4.2 Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод используется для построения, как правило, линейных разностных схем в тех случаях, когда решение краевой задачи математической физики обладает высокой степенью гладкости.

Суть метода состоит в том, что разностная схема задаётся с точностью до конечного набора коэффициентов в соответствии с выбранным шаблоном. Далее, используя определение аппроксимации, ищется множество тех значений коэффициентов, которые обеспечивают желаемый порядок аппроксимации разностной схемы.

Проведем построение разностной схемы для следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \varphi(x), \quad x \in [0, l]; \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{4.15}$$

Зададимся целью построить разностную схему наивысшего порядка аппроксимации относительно шага дискретизации, используя шаблон, представленный на рисунке 4.4.

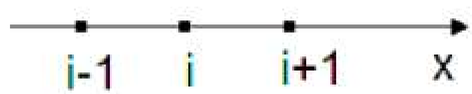

Рисунок 4.4 – Шаблон для построения разностной схемы

Запишем задачу (4.15) в операторной форме:

$$Lu = f,$$

где $Lu = \begin{Bmatrix} L^1 u \\ L^2 u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ u\big|_{x=0} \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \alpha \end{Bmatrix}.$

Воспользуемся сеткой: $x_i = ih, \quad i = \overline{0, I}; \quad h = \dfrac{l}{I}.$

Для первого уравнения $L^1 u = f^1$ задачи (4.15) будем искать аппроксимирующее сеточное уравнение $L_h^1 u_h = f_h^1$ в виде, соответствующем заданному шаблону:

$$a_0 u_{i-1} + a_1 u_i + a_2 u_{i+1} = b_0 \varphi(x_{i-1}) + b_1 \varphi(x_i) + b_2 \varphi(x_{i+1}) \tag{4.16}$$

Во-первых, потребуем, чтобы правая часть сеточного уравнения (4.16) сходилась с измельчением сетки к правой части соответствующего дифференциального уравнения, т.е. $f_h^1 \xrightarrow{h \to 0} f^1$:

$$\begin{aligned}
&\left\{f_h^1\right\}_{x_i} = b_0 \varphi(x_{i-1}) + b_1 \varphi(x_i) + b_2 \varphi(x_{i+1}) = \\
&= b_0 \left(\varphi\left(x_i\right) - h\varphi'\left(x_i\right) + O\left(h^2\right)\right) + b_1 \varphi\left(x_i\right) + b_2 \left(\varphi\left(x_i\right) + h\varphi'\left(x_i\right) + O\left(h^2\right)\right) = \\
&= \left(b_0 + b_1 + b_2\right)\varphi\left(x_i\right) + O\left(h\right) = \left(b_0 + b_1 + b_2\right)\left\{f^1\right\}_{x_i} + O\left(h\right).
\end{aligned}$$

Очевидно, что такая сходимость будет гарантирована, если выполнится условие

$$\left(b_0 + b_1 + b_2\right) = 1. \tag{4.17}$$

Во-вторых, воспользуемся определением аппроксимации и потребуем, чтобы невязка $\delta f_h^1\big|_{x_i} = \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x_i}$ обладала максимальным порядком относительно шага h. Запишем выражение для этой невязки

$$\delta f_h^1\big|_{x_i} = \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x_i} = a_0 u(x_{i-1}) + a_1 u(x_i) + a_2 u(x_{i+1}) -$$
$$-b_0\varphi(x_{i-1}) - b_1\varphi(x_i) - b_2\varphi(x_{i+1}).$$

Проведем разложение функций, входящих в выражение невязки, в точке x_i, используя формулу Тейлора, а также учтем, что в силу (4.15) справедливы равенства $\varphi(x_{i-1}) = u'(x_{i-1})$, $\varphi(x_{i+1}) = u'(x_{i+1})$. В результате получим:

$$\delta f_h^1\big|_{x_i} = \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x_i} = a_0 \left\{ u - u'h + \frac{1}{2}u''h^2 - \frac{1}{6}u'''h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}h^4 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{120}u^{(5)}h^5 + O(h^6) \right\}_{x_i} + a_1 u(x_i) + a_2 \left\{ u + u'h + \frac{1}{2}u''h^2 + \frac{1}{6}u'''h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}h^4 + \right.$$

$$+\frac{1}{120}u^{(5)}h^5+O(h^6)\Bigg\}_{x_i}-b_0\left\{u'-u''h+\frac{1}{2}u'''h^2-\frac{1}{6}u^{(4)}h^3+\frac{1}{24}u^{(5)}h^4+O(h^5)\right\}_{x_i}-$$

$$-b_1u(x_i)-b_2\left\{u'+u''h+\frac{1}{2}u'''h^2+\frac{1}{6}u^{(4)}h^3+\frac{1}{24}u^{(5)}h^4+O(h^5)\right\}_{x_i}.$$

Теперь, приравнивая нулю коэффициенты при $u(x_i)$, $u'(x_i)$, $u''(x_i)$, $u'''(x_i)$ и $u^{(4)}(x_i)$, придем к следующей системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=0, \\ h\left(-a_0+a_2\right)-b_0-b_1-b_2=0, \\ \dfrac{h^2}{2}\left(a_0+a_2\right)+\left(b_0-b_2\right)h=0, \\ \dfrac{h^2}{2}\left(a_0+a_2\right)+\left(b_0-b_2\right)h=0, \\ \left(a_0+a_2\right)\dfrac{h^4}{24}+\left(b_0-b_2\right)\dfrac{h^3}{6}=0. \end{cases}$$

