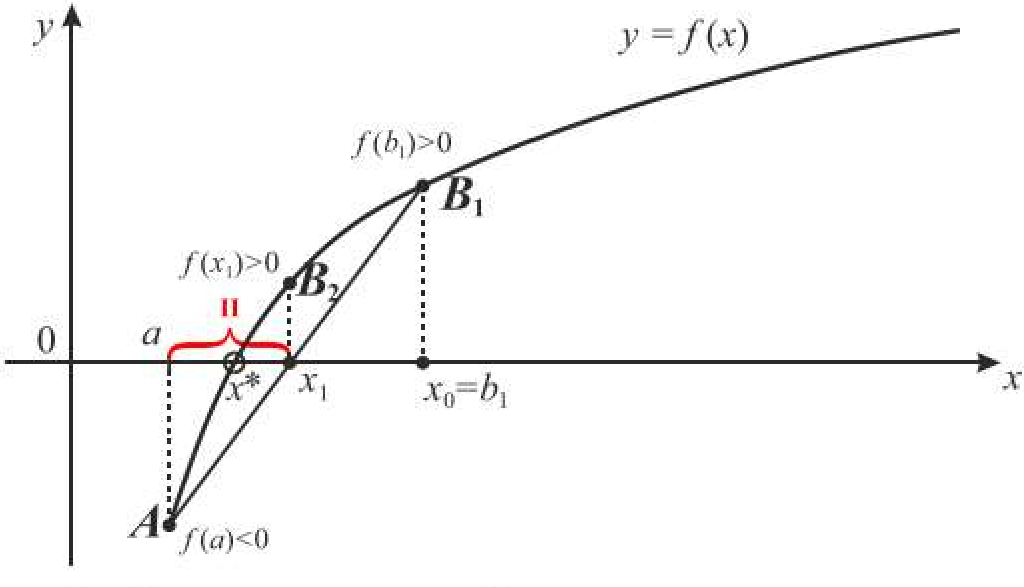

Рис. 17 – Визуализация второй итерации процесса нахождения решения с помощью метода хорд для монотонной функции

Замечание. В случае, когда заданная функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$ является монотонной (убывающей или возрастающей), то в процессе решения одна из границ a или b остаются неизменными. Как видно на рис. 15 и 17 для монотонно возрастающей функции выпуклой вверх граница a является постоянной.

В отличие от других интервальных методов, в методе хорд уменьшение длины промежутка локализации корня не является гарантированным, поэтому процесс нахождения решения сопоставляется между решениями, полученными на двух соседних итерациях.

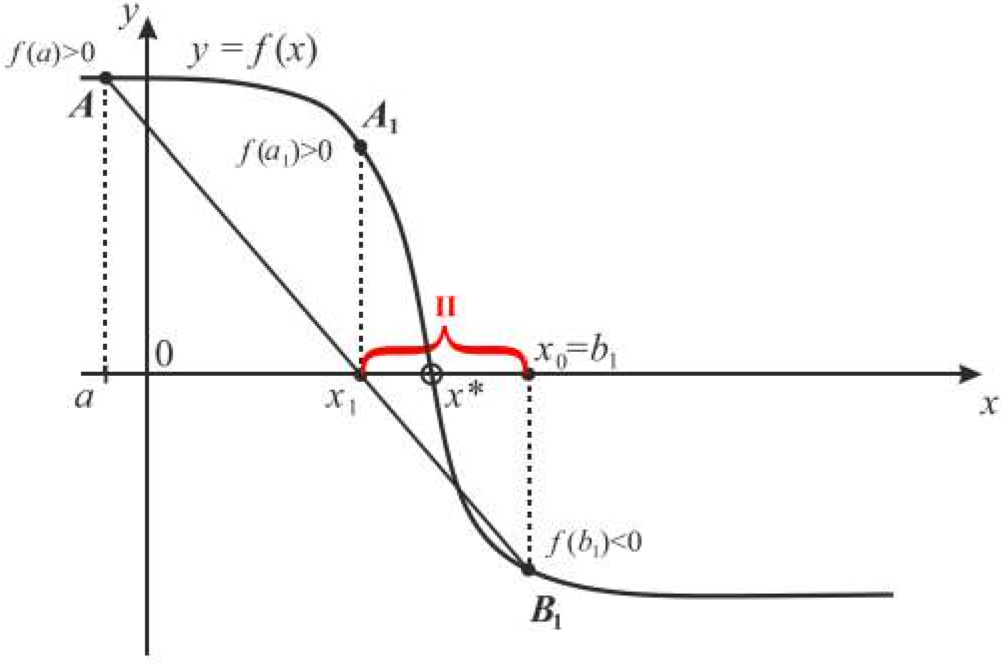

Рис. 18 – Геометрическое представление второй итерации для немонотонной функции по методу хорд

