

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО
ТРАНСПОРТА
ФГБОУ ВО
СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВОДНОГО ТРАНСПОРТА

519
Ж 721

А. А. Жилин

**ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ.
Исследование и решение нелинейных уравнений**

Учебное пособие

Новосибирск 2022

УДК 619
Ж 721

Жилин, Александр Анатольевич.

Прикладные математические методы. Исследование и решение нелинейных уравнений: учебное пособие / А .А. Жилин – Новосибирск: Сибир. гос. унив. водн. трансп., 2022 – 147 с.

ISBN 978-5-8119-0924-7

Учебное пособие подготовлено для бакалавров, обучающихся по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов в цикле математических и естественнонаучных дисциплин по дисциплинам «Компьютерные технологии в научных исследованиях», «Численные методы расчета на ЭВМ», «Вычислительная математика» и «Информатика» в области теоретических и практических вопросов и для оценки собственных знаний студентами путем решения типовых задач.

Работа подготовлена на кафедре «Информационных систем» СГУВТ.

Рекомендовано в печать редакционно-издательским советом ФГБОУ ВО «СГУВТ» протокол № 65 от .

Рецензенты:

Бедарев И.А., к.ф.-м.н, доцент кафедры «Прикладная математика», Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет;

Бузюргин А.Е., к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.Христиановича СО РАН.

© Жилин А. А., 2022

© ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет водного транспорта», 2022

"Трудно найти корень нелинейного уравнения на бесконечном промежутке, особенно когда его там нет"

Интерпретация Конфуция

ВВЕДЕНИЕ

Решение нелинейных уравнений является одной из важнейших проблем математического анализа. Практическая необходимость решения таких уравнений возникает при математическом моделировании многочисленных и разнообразных физических, химических, технических и вычислительных задач.

Поэтому одной из задач является обоснованный выбор эффективного метода решения нелинейного уравнения. Современные пакеты прикладных программ имеют в своем арсенале большое количество методов для решения практически любых нелинейных уравнений. Следовательно, изучение основ численных методов позволит сделать оптимальный выбор с учетом особенностей поставленной задачи, знать слабые и сильные стороны каждого метода, а самое главное границы их применимости.

Цели. Данное учебное пособие направлено на предоставление студентам справочной информации для самостоятельной подготовки по теме «Методы решения нелинейных уравнений» в рамках дисциплины «Прикладные математические методы». Учебное пособие состоит из четырех разделов. Задачей первого раздела является сформировать общие представления о нелинейных уравнениях и методах их решениях. Второй раздел посвящен рассмотрению способов определения области существования как действительных, так и мнимых корней нелинейного алгебраического уравнения. В разделе три рассмотрены способы локализации интервала, на котором находится один корень нелинейного уравнения. Четвертый раздел содержит основные численные методы позволяющие уточнить корень нелинейного уравнения до заданной точности. В заключение каждого раздела даны варианты заданий для выполнения лабораторной работы. Также в учебном пособии представлен перечень основных вопросов для самостоятельной проверки своих знаний по методам решения

нелинейных уравнение и подготовке к защите выполненных лабораторных работ.

Сегодня имеется большое количество источников литературы по данной теме [1-13]. Однако в большинстве из них рассматриваются только отдельные, как правило, базовые методы решения нелинейных уравнений, в результате чего у обучающихся не создается целостной картины, которая бы позволила им выполнить классификацию изучаемых методов. В тоже время предлагаемая автором группировка излагаемого материала позволяет создать необходимые предпосылки позволяющие инициировать условия для максимального ускорения и облегчения процесса усвоения материала. Именно для этой цели было разработано данное учебное пособие.

Знания и навыки, полученные в результате изучения дисциплины, используются в последующих курсах учебного плана (дисциплины «Инструментальные средства информационных систем» и др.), в выпускных дипломных работах и в профессиональной деятельности выпускников.

Дисциплина «Прикладные математические методы» является одним из тех базисных элементов, на которых строится здание, называемое «Информационные системы и технологии». По сути, это основание направления 09.03.02.

1. Понятие нелинейное уравнение

1.1. Понятие корень уравнения

В общем случае **нелинейное уравнение** с одним неизвестным можно записать в виде:

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция аргумента x .

В зависимости от вида функции $f(x)$ нелинейные уравнения подразделяются на два класса – **алгебраические и трансцендентные**.

Алгебраическое уравнение – уравнение, в котором функция $f(x)$ является алгебраическим многочленом. В общем случае алгебраическое уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – коэффициенты уравнения (заданные действительные или комплексные числа),
 x – искомое неизвестное число.

Показатель n называют степенью алгебраического уравнения.
Пример алгебраических уравнений

$$x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = 0,$$

$$x^3 + (2 - 3i)x^2 - (1 + i)x + 2 - 5i = 0.$$

Все остальные уравнения являются неалгебраическими и называются трансцендентными. **Трансцендентное уравнение** – уравнение, в котором функция $f(x)$ является трансцендентной и может содержать тригонометрические, показательные, логарифмические и другие функции, не являющиеся алгебраическими.

Пример трансцендентных уравнений

$$e^x + \sin(x^2) - 2x + 1 = 0,$$

$$\ln(x) - x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1} - \frac{2}{x} = 0.$$

Корнем уравнения (1.1) или нулем функции $f(x)$ называется число x^* , если

$$f(x^*) = 0.$$

Простой (однократный) корень уравнения – число x^* , обращающее функцию $f(x)$ в нуль. Если в точке $x = x^*$ вместе с функцией обращаются в ноль и ее производные до $k - 1$ порядка включительно, то число x^* называется корнем k -ой кратности. Математически выражение для корня k -ой кратности представляется в виде

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0,$$

при этом

$$f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

1.2. Геометрическое представление корня уравнения

Геометрически простым (однократным) корнем нелинейного уравнения x^* является точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс Ох. На рис. 1. представлен простой корень уравнения (1.1).

На рис. 2. представлен корень нелинейного уравнения x^* с кратностью 2. Из рисунка видно, что график функции $y = f(x)$ касается оси абсцисс в точке x^* , т.е. $f(x^*) = 0$. Кроме этого в точке x^* график функции $y = f(x)$ имеет минимальное значение, что соответствует экстремуму заданной функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале, т.е. $f'(x^*) = 0$. При этом в данной точке x^* представленный график функции не имеет перегиба, таки образом вторая производная в рассматриваемой точке отлична от нуля $f''(x^*) \neq 0$. Следовательно, найденный корень не может иметь кратность выше второй.

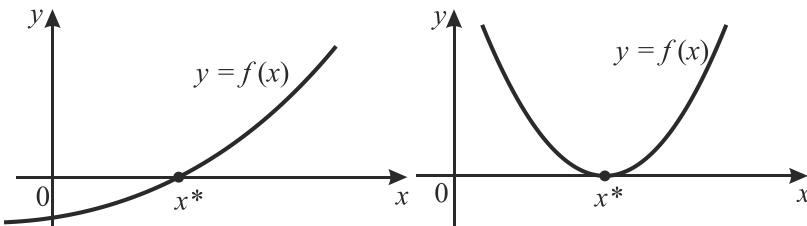


Рис. 1 – Однократный корень
нелинейного уравнения

Рис. 2 – Корень нелинейного
уравнения кратности два

1.3. Формулировка задачи численного решения нелинейного уравнения и этапы получения

Методы решения нелинейных уравнений делятся на **точные** и **численные**.

Точные (аналитические, прямые) методы позволяют путем различных преобразований упростить уравнение и записать решение в виде соотношения (формулы). При этом значения корней могут быть вычислены по этой формуле за конечное число арифметических операций.

Численные методы позволяют решить любое нелинейное уравнение с помощью серии повторяющихся арифметических действий, в результате которых получается приближенное значение корня в виде числа с заданной точностью.

При численном подходе задача о решении нелинейных уравнений распадается на несколько подзадач:

I. Анализ количества, характера и расположения корней (обычно путем построения графика функции или исходя из физического смысла исследуемой модели). Здесь возможно несколько вариантов:

- единственный корень;
- бесконечное множество решений;
- корней нет;
- имеется несколько решений, как действительных, так и мнимых (например, для полинома степени n). Корни четной кратности выявить сложно.

II. Локализация корней (разбиение на интервалы) и выбор начального приближения к каждому корню.

Если в двух соседних узлах функция будет иметь разные знаки, то между этими узлами лежит нечетное число корней уравнения (по меньшей мере, один).

III. Уточнение каждого (или интересующего нас) **корня** уравнения с требуемой точностью.

1.4. Точные методы нахождения корней

Решение алгебраических уравнений с использованием точных методов рассмотрим для случая линейных, квадратных и ряда других равенств.

Линейное уравнение в общем виде имеет вид:

$$ax + b = 0,$$

где x – искомое неизвестное число,

a и b – известные коэффициенты.

Неизвестное выражается с помощью следующего математического соотношения

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Пример. Найти аналитическое решение линейного алгебраического уравнения

$$3x - 9 = 0.$$

Решение. Свободный член заданного уравнения переносится в правую часть равенства с учетом смены знака и делится на коэффициент, стоящий при неизвестном. В результате проведенных преобразований находится точное решение заданного уравнения

$$x = 3.$$

Ответ. Корень алгебраического уравнения равен 3.

Процесс решения квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

в общем виде состоит из двух этапов.

Первый этап заключается в определении количества и типа корней. Для этого на данном этапе осуществляется вычисление дискриминанта с помощью выражения $D = b^2 - 4ac$ и определения его знака. В зависимости от знака дискриминанта возможно три варианта:

- 1) если $D > 0$, то решением квадратного уравнения являются два действительных корня;
- 2) если $D = 0$, то решением квадратного уравнения является один действительный корень;
- 3) если $D < 0$, то решением квадратного уравнения являются два мнимых корня.

Второй этап позволяет найти искомые корни заданного уравнения. Для этого используются следующие выражения

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример. Найти точное решение квадратного уравнения

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Решение. Определение дискриминанта

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1$$

свидетельствует о наличии двух действительных корней. Значения корней

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{5 + 1}{2 \cdot 3} = 1.$$

Ответ. Корнями квадратного уравнения являются два решения $x_1 = \frac{2}{3}$ и $x_2 = 1$.

Уравнение третьей степени или кубическое уравнение в общем случае имеет следующий вид:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Процесс нахождения решения можно разделить на два этапа. На первом этапе проводится ряд замен переменных с целью сведения исходного уравнения к квадратному. При первой замене осуществляется переход к новой переменной y с помощью следующего выражения

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

В результате реализуется переход от четырехчленного к трехчленному кубическому уравнению в канонической форме (или приведенному виду), в котором отсутствует член с неизвестным в квадрате:

$$y^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0,$$

или

$$y^3 + py + q = 0,$$

$$\text{где } p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Далее проводится вторая замена, в рамках которой вводится ещё одна новая переменная z в виде

$$y = z - \frac{p}{3z}.$$

Заменяемая переменная подставляется в ранее полученное трехчленное кубическое уравнение, что позволяет получить следующее выражение:

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0.$$

Проводя последнюю замену $z^3 = u$ и умножая каждое слагаемое выписанного выше уравнения на u , получаем следующее квадратное уравнение

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Второй этап заключается в конструировании решения. Для этого полученное квадратное уравнение решается стандартным образом и имеет два решения:

$$u_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad u_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Далее осуществляется подстановка найденных решений в выражение для определения z , которое имеет следующий вид

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Найденные значения z_1 и z_2 используются в формуле Кардано для нахождения корней кубического уравнения, записанного в канонической форме:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2, \\ y_2 &= -\frac{z_1 + z_2}{2} + i \frac{z_1 - z_2}{2} \sqrt{3}, \\ y_3 &= -\frac{z_1 + z_2}{2} - i \frac{z_1 - z_2}{2} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Поскольку величины z_1 и z_2 являются решениями кубических уравнений, то они имеют по три корня. Из всех возможных пар z_1 и z_2 необходимо выбирать такие, для которых выполняется следующее условие:

$$z_1 z_2 = -\frac{p}{3}.$$

После проведения обратного перехода от y к x будут получены конечные формулы для определения корней общего уравнения третьей степени.

Таким образом, алгоритм получения решения приведенного кубического уравнения можно представить в следующем виде:

1) вычисляется дискриминант

$$Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3;$$

2) если все коэффициенты неполного кубического уравнения являются вещественными, то и дискриминант будет вещественным числом, тогда по его знаку определяется тип получаемых корней:

- a) если $Q > 0$, то решением являются один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня;
- b) если $Q = 0$, то решением является один однократный вещественный корень и один двукратный;
- c) если $Q < 0$, то решением уравнения являются три вещественных корня;

3) при положительном значении дискриминанта ($Q > 0$), производится вычисление трех кубических корней по формуле Кардано;

4) при $Q = 0$ имеем $z_1 = z_2 = \sqrt[3]{-q/2}$, что позволяет определить один корень: $y_1 = 2z_1$ и два кратных корня: $y_2 = y_3 = -z_1$; здесь также возможен и тривиальный случай, когда $p = q = 0$ в этом случае все три корня приведенного уравнения являются кратными: $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

5) в неприводимом случае с отрицательным значением дискриминанта ($Q < 0$), для определения выражений трех корней приведенного кубического уравнения более целесообразно применить тригонометрическую формулу Виета:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$y_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right),$$

где

$$\cos \alpha = -\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3};$$

6) рассчитываем значения корней исходного уравнения по формуле для x .

Следовательно, получены значения трех корней исходного уравнения в общем виде. При $Q=0$ два или три корня являются кратными (равными).

Пример. Найти решение кубического уравнения.

$$x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0.$$

Решение. Проводим замену переменных

$$x = y - \frac{b}{3a} = y - \frac{2}{3}$$

и приводим исходное уравнение к каноническому виду

$$y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{25}{27} = 0,$$

то есть

$$p = -\frac{1}{3}, q = \frac{25}{27}.$$

Для конструирования решения определяем значение дискриминанта

$$Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{25}{2 \cdot 27}\right)^2 - \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 = \frac{25^2}{2^2 \cdot 3^6} - \frac{1}{3^6} = \frac{625}{2^2 \cdot 3^6} - \frac{1}{3^6} = \frac{621}{2^2 \cdot 3^6}.$$

Поскольку знак дискриминанта положительный, то решением приведенного уравнения являются один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня. Значения корней определяются с помощью формулы Кардано для этого определяются значения z :

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{25}{2 \cdot 3^3} - \frac{3\sqrt{69}}{2 \cdot 3^3}} = -\frac{\sqrt[3]{25 - 3\sqrt{69}}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}},$$

$$z_2 = \sqrt[3]{-\frac{25}{2 \cdot 3^3} + \frac{3\sqrt{69}}{2 \cdot 3^3}} = -\frac{\sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}}.$$

Найденные значения z применяются для нахождения корней кубического уравнения записанного в канонической форме

$$\begin{aligned}y_1 &= -\frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}}, \\y_2 &= \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} - i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} - \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}}, \\y_3 &= \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} + i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} - \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}}.\end{aligned}$$

В результате получаем решение заданного исходного кубического уравнения:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} - \frac{2}{3}, \\x_2 &= \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} - i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} - \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} - \frac{2}{3}, \\x_3 &= \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} + i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{25-3\sqrt{69}} - \sqrt[3]{25+3\sqrt{69}}}{6 \cdot \sqrt[3]{2}} - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ответ. Приближенными корнями кубического уравнения являются одно действительное решение $x_1 \approx -1,755$ и два комплексно сопряжённых: первый – $x_2 = 0,544 + 2,815i$, второй – $x_3 = 0,544 - 2,815i$.

Для получения точного решения алгебраического уравнения четвертого порядка в общем случае:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

когда действительные коэффициенты a, b, c, d и e отличны от нуля, применяется метод Феррари.

Алгоритм получения решения данного уравнения разделяется на два этапа. Первый этап связан с заменой переменных для сведения исходного пятичленного уравнения к четырехчленному виду. Для этого всё уравнение делится на коэффициент a стоящий при неизвестном с максимальной степенью

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Вводится новая переменная y , переход к которой осуществляется с помощью следующего выражения

$$x = y - \frac{A}{4}.$$

В результате реализуется переход к приведенному виду, в котором отсутствует член с неизвестным в кубе:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \text{ где}$$

$$p = B - \frac{3}{8}A^2, \quad q = \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2} + C, \quad r = -\frac{3A^4}{256} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D.$$

На втором этапе полученное приведенное уравнение разлагается на два множителя:

$$\begin{aligned} & \left(y^2 + \xi - y\sqrt{2\xi - p} + \frac{q}{2\sqrt{2\xi - p}} \right) \times \\ & \times \left(y^2 + \xi + y\sqrt{2\xi - p} - \frac{q}{2\sqrt{2\xi - p}} \right) = 0, \end{aligned}$$

путем добавления и вычитания из левой части четырехчленного уравнения следующего выражения

$$2y^2\xi + \xi^2.$$

При разложении приведенного уравнения была введена новая переменная ξ , которая является одним из решений кубического уравнения

$$\xi^3 - \frac{p}{2}\xi^2 - r\xi + \frac{rp}{2} - \frac{q^2}{8} = 0.$$

Представленное кубическое уравнение является резольвентой приведенного уравнения четвертой степени. Решение

кубического уравнения может быть получено методом Кардано, который был рассмотрен ранее.

Каждый из множителей представляет собой квадратное уравнение относительно y и может быть решен с помощью вычисления дискриминанта. Полученные четыре решения y позволяют найти искомые неизвестные x .

Подытоживая, выпишем последовательность действия для получения решения алгебраического уравнения четвертого порядка вида:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

1) находится один из корней кубического уравнения

$$\xi^3 - B\xi^2 + (AC - 4D)\xi - A^2D + 4BD - C^2 = 0;$$

2) решаются два квадратных уравнения

$$x^2 + \frac{A}{2}x + \frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B + \xi\right)x^2 + \left(\frac{A}{2}\xi - C\right)x + \frac{\xi^2}{4} - D} = 0.$$

Пример. Найти решение алгебраического уравнения четвертого порядка

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0.$$

Решение. Согласно рассмотренному методу Феррари составляется кубическое уравнение в следующем виде

$$\xi^3 - 3\xi^2 + 21\xi - 19 = 0.$$

Нетрудно заметить, что одним из решений данного уравнения является единица.

Полученное решение кубического уравнения позволяет выписать два квадратных уравнения

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} = 0.$$

Подкоренное выражение является полным квадратом

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Таким образом, получены два уравнения:

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Решением первого уравнения являются два комплексно-сопряжённых корня:

$$x_1 = -1 + i\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x_2 = -1 - i\sqrt{2}.$$

Решением второго уравнения являются два действительных корня:

$$x_3 = 1 \quad \text{и} \quad x_4 = -2.$$

Ответ. Корнями искомого уравнения являются два комплексно сопряжённых: первый – $x_1 = -1 + i\sqrt{2}$, второй – $x_2 = -1 - i\sqrt{2}$ и два действительных: $x_3 = 1$ и $x_4 = -2$.

Решение трансцендентных уравнений рассмотрим на примере тригонометрического, показательного и логарифмического уравнения.

Решение тригонометрических уравнений основано на применении основных формул тригонометрии, которые связывают тригонометрические функции между собой и позволяют преобразовывать тригонометрические выражения.

Пример. Найти решение тригонометрического уравнения

$$2\sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x.$$

Решение. Для решения применим тригонометрическую формулу преобразования произведения в сумму к левой части уравнения

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x.$$

Проводя сокращение, получаем простейшее тригонометрическое уравнение в следующем виде

$$\cos 8x = 0.$$

Полученное уравнение имеет следующее решение

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \text{где } k \text{ – целое число.}$$

Таким образом, искомое неизвестное находится

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8}k.$$

Ответ. Корнями искомого уравнения является бесконечное множество решений $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8}k$.

Показательное уравнение содержит неизвестное в показателе степени и для получения его решения необходимо преобразовать к алгебраическому виду.

Пример. Найти решение показательного уравнения

$$3^x - 3^{x+3} = -78.$$

Решение. Для решения выносится меньший общий множитель за скобки

$$3^x(1 - 3^3) = -78.$$

Проводя сокращение, получаем простейшее показательное уравнение в виде

$$3^x = 3.$$

Полученное уравнения имеет следующее решение

$$x = 1.$$

Ответ. Корнем заданного показательного уравнения является $x = 1$.

Решение логарифмических уравнений строится на основных формулах логарифмирования и сведении сложного уравнения к более простому виду.

Пример. Найти решение логарифмического уравнения

$$\log_2(2x + 4) = 3.$$

Решение. Чтобы исходное логарифмическое уравнение привести к алгебраическому виду необходимо правую часть уравнения выразить через логарифм по основанию два, в результате получаем следующее выражение

$$\log_2(2x + 4) = \log_2 2^3.$$

Полученная каноническая форма логарифмического уравнения, позволяет осуществить переход к аргументам:

$$2x + 4 = 8.$$

Проводя упрощение и сокращение, получаем решение в виде

$$x = 2.$$

Полученное решение удовлетворяет области допустимых значений

$$2x + 4 > 0.$$

Ответ. Корнем искомого логарифмического уравнения является $x = 2$.

Задание на лабораторную работу № 2.1

Цель: Получить точное аналитическое решение нелинейного уравнения.

Найденное решение будет использоваться в дальнейшем для тестирования численных методов.

Нелинейные уравнения представлены в таблице 1, выбрать задание согласно номеру своего варианта.

Таблица 1

№ В.	Исходное уравнение
1.	$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x + 1 = 0,$ $3^x - 27 = 0.$
2.	$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0,$ $25^x - 5^x + 2 = 0.$
3.	$x^3 + 2x^2 - 8x + 5 = 0,$ $\log_2(4 - x) - 7 = 0.$
4.	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60 = 0,$ $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8.$
5.	$2x^3 + 5x^2 + 3x - 3 = 0,$ $\log_8 2^{8x-4} = 4.$

№ В.	Исходное уравнение
6.	$7x^3 + 3x^2 - x - 9 = 0,$ $2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15}.$
7.	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20 = 0,$ $(\sqrt{2})^x = \frac{1}{2}.$
8.	$5x^3 - x^2 - 20x + 4 = 0,$ $3\sin x - 4\cos x = 3.$
9.	$x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0,$ $2^x \cdot x = 2 \cdot 2^x + 8x - 16.$
10.	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10 = 0,$ $\sqrt{3} \sin(3x) - \cos(3x) = 1.$
11.	$2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0,$ $2^{x-4} = 3.$
12.	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 10x + 5 = 0,$ $4^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}.$
13.	$x^4 - 14x^3 - 40x - 75 = 0,$ $\sin x + \cos x = 1.$
14.	$5x^3 - 8x^2 - 8x + 5 = 0,$ $3^x - 2^x = 0.$
15.	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50 = 0,$ $\log_5(4+x) = 2.$
16.	$24x^3 - 18x^2 - 23x - 6 = 0,$ $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0.$
17.	$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 70x + 5 = 0,$

№ В.	Исходное уравнение
	$3 \sin x - 5 \cos x = 7$.
18.	$x^3 - x^2 + x + 3 = 0$, $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5$.
19.	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25 = 0$, $\log_5(7-x) - \log_5(3-x) = 1$.
20.	$3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$, $\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$.
21.	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150 = 0$, $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.
22.	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20 = 0$, $2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$.
23.	$x^4 - 9x^3 + 31x^2 - 59x + 60 = 0$, $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.
24.	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100 = 0$, $\log_2(15+x) = \log_2 3$.
25.	$4,5x^3 - 3x^2 - 0,5x + 7 = 0$, $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$.
26.	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30 = 0$, $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.
27.	$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{1}{3} = 0$.
28.	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140 = 0$,

№ В.	Исходное уравнение
	$5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$.
29.	$x^3 - 3x - 2 = 0$, $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$.
30.	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100 = 0$, $3^{4x-5} = 3^{x+4}$.

2. Анализ количества и границ корней

2.1. Число корней

Число действительных корней алгебраического уравнения равно или на четное число меньше степени уравнения.

Теорема Декарта. Число положительных корней равно или на четное число меньше числа перемен знаков в ряду коэффициентов уравнения.

Для определения числа отрицательных корней необходимо произвести замену $x = -y$.

Пример. Определить число корней алгебраического уравнения

$$2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 11 = 0.$$

Решение. Данное уравнение имеет степень $n = 9$, поэтому число действительных корней должно быть нечетным, при этом их количество не может быть больше девяти. Следуя теореме Декарта, число положительных корней является четным, при этом их может быть четыре, два или не быть совсем. Отрицательный корень у этого уравнения один.

2.2. Определение границ действительных корней

Метод Маклорена. Действительные корни алгебраического уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0 > 0$, удовлетворяют следующему неравенству

$$x < 1 + \sqrt[m]{\frac{A}{a_0}}, \quad (2.1)$$

где m – индекс первого отрицательного коэффициента в ряду

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n,$$

A – максимальный из модулей отрицательных коэффициентов.

Показатель n называют степенью алгебраического уравнения.

Пример. Определить верхнюю границу алгебраического уравнения

$$2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 11 = 0.$$

Решение. Вначале находится индекс первого отрицательного коэффициента $m = 5$. Затем определяется максимальный по модулю отрицательный коэффициент $A = 24$. Первый коэффициент алгебраического многочлена является положительным и равен $a_0 = 2$. Полученные значения подставляются в выражение (2.1)

$$x < 1 + \sqrt[5]{\frac{24}{2}} = 1 + \sqrt[5]{12} \approx 2,7.$$

Ответ. Корни алгебраического уравнения меньше 2,7.

С помощью небольшой модификации метод Маклорена может быть применён для определения нижней границы корня. Для этого необходимо произвести замену переменных $x = -y$, а также умножить получаемое после замены уравнение на $(-1)^n$, так как старший коэффициент алгебраического полинома должен быть положительным. После проведенных преобразований можно пользоваться выражением (2.1).

Пример. Определить нижнюю границу алгебраического уравнения

$$2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 11 = 0.$$

Решение. На первом этапе осуществляются описанные выше преобразования замена переменных и умножение $(-1)^n$. В результате получается новое уравнение

$$2y^9 + y^7 + y^4 + 19y^3 + 24y^2 - 11 = 0.$$

На втором этапе для полученного после преобразований уравнения определяется:

- ✓ индекс первого отрицательного коэффициента $m = 9$;
- ✓ максимальный по модулю отрицательный коэффициент $A = 11$;
- ✓ первый коэффициент $a_0 = 2$.

