3 Приближенное вычисление интегралов. Ряд Тейлора. Разложение функций в степенной ряд.

1. Определения и формулы для решения задач

Определение. Степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ \forall x\in X$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ на множестве X.

Частный случай ряда Тейлора при $a=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

называется рядом Маклорена.

При а = 0 формула Тейлора переходит в формулу Маклорена:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}^{(2)}}.$$

Пример:

Представить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\frac{1}{1+x}$, ограничившись n=2.

Решение:

Вычислим три первых производных заданной функции:

$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$; $f'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$. При x = 0 получим $f(0)=1$; $f'(0)=-1$; $f''(0)=2$. Остаточный член имеет вид $R_{n+1}^{(2)}=-\frac{6}{(1+\xi)^4}$. Следовательно, при n = 2 заданная функция по формуле Маклорена имеет вид: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{(1+\xi)^4}$, где $\xi\in(0;x)$. Отметим, что полученное выражение справедливо при $x>-1$. Решим найденное равенство относительно величины ξ: $\frac{x^3}{(1+\xi)^4}=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$. Отсюда получаем $(1+\xi)^4=1+x$. Следовательно, $\xi_{1,2}=-1\pm\sqrt[4]{1+x}$. Так как выражение под радикалом 4-ой степени должно быть неотрицательным и $x\neq-1$, то $x>-1$. Таким образом, из двух корней теореме Тейлора удовлетворяет только корень $\xi_1=-1+\sqrt[4]{1+x}$, который действительно лежит между нулем и x.

Замечание: При n = 0 формула Тейлора дает формулу конечных приращений:

$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ (см. теорему Лагранжа Т3 *Лекции №18*). При n = 1 получаем $f(b)-f(a)=f'(a)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2$. Если положить $a=x$ и $b=x+\Delta x$, то получим формулу

$f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x=\frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2$ или $\Delta f-df=\frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2$.