Таким образом, процесс уточнения корня заканчивается, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной точности ε, т.е. используется формула, применяемая для итерационных методов

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon .$$

Для доказательства сходимости процесса предполагается, что искомый корень отделен и вторая производная $f''(x)$ заданной функции $f(x)$ сохраняет постоянный знак на локализованном отрезке $[a, b]$.

Предположим, что $f''(x) > 0$ для $a \le x \le b$. Тогда график заданной функции будет выпуклым вниз и располагаться ниже своей хорды $\boldsymbol{AB}$, при этом возможна два варианта. Вариант 1, когда заданная функция $f(x)$ в начальной точке a является положительной, т.е. $f(a)>0$, данный случай представлен на рис. 19. Второй вариант, реализуется в случае, когда функция $f(x)$ в начальной точке a является отрицательной, т.е. $f(a)<0$, на рис. 20 проиллюстрирован этот случай.

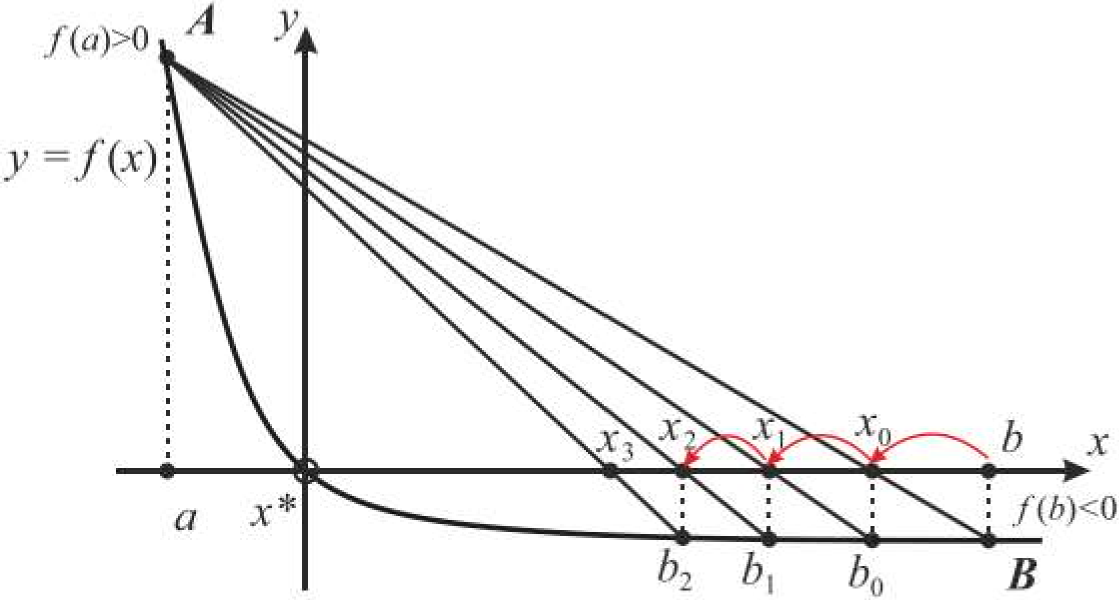

Рис. 19 – Нахождение решения нелинейного уравнения по методу хорд для функции, имеющей $f''(x)>0$ и $f(a)>0$