Далее воспользуемся известным выражением (2.1)

$$y < 1 + \sqrt[9]{\frac{11}{2}} = 1 + \sqrt[9]{5,5} \approx 2,3.$$

На третьем этапе осуществляется обратная замена $y = -x$. В результате получается следующее выражение

$$x > -2,3.$$

Ответ. Корни алгебраического уравнения больше $-2,3$.

Как видно из метода Маклорена и его модификации для любого алгебраического уравнения всегда можно найти интервал, в котором располагаются действительные корни многочлена.

Пример. Определить интервал, в котором находятся действительные корни алгебраического уравнения

$$2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 11 = 0.$$

Решение. Воспользуемся решениями двух разобранных выше примеров. Из первого примера имеем ограничение значений корней сверху $x < 2,7$. Во втором примере определена нижняя граница существования корней $x > -2,3$. Таким образом, получается следующий интервал

$$-2,3 < x < 2,7.$$

Ответ. Действительные корни алгебраического уравнения располагаются внутри интервала $-2,3 < x < 2,7$.

Замечание. Если коэффициент a_0 намного меньше A , то значение границы, полученное по формуле (2.1), будет значительно завышено.

Для устранения данного замечания заданный многочлен разбивают на несколько многочленов, так чтобы старшие коэффициенты получаемых многочленов являлись положительными. В последующем для каждого многочлена определяется своя верхняя граница, наибольшая из них будет являться верхней границей заданного многочлена. При удачном разбиении заданного многочлена определяемые границы данным способом имеют большую точность, чем границы, получаемые для исходного многочлена.

Разбиение считается удачным, если получаемые значения верхних границ близки или сопоставимы между собой.

Пример. Определить верхнюю границу действительных корней уравнения

$$x^4 - 48x^3 + 797x^2 - 5350x + 12297 = 0.$$

Решение. Сначала напрямую воспользуемся формулой (2.1) для определения верхней границы заданного уравнения

$$x < 1 + \sqrt[4]{5350} = 5351.$$

Следовательно, верхняя граница $x < 5351$.

Воспользуемся приведенным выше замечанием и разобьем заданный многочлен на два многочлена

$$P_1(x) = x^4 - 48x^3 - 48x^2 - 48x,$$

$$P_2(x) = 845x^2 - 5302x + 12279.$$

Определяем верхние границы корней для каждого полинома

$$x_1 < 1 + \sqrt[4]{48} = 49,$$

$$x_2 < 1 + \sqrt{\frac{5302}{845}} \approx 7,3.$$

Максимальной из двух найденных границ является первая, следовательно, она и является верхней границей корней для заданного алгебраического уравнения.

Ответ. Действительные корни заданного алгебраического уравнения меньше 49.

Пример. Определить верхнюю границу действительных корней алгебраического уравнения

$$x^5 + 12x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 5680x + 122 = 0.$$

Решение. Используя формулу (2.1) для заданного алгебраического уравнения, определяется его верхняя граница

$$x < 1 + \sqrt[5]{5680} \approx 76,5.$$

Таким образом, верхняя граница корней заданного алгебраического уравнения $x < 76,5$.

Воспользуемся разложением, для этого заданное алгебраическое выражение представим в виде двух многочленов

$$P_1(x) = 0,1x^5 - 8x^3,$$

$$P_2(x) = 0,9x^5 + 12x^4 + 2x^2 - 5680x + 122.$$

Вычисляем верхние границы корней для каждого полинома

$$x_1 < 1 + \sqrt[4]{\frac{8}{0,1}} \approx 10,$$

$$x_2 < 1 + \sqrt[4]{\frac{5680}{0,9}} \approx 10.$$

Следовательно, верхняя граница корней для заданного алгебраического уравнения $x < 10$.

Применим альтернативное разбиение исходного алгебраическое выражения и представим его в виде трех многочленов

$$P_1(x) = 0,2x^5 - 8x^3,$$

$$P_2(x) = 0,8x^5 + 2x^4 - 1680x + 122,$$

$$P_3(x) = 12x^4 - 4000x.$$

Определяем верхние границы корней для каждого из трех полученных полиномов

$$x_1 < 1 + \sqrt[4]{\frac{8}{0,2}} \approx 7,4, \quad x_2 < 1 + \sqrt[4]{\frac{1680}{0,8}} \approx 7,8,$$

$$x_3 < 1 + \sqrt[3]{\frac{4000}{12}} \approx 8,0.$$

Максимальным выражением из полученных является последнее оно и будет определять верхнюю границу $x < 8$. Как видно, последнее разбиение позволило получить более точное выражение для верхней границы корней заданного алгебраического уравнения.

Ответ. Все действительные корни заданного алгебраического уравнения располагаются в области $x < 8$.

2.3. Определение границ комплексных корней

Пусть задан многочлен

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

который имеет как действительные, так и комплексные коэффициенты.

Через q_r обозначаются действительные положительные значения корней равные $\sqrt[r]{|a_r|}$, где $r = 1, 2, \dots, n$, располагаемые в порядке убывания:

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_{n-1} \geq q_n.$$

Применяются выражения Вестер菲尔да которое показывают, что все действительные и комплексные корни алгебраического многочлена удовлетворяют условию

$$|x| \leq q_1 + q_2,$$

или

$$\begin{aligned} |x| &\leq q_1 + 0,6180q_2 + 0,2213q_3 + 0,0883q_4 + \\ &+ 0,0375q_5 + 0,0185q_6 + 0,0074q_7 + 0,0081q_8. \end{aligned}$$

Пример. Определить верхнюю границу корней уравнения

$$x^4 - 48x^3 + 797x^2 - 5350x + 12297 = 0.$$

Решение. Вначале вычисляются все значения q_r

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt[1]{|-48|} = 48, & q_2 &= \sqrt[2]{|797|} \approx 28,2, \\ q_3 &= \sqrt[3]{|-5350|} \approx 17,5, & q_4 &= \sqrt[4]{|12297|} \approx 10,5. \end{aligned}$$

Воспользовавшись первым выражением Вестер菲尔да, определяется верхняя граница корней

$$|x| \leq 48 + 28,2 = 76,2.$$

Если воспользоваться вторым выражением Вестер菲尔да для определения верхней границы корней, то получим

$$\begin{aligned} |x| &\leq 48 + 0,6180 \cdot 28,2 + 0,2213 \cdot 17,5 + 0,0883 \cdot 10,5 = \\ &= 48 + 17,4 + 3,9 + 0,9 = 70,2. \end{aligned}$$

Ответ. Действительные и комплексные модули корней заданного алгебраического уравнения меньше 70,2.

Как и следовало ожидать из представленного примера видно, что модуль верхней границы для комплексных и действительных корней полученной с помощью выражения Вестер菲尔да $|x| \leq 70,2$ отличается от верхней границы для положительных действительных корней определенной по методу Маклорена $x < 49$.

Замечание. Если в многочлене коэффициент a_1 преобладает над остальными коэффициентами, то применяется более простая и эффективная **оценка Пароди**.

Пусть

$$|a_1| > 2\sqrt{S},$$

здесь

$$S = |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|,$$

причем

$$S > 1.$$

Тогда многочлен имеет один и только один корень внутри круга

$$|x + a_1| \leq \sqrt{S}.$$

Задание на лабораторную работу № 2.2

Цель: Определить число положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения и оценить интервал, в котором находятся корни алгебраического уравнения.

Алгебраические уравнения выбрать из таблицы 1 (первое уравнение) и таблицы 2, согласно номеру своего варианта.

Таблица 2

№ В.	Исходное уравнение
1.	$x^6 - x^5 + 5x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 9x - 7 = 0$
2.	$2x^7 - 6x^5 + 2x^4 - 5x = 0$
3.	$9x^6 - 5x^5 + 9x^3 - 5x^2 + 4 = 0$
4.	$5x^6 - 10x^5 - 9x^4 + 5x^3 - 5x = 0$
5.	$3x^7 + x^6 + 5x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 9x + 4 = 0$
6.	$7x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 5x^2 + 5x + 5 = 0$
7.	$6x^7 + 3x^6 + 7x^5 - 7x^4 - x^3 + x = 0$
8.	$6x^7 + 5x^6 - 9x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 8x = 0$
9.	$2x^7 + 4x^6 - 2x^5 - 5x^4 + x = 0$
10.	$x^7 + 10x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 5x^2 - 6x = 0$
11.	$10x^6 + x^5 + 9x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 3 = 0$
12.	$5x^7 + x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 7x - 9 = 0$
13.	$2x^7 + 4x^6 - 7x^5 + 9x = 0$
14.	$x^8 + 2x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 80x^4 + 100x^3 - 400x^2 + 15x = -30$
15.	$7x^7 - 8x^6 - 4x^5 + x^4 - 4x^2 + 2x = 0$
16.	$5x^7 - 3x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 9x^2 - 7x = 0$
17.	$8x^7 - 7x^6 + 6x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 5x = 0$
18.	$x^7 - 10x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 9x - 5 = 0$
19.	$5x^7 + 9x^6 - 7x^5 + x^4 + 8x^3 - 9x^2 + x + 6 = 0$
20.	$6x^7 + 9x^6 - 5x^5 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 3 = 0$
21.	$5x^7 - 10x^6 + 8x^5 - 10x^4 - 1 = 0$

№ В.	Исходное уравнение
22.	$4x^7 + 5x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 7x + 10 = 0$
23.	$9x^7 + 6x^6 - 2x^3 + 7 = 0$
24.	$x^5 - 2x^4 - 8x^3 - x^2 - 9x + 1 = 0$
25.	$6x^7 - 6x^6 + 5x^5 - 6x^4 - 9x^2 = 0$
26.	$8x^7 + 10x^6 - 4x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 4 = 0$
27.	$2x^7 - 4x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2 = 0$
28.	$8x^7 - 6x^6 + 9x^5 - 9x = 0$
29.	$6x^6 - 55x^5 - 86x^4 + 331x^3 + 289x^2 - 25x + 350 = 0$
30.	$5x^7 + 5x^6 - 9x^3 + 1 = 0$

3. Понятие и способы локализации корней

Задача локализации (отделения, изоляции) корней нелинейного уравнения заключается в установлении возможно тесных промежутков $[a, b]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1.1). Для функции $f(x)$ общего вида нет универсального способа решения поставленной задачи, поэтому для реализации данного этапа используются три способа: аналитический, графический и табличный.

Таким образом, для решения задачи отделения корней нелинейного уравнения необходимо:

- убедится, что на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ имеется корень;
- быть уверенным, что этот корень единственный на указанном отрезке.

3.1. Аналитический способ

Аналитический способ позволяет убедиться в том, что на данном отрезке $[a, b]$ действительно имеется нуль непрерывной функции $f(x)$. В основе аналитического способа локализации корней лежит ряд известных утверждений математического анализа.

Теорема Больцано-Коши. Если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$ принимает значения противоположных знаков, т.е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \quad (3.1)$$

то внутри этого интервала $(a; b)$ имеется, по меньшей мере, хотя бы один корень уравнения (1.1) обращающий функцию в нуль, т.е. найдется хотя бы одно число $x^* \in (a; b)$ такое, что $f(x^*) = 0$.

Существует один недостаток применения теоремы Больцано-Коши, который заключается в отсутствии информации о количестве корней уравнения на рассматриваемом отрезке $[a; b]$. В частности, в случае выполнения условия (3.1) корней на

рассматриваемом интервале может быть нечетное количество, так, например, как показано на рис. 3

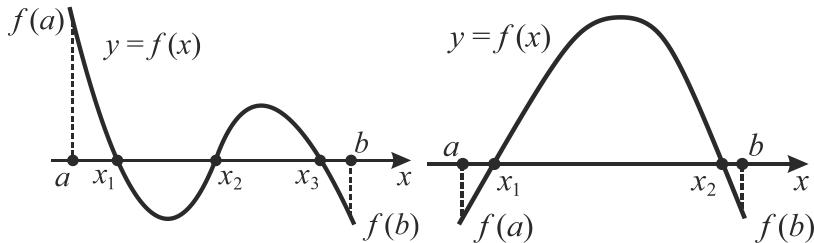


Рис. 3 – Наличие нечетного количества корней на отрезке $[a; b]$

Рис. 4 – Наличие четного количества корней на отрезке $[a; b]$

Также нельзя утверждать, что в случае, если условие (3.1) не выполняется, то на отрезке $[a; b]$ нет корней, поскольку на рассматриваемом интервале их может быть четное количество, один из примеров приведен на рис. 4.

Для обеспечения единственности корня на отрезке $[a; b]$ необходимо чтобы функция была **монотонной** на этом отрезке, т.е. первая производная $f'(x)$ сохраняет знак.

Теорема. Непрерывная строго монотонная функция $f(x)$ имеет и притом единственный нуль на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Реально установить монотонность на заданном отрезке можно для дифференцируемой функции, потребовав знакопостоянство её производной на всем отрезке. Для таких функций основой решения является задачи локализации корней уравнения (1.1) может служить следующая теорема.

Теорема. Если производная $f'(x)$ существует и не меняет знак внутри интервала $(a; b)$, то условие (3.1) является необходимым и достаточным для того чтобы уравнение (1.1) имело и притом единственный корень на интервале $[a; b]$.

Поскольку производная меняет знак только в точках, там, где она равна нулю или не существует, а также на граничных точках области определения функции, то в случаях, когда корни уравнение $f'(x) = 0$ легко вычисляются, вопрос о числе и расположении корней уравнения (1.1) не вызывает трудностей. Для этого достаточно подсчитать лишь количество смен знака функции $f(x)$ в точках нулей её производной и в граничных точках $x = a$ и $x = b$.

Пример. Определить количество корней уравнения

$$x^3 - 12x = -5$$

и локализовать интервалы их расположения.

Решение. Вначале для заданной функции $f(x)$ определяется первая производная

$$f'(x) = 3x^2 - 12.$$

Далее полученная первая производная приравнивается нулю $f'(x) = 0$. Затем решается полученное уравнение

$$3x^2 - 12 = 0$$

и находятся нули производной. Следовательно, в точках $x = -2$ и $x = 2$ первая производная обращается в нуль, а у функции $f(x)$ может происходить смена убывания на возрастание или наоборот. Поскольку заданная функция и её производная определены и непрерывны на всей числовой оси, то можно составить следующие интервалы постоянства знаков функции $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$. Полученные результаты сводятся в таблицу 3 для определения знаков функции

Таблица 3

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+

Следовательно, заданное уравнение имеет три действительных корня. Выяснив знаки функции в точках $x = -4$ (минус) и $x = 4$ (плюс), область поиска корней заданного уравнения с бесконечного интервала сужаем до конечных промежутков $[-4; -2]$, $[-2; 2]$, $[2; 4]$.

Ответ. Заданное уравнение имеет три действительных корня: первый, лежит в интервале $[-4; -2]$, второй – $[-2; 2]$, третий – $[2; 4]$.

Пример. Определить количество корней уравнения

$$x^2 e^x - \pi = 0$$

и локализовать интервалы их расположения.

Решение. На первом этапе находится производная первого порядка для заданного уравнения

$$f'(x) = x(x+2)e^x$$

и определяются точки, в которых она равна нулю. Очевидно, что $f'(x) = 0$ только в точках $x = -2$ и $x = 0$ может обращаться в нуль, следовательно, график функции $f(x)$ может меняться с убывающего на возрастающий или наоборот. Поскольку заданная функция и её производная определены и непрерывны на всей числовой оси, то можно составить следующие интервалы постоянства знаков функции $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; +\infty)$.

На втором этапе предварительно полученные интервалы проверяются на смену знаков функции путем их сведения в таблицу 4.

Таблица 4

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	–	–	–	+

Таким образом, опираясь на последнюю теорему можно утверждать, что заданное уравнение имеет один действительный корень на интервале $(0; +\infty)$. Выяснив знаки функции в точке

$x = 2$ (плюс), область существования корня с бесконечного интервала сужается до конечного промежутка $[0; 2]$.

Ответ. Заданное уравнение имеет один действительный корень на интервале $[0; 2]$.

3.2. Графический способ

Графический способ применяется для приближенного определения действительных корней алгебраических и трансцендентных уравнений.

Графический способ отделения корней целесообразно использовать в том случае, когда имеется возможность без особого труда построить график функции $y = f(x)$. Наличие графика исходной функции дает непосредственное представление о количестве и расположении нулей функции $f(x)$, что позволяет определить промежутки, внутри которых содержится только один корень. Наличие графика также помогает с выбором наиболее эффективного метода уточнения корня.

Если построение графика функции $y = f(x)$ вызывает затруднение, то часто оказывается удобным преобразовать исходное уравнение к равносильному $f_1(x) = f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют более простой вид, чем исходная функция $f(x)$. В этом случае, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни решаемого уравнения соответствуют абсциссам точек пересечения этих графиков.

Пример. Определить количество корней уравнения

$$\sin(2x) - \ln(x) = 0$$

и локализовать интервалы их расположения.

Решение. Осуществляется переход к эквивалентному уравнению

$$\sin(2x) = \ln(x).$$

На одной координатной плоскости схематично строятся графики тригонометрической функции $y = \sin(2x)$ и логарифмической $y = \ln(x)$. Результаты построения полученных кривых представлены на рис. 5.

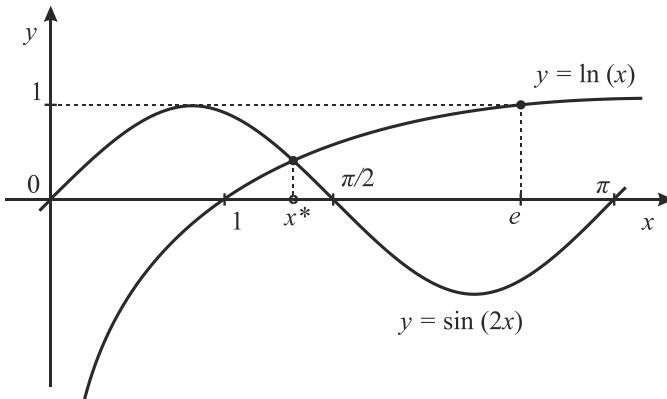


Рис. 5 – Графическая локализация корней уравнения
 $\sin(2x) - \ln(x) = 0$

Совместное рассмотрение графиков позволяет сделать заключение, что заданное уравнение $\sin(2x) - \ln(x) = 0$ содержит один корень, расположенный в интервале $[1; \pi/2]$.

Ответ. Заданное уравнение имеет один действительный корень на интервале $[1; \pi/2]$.

Нахождение корней нелинейного уравнения (1.1) упрощается, если одна из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$ является линейной, например, $f_1(x) = ax + b$. В этом случае корни уравнения (1.1) находятся как абсциссы точек пересечения кривой $f_2(x)$ и прямой $f_1(x) = ax + b$. Особо выгодным является данный прием при решении трехчленных уравнений

$$x^n + ax + b = 0 .$$

Пример. Определить количество корней кубического уравнения

$$x^3 - 1\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = 0$$

и локализовать интервалы их расположения.

Решение. Осуществляется переход к эквивалентному уравнению

$$x^3 = 1\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$$

На одной координатной плоскости схематично строится кубическая парабола $y = x^3$ и прямая линия $y = 1\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$. На рис. 6 представлены результаты построения полученных уравнений.

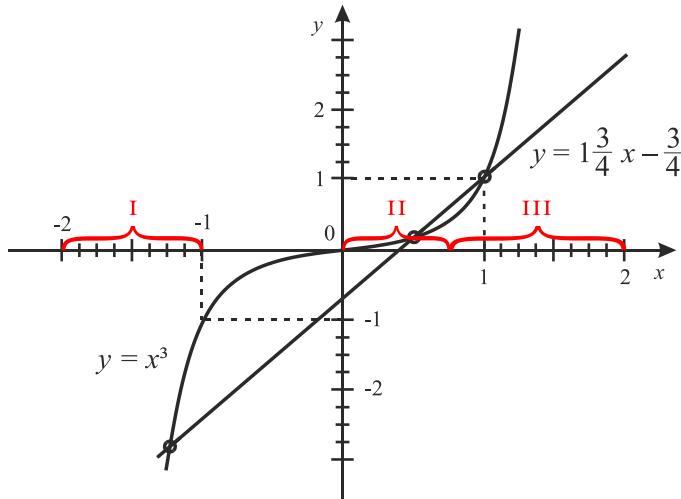


Рис. 6 – Графическая локализация корней уравнения

$$x^3 - 1\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = 0$$

Искомые корни находятся как абсциссы точек пересечения кубической параболы и прямой. Рассмотрение чертежа позволяет

сделать вывод, что заданное уравнение $x^3 - 1\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = 0$ имеет три корня, расположенных на интервалах $I \in [-2; -1]$, $II \in [0; 0,75]$ и $III \in [0,75; 2]$.

Ответ. Заданное уравнение имеет три действительных корня расположенных на интервалах: $I \in [-2; -1]$, $II \in [0; 0,75]$ и $III \in [0,75; 2]$.

Таким образом, задача определения количества корней и области их единственности решается отслеживанием точек пересечения этих графиков и выделением на оси абсцисс тех промежутков, которым принадлежат проекции таких точек.

3.3. Табличный способ

В более общих случаях, когда построение графика заданной нелинейной функции $f(x)$ не предоставляется возможным, а нахождение её производной крайне затруднительно, тогда применяется табличный способ (способ перебора).

Предполагая, что все или интересующая нас часть корней нелинейного уравнения находятся на отрезке $[a; b]$. Рассматриваемый интервал разбивается на отрезки точками x_i , расположенные на условно небольшом расстоянии h друг от друга. Вычисля значения $y = f(x)$ во всех этих точках $f(x_i)$, начиная с точки $x_0 = a$ и двигаясь вправо с равномерным шагом h (рис. 7). На каждом единичном интервале $[x_{i-1}; x_i]$ производится сравнение значений функций на его границах с помощью соотношения $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$. Как только обнаруживается пара соседних значений $f(x_i)$, имеющих разные знаки, так соответствующие значения аргумента x_{i-1} и x_i можно считать границами отрезка, содержащего корень.

Надежность табличного метода к отделению корней нелинейного уравнений зависит от характера функции $y = f(x)$ и от

выбранной величины шага h . Если величина шага недостаточно мала, а на границах текущего отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ функция $f(x)$ принимает значения одного знака, то возможно наличие нескольких пар корней уравнения (1.1).

Замечания:

- a) если функции $f(x)$ является немонотонной на рассматриваемом интервале $[x_{i-1}; x_i]$, то внутри отрезке может оказаться два корня уравнения (рис. 8 а);
- б) несколько корней нелинейного уравнения может оказаться на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ и при выполнении условия $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$ (рис. 8 б).

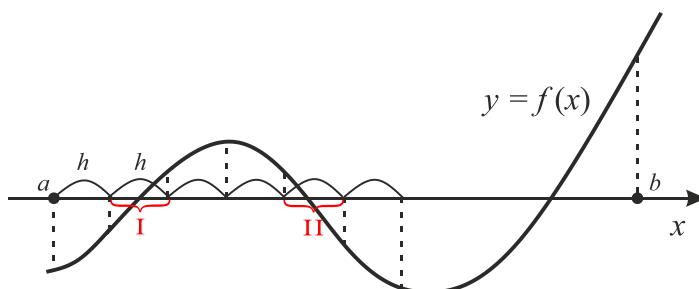


Рис. 7 – Табличная локализация корней нелинейного уравнения

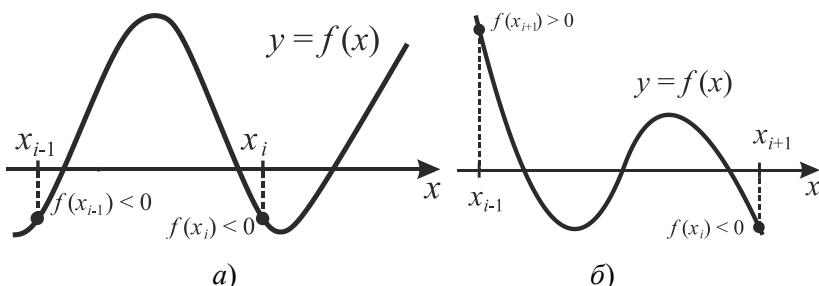


Рис. 8 – Особенности возникающие при неправильном выбора шага

Чтобы исключить такие ситуации, нужно выбирать малые значения $h \approx \varepsilon$.

Для практического применения табличного метода вычисления проводятся три раза на последовательности уменьшающихся шагов. Первый расчет производится с достаточно крупным шагом h , второй – с шагом в два раза меньше $h/2$, третий – с шагом в четыре раза меньше первоначального $h/4$. Если количество интервалов, на которых функция меняет знак, не изменилось, то полагается, что эти интервалы являются решением. В случае появления новых интервалов процесс локализации продолжается.

Пример. На интервале $[-10; 10]$, определить количество корней уравнения

$$x^3 + 0,1 = \frac{7}{4}x$$

и локализовать интервалы их расположения.

Решение. Вначале исследуемый интервал разбивается на двадцать подинтервалов с шагом равным единице. Далее составляется таблица, в которую заносятся координаты узлов x_i и значения функции в этих точках $f(x_i)$. Анализируя смену знаков функции представленной в таблице 5 определяются три интервала, на которых функция сменила знак это $[-2; -1]$, $[0; 1]$ и $[1; 2]$.

Для последующего приближения шаг уменьшается в два раза, т.е. $h = 0,5$. Составляется новая таблица, которая включает 40 интервалов. На каждом интервале производится сравнение знаков функции, и выделяются интервалы, на которых функция меняет знак в нашем случае это $[-1,5; -1]$, $[0; 0,5]$ и $[1; 1,5]$.

Третье уменьшение шага до $h = 0,25$, приводит к увеличению количества подинтервалов до 80. Каждый подинтервал проверяется на смену знака функции. В результате также определяются три интервала, на которых функция меняет знак это $[-1,5; -1,25]$, $[0; 0,25]$ и $[1,25; 1,5]$.

Таким образом, получена последовательность уменьшающихся интервалов, содержащих три корня.

