Метод парабол (формула Симпсона)

Этот метод более точный по сравнению с методами прямоугольников и трапеций.

В основе формулы Симпсона лежит квадратичная интерполяция подынтегральной функции на отрезке [a,b] по трем равноотстоящим узлам.

Разобьем интервал интегрирования [a, b] на четное число n равных отрезков с шагом h.

Примем: $x_0=a$, $x_1=x_0+h$, ... , $x_n=x_0+nh=b$.

Значения функций в точках обозначим соответственно:

$$y_0=f(a);\ y_1=f(x_1);\ y_2=f(x_2);\ \ldots\ ;\ y_n=f(b).$$

На каждом отрезке $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, ..., $[x_i-1,x_i+1]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим интерполяционным многочленом второй степени.

$$f(x) \approx P_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i\text{, где } x_{i-1} \le x \le x_{i+1}. \qquad (7.13)$$

В качестве $P_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через концы каждых трех ординат:

$$y0, y1, y2\ ; y2, y3, y4\ ; y4, y5, y6; \ldots ; yn\text{-}2, yn\text{-}1, yn.$$

Формула Лагранжа для интервала $[x_i-1,x_i+1]$:

$$P_i = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \cdot y_i +$$

$$+ \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1} \quad .$$

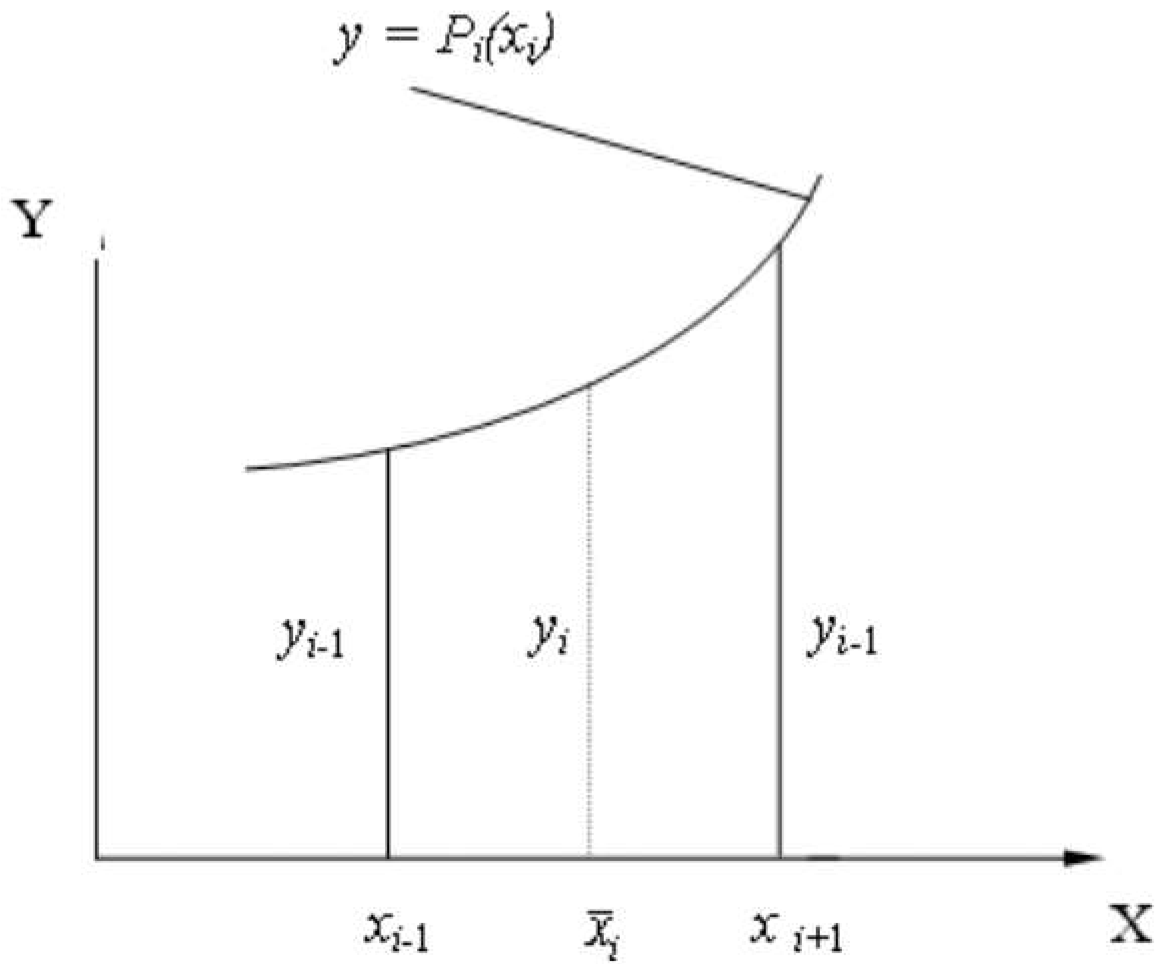

Рис. 7.6.

Элементарная площадь *si* (рис.7.6) может быть вычислена с помощью определенного интеграла. Учитывая, что x_i-x_i-1=x_i+1-x_i=h и, проведя вычисления, получим для каждого элементарного участка:

$$s_i = \int_{X_{i-1}}^{X_{i+1}} P_i(x)dx = \frac{h}{3} \cdot (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \tag{7.14}$$

После суммирования интегралов по всем отрезкам, получим составную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n] \tag{7.15}$$

Часто пользуются простой формулой Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \tag{7.16}$$