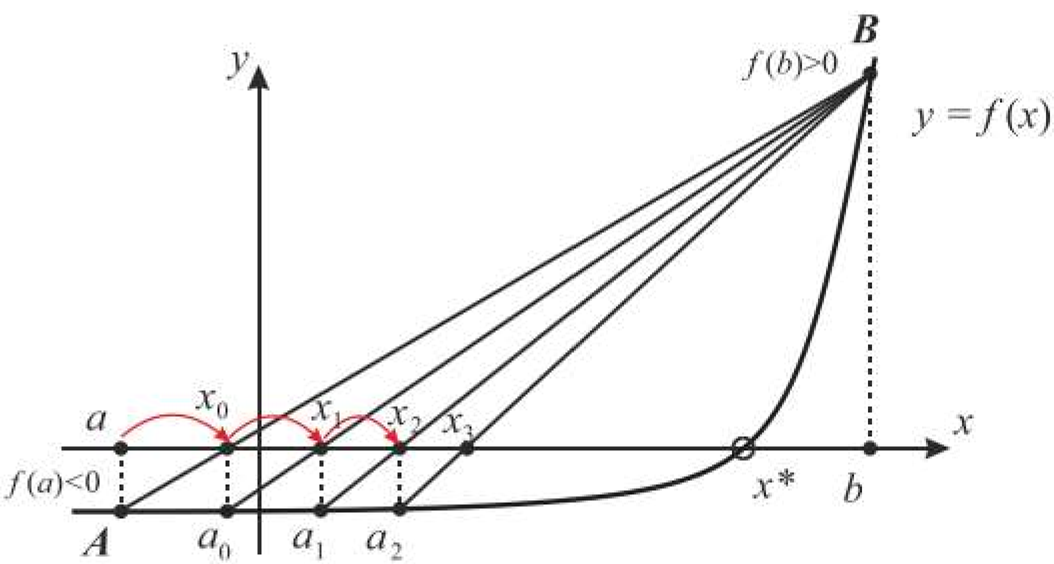

Рис. 20 – Нахождение решения нелинейного уравнения по методу хорд для функции, имеющей $f''(x)>0$ и $f(a)<0$.

Вариант 1. Левый конец начального интервала a остается неподвижным, а последовательные приближения: $x_0 = b$;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)} f(x_k),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \ldots < x_{k+1} < x_k < \ldots < x_1 < x_0 .$$

Вариант 2. Правый конец начального интервала b остается неподвижным, а последовательные приближения: $x_0 = a$;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)} f(x_k)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x^* < b .$$

Здесь видно, что 1) неподвижным является тот конец функции, у которого её знак совпадает со знаком второй производной, т.е. $f(a) > 0$ и $f''(x) > 0$ (вариант 1) или $f(b) > 0$ и $f''(x) > 0$ (вариант 2); 2) последовательность приближений x_k лежит по ту сторону от корня x^*, где функция $f(x)$ имеет противоположный знак со второй производной $f''(x)$. В обоих вариантах каждое последующее приближение x_{k+1} ближе к искомому корню x^*, чем предыдущее x_k. Пусть на интервале $[a, b]$ существует

$$\bar{x} = \lim_{k \to \infty} \{x_k\}.$$

Тогда переходя к пределу в равенстве для первого варианта, имеем

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{\bar{x} - a}{f(\bar{x}) - f(a)} f(\bar{x}),$$

отсюда $f\left(\overline{x}\right)=0$. Поскольку по предположению заданное уравнение $f\left(x\right)=0$ имеет единственный корень x^* на искомом интервале $[a, b]$, то, следовательно, $\overline{x}=x^*$, что и требовалось доказать.

Замечание. В некоторых случаях метод хорд может сходиться очень медленно, один из таких примеров представлен на рис. 21.

Метод хорд обладают гарантированной сходимостью даже для разрывных функций.