Таблица 5 – Локализация корня табличным методом с $h = 1$.

k	x	$f(x)$
0	- 10	- 982,4
1	- 9	- 713,15
2	- 8	- 497,9
3	- 7	- 330,65
4	- 6	- 205,4
5	- 5	- 116,15
6	- 4	- 56,9
7	- 3	- 21,65
8	- 2	- 4,4
9	- 1	0,85
10	0	0,1
11	1	- 0,65
12	2	4,6
13	3	21,85
14	4	57,1
15	5	116,35
16	6	205,6
17	7	330,85
18	8	498,1
19	9	713,35
20	10	982,6

Ответ. Заданное нелинейное уравнение имеет три корня находящихся на интервалах: I $\in [-1,5; -1,25]$, II $\in [0; 0,25]$ и III $\in [1,25; 1,5]$.

Данный способ локализации корней хорошо реализуется на вычислительных машинах, но как видно из представленного примера, является достаточно затратным и не дает гарантированного выявления количества и локализации всех корней в общем случае.

Задание на лабораторную работу № 2.3

Цель: на практике закрепить методы локализации корней нелинейного уравнения

Нелинейные уравнения представлены в таблице 6, задания выбираются согласно номеру своего варианта в журнале группы.

Для первого уравнения выполнить локализацию корней аналитическим и графическим способом.

Корни второго и третьего примера локализовать графическим и табличным способами.

Для табличного метода составить алгоритм, реализовать вычислительную технологию и произвести серию расчетов с целью нахождения интервалов $[a; b]$, на которых существует единственный корень нелинейного уравнения.

Таблица 6

№ В	Исходное нелинейное уравнение
1.	a) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$ б) $x - \sin x = 0,25$ в) $1,2 - \ln x = 4 \cos 2x$
2.	a) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$ б) $x + \ln x = 0,5$ в) $5 \sin 2x = \sqrt{1-x}$
3.	a) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,4 = 0$ б) $x \lg x = 1,2$ в) $\operatorname{tg}(0,3x + 0,4) = x^2$

№ В	Исходное нелинейное уравнение
4.	a) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$ б) $x \sin x - 1 = 0$ в) $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$
5.	a) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$ б) $\operatorname{ctg} 1,05x - x = 0$ в) $\ln(x + 6,1) = 2 \sin(x - 1,4)$
6.	a) $x^3 + 4x - 6 = 0$ б) $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{4} = 0$ в) $\sqrt{x} - \cos(0,387x) = 0$
7.	a) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$ б) $4 \cos x + 0,3x = 0$ в) $\lg x - \frac{7}{2x + 6} = 0$
8.	a) $x^3 - 2x + 4 = 0$ б) $x^2 - 20 \sin x = 0$ в) $2^{-x} = 10 - 0,5x^2$
9.	a) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$ б) $(0,2x)^3 = \cos x$ в) $\operatorname{tg}(0,58x + 0,1) = x^2$
10.	a) $x^3 - 6x - 8 = 0$ б) $2^{-x} = \sin x$ в) $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{3} = 0$

№ В	Исходное нелинейное уравнение
11.	a) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$ б) $2\lg(x+7) = 5 \sin x$ в) $\operatorname{tg}(0,47x + 0,2) = x^2$
12.	a) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x + 1,2 = 0$ б) $2^x - 2 \cos x = 0$ в) $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{2} = 0$
13.	a) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$ б) $\sqrt{4x+7} = 3 \cos x$ в) $\lg(x+5) = \cos x$
14.	a) $x^2 + x = 5$ б) $2x^2 - 5 = 2^x$ в) $\operatorname{tg}(0,5x + 0,2) = x^2$
15.	a) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0$ б) $3x - \cos x - 1 = 0$ в) $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{10} = 0$
16.	a) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$ б) $x^2 + 4 \sin x = 0$ в) $\operatorname{tg}(0,44x + 0,3) = x^2$
17.	a) $x^3 + 3x + 1 = 0$ б) $x + \lg x = 0,5$ в) $\operatorname{tg}(0,4x + 0,4) = x^2$

№ В	Исходное нелинейное уравнение
18.	a) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$ б) $2x - \lg x - 7 = 0$ в) $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 0$
19.	a) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$ б) $x^2 + 4 \sin x = 0$ в) $\operatorname{tg}(0,4x + 0,3) = x^2$
20.	a) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ б) $x - 10 \sin x = 0$ в) $\operatorname{tg}(0,36x + 0,4) = x^2$
21.	a) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$ б) $4x^4 - 6,2 = \cos 0,6x$ в) $\operatorname{tg}(0,5x + 0,1) = x^2$
22.	a) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$ б) $1,8x^2 - \sin 10x = 0$ в) $e^x - 6x = 3$
23.	a) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$ б) $e^{-x} - \sqrt{x} = 0,5$ в) $\frac{2 \sin^2 x}{3} - \frac{3 \cos^2 x}{4} = 0$
24.	a) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$ б) $\sqrt{x+1} - \cos(0,5x + 0,5) = 0$ в) $\ln x + x = 5$
25.	a) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$ б) $5x - 8 \ln x = 8$ в) $\operatorname{tg} x - x = 0$

№ В	Исходное нелинейное уравнение
26.	a) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$ б) $x \cdot 2^x = 1$ в) $1,8(x - 0,7)^4 - \sin 10x = 0$
27.	a) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$ б) $(4 + x^2) \cdot (e^x - e^{-x}) = 18$ в) $3x^2 - \cos 2x = 1$
28.	a) $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$ б) $x^2 - 2,8x + 0,15 = 1,3 \ln(x + 0,5)$ в) $x = \cos x + 1$
29.	a) $x^3 + x - 3 = 0$ б) $x - \frac{\sin x}{2} = 1,5$ в) $-\ln x = (x + 1)^3$
30.	a) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$ б) $x - 0,2 = -\ln(x + 0,5)$ в) $3x - e^x = 1$

4. Методы уточнения локализованного корня с требуемой точностью

На данном этапе для предварительно локализованного единственного корня, принадлежащего отрезку $[a, b]$, необходимо построить процесс последовательного приближения к искомому значению корня x^* , с заданной точностью (погрешностью) ε . Это означает, что значение корня x , вычисленное каким-либо из рассматриваемых далее численных методов, недолжно отличаться от точного x^* более чем на величину ε

$$|x - x^*| \leq \varepsilon.$$

Процедура численного определения приближенных значений корней нелинейных уравнений заключается в выборе **начального приближения** к корню $x_0 \in [a, b]$ и вычислении по формуле последующих приближений x_1, x_2 и т.д. Каждый шаг называется **итерацией**, а методы уточнения – **итерационными методами**. В результате получается последовательность приближенных значений корня $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$, которая называется **итерационной последовательностью**. Если эти значения с ростом k стремятся к точному значению корня x^* :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\} = x^*,$$

то итерационный процесс **сходится**.

Сходимость итерационного процесса означает, что погрешность каждого последующего приближения должна быть меньше погрешности предыдущего приближения, т.е. погрешность приближенных значений с каждым шагом должна уменьшаться:

$$|x - x_{k+1}| < |x - x_k|.$$

В более общем случае это неравенство может быть представлено в следующем виде:

$$|x - x_{k+1}| < q|x - x_k|^\alpha,$$

где $0 < q < 1$ и $\alpha \geq 1$ – числа, значения которых определяются методом уточнения корня.

От значений q – коэффициента сжатия и α зависит насколько с каждым шагом уменьшается погрешность приближенных значений и насколько быстро можно получить приближенное значение с заданной точностью. Главным показателем скорости сходимости метода является значение α , называемое **порядком сходимости**. При $\alpha = 1$ погрешность с каждым шагом убывает линейно, сходящийся процесс называется процессом первого порядка, т.е. обладает **линейной сходимостью**. Значению $\alpha = 2$ соответствует квадратично сходящийся процесс, а $\alpha = 3$ означает кубическую сходимость процесса (такой сходимостью обладают итерационные процессы обращения матриц). Все процессы, имеющие значение $\alpha > 1$ обладают **сверхлинейной сходимостью**.

В зависимости от выбора начального приближения x_0 методы уточнения разделяются на **глобально и локально сходящиеся**. **Глобально сходящимся** называется такой итерационный метод, который позволяет получить сходящуюся последовательность решений к точному значению x^* при любых начальных значениях x_0 . Если сходящаяся последовательность к искомому решению x^* существует, только для x_0 принадлежащих определенному диапазону, то такой итерационный метод называется **локально сходящимся**.

Все методы уточнения коней могут быть условно разделены на три группы:

- 1) интервальные;
- 2) итерационные;
- 3) комбинированные.

Рассмотрим подробно методы, принадлежащие к каждой группе.

4.1. Интервальные методы

Процесс получения решения интервальными методами заключается в последовательном уменьшении исходного интервала $[a, b]$, содержащего корень, до тех пор, пока размеры уменьшенного интервала не окажутся соизмеримы с требуемой точностью ε .

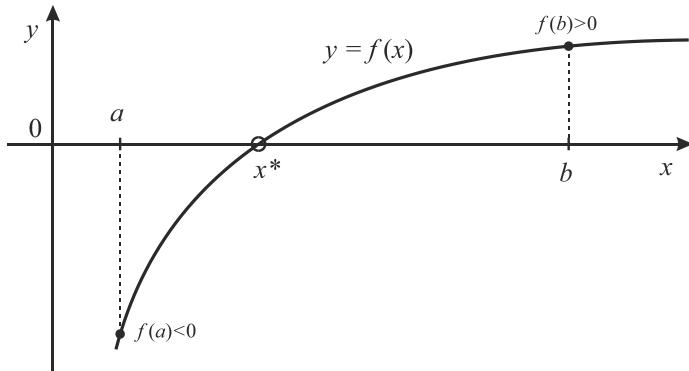


Рис. 9 – Начальные данные для метода дихотомии

Для интервальных методов результатом поиска корня на некоторой k -й итерации будет являться отрезок $[a_k, b_k]$, при этом в качестве начального интервала берутся точки, полученные после локализации корня $a_0 = a, b_0 = b$. Длина интервала в интервальных методах гарантированно уменьшается после каждой выполненной итерации, поэтому условие достижения решения заданной точности будет иметь вид

$$|b_k - a_k| \leq 2\epsilon,$$

т.к. погрешность определения корня не может превышать половины длины интервала.

К интервальным методам относятся: метод дихотомии, метод золотого сечения, метод хорд и метод Риддерса.

4.1.1. Метод половинного деления

Метод половинного деления (дихотомии, бисекции, вилки). Задана функция $y = f(x)$ определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, её график представлен на рис. 9. После решения задачи локализации нам известно, что на рассматриваемом интервале $[a, b]$ расположен один корень x^* , т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, который требуется уточнить до заданной точности ϵ .

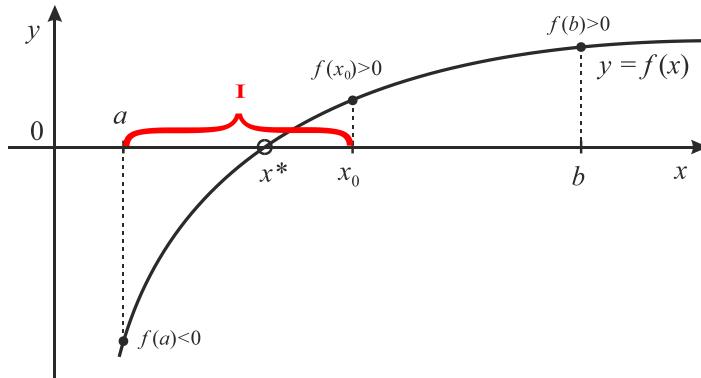


Рис. 10 – Первое приближение метода дихотомии

В качестве начального приближения корня принимается середина заданного интервала:

$$x_0 = \frac{a + b}{2}.$$

Как видно из рис. 10 начальное приближение разбивает заданный интервал $[a, b]$ на два равных интервала $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$. Далее проводится вычисление значения функции $f(x)$ в точке x_0 . Найденное значение $f(x_0)$ и известные значения функции на концах заданного интервала $[a, b]$ – $f(a)$ и $f(b)$ порождают следующие взаимоисключающие ситуации:

- а) если $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, то корень находится на интервале $[a, x_0]$;
- б) если $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, то корень находится на интервале $[x_0, b]$;
- в) если $f(x_0) = 0$, то точка x_0 является корнем нелинейного уравнения.

Следовательно, вычисленное значение функции в точке x_0 позволяет уменьшить промежуток существования корня $[a, b]$ (случай а) и б)) или определить его значение (случай в)). Ситуация в) зачастую реализуется в случае приближенного $|f(x_0)| < \delta \approx 0$ вычисления функции.

Отрезок, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$. Вторая половина отрезка $[a, b]$, на которой $f(x)$ не меняет знак, из дальнейших расчетов исключается.

В качестве следующего приближения корня принимается середина нового отрезка

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

как показано на рис. 11 и рассмотрение повторяется по аналогии с предыдущим.

Таким образом, k -ое приближение вычисляется

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

После каждой итерации промежуток существования корня уменьшается ровно в два раза, а после k итераций в 2^k раз:

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

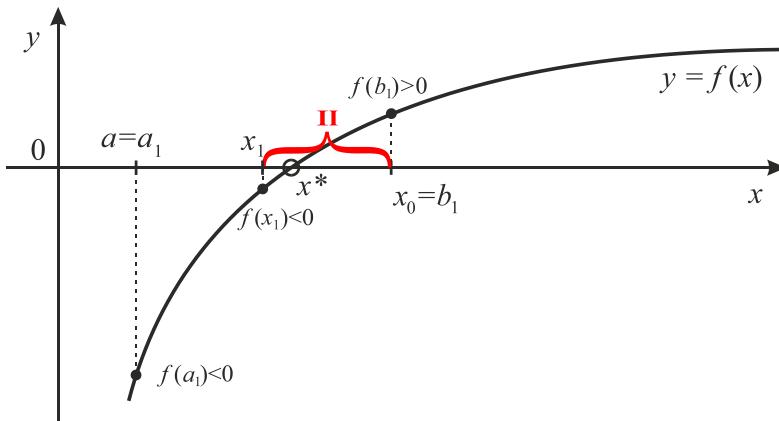


Рис. 11 – Второе приближение метода дихотомии

Завершение итерационного процесса осуществляется после достижения заданной точности, т.е. при выполнении условия

$$|b_k - a_k| \leq 2\epsilon \text{ или } |x_k - x^*| \leq \epsilon.$$

Объединяя вместе две последние формулы, получаем выражение для априорной оценки абсолютной погрешности, дающее возможность определить количество шагов (итераций) метода половинного деления необходимых для определения корня с заданной точностью ϵ , для этого нужно вычислить наименьшее натуральное число k , удовлетворяющее условию

$$\frac{b-a}{2^k} < 2\epsilon.$$

Метод половинного деления сходится всегда, т.е. обладает безусловной сходимостью. Он чрезвычайно прост, т.к. требует лишь вычисления значений функции $f(x)$ и, поэтому применим для решения любых уравнений.

Метод дихотомии может быть легко реализован по следующему алгоритму:

1. Задать начальные данные:
 - a) концы интервала a и b ,
 - b) функцию $y = f(x)$,
 - c) точность ϵ и δ .
2. Вычислить $f(a)$.
3. Вычислить $x = \frac{a+b}{2}$.
4. Если $|b-a| \leq 2\epsilon$, то x – искомый корень.
5. Вычислить $f(x)$.
6. Если $|f(x)| < \delta$, то x – искомый корень и остановка.
7. Если $f(a) \cdot f(x) < 0$, то $b = x$ и перейти к п.3;
иначе $a = x$, $f(a) = f(x)$ и перейти к п.3.

Недостатком метода половинного деления является достаточно медленная сходимость.

С каждым шагом погрешность приближенного значения уменьшается в два раза, т.е.

$$|x - x_{k+1}| < \frac{1}{2} |x - x_k|,$$

поэтому данный метод является методом с линейной сходимостью.

Количество итераций N требуемых для достижения заданной точности ε определяется выражением

$$k > \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}, \quad N = \text{int}\left(\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}\right) + 1$$

где $\text{int}(x)$ – целая часть числа x .

Например, при $b - a = 1$ и $\varepsilon = 10^{-6}$ получим $N = 19$.

Пример. Найти корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

с помощью метода половинного деления на интервале $[1; 1,5]$ с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Вначале определяется значение функции на одной из границ заданного интервала (в нашем случае это точка, являющаяся началом интервала $a = 1$)

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6.$$

Далее вычисляется координата середины заданного интервала

$$x_0 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$f(1,25) = 1,25^3 - \frac{1,25^2 + 1,25}{5} - 1,2 = 0,190625.$$

Полученное значение функции в точке x_0 позволяет провести анализ смены знака функции и выбрать новый интервал, на котором функция меняет знак. В данном случае осуществляется

замена точки b на x_0 . В результате заданный первоначальный интервал сузился до $[1; 1,25]$.

Для вновь определенного интервала проводится проверка достигнутой точности

$$|b - a| \leq 2\epsilon \text{ или } |1,25 - 1| = 0,25 < 0,002.$$

Как видно новый интервал не удовлетворяет требуемому условию по точности, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Для этого проводится повторное вычисление координаты середины нового интервала

$$x_1 = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$$

и значение функции в этой точке

$$f(1,125) = 1,125^3 - \frac{1,125^2 + 1,125}{5} - 1,2 = -0,254297.$$

Проверяется условие достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности

$$|f(x_1)| < \delta,$$

$$|-0,254297| < 0,001.$$

Проведенное сравнение подтверждает необходимость продолжения процесса уточнения искомого решения.

Используя полученное значение функции в точке x_1 , определяется интервал, на котором функция меняет знак.

Таким образом, точка a заменяется на x_1 , а исследуемый интервал уменьшается до $[1,125; 1,25]$ и процедура нахождения решения продолжается.

Механизм нахождения решения заданного нелинейного уравнения методом половинного деления целесообразно свести в таблицу.

Из табл. 7 видно, что после восьми приближений получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,201172 - 1,199219| = 0,001953 < 0,002.$$

Отметим, что значение функции, определенное после восьмой итерации также меньше δ .

Для справки, точным решением заданного нелинейного уравнения является $x^* = 1,2$.

Ответ. Решением заданного нелинейного уравнения на рассматриваемом интервале является $x = 1,200195$, которое получено с требуемой точностью $\varepsilon = \delta = 0,001$.

Таблица 7 – Решение нелинейного уравнения методом дихотомии

k	a	$f(a)$	b	x	$f(x)$
0	1	-0,6	1,5	1,25	0,190625
1	1	-0,6	1,25	1,125	-0,254297
2	1,125	-0,2543	1,25	1,1875	-0,044971
3	1,1875	-0,044971	1,25	1,21875	0,069452
4	1,1875	-0,044971	1,21875	1,203125	0,011408
5	1,1875	-0,044971	1,203125	1,195313	-0,016988
6	1,195313	-0,016988	1,203125	1,199219	-0,002842
7	1,199219	-0,002842	1,203125	1,201172	0,004270
8	1,199219	-0,002842	1,201172	1,200195	0,000711

4.1.2. Метод золотого сечения

Технология метода золотого сечения применяется для нахождения корней нелинейных уравнений интервальным способом.

Метод основан на делении локализованного отрезка $[a, b]$, на три неравные части, т.е. внутри рассматриваемого интервала появляются две новые точки x_1, x_2 . Для определения координат этих точек применяется правило золотого сечения.

Правило золотого сечения: отношение всего отрезка к большей его части равно отношению большей части отрезка к меньшей. На рис. 12 представлена графическая иллюстрация правила золотого сечения. Математически данное правило можно представить в виде следующих выражений:

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = \Phi, \quad \frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2} = \Phi,$$

где Φ – число Фидия, имеющее точное значение в виде математического выражения:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

или приближенное числовое значение 1,618.

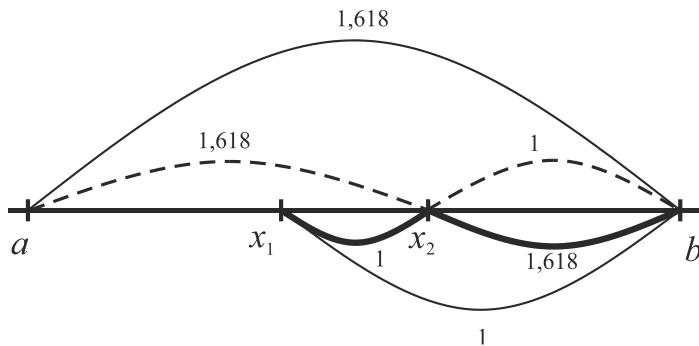


Рис. 12 – Визуализация правила золотого сечения

Используя данное правило на рассматриваемом интервале $[a, b]$ определяются две точки x_1, x_2 .

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}.$$

Как видно из рис. 12 и полученных выражений точки x_1, x_2 являются симметричными относительно как границ, так и середины отрезка $[a, b]$:

$$a - x_1 = x_2 - b,$$

$$a - x_2 = x_1 - b.$$

Следовательно, зная одну точку (x_1 или x_2) золотого сечения, вторую можно найти, используя одно из выражений:

$$x_1 = a + b - x_2,$$

$$x_2 = a + b - x_1.$$

Во вновь найденных точках x_1 и x_2 вычисляются значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Затем проводится сравнение знаков функций на границах интервала и внутренних точках, в результате определяется новый интервал, на котором содержится искомый корень функции (рис. 13).

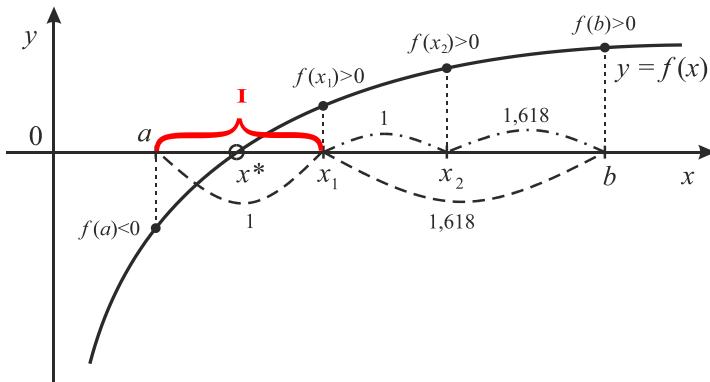


Рис. 13 – Первое приближение метода золотого сечения

В процессе сравнения возможна реализация одного из трех случаев:

- 1) если $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, то в качестве нового отрезка будет выбран интервал $[a, x_1]$ (рис. 13),
- 2) если $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, то в качестве следующего интервала выбирается отрезок $[x_1, x_2]$ (рис. 14),
- 3) если $f(x_2) \cdot f(b) < 0$, то новым отрезком становится интервал $[x_2, b]$.

Определенный таким образом новый интервал $[a_1, b_1]$, заключающий в себе решение нелинейного уравнения, заново делится на неравные части согласно правилу золотого сечения, как показано на рис. 14.

Стоит отметить, что в методе золотого сечения, как и в методе половинного деления для выбора нового отрезка нужно знать только знаки функции, а не её значение.

В отличие от метода половинного деления метод золотого сечения сходится быстрее, поскольку на каждом итерационном шаге отрезок уменьшается не в два, а в три раза.

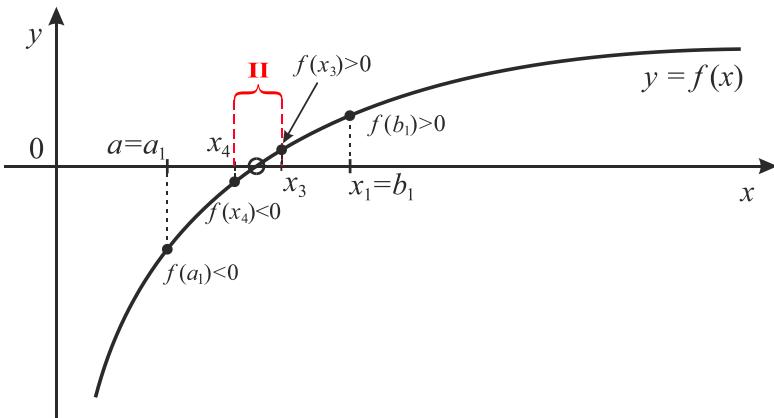


Рис. 14 – Второе приближение метода золотого сечения

Пример. После локализации корня определен конечный интервал $[1; 1,5]$, на котором находится единственный корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2 .$$

Требуется найти приближенное значение корня заданного уравнения с точностью до третьего знака после запятой, используя метод золотого сечения.

Решение. В начале вычисляются координаты двух внутренних точек согласно рассмотренного ранее правила золотого сечения:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi} = 1,5 - \frac{1,5-1}{1,618} \approx 1,19098 ,$$

$$x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi} = 1 + \frac{1,5-1}{1,618} \approx 1,30902 .$$

Далее определяются значения функции в найденных точках и на концах заданного интервала

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6,$$

$$f(1,19098) = 1,19098^3 - \frac{1,19098^2 + 1,19098}{5} - 1,2 = -0,03257,$$

$$f(1,30902) = 1,30902^3 - \frac{1,30902^2 + 1,30902}{5} - 1,2 = 0,43855,$$

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425.$$

С помощью найденных значений функций определяется интервала, где функция меняет знак. В рассматриваемом примере функция сменила знак на интервале от x_1 до x_2 . Следовательно, результатом первого приближения является новый интервал, где $a_1 = 1,19098$, $b_1 = 1,30902$, который используется для последующего уточнения решения.

Второе приближение также начинается с определения новых координат на оси абсцисс по правилу золотого сечения:

$$x_1 = 1,30902 - \frac{1,30902 - 1,19098}{1,618} \approx 1,23606,$$

$$x_2 = 1,19098 + \frac{1,30902 - 1,19098}{1,618} \approx 1,26394.$$

Во вновь найденных точках вычисляются значения функции

$$f(1,19098) = -0,03257,$$

$$f(1,23606) = 1,23606^3 - \frac{1,23606^2 + 1,23606}{5} - 1,2 = 0,13575,$$

$$f(1,26394) = 1,26394^3 - \frac{1,26394^2 + 1,26394}{5} - 1,2 = 0,24688,$$

$$f(1,30902) = 0,43855.$$

Проводится анализ смены знака функции на трех полученных интервалах, из которого видно, что смена знака происходит на первом интервале $[1,19098; 1,23606]$.

Перед переходом к третьему приближению проводится проверка на соответствие вновь полученного интервала требованию точности

$$|b_2 - a_2| < 2\varepsilon,$$

$$|1,23606 - 1,19098| = 0,04509 < 0,002.$$

Как видно необходимо продолжение процесса уточнения исходного решения.