Добавляя уравнение (4.17) к последней системе, будем иметь замкнутую систему уравнений для отыскания неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + b_2 = 1, \\ -a_0 + a_2 = -\dfrac{1}{h}, \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_0 + a_2 = \left(-b_0 + b_2\right)\dfrac{2}{h}, \\ -a_0 + a_2 = \left(b_0 + b_2\right)\dfrac{3}{h}, \\ a_0 + a_2 = \left(-b_0 + b_2\right)\dfrac{4}{h}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим следующие значения искомых коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0 = -\dfrac{1}{2h}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \dfrac{1}{2h}, \\ b_0 = \dfrac{1}{6}, \qquad b_1 = \dfrac{4}{6}, \quad b_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Тогда сеточное уравнение (4.16) примет вид:

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\varphi(x_{i+1}) + 4\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})}{6}. \tag{4.18}$$

Выясним, каким порядком аппроксимации относительно шага h, обладает уравнение (4.18). Подставим найденные значения коэффициентов в выражение невязки $\delta f_h^1\big|_{x_i}$. В результате получим

$$\delta f_h^1\Big|_{x_i} = \left\{L_h^1[u]_h - f_h^1\right\}_{x_i} = (-a_0 + a_2)\frac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) -$$

$$-(b_0 + b_2)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + O\left(h^5\right) = \frac{h^4}{120}u^{(5)}(x_i) - \frac{h^4}{72}u^{(4)}(x_i) + O\left(h^5\right).$$

Легко заметить, что при условии $\frac{1}{120}u^{(5)}(x_i) - \frac{1}{72}u^{(4)}(x_i) \neq 0$, или

$\varphi^{(4)}(x_i) - \frac{15}{9}\varphi^{(3)}(x_i) \neq 0$, порядок аппроксимации будет четвертым. В противном случае - более высоким.

Второе сеточное соотношение $L_h^2 u_h = f_h^2$, аппроксимирующее начальное условие задачи (4.15), целесообразно задать в виде

$$u_0 = \alpha\,, \tag{4.19}$$

поскольку погрешность аппроксимации в этом случае будет равна нулю.

Заметим, что условия (4.19) недостаточно для расчета сеточного решения с помощью уравнения (4.18). Построим еще одно сеточное условие $L_h^3 u_h = f_h^3$, которое устранит замеченный недостаток. Зададим его в виде

$$u_1 = \beta(h), \tag{4.20}$$

где $\beta(h)$ - неизвестная функция. Будем искать эту функцию, требуя, чтобы условие (4.20) имело порядок аппроксимации не ниже четвёртого. Запишем невязку

$$\delta f_h^3\Big|_{x_1} = \left\{L_h^3[u]_h - f_h^3\right\}_{x_1} = u(x_1) - \beta(h) = u(h) - \beta(h) =$$

$$= u(0) + u'(0)h + \frac{1}{2}u''(0)h^2 + \frac{1}{6}u'''(0)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(0)h^4 + O(h^5) - \beta(h) =$$

$$= \alpha + \varphi(0)h + \frac{1}{2}\varphi'(0)h^2 + \frac{1}{6}\varphi''(0)h^3 + \frac{1}{24}\varphi'''(0)h^4 + O(h^5) - \beta(h).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\beta(h) = \alpha + \varphi(0)h + \frac{1}{2}\varphi'(0)h^2 + \frac{1}{6}\varphi''(0)h^3. \qquad (4.21)$$

Тогда будем иметь: $\delta f_h^3\Big|_{x_1} = \frac{1}{24}\varphi'''(0)h^4 + O(h^5)$, т.е. порядок аппроксимации условия (4.20) будет не ниже четвертого.

Записывая сеточные соотношения (4.18), (4.19) и (4.20) в виде единой системы, будем иметь следующую разностную схему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=\dfrac{\varphi(x_{i+1})+4\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})}{6}, \;\; i=\overline{1,I-2}; \\
u_0=\alpha; \\
u_1=\alpha+\varphi(0)h+\dfrac{1}{2}\varphi'(0)h^2+\dfrac{1}{6}\varphi''(0)h^3.
\end{cases}
\tag{4.22}
$$

Эта схема аппроксимирует задачу (4.15) с четвертым порядком относительно шага h.

Для построения разностной схемы методом неопределенных коэффициентов можно воспользоваться следующим ***планом*** действий:

1 шаг. Задать шаблон, в соответствии с которым будет строиться аппроксимирующая разностная схема (шаблон задает структуру будущей схемы).

2 шаг. Задать разностную схему $L_h u_h = f_h$ с помощью, например, линейной комбинации значений сеточной функции u_h и правой части f_h в узлах шаблона.

3 шаг. Для нахождения коэффициентов линейной комбинации необходимо:

во-первых, обеспечить за счет наложения ограничений на выбор коэффициентов выполнение свойства сходимости сеточной функции f_h к функции f при измельчении сетки, т.е. потребовать выполнения условия $f_h \xrightarrow{h\to 0} f$;

во-вторых, записать разложения по формуле Тейлора всех значений функции u, входящих в выражение для невязки $\delta f_h = \{L_h[u]_h - f_h\}$, в окрестности выбранного узла шаблона;

в-третьих, подставить полученные разложения в выражение для невязки $\delta f_h = \{L_h[u]_h - f_h\}$ и, приравнивая к нулю коэффициенты при значении функции u в выбранном узле, а также ее производных первого, второго и т.д. порядков, получить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов линейной комбинации;

в-четвертых, решить систему и найти значения коэффициентов.

4 шаг. Определить порядки аппроксимации относительно шагов сетки, подставив найденные значения коэффициентов в выражение для погрешности аппроксимации $\|\delta f_h\|_{F_h}$ и выделив ненулевые слагаемые наименьших порядков относительно шагов сетки.