Пример.

Для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ постройте сходящийся метод Зейделя. Вычислите первую итерацию, если начальное приближение $\overrightarrow{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Здесь

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построим метод Зейделя:

$$(L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{u}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Метод сходится, так как выполняется достаточное условие сходимости. Найдем первую итерацию:

$$\overrightarrow{u}^{(1)} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Отметим, что первая итерация совпала с точным решением СЛАУ.