Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Рассмотрим систему линейных уравнений с действительными постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & y_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & y_m \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = Y$$

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений включает в себя 2 стадии:

- последовательное (прямое) исключение;
- обратная подстановка.

Последовательное исключение

Исключения Гаусса основаны на идее последовательного исключения переменных по одной до тех пор, пока не останется только одно уравнение с одной переменной в левой части.

Затем это уравнение решается относительно единственной переменной.

Таким образом, систему уравнений приводят к треугольной (ступенчатой) форме. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой (а чаще максимальный) элемент и перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк.

Затем нормируют все уравнения, разделив его на коэффициент a_{i1}, где i – номер столбца.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + & \ldots + & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = & \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot x_2 + & \ldots + & \frac{a_{2n}}{a_{21}} \cdot x_n = & \frac{y_2}{a_{21}} \\ \ldots \\ x_1 + \frac{a_{m2}}{a_{m1}} \cdot x_2 + & \ldots + & \frac{a_{mn}}{a_{m1}} \cdot x_n = & \frac{y_m}{a_{m1}} \end{cases}$$

Затем вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк:

$$\begin{cases} x_1 + & \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + & \ldots + & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = & \frac{y_1}{a_{11}} \\ 0 + & \left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + & \ldots + & \left(\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = & \left(\frac{y_2}{a_{21}} - \frac{y_1}{a_{11}}\right) \\ \ldots \\ 0 + & \left(\frac{a_{m2}}{a_{m1}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + & \ldots + & \left(\frac{a_{mn}}{a_{m1}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = & \left(\frac{y_m}{a_{m1}} - \frac{y_1}{a_{11}}\right) \end{cases}$$

Получают новую систему уравнений, в которой заменены соответствующие коэффициенты.

$$\begin{cases} x_1 & +a_{12}\prime \cdot x_2 + & \ldots + & a_{1n}\prime \cdot x_n = & y_1\prime \\ 0 & +a_{22}\prime \cdot x_2 + & \ldots + & a_{2n}\prime \cdot x_n = & y_2\prime \\ \ldots \\ 0 & +a_{m2}\prime \cdot x_2 + & \ldots + & a_{mn}\prime \cdot x_n = & y_m\prime \end{cases}$$

После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают указанный процесс для всех последующих уравнений пока не останется уравнение с одной неизвестной:

$$\begin{cases} x_1 & + & a_{12}\prime \cdot x_2 & + & a_{13}\prime \cdot x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}\prime \cdot x_n & = & y_1\prime \\ 0 & + & x_2 & + & a_{23}\prime\prime \cdot x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}\prime\prime \cdot x_n & = & y_2\prime\prime \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}\prime\prime\prime \cdot x_n & = & y_3\prime\prime\prime \\ \ldots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & x_n & = & y_m^n\prime \end{cases}$$

Обратная подстановка

Обратная подстановка предполагает подстановку полученного на предыдущем шаге значения переменной x_n в предыдущие уравнения. Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

$$x_{n-1} = y_{n-1}^{(n-1)\prime} — a_{(n-1)n}^{(n-1)\prime} \cdot x_n$$

$$x_{n-2} = y_{n-2}^{(n-2)\prime} — a_{(n-2)n}^{(n-2)\prime} \cdot x_n — a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)\prime} \cdot x_{n-1}$$

$$\ldots$$

$$x_2 = y_2^{\prime\prime} — a_{2n}^{\prime\prime} \cdot x_n — a_{2(n-1)}^{\prime\prime} \cdot x_{(n-1)} — \ldots — a_{23}^{\prime\prime} \cdot x_3$$

$$x_1 = y_1^{\prime} — a_{1n}^{\prime} \cdot x_n — a_{1(n-1)}^{\prime} \cdot x_{(n-1)} — \ldots — a_{13}^{\prime} \cdot x_3 — a_{12}^{\prime} \cdot x_2$$

Обратная подстановка

Обратная подстановка предполагает подстановку полученного на предыдущем шаге значения переменной x_n в предыдущие уравнения. Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

$$x_{n-1} = y_{n-1}^{(n-1)\prime} — a_{(n-1)n}^{(n-1)\prime} \cdot x_n$$

$$x_{n-2} = y_{n-2}^{(n-2)\prime} — a_{(n-2)n}^{(n-2)\prime} \cdot x_n — a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)\prime} \cdot x_{n-1}$$

$$\ldots$$

$$x_2 = y_2'' — a_{2n}'' \cdot x_n — a_{2(n-1)}'' \cdot x_{(n-1)} — \ldots — a_{23}'' \cdot x_3$$

$$x_1 = y_1' — a_{1n}' \cdot x_n — a_{1(n-1)}' \cdot x_{(n-1)} — \ldots — a_{13}' \cdot x_3 — a_{12}' \cdot x_2$$

Иллюстрирующий пример

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot x_1+4\cdot x_2+1\cdot x_3 &= 36 \\ 5\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3 &= 47 \\ 2\cdot x_1+3\cdot x_2+4\cdot x_3 &= 37 \end{cases}$$

Или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Выбираем строку с максимальным коэффициентом a_{i1} и меняем ее с первой.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 47 \\ 36 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Нормируем уравнения относительно коэффициента при x_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{4}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{47}{5} \\ \frac{36}{2} \\ \frac{37}{2} \end{pmatrix}$$

Вычитаем 1 уравнение из 2 и 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 1,6 & 0,3 \\ 0 & 1,1 & 1,8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9,4 \\ 8,6 \\ 9,1 \end{pmatrix}$$

Выбираем строку с наибольшим коэффициентом при a_{i2} (уравнение 1 не рассматривается) и перемещаем ее на место уравнения 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 1,6 & 0,3 \\ 0 & 1,1 & 1,8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9,4 \\ 8,6 \\ 9,1 \end{pmatrix}$$

Нормируем 2 и 3 уравнения относительно коэффициента при x_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0,1875 \\ 0 & 1 & 1,636 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9,4 \\ 5,375 \\ 8,272 \end{pmatrix}$$

Вычитаем уравнение 2 из 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0,1875 \\ 0 & 0 & 1,4489 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9,4 \\ 5,375 \\ 2,897 \end{pmatrix}$$

Нормируем уравнение 3 относительно коэффициента при x_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0,1875 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9,4 \\ 5,375 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем $x_3 = 2$. Подставляем полученное значение в уравнения 2 и 1, получаем

$$x_2 = 5,375 - 0,175\cdot x_3 = 5,375 - 0,175\cdot 2 = 5$$

$$x_1 = 9,4 - 0,2\cdot x_3 — 0,4\cdot x_2 = 9,4 - 0,2\cdot 2 — 0,4\cdot 5 = 7$$

Таким образом, решением системы уравнений будет вектор

$$X = (7\ \ 5\ \ 2)^T$$