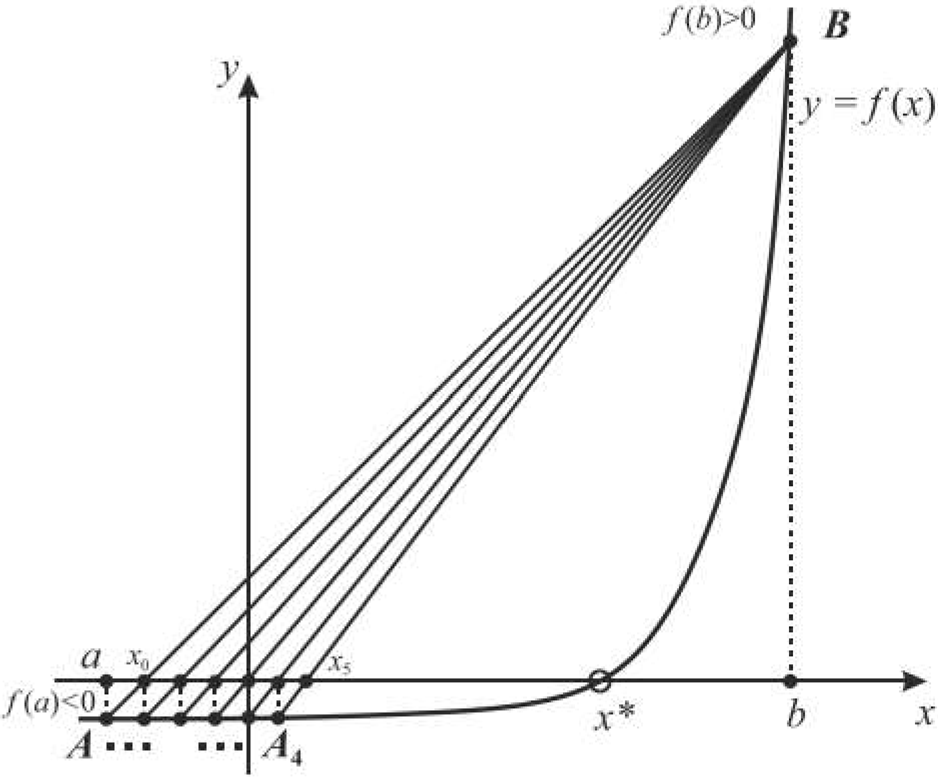

Рис. 21 – Медленное приближение к искомому решению по методу хорд

<u>Пример.</u> На интервале [1; 1,5] уточнить корень нелинейного уравнения

$$x^3-\frac{x^2+x}{5}=1,2$$

до точности $\varepsilon=10^{-3}$ применяя метод хорд.

Решение. Вначале вычисляются значения функции на концах заданного интервала

$$f(1)=1^3-\frac{1^2+1}{5}-1,2=-0,6,$$

$$f(1,5)=1,5^3-\frac{1,5^2+1,5}{5}-1,2=1,425.$$

На первом этапе определяется координата пересечения хордой оси абсцисс с помощью соотношения для метода хорд

$$x_0=1-\frac{1,5-1}{1,425-(-0,6)}\cdot(-0,6)=1+0,148148=1,148148$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$f(1,148148)=1,148148^3-\frac{1,148148^2+1,148148}{5}-1,2=$$
$$=-0,179739.$$

На втором этапе проводится анализ знаков функции и выбор интервала, на котором функция меняет знак. В данном случае осуществляется замена точки a на x_0. Таким образом, интервал, на котором продолжается поиск решения, сузился до [1,148148; 1,5]. Проводим повторный расчет первого этапа для вновь полученного интервала.

Определяется новая координата пересечения хорды с осью абсцисс

$$x_1=1,148148-\frac{1,5-1,148148}{1,425-(-0,179739)}\cdot(-0,179739)=$$
$$=1,148148+0,039409=1,187557$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$f(1,187557)=1,187557^3-\frac{1,187557^2+1,187557}{5}-1,2=$$
$$=-0,044767.$$

Проводится проверка на достижение полученным решением заданной точности

$$\left|x_1 - x_0\right| < \varepsilon,$$

$$\left|1{,}187557 - 1{,}148148\right| = 0{,}039409 < 0{,}001.$$

Убеждаемся в необходимости продолжения процесса уточнения искомого решения. Для этого исследуемый интервал изменяется и уменьшается до [1,187557; 1,5] и процесс нахождения решения продолжается.

Весь процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом хорд рационально представить в виде таблицы.

Как видно из табл. 9 после четырех повторений процедуры расчета было получено решение, которое удовлетворяет заданной точности

Таблица 9 – Решение нелинейного уравнения методом хорд

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	x	$f(x)$
0	1	-0,6	1,5	1,425	1,148148	-0,179739
1	1,148148	-0,179739	1,5	1,425	1,187557	-0,044767
2	1,187557	-0,044767	1,5	1,425	1,197074	-0,010622
3	1,197074	-0,010622	1,5	1,425	1,199315	-0,002491
4	1,199315	-0,002491	1,5	1,425	1,199840	-0,000583

$$\left|1{,}199840 - 1{,}199315\right| = 0{,}000525 < 0{,}001.$$

Отметим, что точное решение заданного нелинейного уравнения соответствует $x^* = 1{,}2$.

Ответ. Заданное нелинейное уравнение на рассматриваемом интервале имеет решение x = 1,199840, которое получено с точностью ε = 0,001.