В табл. 8 представлен процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом золотого сечения.

Таблица 8 – Решение нелинейного уравнения методом золотого сечения

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
0	1	-0,6	1,5	1,425	1,19098	-0,03257	1,30902	0,43855
1	1,19098	-0,03257	1,30902	0,43855	1,23606	0,13575	1,26394	0,24688
2	1,19098	-0,03257	1,23606	0,13575	1,20820	0,03007	1,21884	0,06980
3	1,19098	-0,03257	1,20820	0,03007	1,19755	-0,00888	1,20162	0,00591
4	1,19755	-0,00888	1,20162	0,00591	1,19911	-0,00325	1,20007	0,00025
5	1,19911	-0,00325	1,20007	0,00025				

После нескольких повторений процедуры расчета при $k=5$ было получено решение, которое удовлетворяет заданной точности

$$|1,20007 - 1,19911| = 0,00096 < 0,002.$$

Таким образом, полученное решение соответствует середине найденного интервала

$$x = \frac{1,19911 + 1,20007}{2} = 1,19959.$$

Напомним, что решаемое нелинейное уравнение имеет точное решение $x^* = 1,2$.

Ответ. Получено решение $x = 1,19959$ заданного нелинейного уравнения с требуемой точностью $\varepsilon = 0,001$ за 5 приближений.

Оба рассмотренные метода половинного деления и золотого сечения являются пассивными, так как осуществляются по жестко определенному плану, в котором не учитываются определенные значения функции. Можно предположить, что учет определенных значений функции может улучшить процесс нахождения решения нелинейного уравнения.

4.1.3. Метод хорд

Метод хорд (пропорциональных частей, линейной интерполяции) предназначен для уточнения корня на интервале $[a, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Поскольку нам известны значения функции на концах интервала, т.е. $f(a)$ и $f(b)$, то вместо того чтобы делить отрезок пополам целесообразно разделить его пропорционально значениям функции в начальных точках $f(a):f(b)$. Таким образом, нахождение решения заключается в определении координаты точки $x = x_0$, полученной путем пересечения оси абсцисс Ох и прямой линией (хордой) проходящей через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$.

Геометрическая интерпретация метода пропорциональных частей представлена на рис. 15 для случая с монотонной функции $f(x)$ и на рис. 16 для случая, когда заданная функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$ имеет немонотонное поведение.

Запишем уравнение прямой (хорды), проходящей через точки ***A*** и ***B***:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Для нахождения точки $x = x_0$ являющейся местом пересечения хорды с осью абсцисс Ox (имеющей уравнение $y = 0$) получим уравнение

$$x_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a).$$

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбирается тот из двух $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для обоих рассмотренных выше случаев выбираем отрезок $[a, x_0]$, так как $f(a) \cdot f(x_0) < 0$.

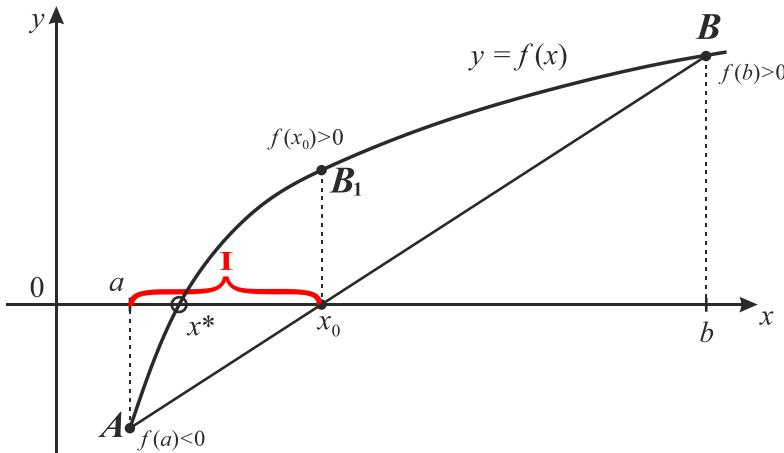


Рис. 15 – Графическое представление первой итерации метода хорд для монотонной функции

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбирается тот из двух $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для обоих рассмотренных выше случаев выбираем отрезок $[a, x_0]$, так как $f(a) \cdot f(x_0) < 0$. Следующая итерация состоит в определении нового приближения x_1 как точки пересечения хорды AB_1 с осью абсцисс (рис. 17 и 18) и т.д.

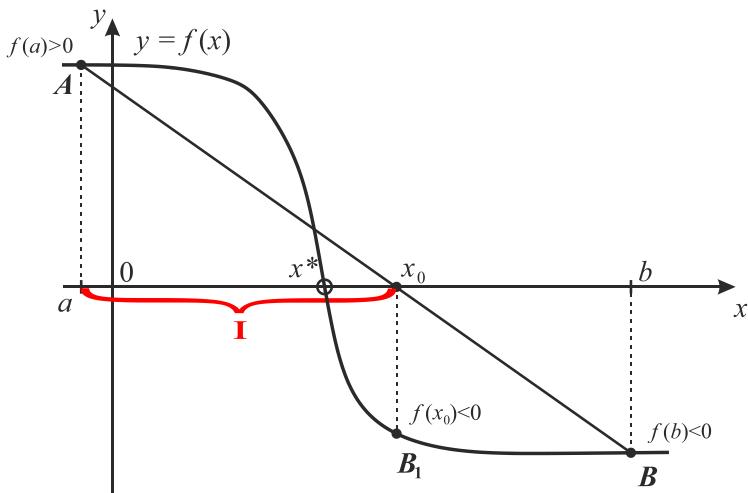


Рис. 16 – Схематичное представление первой итерации метода хорд для функции с немонотонным поведением

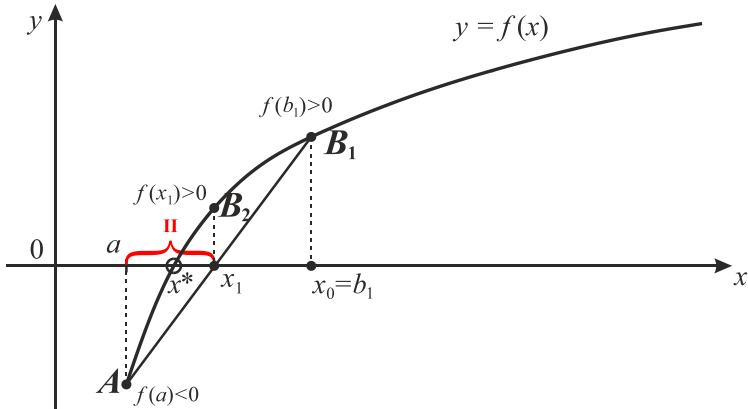


Рис. 17 – Визуализация второй итерации процесса нахождения решения с помощью метода хорд для монотонной функции

Замечание. В случае, когда заданная функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$ является монотонной (убывающей или возрастающей), то в процессе решения одна из границ a или b остаются неизменными. Как видно на рис. 15 и 17 для монотонно возрастающей функции выпуклой вверх граница a является постоянной.

В отличие от других интервальных методов, в методе хорд уменьшение длины промежутка локализации корня не является гарантированным, поэтому процесс нахождения решения сопоставляется между решениями, полученными на двух соседних итерациях.

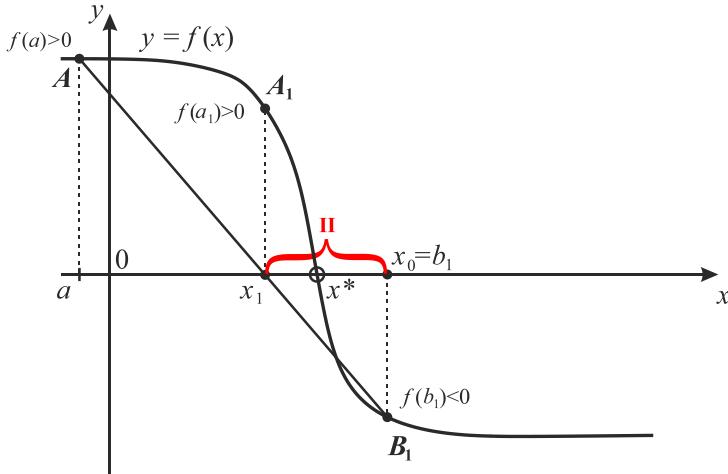


Рис. 18 – Геометрическое представление второй итерации для немонотонной функции по методу хорд

Таким образом, процесс уточнения корня заканчивается, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной точности ε , т.е. используется формула, применяемая для итерационных методов

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon .$$

Для доказательства сходимости процесса предполагается, что искомый корень отделен и вторая производная $f''(x)$ заданной функции $f(x)$ сохраняет постоянный знак на локализованном отрезке $[a, b]$.

Предположим, что $f''(x) > 0$ для $a \leq x \leq b$. Тогда график заданной функции будет выпуклым вниз и располагаться ниже своей хорды AB , при этом возможна два варианта. Вариант 1, когда заданная функция $f(x)$ в начальной точке a является

положительной, т.е. $f(a) > 0$, данный случай представлен на рис. 19. Второй вариант, реализуется в случае, когда функция $f(x)$ в начальной точке a является отрицательной, т.е. $f(a) < 0$, на рис. 20 проиллюстрирован этот случай.

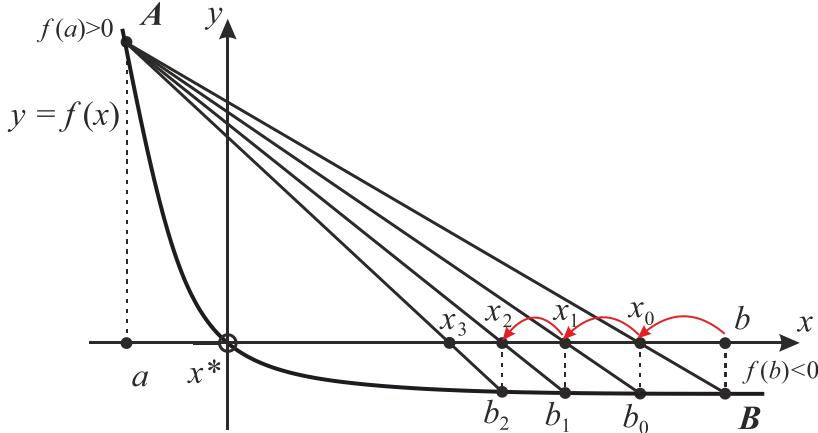


Рис. 19 – Нахождение решения нелинейного уравнения по методу хорд для функции, имеющей $f''(x) > 0$ и $f(a) > 0$

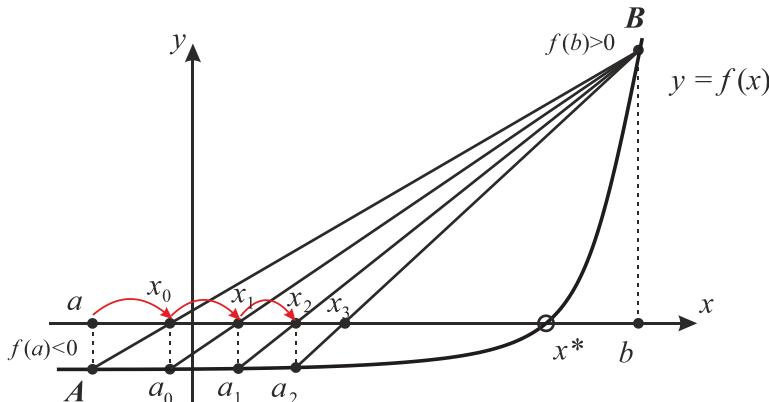


Рис. 20 – Нахождение решения нелинейного уравнения по методу хорд для функции, имеющей $f''(x) > 0$ и $f(a) < 0$.

Вариант 1. Левый конец начального интервала a остается неподвижным, а последовательные приближения: $x_0 = b$;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)} f(x_k),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \dots < x_{k+1} < x_k < \dots < x_1 < x_0.$$

Вариант 2. Правый конец начального интервала b остается неподвижным, а последовательные приближения: $x_0 = a$;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)} f(x_k)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x^* < b.$$

Здесь видно, что 1) неподвижным является тот конец функции, у которого её знак совпадает со знаком второй производной, т.е. $f(a) > 0$ и $f''(x) > 0$ (вариант 1) или $f(b) > 0$ и $f''(x) > 0$ (вариант 2); 2) последовательность приближений x_k лежит по ту сторону от корня x^* , где функция $f(x)$ имеет противоположный знак со второй производной $f''(x)$. В обоих вариантах каждое последующее приближение x_{k+1} ближе к искомому корню x^* , чем предыдущее x_k . Пусть на интервале $[a, b]$ существует

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k\}.$$

Тогда переходя к пределу в равенстве для первого варианта, имеем

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{\bar{x} - a}{f(\bar{x}) - f(a)} f(\bar{x}),$$

а для второго

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{b - \bar{x}}{f(b) - f(\bar{x})} f(\bar{x}),$$

отсюда $f(\bar{x}) = 0$. Поскольку по предположению заданное уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень x^* на искомом интервале $[a, b]$, то, следовательно, $\bar{x} = x^*$, что и требовалось доказать.

Замечание. В некоторых случаях метод хорд может сходиться очень медленно, один из таких примеров представлен на рис. 21.

Метод хорд обладают гарантированной сходимостью даже для разрывных функций.

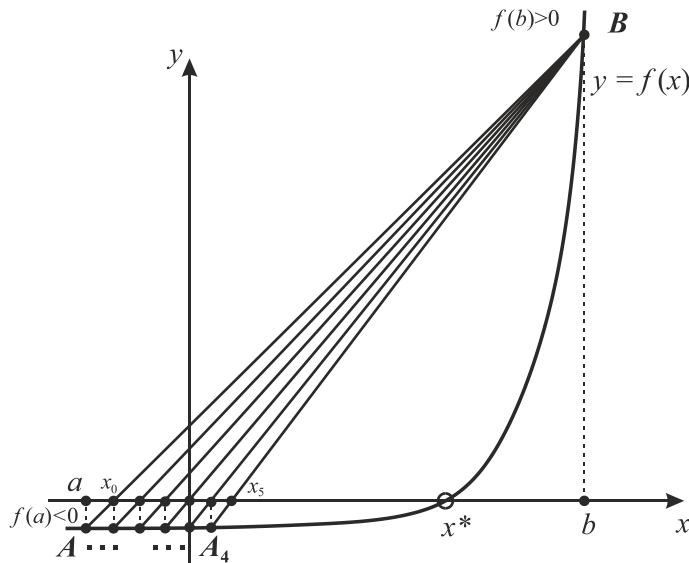


Рис. 21 – Медленное приближение к искомому решению по методу хорд

Пример. На интервале $[1; 1,5]$ уточнить корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

до точности $\varepsilon = 10^{-3}$ применяя метод хорд.

Решение. Вначале вычисляются значения функции на концах заданного интервала

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6,$$

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425.$$

На первом этапе определяется координата пересечения хордой оси абсцисс с помощью соотношения для метода хорд

$$x_0 = 1 - \frac{1,5 - 1}{1,425 - (-0,6)} \cdot (-0,6) = 1 + 0,148148 = 1,148148$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$\begin{aligned} f(1,148148) &= 1,148148^3 - \frac{1,148148^2 + 1,148148}{5} - 1,2 = \\ &= -0,179739. \end{aligned}$$

На втором этапе проводится анализ знаков функции и выбор интервала, на котором функция меняет знак. В данном случае осуществляется замена точки a на x_0 . Таким образом, интервал, на котором продолжается поиск решения, сузился до $[1,148148; 1,5]$. Проводим повторный расчет первого этапа для вновь полученного интервала.

Определяется новая координата пересечения хорды с осью абсцисс

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,148148 - \frac{1,5 - 1,148148}{1,425 - (-0,179739)} \cdot (-0,179739) = \\ &= 1,148148 + 0,039409 = 1,187557 \end{aligned}$$

и значение функции во вновь найденной точке

$$\begin{aligned} f(1,187557) &= 1,187557^3 - \frac{1,187557^2 + 1,187557}{5} - 1,2 = \\ &= -0,044767. \end{aligned}$$

Проводится проверка на достижение полученным решением заданной точности

$$|x_1 - x_0| < \varepsilon,$$

$$|1,187557 - 1,148148| = 0,039409 < 0,001.$$

Убеждаемся в необходимости продолжения процесса уточнения искомого решения. Для этого исследуемый интервал изменяется и уменьшается до $[1,187557; 1,5]$ и процесс нахождения решения продолжается.

Весь процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом хорд рационально представить в виде таблицы.

Как видно из табл. 9 после четырех повторений процедуры расчета было получено решение, которое удовлетворяет заданной точности

Таблица 9 – Решение нелинейного уравнения методом хорд

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	x	$f(x)$
0	1	-0,6	1,5	1,425	1,148148	-0,179739
1	1,148148	-0,179739	1,5	1,425	1,187557	-0,044767
2	1,187557	-0,044767	1,5	1,425	1,197074	-0,010622
3	1,197074	-0,010622	1,5	1,425	1,199315	-0,002491
4	1,199315	-0,002491	1,5	1,425	1,199840	-0,000583

$$|1,199840 - 1,199315| = 0,000525 < 0,001.$$

Отметим, что точное решение заданного нелинейного уравнения соответствует $x^* = 1,2$.

Ответ. Заданное нелинейное уравнение на рассматриваемом интервале имеет решение $x = 1,199840$, которое получено с точностью $\varepsilon = 0,001$.

4.1.4. Метод Риддерса (C. J. F. Ridders)

Рассмотренный ранее метода хорд основан на замене исходной заданной функции $f(x)$ прямой проходящей через две точки на функции $f(a)$ и $f(b)$. Идея метода Риддерса заключается в

замене непрерывной исходно заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ экспоненциальной функцией. Таким образом, нахождение решения будет заключаться в определении координаты точки $x = x_0$, полученной путем пересечения оси абсцисс Ох с экспоненциальной функцией, проходящей через три точки $A(a; f(a))$, $C(c; f(c))$ и $B(b; f(b))$. Для построения экспоненциальной функции необходимо ввести третью дополнительную точку c , в качестве третьей точки в методе Риддерса выбирается середина локализованного интервала $[a, b]$ вычисляемая по формуле:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

На концах локализованного интервала и найденной средней точки определяются значения функции, т.е. $f(a)$, $f(b)$ и $f(c)$. Через определенные значения функции (точки A , C и B) строится экспоненциальная зависимость, на рис. 22 она нанесена пунктирной линией.

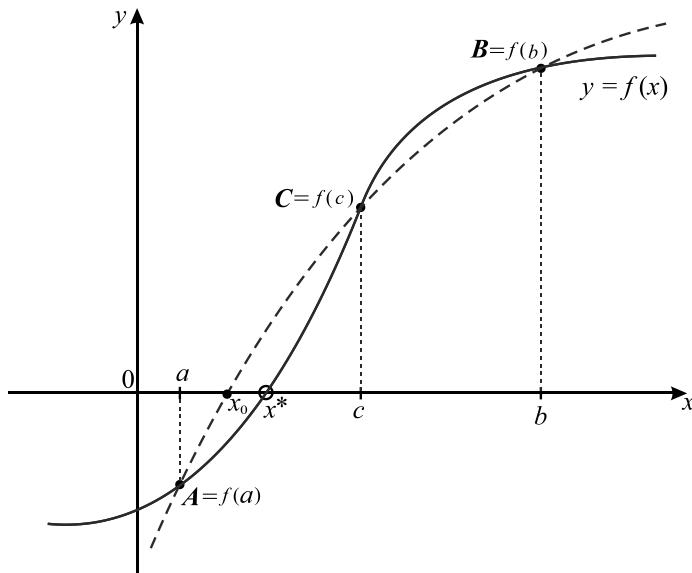


Рис. 22 – Начало процесса уточнения корня по методу Риддерса

Координата точки пересечения (x_0) экспоненты с осью абсцисс определяется по формуле:

$$x_0 = c + (c - a) \cdot \frac{\operatorname{sign}[f(a) - f(b)] \cdot f(c)}{\sqrt{f(c)^2 - f(a) \cdot f(b)}},$$

где функция $\operatorname{sign}(x)$ определяет знак числа x с помощью следующего выражения

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Полученное значение x_0 разбивает интервал локализации $[a, b]$ на два под интервала $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, для каждого под интервала проводится проверка на смену знака функции. В качестве нового интервала для продолжения процесса уточнения выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для случая рассмотренного ранее выбирается отрезок $[x_0, b]$, так как $f(x_0) \cdot f(b) < 0$ см. рис. 23.

Процесс нахождения следующего приближения к корню представлен на рис. 24. Он заключается в определении середины нового интервала, координаты точки c_1 . Последующего определения значений функции в точках a_1 , c_1 и b_1 . Через найденные точки A_1 , C_1 и B_1 проводится новая экспоненциальная функция и определяется новое приближение x_1 , как точка пересечения экспоненты с осью абсцисс и т.д.

Основным достоинством метода Риддерса является, тот факт, что он обладает сверхлинейной сходимостью. Порядок сходимости метода Риддерса $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,4142$, что позволяет за каждые две итерации удвоить количество значащих цифр в получаемом результате расчета. Также метод Риддерса не накладывает, каких либо ограничений на вид заданной функции $f(x)$, при этом метод обладает всеми преимуществами рассмотренных ранее методов, т.е. безусловной сходимостью.

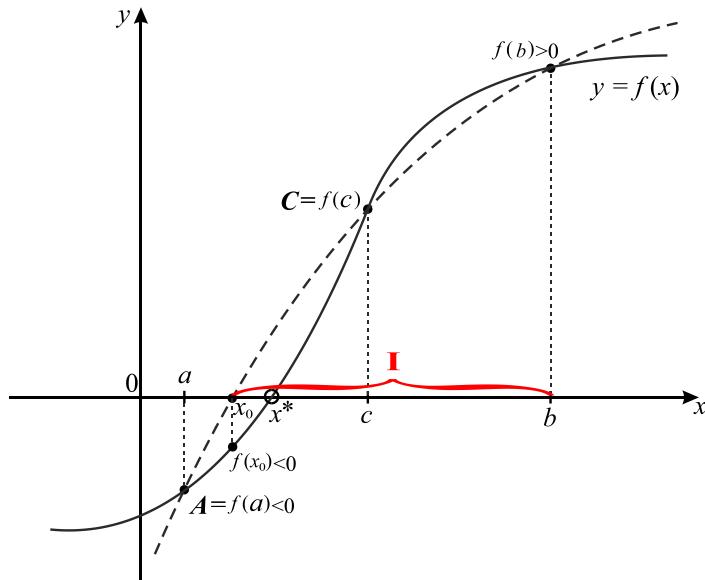


Рис. 23 – Анализ области существования корня

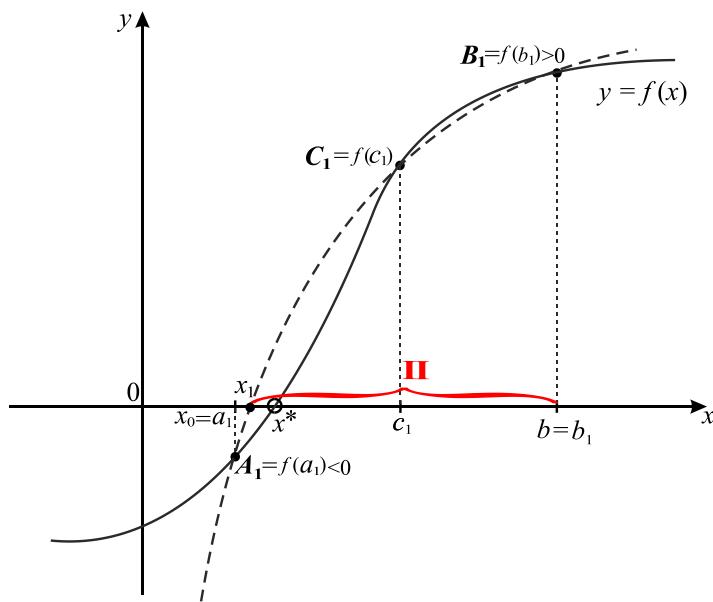


Рис. 24 – Второе приближение метода Риддерса

Пример. На локализованном интервале [1; 1,5] уточнить корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

до точности $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ с помощью метода Риддерса.

Решение. Вначале вычисляется координата середины заданного интервала

$$c = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$$

и значения функции на концах заданного интервала, а также во вновь найденной точке

$$f(1) = 1^3 - \frac{1^2 + 1}{5} - 1,2 = -0,6,$$

$$f(1,25) = 1,25^3 - \frac{1,25^2 + 1,25}{5} - 1,2 = 0,190625,$$

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425.$$

Прежде чем воспользоваться формулой для определения координаты точки пересечения экспоненты с осью абсцисс определяется знак разности $f(a) - f(b) = -2,025$, поскольку результат меньше нуля, то первый множитель в числителе $\text{sign}[f(a) - f(b)]$ принимает значение -1 .

Подставляем определенные значения в формулу для определения искомой неизвестной

$$x_0 = 1,3497612 + (1,3497612 - 1) \cdot \frac{-1 \cdot 0,190625}{\sqrt{0,190625^2 - (-0,6) \cdot 1,425}} = 1,1995224$$

и вычисляем значение функции во вновь найденной точке

$$f(1,1995224) = 1,1995224^3 - \frac{1,1995224^2 + 1,1995224}{5} - 1,2 = -0,0017377.$$

Найденное значение функции в точке x_0 позволяет выполнить анализ интервалов $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, а также выделить тот подинтервал, на котором происходит смены знака функции. В рассматриваемом случае знак функции меняется на интервале $[x_0, b]$, таким образом, осуществляется перенос точки a на место найденной x_0 . В результате заданный первоначальный интервал сузился до $[1,1995224; 1,5]$.

Для вновь определенного интервала проводится повторное вычисление координаты середины интервала

$$c_1 = \frac{1,1995224 + 1,5}{2} = 1,3497612$$

и значение функции в этой точке

$$f(1,3497612) = 1,3497612^3 - \frac{1,3497612^2 + 1,3497612}{5} - 1,2 = 0,6247463.$$

Перед определением координаты точки пересечения экспоненты с осью абсцисс проводится анализ знака первого члена в числителе, который, как и ранее является отрицательным. Находим точку пересечения экспоненты с осью абсцисс

$$x_1 = 1,3497612 + (1,3497612 - 1,1995224) \cdot \frac{-1 \cdot 0,6247463}{\sqrt{0,6247463^2 - (-0,0017377) \cdot 1,425}} = 1,1999967$$

и значение функции в точке x_1

$$f(1,1999967) = 1,1999967^3 - \frac{1,1999967^2 + 1,1999967}{5} - 1,2 = -0,0000119.$$

Проводится проверка на достижение полученным решением заданной точности

$$|x_1 - x_0| < \varepsilon,$$

$$|1,1999967 - 1,1995224| = 0,0004743 < 0,001.$$

Как видим необходимое условие достижения решения с заданной точностью выполнено. Далее проверяется достаточное условие по достижению значением функции в точке x_1 заданной точности

$$|f(x_1)| < \delta,$$

Таблица 10 – Решение нелинейного уравнения методом Риддерса.

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c
0	1	-0,6	1,5	1,425	1,25
1	1,1995224	-0,0017377	1,5	1,425	1,3497612

k	$f(c)$	$\text{sign}(x)$	x	$f(x)$
0	0,1906250	-1	1,1995224	-0,0017377
1	0,6247463	-1	1,1999967	-0,0000119

$$|-0,0000119| < 0,001.$$

Видим, что и достаточное условие сходимости для полученного решения также выполнено.

Процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом Риддерса представлен в таблице 10.

В итоге для достижения решения с требуемой точностью сверхлинейному методу потребовалось всего две итерации.

Точное решение заданного нелинейного уравнения соответствует $x^* = 1,2$.

Ответ. Данное нелинейное уравнение на рассматриваемом интервале имеет решение $x = 1,1999967$, которое получено с точностью $\varepsilon = 0,001$ за две итерации.

4.2. Итерационные методы

Нахождение решения нелинейного уравнения итерационными (итеративными) методами построено на основе задания одного некоторого начального приближения корня x_0 или нескольких x_0, x_1 , и т.д. и итеративного выражения для определения последовательности $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$ новых приближений на каждой итерации. При этом вместо анализа выбора нового интервала, который связан с проверкой знаков функции на границах интервала в интервальных методах, здесь используется некоторая дополнительная информация, вводящая ограничения на вид заданной функции $f(x)$.

Условие остановки процесса нахождения решения в итеративных методах связано с оценкой расстояния между последним x_k и предпоследним x_{k-1} (или новым x_{k+1} и старым x_k) приближениями корня:

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon \quad \text{или}$$

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon.$$

К итерационным методам относятся: метод Ньютона, модифицированный метод Ньютона, метод секущих, метод простой итерации и метод Мюллера.

4.2.1. Метод Ньютона

Метод Ньютона (метод касательных, метод линеаризации, метод Ньютона-Рафсона) является одним из популярнейших итерационных методов решения нелинейных уравнений, т.к. он отличается простотой и быстрой сходимостью. Выражение для итерационного процесса можно получить двумя способами, первый опирается на геометрическое представление, а второй на аналитическое разложение заданной нелинейной функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Получим выражение, для итеративной последовательности исходя из геометрического представления метода (рис. 25). В качестве начального приближения x_0 примем правую границу интервала локализации b . Вычисляем в этой точке значение функции $f(x_0)$ на рис. 25 определенное значение соответствует точке

B. Проводим через точку $B(x_0, f(x_0))$ касательную к кривой $y = f(x)$. Эта касательная пересекается с осью абсцисс в точке x_1 , которая в дальнейшем рассматривается в качестве следующего приближения и является искомым параметром.

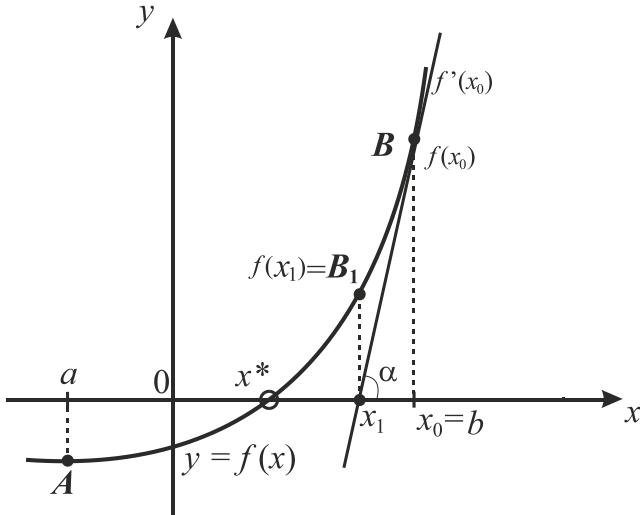


Рис. 25 – Визуализация процесса построения решения с помощью метода касательных

Значение новой точки x_1 можно достаточно легко определить, опираясь на математическое выражение для тангенса угла α в прямоугольном треугольнике

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0).$$

Данное выражение позволяет определить искомую величину x_1 в следующем виде

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Для нахождения следующего приближения x_2 вычисляется значение функции в точке x_1 , на рис. 26 это точка $B_1(x_1, f(x_1))$ и

вычисляется первая производная в точке x_1 , т.е. проводится касательная через точку B_1 к функции $y = f(x)$.

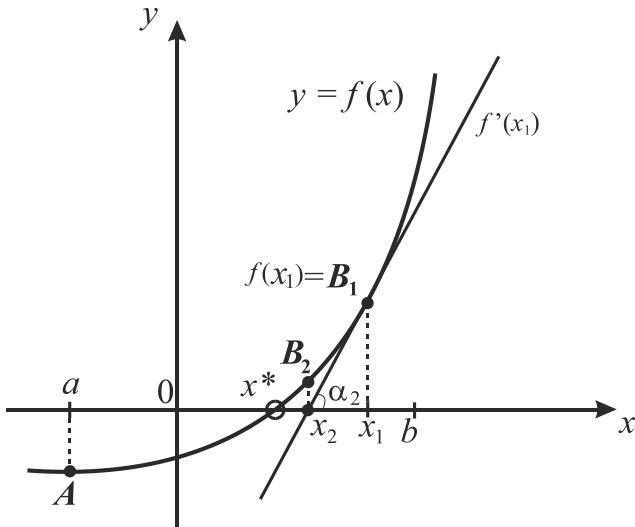


Рис. 26 – Второе приближение по методу касательных
Математическое выражение для нахождения x_2 имеет вид

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогично находятся все последующие приближения x_3, x_4 , и т.д. Формула для $k + 1$ приближения будет иметь вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Отсюда вытекает условие применимости метода: функция $f(x)$ должна быть дифференцируемой, и её первая производная $f'(x)$ в окрестности корня не должна менять знак.

Замечание. Если вместо правой границы b для начального приближения x_0 взять левую a , то проводя касательную к функции $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, получаемая точка пересечения

касательной с осью абсцисс x_1 , как видно из рис. 27, находится за пределами интервала локализации корня. Таким образом, процесс выбора начального приближения в методе Ньютона требует особого внимания и будет подробно рассмотрен в дальнейшем.

Рассмотрим второй способ получения выражения для определения x_{k+1} . Для этого предполагается, что заданная функция $f(x)$ является непрерывной и минимум дважды дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, внутри которого находится один искомый корень x^* .

На рассматриваемом интервале уже имеется одна точка x_k , являющаяся начальным приближением x_0 , т.е. $k = 0$. В заданной точке наша функция имеет значение $f(x_k)$, а также первую $f'(x_k)$ и вторую производную $f''(x_k)$. Между заданной точкой x_k и искомым решением x^* имеется некоторое малое расстояние, тогда для определения значения функции в точке x^* применяем разложение в ряд Тейлора, ограниченное до членов со второй производной

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2.$$

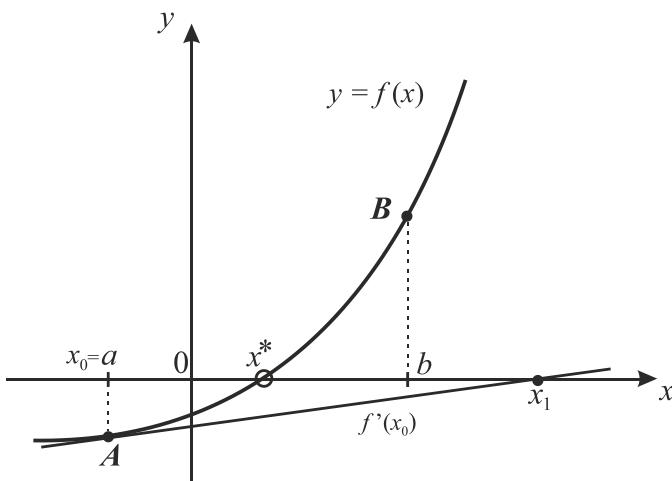


Рис. 27 – Выбор левой границы интервала в качестве начального приближения в методе касательных

Так как точка x^* является точным решением, то значение функции в этой точке обращается в ноль. В результате получается квадратное уравнение для нахождения корня x^*

$$f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2 = 0.$$

Поскольку расстояние между точками x_k и x^* мало, то квадратом их разности можно пренебречь и результирующее уравнение будет линейным. Поскольку в процессе получения точного решения x^* от бесконечного ряда Тейлора осталось только два слагаемых, то полученное решение будет отличаться от точного. Определенная таким образом точка обозначается x_{k+1} и определяется с помощью следующего выражения

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Следовательно, второе слагаемое с дробью является тем самым приращением, на которое новая точка приближается к точному решению нелинейного уравнения на каждой итерации.

Для окончания итерационного процесса используются стандартное условие

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon.$$

Замечание. В методе Ньютона нет необходимости задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения, а достаточно задать только точку x_0 являющуюся начальным приближением.

Пример. Найти корень нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

с помощью метода Ньютона на интервале $[1; 1,5]$ с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Первым действием определяется первая производная заданной функции

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^2 + x}{5} - 1,2 \right)' = 3x^2 - \frac{2x + 1}{5}.$$

В качестве начальной точки x_0 выбираем правую границу заданного интервала (в нашем случае это точка $b = 1,5$). Далее в данной начальной точке вычисляется значение функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425$$

и ее первой производной

$$f'(1,5) = 3 \cdot 1,5^2 - \frac{2 \cdot 1,5 + 1}{5} = 5,95.$$

Полученные значения подставляются в выражение для вычисления координаты точки пересечения касательной с осью абсцисс

$$x_1 = 1,5 - \frac{1,425}{5,95} = 1,26050.$$

Полученное значение x_1 сравнивается с начальным x_0 для проверки достигнутой точности

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \text{ или } |1,26050 - 1,5| = 0,23950 < 0,001.$$

Как видно требуемое условие по точности не выполнено, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Для этого проводится повторное вычисление значения функции в точке x_1

$$f(1,26050) = 1,26050^3 - \frac{1,26050^2 + 1,26050}{5} - 1,2 = 0,23290$$

и значение первой производной в этой же точке

$$f'(1,26050) = 3 \cdot 1,26050^2 - \frac{2 \cdot 1,26050 + 1}{5} = 4,06241.$$

Вычисленные значения функции и ее производной в точке x_1 подставляются в выражение для определения координаты следующей точки пересечения касательной $f'(x_1)$ с осью абсцисс

$$x_2 = 1,26050 - \frac{0,23290}{4,06241} = 1,20317.$$

Используя полученное значение координаты x_2 и предыдущее x_1 , определяется погрешность

$$|1,20317 - 1,26050| = 0,05733 < 0,001.$$

Таким образом, погрешность уменьшилась, но требуемая точность не достигнута, а следовательно, процедуре нахождения решения необходимо продолжить.

Процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом Ньютона представлен в табл. 11. Из табл. 11 видно, что после четвертой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,2 - 1,200009| = 0,00009 < 0,001.$$

Таблица 11 – Решение нелинейного уравнения методом Ньютона

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,5	1,425	5,95
1	1,26050	0,23290	4,06241
2	1,20317	0,01158	3,66161
3	1,200009	3,41E-05	3,64006
4	1,2	2,98E-10	3,64

Также осуществляется проверка условия достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности, т.е. $|f(x_4)| < \delta$. Стоит отметить, что значение функции, определенное после четвертой итерации, отличается от нуля в десятом знаке после запятой.

Ответ. Решение заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получено методом Ньютона за четыре итерации и соответствует $x = 1,2$.

Сходимость метода Ньютона

Проведём оценку условия сходимости получаемых решений x_k , в методе Ньютона, к точному значению корня x^* нелинейного уравнения. Для этого ещё раз воспользуемся разложением в ряд Тейлора представленным ранее

$$f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2 = 0.$$

Перенося последнее слагаемое в правую часть и деля всё уравнение на $f'(x_k)$ имеем

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2.$$

Первые два слагаемых в левой части полученного выражения являются правой частью формулы Ньютона и равны x_{k+1} , т.е.

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2$$

или переходя к модулям имеем

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} |x_k - x^*|^2.$$

Из чего следует оценка

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_k - x^*|^2,$$

где $m_1 = \min_{[a, b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$.

Полученная оценка характеризует скорость убывания погрешности для метода Ньютона: на каждом шаге погрешность пропорциональна квадрату погрешности на предыдущем шаге. Следовательно, метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью.

Очевидно, что ошибка убывает, если

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_0 - x^*| < 1.$$

Полученное условие означает, что сходимость зависит от выбора начального приближения x_0 и свойств заданной функции $f(x)$.

Выбор начального приближения в методе Ньютона

Как было показано ранее сходимость итерационной последовательности, получаемой в методе Ньютона, зависит от выбора начального приближения x_0 и свойств заданной функции $f(x)$. Это хорошо видно из геометрической интерпретации метода представленной на рис. 28.

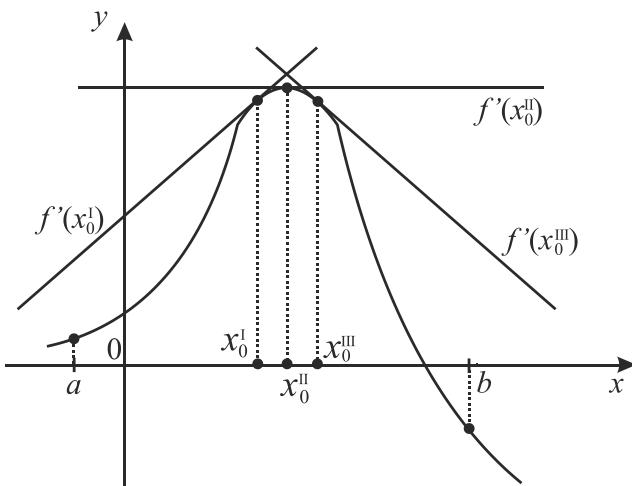


Рис. 28 – Выбор начального приближение в методе касательных

Так, если в качестве начального приближения x_0 взять одну из трех точек x_0^I , x_0^{II} или x_0^{III} , то на сходимость итерационного процесса рассчитывать не приходится. Таким образом, на рассматриваемом интервале должен быть наложен ряд ограничений на функцию, в частности требование знакопостоянства первой и второй производной, означающих монотонность и выпуклость графика функции.

Заключение. Если задан отрезок $[a, b]$, содержащий корень, и известно, что функция $f(x)$ монотонна и имеет первую и вторую производную постоянного знака на этом отрезке, то в

качестве начального приближения x_0 нужно выбрать ту границу отрезка $[a, b]$, где знаки функции $f(x_0)$ и второй производной $f''(x_0)$ совпадают, т.е. выполняется условие Фурье:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Замечание. Если условие Фурье на выбор начального приближения x_0 нарушается, но требование знакопостоянства производных выполняется, то это может отразиться только на первой итерации. После первого приближения полученное решение x_1 переходит в противоположную область относительно искомого корня x^* , как это показано на рис. 27. Если после первой итерации полученный корень не выйдет за пределы рассматриваемой области $[a, b]$, то дальнейший итерационный процесс сходится к искомому корню монотонно.

4.2.2. Модифицированный метод Ньютона

Рассмотренный выше метод Ньютона требует вычисления производной $f'(x_k)$ на каждом k -том шаге. Данное обстоятельство существенно снижает эффективность метода касательных. Поэтому в случаях, когда вычисление производной сопряжено с существенными затратами машинного времени, целесообразно использовать модифицированный (огрубленный, видоизменённый или упрощённый) метод Ньютона (рис. 29).

Модификация заключается в замене $f'(x_k) = f'(x_0)$, в этом случае производная $f'(x_k)$ вычисляется только один раз в точке начального приближения x_0 :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

Первая итерация, проводимая по модифицированному методу Ньютона, полностью совпадает с классическим методом Ньютона. На рис. 29 при геометрической интерпретации получается, что на первом шаге определяется угол наклона α касательной к оси абсцисс, который во всех последующих приближениях остается постоянным.

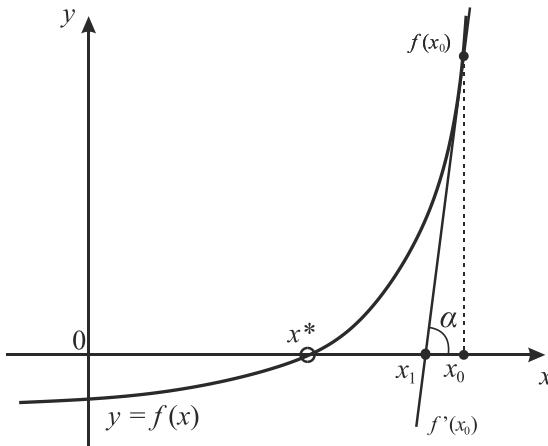


Рис. 29 – Первое приближение по модифицированному методу Ньютона

При выполнении второго итерационного шага проводится линия параллельная касательной к функции в точке x_0 и пересекающая функцию в точке $f(x_1)$, а точка её пересечения с осью абсцисс определяет новое значение x_2 . На рис. 30 представлен процесс определения второго приближения по модифицированному методу Ньютона.

Как видно из сравнения рис. 30 и 26 данная модификация утрачивает высокую скорость сходимости, которую обеспечивал метод Ньютона, так как процесс не реагирует на изменение угла наклона при приближении решения к искомому корню.

Пример. Найти решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

используя модифицированный метод Ньютона на интервале $[1; 1,5]$ с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. По аналогии с классическим методом Ньютона находится первая производная заданной функции

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^2 + x}{5} - 1,2 \right)' = 3x^2 - \frac{2x + 1}{5}.$$

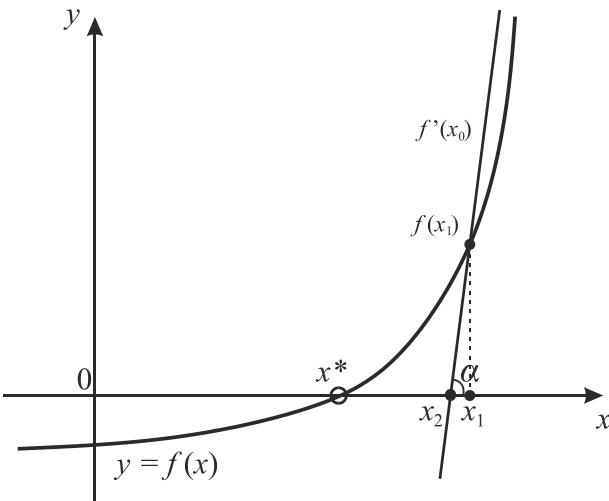


Рис. 30 – Второе приближение по модифицированному методу Ньютона

За начальную точку x_0 , так же выбирается правая граница заданного интервала (т.е. точка $b = 1,5$). В данной начальной точке вычисляются значение функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425$$

и первой производной

$$f'(1,5) = 3 \cdot 1,5^2 - \frac{2 \cdot 1,5 + 1}{5} = 5,95.$$

Оба вычисленных значения подставляются в выражение для определения координаты точки пересечения касательной с осью абсцисс

$$x_1 = 1,5 - \frac{1,425}{5,95} = 1,26050.$$

Полученное значение x_1 также сравнивается с начальным x_0 для проверки достигнутой точности

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \text{ или } |1,26050 - 1,5| = 0,23950 < 0,001.$$

Как видно требуемое условие по точности не выполнено, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Как видно первая итерация полностью совпадает с классическим методом Ньютона.

Для выполнения второй итерации необходимо вычислить, только значение функции в точке x_1

$$f(1,26050) = 1,26050^3 - \frac{1,26050^2 + 1,26050}{5} - 1,2 = 0,23290,$$

а значение первой производной берется с предыдущей итерации, т.е. в точке x_0 . Следовательно, знаменатель в модифицированном методе Ньютона является постоянным и равен 5,95.

Вновь вычисленное значение функции в точке x_1 подставляются в выражение для определения координаты следующей точки пересечения касательной $f'(x_0)$ с осью абсцисс

$$x_2 = 1,26050 - \frac{0,23290}{5,95} = 1,22136.$$

Найденная координата x_2 сравнивается с координатой, вычисленной на предыдущем шаге x_1 , для определения точности вычислений

$$|1,22136 - 1,26050| = 0,03914 < 0,001.$$

Поскольку требуемая точность не достигнута, то процедура нахождения решения продолжается.

Механизм нахождения решения нелинейного уравнения модифицированным методом Ньютона сведен в табл. 12.

Из табл. 12 видно, что после шестой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,20046 - 1,20119| = 0,00073 < 0,001.$$

В то же время проведенная проверка условие достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности показывает, что необходимо продолжить процесс уточнения ис- комого решения. Только решение, полученное после седьмой итерации, удовлетворяет требуемому условию, т.е. $|f(x_7)| < \delta$.

Ответ. Решение заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ получено модифицированным методом Ньютона за семь итераций и соответствует $x = 1,20018$.

Проводя анализ полученного решения по модифицированному методу Ньютона и по методу касательных, можно отметить, что модификация приводит к значительному увеличению числа итераций и при этом значение функции в полученном решении x значительно уступает классическому методу Ньютона.

4.2.3. Метод секущих

Альтернативным подходом является полное устранение необходимости вычисления производной в классическом методе Ньютона, для этого производная заменяется (аппроксимируется) конечно-разностным выражением. Для приближенного вычисления производной $f'(x_k)$ в окрестности точки x_k применяется следующее выражение

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Таблица 12 – Уточнение решения нелинейного уравнения модифицированным методом Ньютона

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,5	1,425	5,95
1	1,26050	0,23290	5,95
2	1,22136	0,07931	5,95
3	1,20803	0,02945	5,95
4	1,20308	0,01125	5,95
5	1,20119	0,00434	5,95
6	1,20046	0,00168	5,95
7	1,20018	0,00065	5,95

Подставляя представленное выражение в формулу Ньютона, получаем

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Полученное выражение определяет итерационный процесс **метода секущих**.

Название метода связано с его геометрической интерпретацией.

Секущая, проведенная через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$, пересекает ось абсцисс в точке x_2 , значение которой определяется как

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Для начала итерационного процесса в методе секущих необходимо задать два начальных приближения: нулевое x_0 и первое x_1 (см. рис. 31).

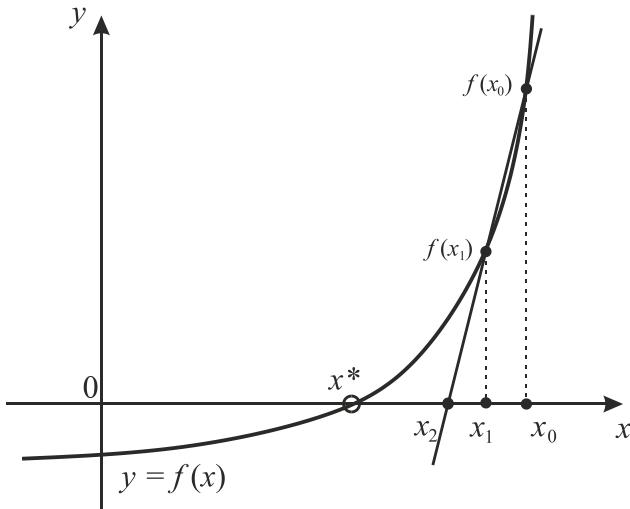


Рис. 31 – Первое приближение по методу секущих

На практике, как правило, поступают следующим образом: нулевое приближение выбирают аналогично выбору начального приближения в методе Ньютона, а в качестве первого приближения выбирают величину $x_1 = x_0 \pm \varepsilon$, где ε – заданная погрешность. Эти значения используются для нахождения последующего (второго) приближения x_2 . Затем, значения x_1 и x_2 используют для определения третьего приближения x_3 (см. рис. 32) и т.д.

Альтернативно, в качестве нулевого и первого приближений могут быть выбраны границы отрезка локализации корня, если они известны. В этом случае первая итерация метода секущий даст результат, аналогичный методу хорд.

Для завершения итерационного процесса используется стандартное условие.

Метод секущих несколько уступает методу Ньютона в скорости сходимости, однако он не требует вычисления производной $f'(x_k)$ и поэтому оказывается особенно полезным в тех случаях, когда получение аналитического выражения для производной $f'(x_k)$ затруднено или невозможно.

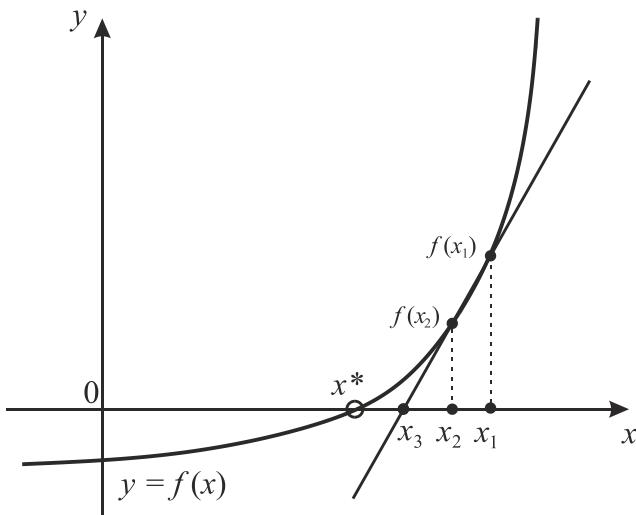


Рис. 32 – Второе приближение по методу секущих

По алгоритму метод секущих близок к методу хорд, однако в отличие от последнего начальные приближения в методе секущих могут располагаться как с разных сторон от корня, так и с одной стороны; кроме того, при уточнении корня не проверяются знаки функции $f(x)$.

Пример. Уточнить решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

используя метода секущих на интервале $[1; 1,5]$ с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Для запуска итерационного процесса по методу секущих необходимо задать две начальных точки. В качестве первой x_0 выбирается правая граница интервала, точка $b = 1,5$, а вторая x_1 , вычисляется с помощью выражения

$$x_1 = x_0 - \varepsilon = 1,5 - 0,001 = 1,499.$$

В каждой начальной точке проводится вычисление значений функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425,$$

$$f(1,499) = 1,499^3 - \frac{1,499^2 + 1,499}{5} - 1,2 = 1,41905.$$

Определенные значения используются для вычисления координаты новой точки x_2 , определяющей место пересечения секущей с осью абсцисс

$$x_2 = 1,499 - \frac{1,41905 \cdot (1,499 - 1,5)}{1,41905 - 1,425} = 1,26033.$$

Вычисленное значение x_2 сравнивается с x_1 и проверяется на достижение заданной точности

$$|x_2 - x_1| \leq \varepsilon \text{ или } |1,26033 - 1,499| = 0,23867 < 0,001.$$

Требуемая точность после первой итерации не достигнута, следовательно, процедура уточнения корня должна быть продолжена.

На второй итерации проводится вычисление, только значения функции в точке x_2

$$f(1,26033) = 1,26033^3 - \frac{1,26033^2 + 1,26033}{5} - 1,2 = 0,2322.$$

Определенное значение функции в точке x_2 подставляются в выражение для определения координаты следующей точки x_3 пересечения хорды с осью абсцисс

$$x_3 = 1,26033 - \frac{0,2322 \cdot (1,26033 - 1,499)}{0,2322 - 1,41905} = 1,21364.$$

Вновь найденная координата x_3 сравнивается с координатой, вычисленной на предыдущем шаге x_2 , для оценки точности вычислений

$$|1,21364 - 1,26033| = 0,04669 < 0,001.$$

Видно, что погрешность уменьшилась почти в пять раз, но требуемой точности достигнуть не получилось, значит, итерационный процесс следует продолжить.

Последующие итерации метода секущих представлены в табл. 13.

Таблица 13 – Уточнение решения нелинейного уравнения методом секущих

k	x_{k-1}	$f(x_{k-1})$	x_k	$f(x_k)$
0	1,5	1,425	1,499	1,41905
1	1,499	1,41905	1,26033	0,2322
2	1,26033	0,2322	1,21364	0,05027
3	1,21364	0,05027	1,20073	0,00267
4	1,20073	0,00267	1,20001	0,00003

Анализируя данные в табл. 13 видно, что после четвертой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,20001 - 1,20073| = 0,00072 < 0,001.$$

Кроме того, найденное значение функции во вновь вычисленной точке, также меньше заданной точности.

Ответ. Найдено численное решение методом секущих заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ после четвертой итерации и равно $x = 1,20001$.

4.2.4. Метод простых итераций (МПИ)

Теперь рассмотрим более общий итерационный метод уточнения корней. Для этого представим исходное уравнение (1.1) в равносильном виде

$$x = \phi(x).$$

Пусть нам известно начальное приближение к корню x_0 ($x_0 \in [a, b]$). Подставив его в правую часть, получим новое приближение $x_1 = \phi(x_0)$, затем аналогичным образом получим $x_2 = \phi(x_1)$. Продолжая данный процесс, получаем последовательность чисел

$$x_{k+1} = \phi(x_k).$$

При определенных свойствах функции $\phi(x)$ последовательность $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ сходится к корню уравнения $f(x) = 0$. Необходимо установить при каких условиях итерационный процесс будет сходящимся.

Рассмотрим графически процесс получения приближенного решения в методе простых итераций. При решении необходимо отыскать точку пересечения кривой $y = \phi(x)$ и прямой $y = x$ являющейся биссектрисой координатного угла.

На рис. 33–39 представлены разные варианты кривой $y = \phi(x)$, которая может представлять собой любую функцию.

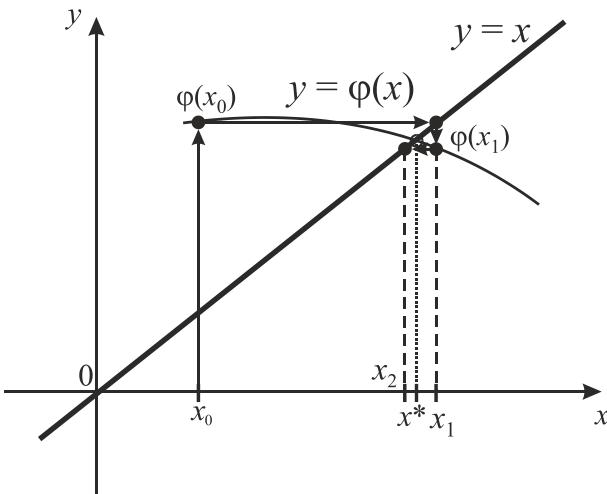


Рис. 33 – Процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 1

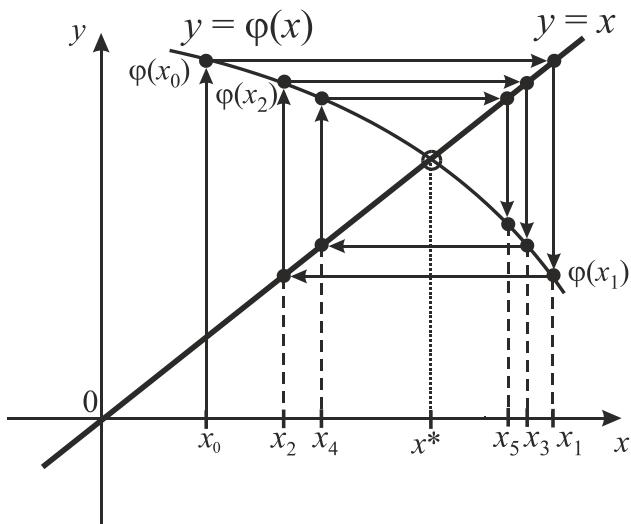


Рис. 34 – Процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 2

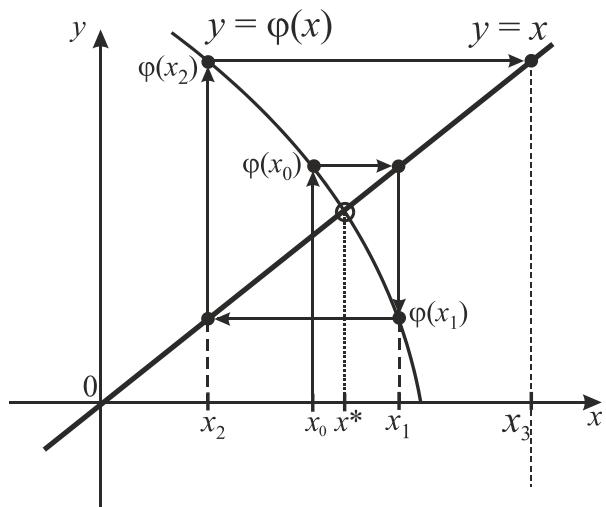


Рис. 35 – Расходящийся процесс решения методом простой итерации – вариант 3

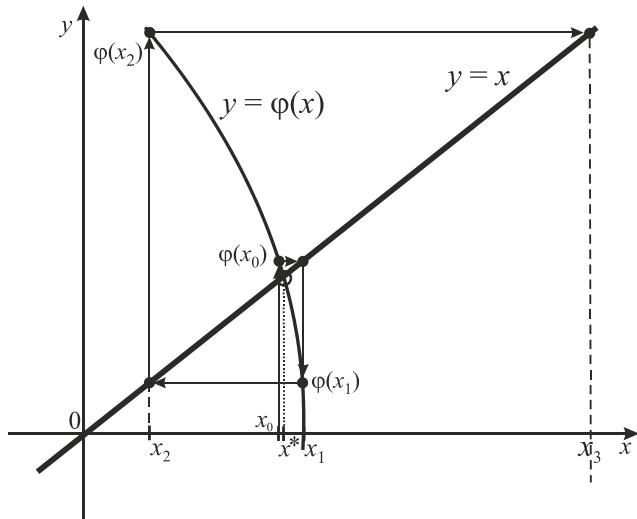


Рис. 36 – Расходящийся процесс решения методом простой итерации – вариант 4

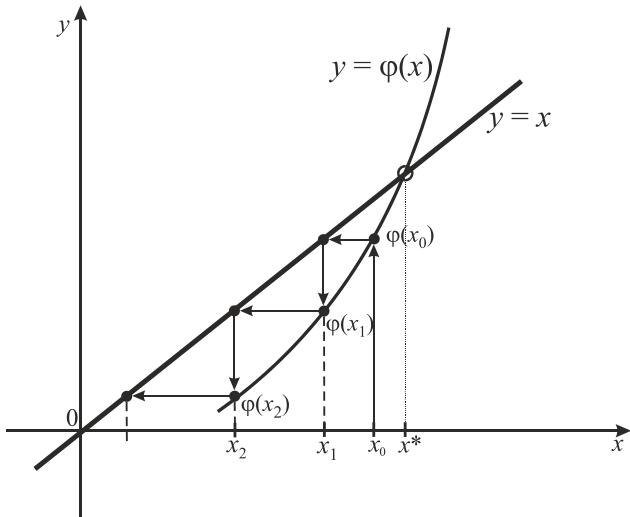


Рис. 37 – Расходящийся процесс решения методом простой итерации – вариант 5

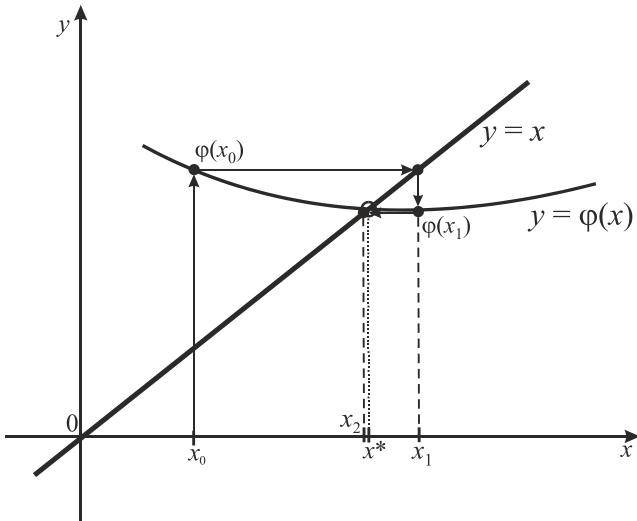


Рис. 38 – Сходящийся процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 6

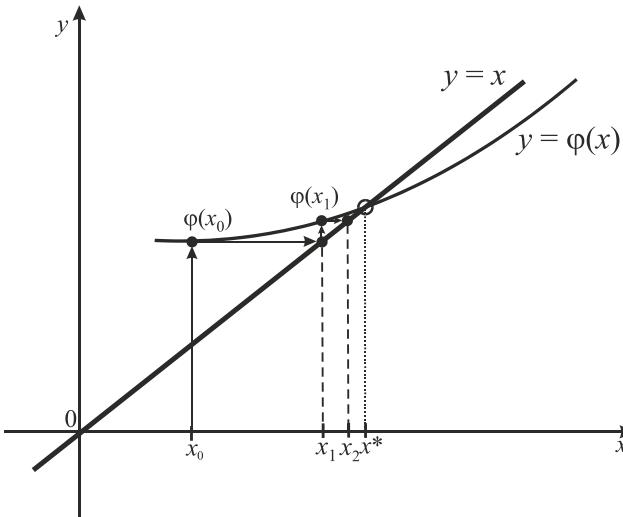


Рис. 39 – Сходящийся процесс получения решения с помощью метода простых итераций – вариант 7.

Пусть $x = x^*$ – корень уравнения. Выберем начальное приближение в точке x_0 . Следующее приближение x_1 , в соответствии с уравнением, будет равно $\phi(x_0)$. Для того, чтобы отобразить x_1 на графике можно провести через точку $(x_0, \phi(x_0))$ прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с прямой $y = x$, а затем в точке пересечения этих прямых опустить перпендикуляр на ось абсцисс, который и отметит положение точки x_1 . Аналогично получаются все последующие приближения. Из рис. 33, 34, 38, 39 видно, что итерационный процесс сходится к искомому корню x^* , а на рис. 35–37 с каждой новой итерацией получаемое решение удаляется от искомого решения, т.е. итерационный процесс является расходящимся.

Математически условие сходимости можно установить следующим образом. Представим k и $k + 1$ приближения в форме

$$x_k = x^* + \varepsilon_k,$$

$$x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1}.$$

где ε_k и ε_{k+1} – отклонения приближений от корня.

Функцию $\varphi(x)$ вблизи точки x^* приближенно заменим первыми двумя членами ряда Тейлора. Тогда итерационная формула примет вид

$$x^* + \varepsilon_{k+1} \approx \phi(x^*) + \varepsilon_k \phi'(x^*).$$

Но поскольку x^* является корнем уравнения, то первые слагаемые в правой и левой части этого выражения тождественно равны и, следовательно

$$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k \phi'(x^*).$$

Для сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы погрешность на каждом шаге убывала, т.е.

$$|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|,$$

откуда следует, что в окрестности корня должно выполняться условие

$$|\phi'(x)| < 1.$$

Таким образом, для того чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо, чтобы абсолютная величина производной $\phi'(x)$ в окрестности корня была меньше единицы. Если это условие выполняется на отрезке $[a, b]$ на котором локализован корень, то в качестве начального приближения можно взять любую точку из этого отрезка $x_0 \in [a, b]$. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной $|\phi'(x)|$: чем меньше $|\phi'(x)|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.

На рис. 40 выделены области I и III, в которых итерационный процесс сходится и области II и IV, где он расходится. Процесс приближения к корню может сходиться либо в виде монотонных приближений (ломаная линия в виде ступеньки рис. 39) реализуется, если $\phi'(x) > 0$, либо двухсторонних (ломаная линия в виде спирали рис. 33, 34 и 38) при $\phi'(x) < 0$.

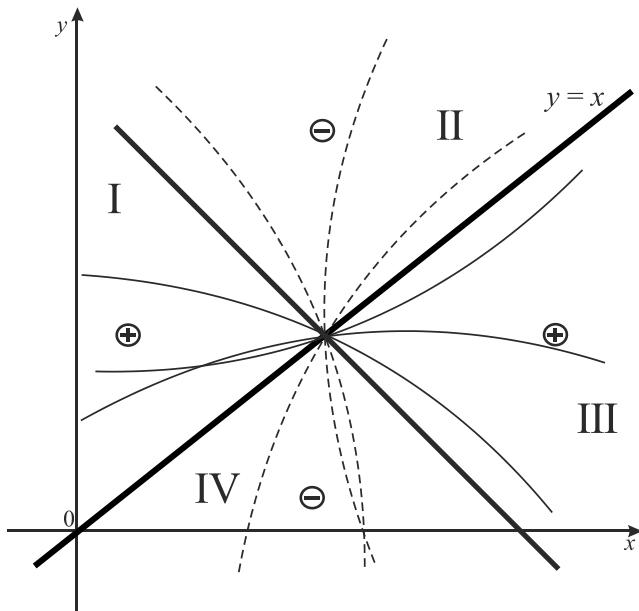


Рис. 40 – Области сходимости метода простой итерации

Пример. Уточнить решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

с помощью метода простых итераций на интервале $[1; 1,5]$ с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Перед запуском итерационного процесса по методу простых итераций необходимо выполнить преобразование исходного уравнения к итеративному виду:

$$x = \phi(x).$$

Заданное уравнение возможно представить в итеративном виде тремя способами:

- 1) выражаем неизвестное x , стоящее в первой степени, тогда результирующее выражение имеем вид

$$x = 5x^3 - x^2 - 6;$$

- 2) выписываем неизвестное x из члена во второй степени и получаем следующее равенство

$$x = \sqrt{5x^3 - x - 6} ;$$

- 3) записываем неизвестное x как кубический корень в следующем виде

$$x = \sqrt[3]{1,2 + \frac{x^2 + x}{5}} .$$

После приведения исходного уравнения к итеративному виду необходимо проверить сходимость итерационного процесса. Для выполнения этого требования необходимо найти выражение для первой производной и провести вычисление значений производных на границах локализованного интервала. Проделаем данное исследование для правых частей каждого из трех представленных способов получения итеративного выражения.

- 1) Первая производная имеет вид

$$\phi'(x) = 15x^2 - 2x .$$

Проводя подстановку в качестве неизвестного x левую a и правую b границу интервалов локализации, получаем следующие значения:

$$\phi'(a) = 15 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 13 ,$$

$$\phi'(b) = 15 \cdot 1,5^2 - 2 \cdot 1,5 = 30,75 .$$

Как видно из представленных результатов условие сходимости не выполняется на обеих границах, следовательно, первый способ представления итеративного выражения является не применимым.

- 2) Вычисленная производная итеративной формулы для второго случая определяется как

$$\phi'(x) = \frac{15x^2 - 1}{2\sqrt{5x^3 - x - 6}} .$$

Выполняем проверку значений полученной производной на границах рассматриваемого интервала, получаем следующие значения:

$$\phi'(a) = \frac{15 \cdot 1^2 - 1}{2\sqrt{5 \cdot 1^3 - 1 - 6}} = \frac{7}{\sqrt{-2}},$$

$$\phi'(b) = \frac{15 \cdot 1,5^2 - 1,5}{2\sqrt{5 \cdot 1,5^3 - 1,5 - 6}} = 5,21.$$

Полученные результаты показывают, что условие сходимости не выполняется, таким образом, второй вариант итеративного выражения также не приводит к сходимости к искомому решению.

- 3) Производная правой части третьего итеративного выражения записывается следующим образом:

$$\phi'(x) = \frac{2x + 1}{15 \cdot \sqrt[3]{\left(1,2 + \frac{x^2 + x}{5}\right)^2}}.$$

В полученное выражение производится подстановка значений границ интервала:

$$\phi'(a) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{15 \cdot \sqrt[3]{\left(1,2 + \frac{1^2 + 1}{5}\right)^2}} = 0,146,$$

$$\phi'(b) = \frac{2 \cdot 1,5 + 1}{15 \cdot \sqrt[3]{\left(1,2 + \frac{1,5^2 + 1,5}{5}\right)^2}} = 0,171.$$

Результаты расчетов показывают, что условие сходимости выполняется на двух границах, поэтому выражение, представленное третьим способом, позволяет приблизиться к решению с заданной точностью.

После получения итерационного выражения, удовлетворяющего условиям сходимости, переходим к расчету первого приближения. Для запуска итерационного процесса необходимо задать начальное значение x_0 , по аналогии с предыдущими примерами полагаем $x_0 = b$ и вычисляем значение функции $\phi(x)$ в этой точке

$$\phi(1,5) = \sqrt[3]{1,2 + \frac{1,5^2 + 1,5}{5}} = 1,24933.$$

Вычисленное значение используется для определения координаты точки x_1 , согласно выражения $x_1 = \phi(x_0)$, то есть

$$x_1 = 1,24933.$$

Полученное значение x_1 сравнивается с x_0 и проверяется на достижение заданной точности

$$|1,24933 - 1,5| = 0,25067 < 0,001.$$

Как видно, точность полученного результата после первой итерации не достигла требуемого значения, следовательно, итерационный процесс продолжается.

На второй итерации вычисляются значения функции в найденной точке x_1

$$\phi(1,24933) = \sqrt[3]{1,2 + \frac{1,24933^2 + 1,24933}{5}} = 1,20783.$$

Найденное значение функции является новым решением

$$x_2 = \phi(x_1) = 1,20783.$$

Повторно проводится процедура сравнения координаты найденной и предыдущей точки

$$|1,21364 - 1,26033| = 0,04669 < 0,001.$$

Как видно, погрешность уменьшилась, но требуемая точность не достигнута, т.е. итерационный процесс необходимо продолжить. Последующие итерации метода простых итераций представлены в табл. 14.

Анализируя данные в табл. 14 видно, что после пятой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,20003 - 1,20019| = 0,00016 < 0,001.$$

Отметим, что достаточное условие сходимости по значению исходной функции $f(x)$ было выполнено еще на предыдущей (четвертой) итерации.

Таблица 14 – Уточнение решения нелинейного уравнения методом простых итераций

k	x	$\varphi(x)$	$f(x)$
0	1,5	1,24933	1,425
1	1,24933	1,20783	0,18797
2	1,20783	1,20123	0,02870
3	1,20123	1,20019	0,00449
4	1,20019	1,20003	0,00071
5	1,20003	1,20001	0,00011

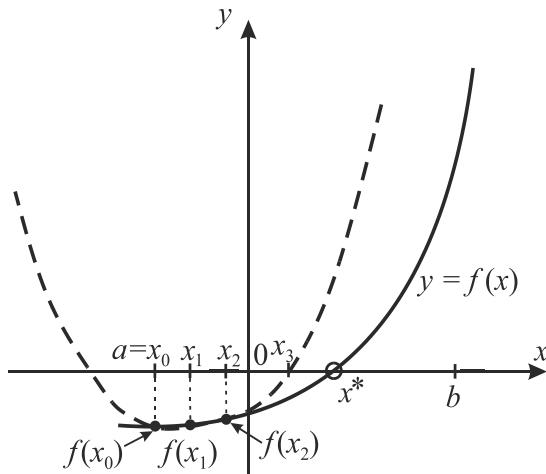
Ответ. Полученное численное решение заданного нелинейного уравнения методом простой итерации с точностью 10^{-3} было достигнуто после пятой итерации и равно $x = 1,20003$.

4.2.5. Метод Мюллера (D. E. Muller)

Метод Мюллера (или парабол) состоит в приближенной замене заданной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом второй степени (параболой, на рис. 41 и 42 она нанесена пунктирной линией), построенным по значениям функции в трех точках x_0, x_1, x_2 и последующим нахождением координаты точки пересечения этой параболы с осью абсцисс, т.е. решения квадратного уравнения. Иными словами, в методе Мюллера используется не линейная аппроксимация, как в методах Ньютона и секущих, а квадратичная.

Как следует из определения метода Мюллера для начала итерационного процесса необходимо задать три начальных приближения: нулевое x_0 , первое x_1 и второе x_2 . На практике поступают следующим образом: за нулевое приближение выбирают одну из границ интервала локализации (левую рис. 41а или правую рис. 41б), а в качестве первого и второго приближения выбирают величины $x_1 = x_0 \pm \varepsilon$ и $x_2 = x_0 \pm 2\varepsilon$, где ε – заданная погрешность.

a)



б)

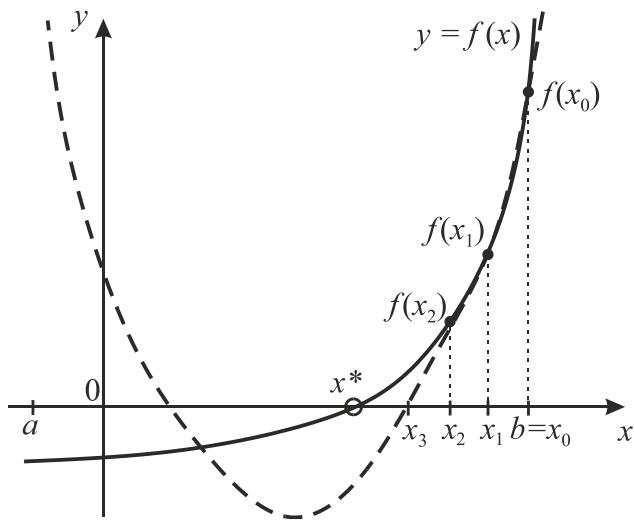
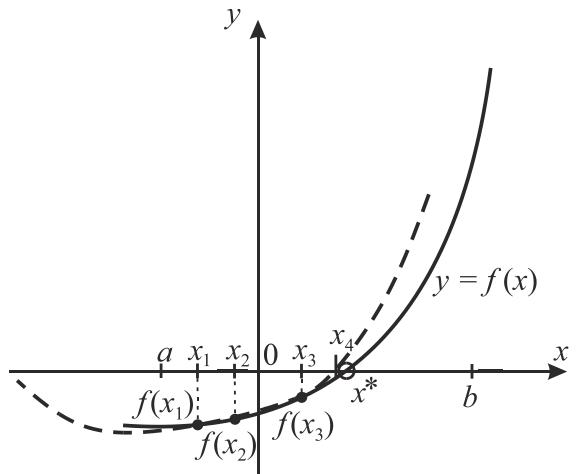


Рис. 41 – В качестве начальных данных для первого приближения по методу Мюллера выбрана:

а) левая или б) – правая, граница локализованного интервала

a)



б)

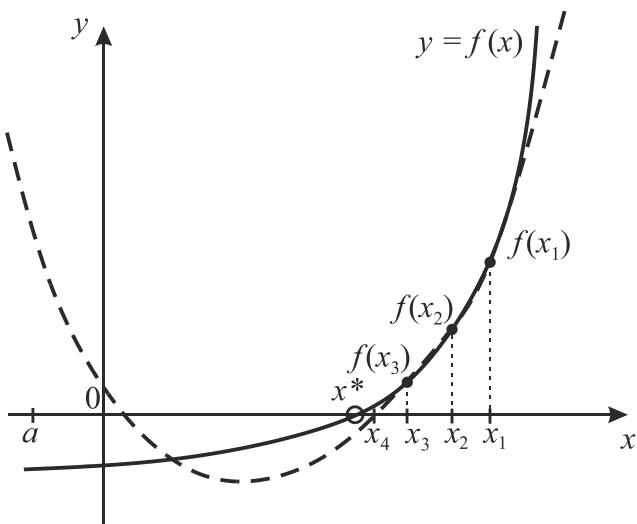


Рис. 42 – Второе приближение метода Мюллера
(для левой – а), правой – б) границы)

Эти значения используются для нахождения последующего (третьего) приближения x_3 . Затем, значения x_1 , x_2 и x_3 используются для определения четвертого приближения x_4 (см. рис. 42) и т.д.

Чтобы получить выражение для определения нового приближения x_{k+1} по трем известным точкам x_{k-2} , x_{k-1} и x_k применяется интерполяционный полином Лагранжа второго порядка

$$L_2(f(x)) = b_0x^2 + b_1x + b_2.$$

Для нахождения коэффициентов b_0 , b_1 и b_2 используется условие прохождения данного интерполяционного полинома через три точки $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$. Таким образом, составляется система из трех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_0x_{k-2}^2 + b_1x_{k-2} + b_2 = f(x_{k-2}), \\ b_0x_{k-1}^2 + b_1x_{k-1} + b_2 = f(x_{k-1}), \\ b_0x_k^2 + b_1x_k + b_2 = f(x_k). \end{cases}$$

В результате решения полученного СЛАУ определяются искомые коэффициенты b_0 , b_1 и b_2 . Полученный полином Лагранжа позволяет определить координату x_{k+1} в которой функция $L_2(f(x))$ обращается в ноль. Для этого решается квадратное уравнение стандартным образом.

В итоге получается расчетная формула для метода Мюллера в следующем виде:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2C(x_k - x_{k-1})}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}},$$

$$\text{здесь } A = qf(x_k) - q(1+q)f(x_{k-1}) + q^2f(x_{k-2}),$$

$$B = (2q+1)f(x_k) - (1+q)^2f(x_{k-1}) + q^2f(x_{k-2}),$$

$$C = (1+q)f(x_k),$$

$$q = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}.$$

Знак в знаменателе перед корнем всегда выбирается так, чтобы абсолютное значение знаменателя было максимальным. Правильный выбор знака перед квадратным корнем позволяет получить одно из двух решений x_{k+1} , которое находится ближе к x_k . На практике поступают следующим образом, анализируется знак коэффициента B , если $B > 0$, то знак перед корнем выбирается положительным, иначе $B < 0$ – отрицательным, т.е. используется функция $\text{sign}(B)$ определяющая знак числа B .

Метод Мюллера обладает сверхлинейной сходимостью с порядком сходимости 1,84.

Пример. Уточнить решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1,2$$

применив метод Мюллера на интервале $[1; 1,5]$ с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Чтобы запустить итерационный процесс по методу Мюллера необходимо задать три начальных точки. В качестве первой x_0 выбирается правая граница интервала, точка $b = 1,5$, а вторая и третья вычисляется с помощью выражения

$$x_1 = x_0 - \varepsilon = 1,5 - 0,001 = 1,499 \text{ и } x_2 = x_0 - 2\varepsilon = 1,5 - 0,002 = 1,498.$$

В каждой точке вычисляется значение функции

$$f(1,5) = 1,5^3 - \frac{1,5^2 + 1,5}{5} - 1,2 = 1,425,$$

$$f(1,499) = 1,499^3 - \frac{1,499^2 + 1,499}{5} - 1,2 = 1,41905,$$

$$f(1,498) = 1,498^3 - \frac{1,498^2 + 1,498}{5} - 1,2 = 1,41312.$$

Заданные точки и определенные в них значения функций применяются для определения вспомогательных переменных

$$q = \frac{1,498 - 1,499}{1,499 - 1,5} = 1,$$

$$A = 1 \cdot 1,41312 - 1 \cdot (1+1) \cdot 1,41905 + 1^2 \cdot 1,425 = 8,594\text{e-}06,$$

$$B = (2 \cdot 1 + 1) \cdot 1,41312 - (1 + 1)^2 \cdot 1,41905 + 1^2 \cdot 1,425 = -0,01187,$$

$$C = (1 + 1) \cdot 1,41312 = 2,82623.$$

Определенные значения используются для вычисления координаты новой точки x_3 , определяющей место пересечения параболы с осью абсцисс

$$x_3 = 1,498 - \frac{2 \cdot 2,82623 \cdot (1,498 - 1,499)}{-0,01187 - \sqrt{(-0,01187)^2 - 4 \cdot 8,594e-06 \cdot 2,82623}} = \\ = 1,19199.$$

Вычисленное значение x_3 сравнивается с x_2 и проверяется на достижение заданной точности

$$|x_2 - x_1| \leq \varepsilon \text{ или } |1,19199 - 1,498| = 0,30601 < 0,001.$$

Требуемая точность после первой итерации не достигнута, следовательно, процедура уточнения корня должна быть продолжена.

На второй итерации проводится вычисление значения функции только во вновь найденной точке x_3

$$f(1,19199) = 1,19199^3 - \frac{1,19199^2 + 1,19199}{5} - 1,2 = -0,02894$$

и пересчет вспомогательных переменных

$$q = \frac{1,19199 - 1,498}{1,498 - 1,499} = 306,00945,$$

$$A = 306,00945 \cdot (-0,02894) - 306,00945 \cdot (1 + 306,00945) \cdot 1,41312 + \\ + 306,00945^2 \cdot 1,41905 = 114,67914,$$

$$B = (2 \cdot 306,00945 + 1) \cdot (-0,02894) - (1 + 306,00945)^2 \cdot 1,41312 + \\ + 306,00945^2 \cdot 1,41905 = -328,04507,$$

$$C = (1 + 306,00945) \cdot (-0,02894) = -8,88387.$$

Полученные значение подставляются в выражение для определения координаты следующей точки x_4 пересечения параболы с осью абсцисс

$$x_4 = 1,19199 - \frac{2 \cdot (-8,88387) \cdot (1,19199 - 1,498)}{-328,04507 - \sqrt{(-328,04507)^2 - 4 \cdot 114,67914 \cdot (-8,88387)}} = \\ = 1,20020.$$

Вновь найденная координата x_4 сравнивается с координатой, вычисленной на предыдущем шаге x_3 , для оценки точности вычислений

$$|1,20020 - 1,19199| = 0,00821 < 0,001.$$

Видно, что погрешность уменьшилась почти в сорок раз, но требуемой точности достигнуть не получилось, значит, итерационный процесс следует продолжить. Процесс решения методом Мюллера сведен в табл. 15.

Анализируя данные в табл. 15 видно, что после третьей итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,20000 - 1,20020| = 0,00020 < 0,001.$$

Таблица 15 – Уточнение решения нелинейного уравнения методом Мюллера.

k	x_{k-2}	$f(x_{k-2})$	x_{k-1}	$f(x_{k-1})$
0	1,5	1,425	1,499	1,41905
1	1,499	1,41905	1,498	1,41312
2	1,498	1,41312	1,19199	-0,02894

k	x_k	$f(x_k)$	q	A
0	1,498	1,41312	1	8,594e-06
1	1,19199	-0,02894	306,00945	114,67914
2	1,20020	0,00073	-0,02683	0,00024

k	B	C	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	-0,01187	2,82623	1,19199	-0,02894
1	-328,04507	-8,88387	1,20020	0,00073
2	0,02911	0,00071	1,20000	4,786e-07

Кроме того, вычисленное значение функции в найденной точке, также существенно меньше заданной точности.

Ответ. Найдено численное решение методом Мюллера заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ после третьей итерации и равно $x = 1,20000$.

Рассмотрим общий случай, когда к виду исходной функции $f(x)$ не предъявляются дополнительные требования (условие монотонности), а в качестве трех начальных точек выбраны границы отрезка локализации корня ($a = x_2$ и $b = x_0$) и его середина (x_1) согласно рис. 43.

В этом случае в методе Мюллера необходимо дополнительно проводить контроль смены знака функции на интервалах, по аналогии с интервальными методами. Блок контроля смены знака функции определяет значение функции $f(x)$ во вновь найденной координате x_3 пересечения параболы с осью абсцисс и анализирует знаки функции в трех точках x_0 , x_2 и x_3 .

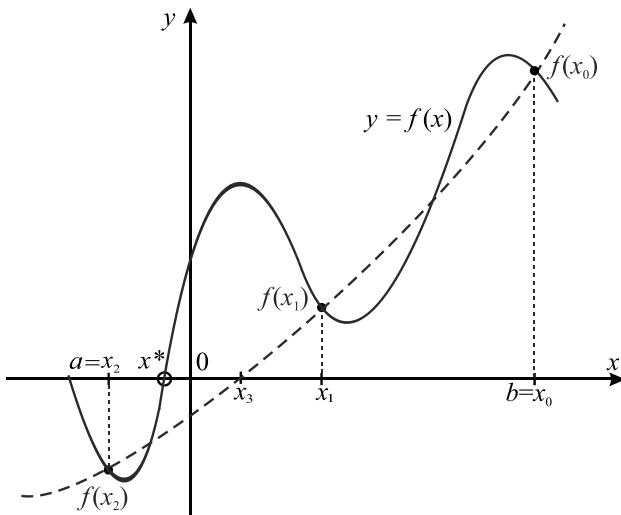


Рис. 43 – Начальные данные и первое приближение по методу Мюллера для функции произвольного вида

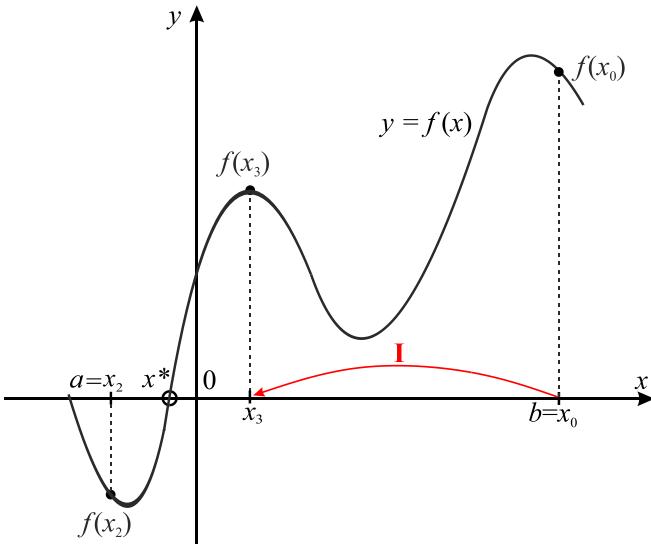


Рис. 44 – Анализ знаков функции и выбор нового интервала для метода Мюллера

В результате анализа остается только один интервал, на котором функция меняет знак, т.е. точка b перемещается в точку x_3 . Работа блока представлен на рис. 44.

После завершения первого приближения переходят к повторному определению координаты x_4 – середины нового интервала ($a = x_2$ и $b = x_3$). Через значения функции в узлах $f(x_2)$, $f(x_3)$ и $f(x_4)$ строится новая парабола (на рис. 45 она нанесена штриховой линией) и определяется координата её пересечения с осью абсцисс x_5 . Блок анализа смены знака функции позволяет выбрать новый интервал путем переноса левой границы a во вновь найденную точку x_5 .

Если проверку смены знака функции не проводить, то может реализоваться случай, когда действительных корней квадратного уравнения не будут, т.е. ветки параболы не пересекаются с осью абсцисс (рис. 46).

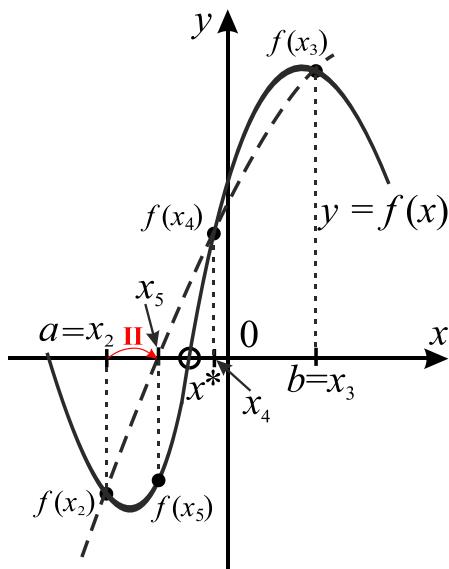


Рис. 45 – Второе приближение метода Мюллера

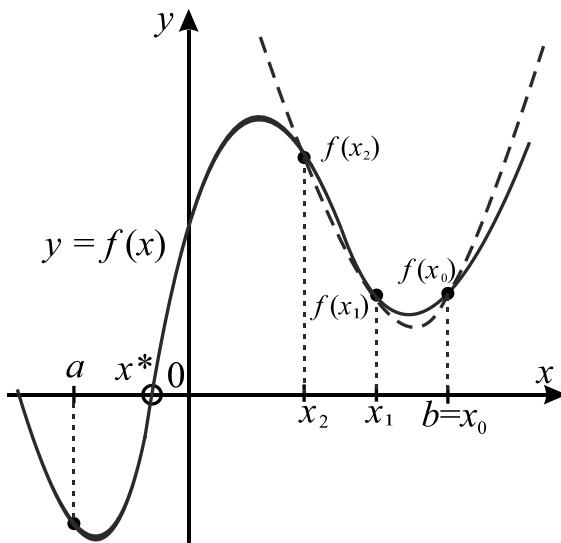


Рис. 46 – Если блока анализа функции в методе Мюллера нет, то это может привести к отсутствию действительных корней

4.3. Комбинированные методы

Рассмотренные выше два класса методов решения нелинейных уравнений имеют свои преимущества и недостатки. К преимуществам интервальных методов относится их безусловная сходимость, а к недостаткам необходимость выполнения большого числа итераций для получения решения с высокой точностью. В то время как для итерационных методов решение с требуемой точностью получается достаточно быстро, но требуются предварительные действия для обеспечения сходимости итерационного процесса. Поэтому возникает необходимость создания гибридного алгоритма, сочетающего в себе быстрое получение решения и безусловную сходимость. Методы, реализующие данный алгоритм называются комбинированными. Идея комбинирования основана на использовании одного метода из группы интервальных решателей, а второго из группы итерационных.

Комбинированные методы сочетают в себе сильные стороны обоих групп методов, и поэтому является достаточно эффективными для большого класса функций. В процессе численного счета определяются два решения одно по интервальному методу, а второе по итерационному. Затем проводится вычисление значения функции в найденных точках и их сравнение, в результате остается то решение, у которого модуль функции меньше.

Для понимания основных принципов работы гибридных алгоритмов подробно рассмотрим несколько примеров комбинированных методов, полученных путем объединения: метода хорд и метода Ньютона, метода половинного деления и метода секущих, метода половинного деления и метода Ньютона, метода хорд и метода Мюллера. После разбора предложенных примеров и понимания основных идей, заложенных в гибридные алгоритмы, можно самостоятельно создать комбинацию любых методов, представленных ранее в разделах 4.1 и 4.2.

4.3.1. Метод хорд и Ньютона

Предлагаемое сочетание комбинации метода хорд и метода Ньютона позволяет объединить сильные стороны данных методов, что повышает эффективность вычислительного алгоритма для большого класса функций. Работу данного гибридного

алгоритма рассмотрим на примере функции, которая на локализованном интервале $[a, b]$ имеет единственное решение x^* , при этом её график (см. рис. 47) характеризуется точкой с экстремумом.

На первом шаге используется интервальный метод хорд, который позволяет определить координату места пересечения хорды (на рис. 47 хорда нанесена штриховой линией) с осью абсцисс (точка x_1^X) по следующей формуле:

$$x_1^X = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a).$$

На втором шаге применяется итерационный метод Ньютона, для которого в качестве начального приближения выбирается правая граница (точка b).

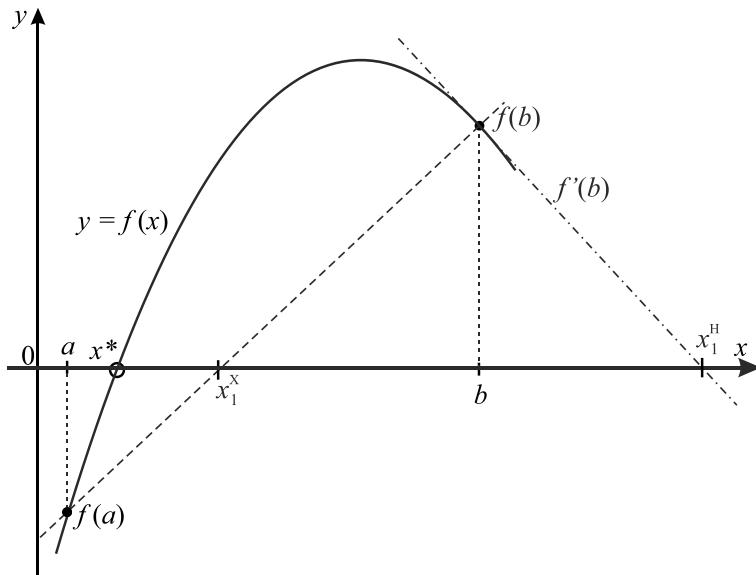


Рис. 47 – Начальные данные и первое приближение при комбинированном методе хорд и Ньютона

Применяя метод Ньютона, определяется координата точки пересечения касательной (на рис. 47 касательная нанесена

штрихпунктирной линией) с осью абсцисс (точка x_1^H) используя выражение:

$$x_1^H = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Третий шаг заключается в определении значений функции $f(x)$ в найденных координатах x_1^X и x_1^H . Как видно из рис. 48 точка $f(x_1^X)$ размещается выше оси абсцисс, а точка $f(x_1^H)$ ниже оси абсцисс.

Для последующего сравнения этих двух функций используются значения их модулей. На рис. 48 для наглядности величина $f(x_1^X)$ перенесена в отрицательную полуплоскость.

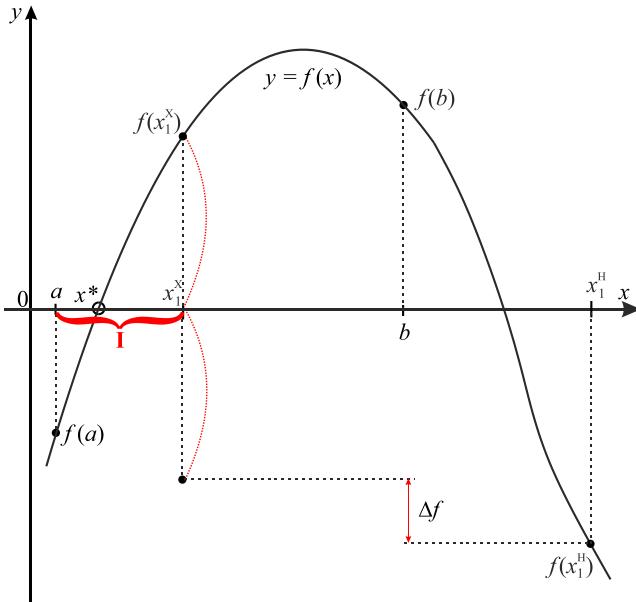


Рис. 48 – Сравнение модулей функций в координатах, определенных по методу хорд и Ньютона, а также выбор нового интервала для второго приближения

Проводимое сравнение абсолютных значений $|f(x_1^X)|$ и $|f(x_1^H)|$ показывает, что $|f(x_1^H)|$ больше $|f(x_1^X)|$ на величину Δf . Проведенное сравнение позволяет сделать следующее заключение, точка x_1^H исключается из дальнейших исследований, а координата, определенная по методу хорд, будет использоваться в дальнейшем.

Шаг четыре определяет новый интервал, который будет использоваться для последующей итерации. Для этой цели используются значения функции в точках a , b и x_1^X . Найденные значения функций $f(a)$, $f(x_1^X)$ и $f(b)$ подвергаются анализу с целью определения интервала, на котором происходит смена знака заданной функции $f(x)$. На рис. 48 видно, что функция меняет знак на подинтервале $[a, x_1^X]$, следовательно, до начала следующей итерации точка b перемещается в координату x_1^X . При этом вторая часть начально заданного интервала $[a, b]$ (подинтервал $[x_1^X, b]$) из дальнейшего рассмотрения исключается.

На пятом шаге проводится проверка выполнения условия остановки итерационного процесса, т.е. достижения заданной точности ε , как по координате, так и по значению функции.

Второе приближение проводится на новом интервале $[a, b] = [a, x_1^X]$ рис. 49. Вначале осуществляется поиск двух координат: первой являющейся местом пересечения хорды (на рис. 49 хорда нанесена штриховой линией) с осью абсцисс

$$x_2^X = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a),$$

второй определяющей точку, в которой касательная (на рис. 49 касательная нанесена штрихпунктирной линией) проходит через ось абсцисс

$$x_2^H = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Последующее вычисление значений функции $f(x)$ в найденных точках x_2^X и x_2^H позволит выбрать одну из них в качестве следующей. Для нашего примера, приведенного на рис. 50, $|f(x_2^X)|$ меньше $|f(x_2^H)|$ на величину Δf , следовательно, точка x_2^H отбрасывается, а x_2^X использоваться в дальнейшем.

Найденное значение x_2^X используется для определения нового интервала, на котором функция меняет знак. Из рис. 50 видно, что смена знака функции происходит на подинтервале $[a, x_2^X]$, т.е. правая граница b передвигается в точку x_2^X . Второй подинтервал $[x_2^X, b]$ в дальнейших итерациях не участвует.

В зависимости от проведенного сравнения полученных результатов с заданной точностью ε , итерационный процесс может быть закончен или направлен на следующую итерацию.

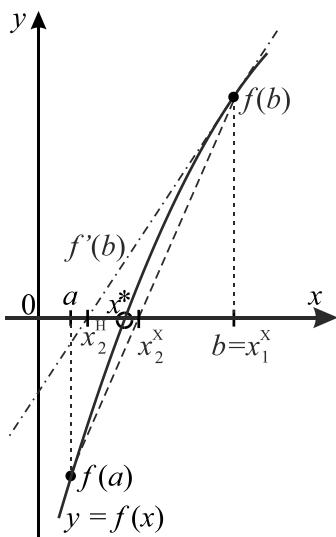


Рис. 49 – Второе приближение комбинированного метода хорд и Ньютона

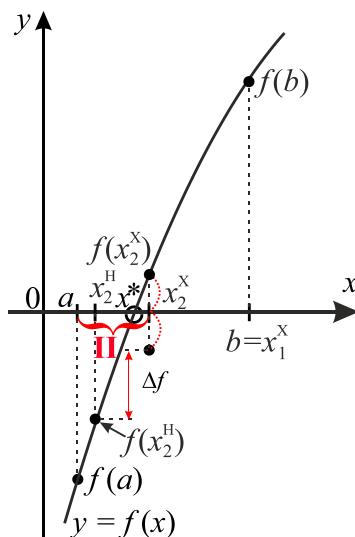


Рис. 50 – Выбор интервала для последующего приближения

В рассмотренном примере начальное приближение для метода Ньютона было выбрано без учета условия сходимости, поэтому оптимальной точкой являлась координата, получаемая по методу хорд. Рассмотрим второй пример, в котором условие сходимости метода Ньютона $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ будет выполнено, для этого в качестве начального приближения x_0 выбирается левая граница локализованного интервала (точку a) как показано на рис. 51.

На первом шаге по методу хорд определяется точка x_1^X , в которой хорда пересекает (на рис. 51 хорда нанесена штриховой линией) ось абсцисс.

Вторым шагом находится место пересечения касательной (на рис. 51 касательная нанесена штрихпунктирной линией) с осью абсцисс (точка x_1^H).

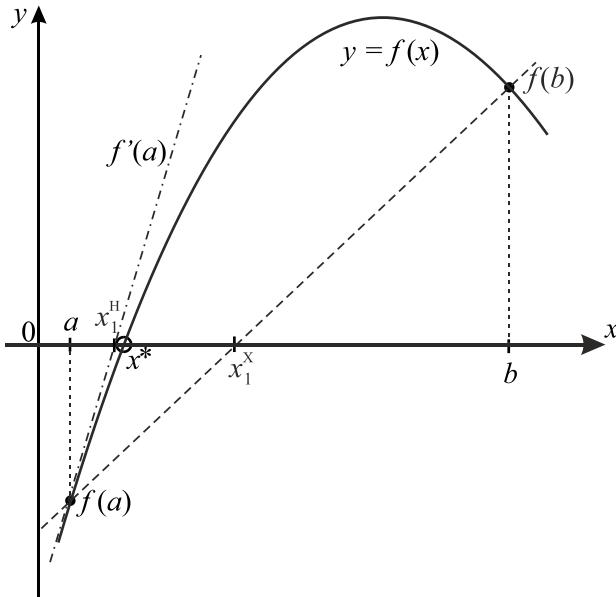


Рис. 51 – Согласованные начальные данные для комбинирования метода хорд и Ньютона и первое приближение

На представленном рисунке 51 хорошо видно, что решение, полученное по методу хорд, определяет значение по избытку, а решение по методу Ньютона по недостатку точного корня x^* уравнения $f(x) = 0$. Поэтому при согласованных начальных данных интервал сужается одновременно с двух сторон, как показано на рис. 52. Таким образом, для следующей итерации будет использоваться новый интервал $[x_1^H, x_1^X]$.

При заданной абсолютной погрешности равной ε процесс уточнения решения будет прекращен если $|x_1^H - x_1^X| < \varepsilon$, при этом искомое решение определяется как среднее арифметическое границ интервала.

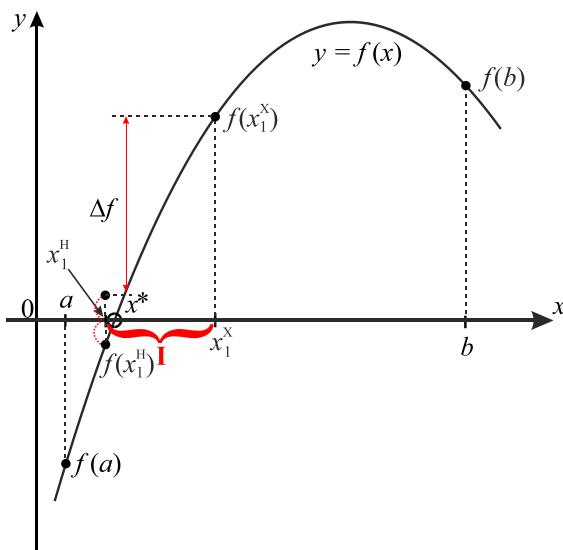


Рис. 52 – Сравнение результатов первого приближения и выбор интервала для следующего приближения

4.3.2. Метод половинного деления и секущих

Построим процесс получения решения при объединении интервального метода половинного деления и итерационного метода секущих. Данный гибридный алгоритм будет разобран на

примере, для этого подробно рассмотрим первые две итерации получения решения. Каждая итерация включает несколько последовательных шагов. Вначале на локализованном интервале определяются две координаты:

- первая, по методу половинного деления, как середина локализованного интервала $[a, b]$

$$x_1^{\text{ПД}} = \frac{a + b}{2},$$

- вторая, по методу секущих, как точки пересечения секущей с осью абсцисс

$$x_2^c = x_1^c - \frac{f(x_1^c) \cdot (x_1^c - x_0^c)}{f(x_1^c) - f(x_0^c)}.$$

Здесь, за начальное значение x_0^c принимается левая граница локализованного интервала точка a , а вторая точка x_1^c вычисляется, с помощью стандартного выражения $x_1^c = x_0^c + \varepsilon$. Начальные данные и местоположение найденных точек представлено на рис. 53, для наглядности секущая нанесена штриховой линией.

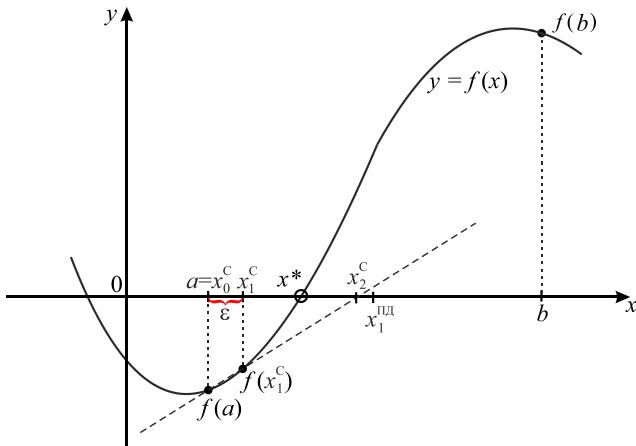


Рис. 53 – Начальные данные и первое приближение при комбинировании метода половинного деления и секущих

Далее проводится расчет значений функции в найденных точках – $f(x_1^{\text{ПД}})$ и $f(x_2^C)$. Абсолютные значения функций сравниваются между собой и меньшее из них определяет координату, которая будет использоваться для дальнейших вычислений (x_2^C), при этом вторая координата ($x_1^{\text{ПД}}$) исключается из дальнейшего рассмотрения. На рис. 54 представлено сравнение значений функций в точках x_2^C и $x_1^{\text{ПД}}$ показывающее, что $|f(x_1^{\text{ПД}})|$ больше $|f(x_2^C)|$ на величину Δf , таким образом, точка $x_1^{\text{ПД}}$ отбрасывается.

В заключение первой итерации определяется новый интервал необходимый для последующего запуска второй итерации. Для этого проводится анализ знаков функции в трех точках: левая граница (точка a), правая граница (точка b) и вновь определенная (точка x_2^C). На рис. 54 видно, что значения в точке x_2^C и b имеют одинаковые знаки, следовательно, правая граница перемещается в точку x_2^C , т.е. $b = x_2^C$.

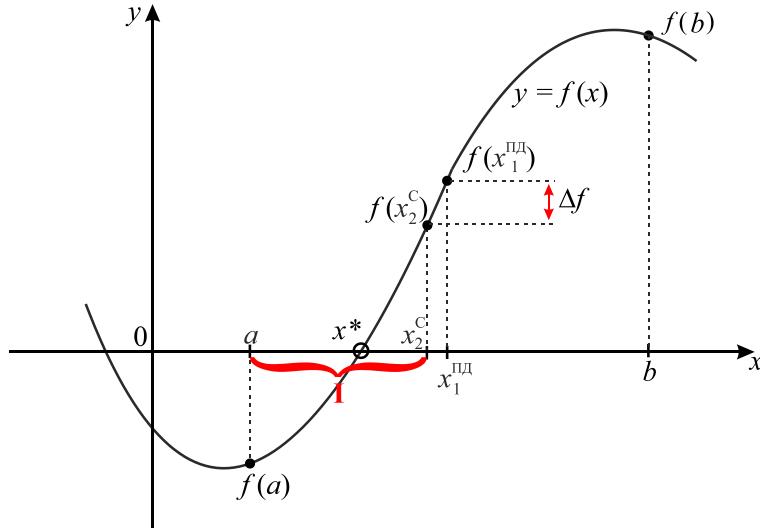


Рис. 54 – Выбор интервала для второго приближения

Проведенный анализ показал, что интервал для следующей итерации уменьшился до $[a, x_2^C]$. В конце каждой итерации осуществляется проверка условия остановки. На этом первая итерация закончена.

Вторая итерация также начинается с определения двух координат:

$$x_2^{\text{ПД}} = \frac{a + b}{2}$$

и

$$x_4^C = x_3^C - \frac{f(x_3^C) \cdot (x_3^C - x_2^C)}{f(x_3^C) - f(x_2^C)}.$$

Графически процесс определения координаты $x_2^{\text{ПД}}$ и x_4^C показан на рис. 55.

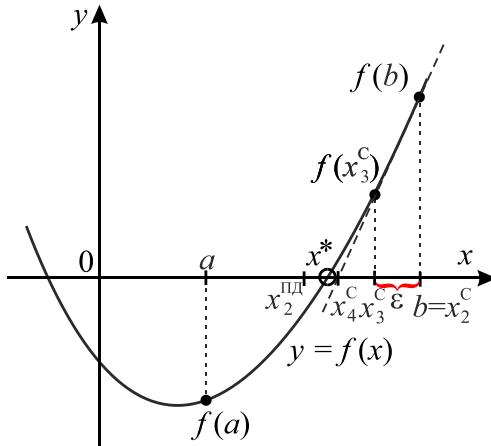


Рис. 55 – Второе приближение при комбинированном методе половинного деления и секущих

В найденных точках определяются значения функций $f(x_2^{\text{ПД}})$ и $f(x_4^C)$. Сравнение модулей функций $|f(x_4^C)| < |f(x_2^{\text{ПД}})|$ показывают, что результат, полученный по методу секущих, находится ближе к нулю функции. Как видно на рис. 56,

координата x_4^C будет использована при последующей итерации, а точка $x_2^{\text{ПД}}$ – отброшена.

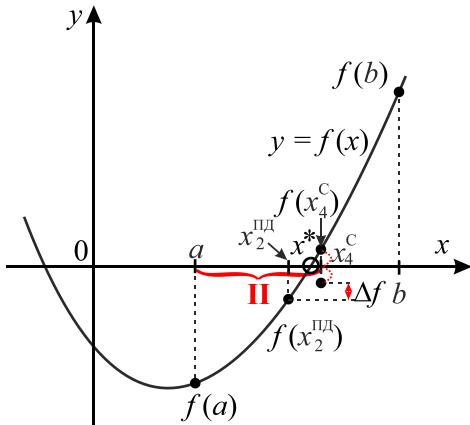


Рис. 56 – Выбор нового интервала для третьего приближения

Проверка знаков функций в точках a , b , и x_4^C показывает (см. рис. 56), что для последующей итерации необходимо переместить точку b в координату x_4^C или $b = x_4^C$. Таким образом, интервал для последующей итерации соответствует $[a, x_4^C]$.

4.3.3. Метод половинного деления и Ньютона

Проведем комбинирование интервального метода половинного деления и итерационного метода Ньютона. Подробно рассмотрим несколько первых итераций. В первой итерации на первом шаге определяется координата середины интервала по методу половинного деления

$$x_1^{\text{ПД}} = \frac{a+b}{2},$$

а на втором шаге вычисляется точка пересечения касательной (для наглядности на рис. 57 касательная нанесена штриховой линией) с осью абсцисс

$$x_1^H = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

На рис. 57 представлены исходная функция, начальные данные и полученные координаты точек по методу половинного деления и Ньютона.

На третьем шаге вычисляются значения функции $f(x_1^{\text{ПД}})$ и $f(x_1^H)$ в найденных точках. Полученные значения сравниваются по абсолютной величине, и координата с меньшим значением модуля функции используется в последующих расчетах, а вторая отбрасывается. Из рис. 58 хорошо видно, что $|f(x_1^{\text{ПД}})| < |f(x_1^H)|$, следовательно, далее используется координата, полученная по методу половинного деления $x_1^{\text{ПД}}$, а точка x_1^H отбрасывается.

На четвертом шаге проводится выбор интервала, на котором функция имеет разные знаки. Проведенный анализ показал (см. рис. 58), что значение функции меняется на интервале $[a, x_1^{\text{ПД}}]$. Таким образом, правая граница (точка b) сдвигается в точку $x_1^{\text{ПД}}$.

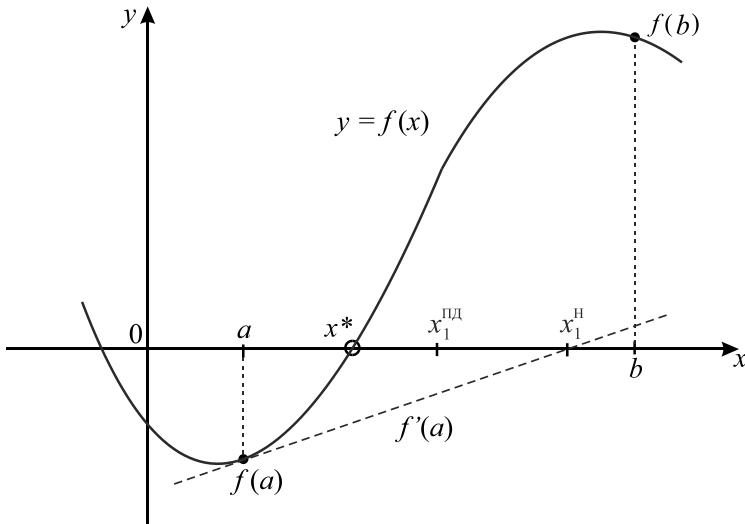


Рис. 57 – Начальные данные и первое приближение при комбинировании метода половинного деления и Ньютона

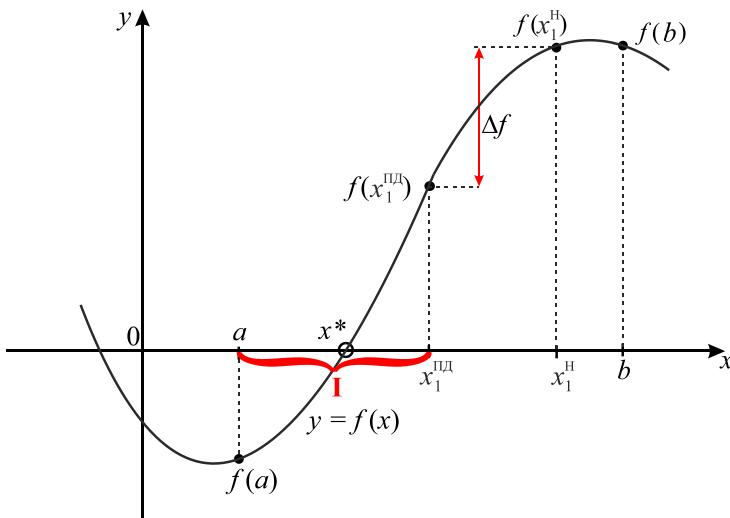


Рис. 58 – Выбор интервала для второго приближения

На пятом шаге проводится проверка условия остановки итерационного процесса. После этого первая итерация завершается.

На второй итерации повторно определяются две координаты (см. рис. 59):

$$x_2^{\text{ПД}} = \frac{a + b}{2} \quad \text{и} \quad x_2^H = x_1^{\text{ПД}} - \frac{f(x_1^{\text{ПД}})}{f'(x_1^{\text{ПД}})}.$$

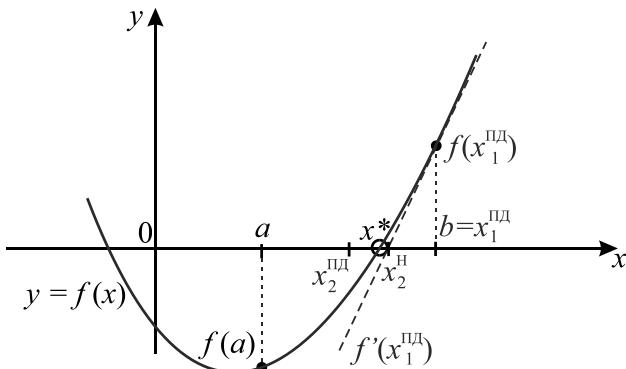


Рис. 59 – Второе приближение при комбинировании метода половинного деления и Ньютона

Вычисленные значения функции $f(x_2^{\text{ПД}})$ и $f(x_2^H)$ в найденных точках показывают, что результат, полученный по методу Ньютона $|f(x_1^H)| < |f(x_1^{\text{ПД}})|$, находится ближе к нулю функции. На рис. 60 видно, что координата x_2^H будет применена для последующей итерации, а точка $x_2^{\text{ПД}}$ подлежит отстранению.

Из приведенного примера видно, что как только во вновь определенной координате хотя бы раз выполнится условие сходимости для метода Ньютона, то после этого решение будет быстро получено с помощью итерационного метода Ньютона.

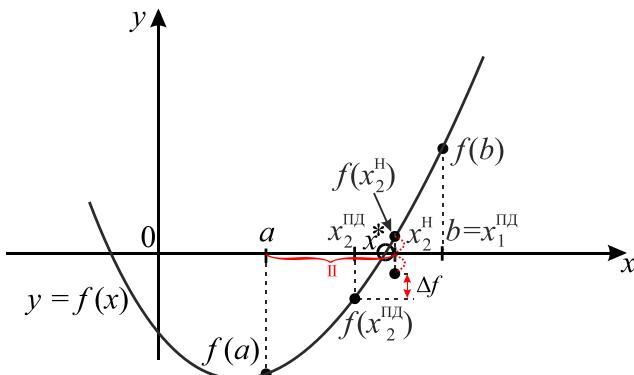


Рис. 60 – Выбор нового интервала для третьего приближения

4.3.4. Метод хорд и Мюллера

Изучается еще один из возможных вариантов гибридного алгоритма, объединяющего интервальный метод хорд и итерационный метод Мюллера. Для примера рассматривается обобщенная немонотонная функция с единственным решением x^* на локализованном интервале $[a, b]$ представленная на рис. 61.

На первом шаге определяется координата пересечения хорды (на рис. 61 хорда нанесена штриховой линией) с осью абсцисс

$$x_1^x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a).$$

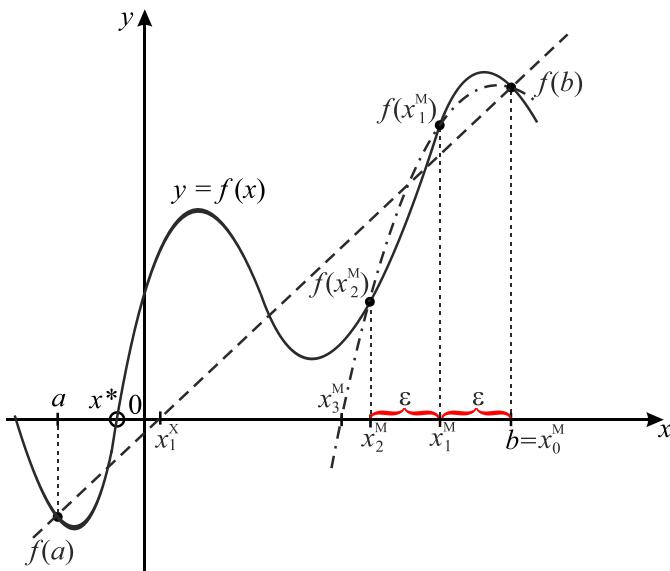


Рис. 61 – Начальные данные и первое приближение при комбинировании метода хорд и Мюллера

На втором шаге с помощью итерационного метода Мюллера, для которого в качестве начальных приближений выбирается правая граница (точка $b = x_0^M$), а две дополнительные точки вычисляются с помощью стандартных выражений $x_1^M = x_0^M - \varepsilon$ и $x_2^M = x_0^M - 2 \cdot \varepsilon$. Применяя метод Мюллера, определяется координата точки пересечения параболы (на рис. 61 парабола нанесена штрихпунктирной линией) с осью абсцисс (точка x_3^M) используя выражение:

$$x_3^M = x_2^M - \frac{2C(x_2^M - x_1^M)}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}},$$

здесь $A = qf(x_2^M) - q(1+q)f(x_1^M) + q^2f(x_0^M)$,

$$B = (2q+1)f(x_2^M) - (1+q)^2f(x_1^M) + q^2f(x_0^M),$$

$$C = (1+q)f(x_2^M),$$

$$q = \frac{x_2^M - x_1^M}{x_1^M - x_0^M}.$$

Начальные данные и найденные координаты точек x_1^X и x_3^M представлены на рис. 61.

На третьем шаге находятся значения функции $f(x)$ в найденных точках x_1^X и x_3^M . Проводится сравнение модулей функций в рассматриваемых точках. Как видно из рис. 62 модуль функции определенной в координате, вычисленной по методу Мюллера $|f(x_3^M)|$ меньше, чем найденный по методу хорд $|f(x_1^X)|$ на величину Δf . Следовательно, точка x_3^M будет использоваться в последующих расчетах, а координата x_1^X отбрасывается.

Найденная координата x_3^M разделяет заданный интервал на два подинтервала $[a, x_3^M]$ и $[x_3^M, b]$. На четвертом шаге выбирается тот подинтервал, на котором происходит смена знака функции. Для рассматриваемого примера на рис. 62 видно, что значение в точке a отрицательного знака, а в следующей точке x_3^M положительного, следовательно, правая граница перемещается в точку x_3^M , т.е. $b = x_3^M$.

Проведенный анализ показал, что интервал для следующей итерации уменьшился до $[a, x_3^M]$.

Пятый шаг осуществляет проверку условия остановки итерационного процесса или его продолжения. Как правило, для этого сравнивается либо уточненный на текущей итерации интервал, либо разность двух решений полученных на текущей и предыдущей итерации с заданной точностью.

В результате первого приближения ранее локализованный интервал $[a, b]$, после прохода через пять шагов гибридного алгоритма, сократился до $[a, x_3^M]$, но полученный интервал превышает заданную точность ε . Поэтому процесс уточнения корня нелинейного уравнения продолжается. Для второго приближения в качестве начального интервала используется результат первого, т.е. $[a, b = x_3^M]$.

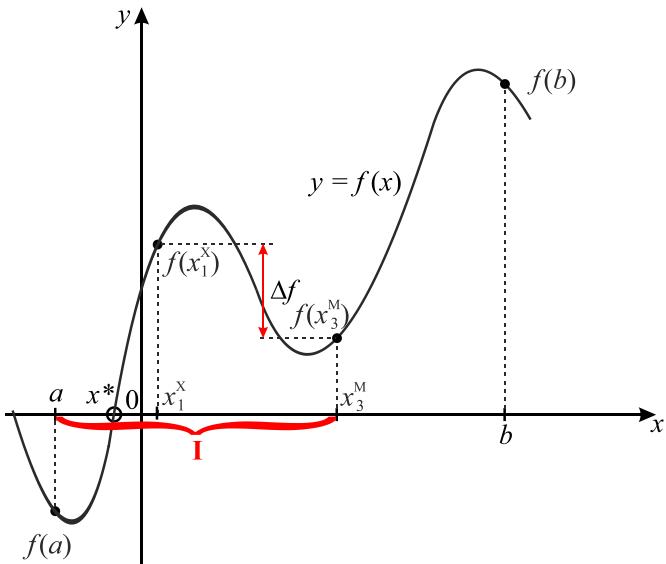


Рис. 62 – Выбор интервала для второго приближения

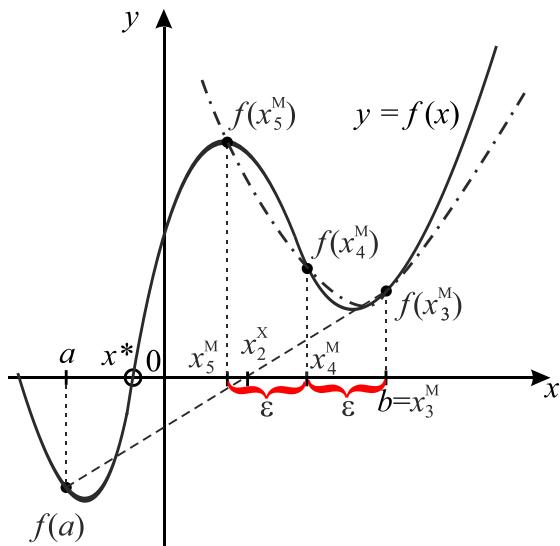


Рис. 63 – Второе приближение метода хорд и Мюллера

Вначале производится расчет новых координат по методу хорд (штриховая линия на рис. 63)

$$x_2^X = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

и методу Мюллера (штрихпунктирная линия на рис. 63)

$$x_6^M = x_5^M - \frac{2C(x_5^M - x_4^M)}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}},$$

здесь $A = qf(x_5^M) - q(1+q)f(x_4^M) + q^2f(x_3^M)$,

$$B = (2q+1)f(x_5^M) - (1+q)^2 f(x_4^M) + q^2 f(x_3^M),$$

$$C = (1+q)f(x_5^M),$$

$$q = \frac{x_5^M - x_4^M}{x_4^M - x_3^M},$$

где $x_3^M = b$, $x_4^M = x_3^M - \varepsilon$, $x_5^M = x_3^M - 2 \cdot \varepsilon$.

Как видно из рисунка 63, интерполяционный полином Лагранжа второго порядка, построенный через три точки $f(x_3^M)$, $f(x_4^M)$ и $f(x_5^M)$ не имеет пересечений с осью абсцисс.

Таким образом, получение действительных корней по методу Мюллера на данной итерации не предоставляется возможным. При этом интервальный метод хорд всегда имеет решение, которое соответствует координате x_2^X . По итогу проведенного сравнения решений по методу хорд и Мюллера получается безальтернативный результат x_2^X .

На рис. 64 представлен анализ значений функций в точках a , x_2^X и b , в результате выбирается подинтервал $[a, x_2^X]$, на котором происходит смена знака функции.

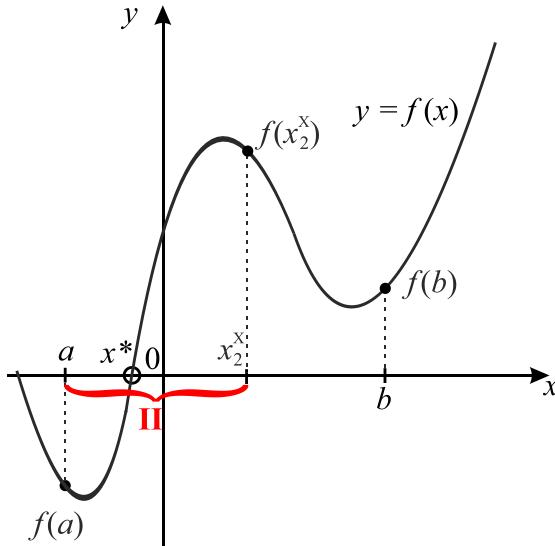


Рис. 64 – Результат второго приближения

После проверки условий остановки итерационного процесса осуществляется переход к третьей итерации.

Вначале третьей итерации определяется координата пересечения хорды с осью абсцисс по методу хорд (штриховая линия на рис. 65)

$$x_3^x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

и точка пересечения левой ветки параболы с осью абсцисс по методу Мюллера (на рис. 65 парабола нанесена штрихпунктирной линией)

$$x_8^M = x_7^M - \frac{2C(x_7^M - x_6^M)}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}},$$

здесь $A = qf(x_7^M) - q(1+q)f(x_6^M) + q^2f(x_5^M),$

$$B = (2q+1)f(x_7^M) - (1+q)^2 f(x_6^M) + q^2 f(x_5^M),$$

$$C = (1+q)f(x_7^M),$$

$$q = \frac{x_7^M - x_6^M}{x_6^M - x_5^M},$$

где x_5^M соответствует правой границе уточнённого интервала $b = x_2^X$, а x_6^M и x_7^M определяются из стандартных выражений.

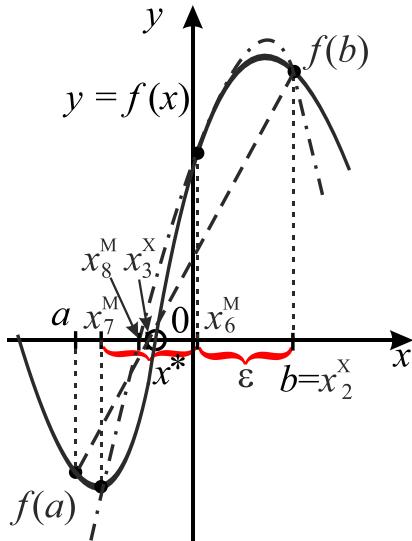


Рис. 65 – Третье приближение комбинированного метода хорд и Мюллера

В найденных точках x_3^X и x_8^M вычисляются значения функций $f(x_3^X)$ и $f(x_8^M)$. Модули определенных функций сравниваются. Как видно из рис. 66 результат, полученный по методу хорд, находится ближе к нулю функции, чем вычисленный по методу Мюллера, т.е. $|f(x_3^X)| < |f(x_8^M)|$.

Проведённое сравнение показывает, что координата x_3^X будет использована в последующих расчетах, а точку x_8^M необходимо отбросить.

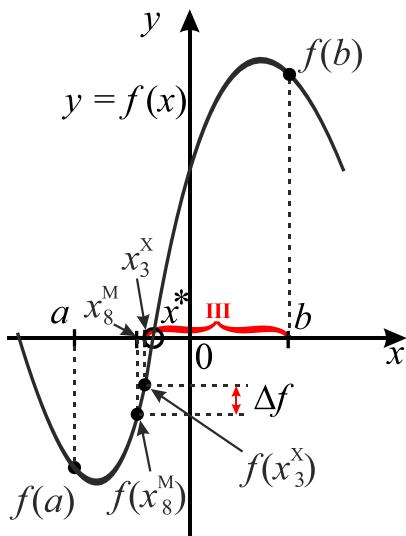


Рис. 66 – Результат третьего приближения комбинированного метода хорд и Мюллера

Для выбора подинтервала на котором функция меняет знак, определяются знаки функции в точках a , x_3^X , и b . Из рисунка 66 видно, что на первом подинтервале $[a, x_3^X]$ знак функции не изменяется, значит, данный интервал исключается из дальнейшего рассмотрения, а точка a перемещается в координату x_3^X . Следовательно, следующая итерация будет проводиться с интервалом $[x_3^X, b]$.

Данный итерационный процесс будет продолжаться до тех пор, пока не выполнится условие остановки.

В рассмотренном выше примере представлена достаточно сложная непрерывная функция, имеющая на заданном локализованном интервале несколько точек экстремумов и перегибов. Рассмотрим ещё один пример функции, имеющей непрерывный выпуклый вид с одним максимумом на заданном интервале (см. рис. 67).

В начале определяются координаты пересечения хорды (на рис. 67 хорда нанесена штриховой линией) с осью абсцисс

$$x_1^X = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

параболы (на рис. 67 парабола нанесена штрихпунктирной линией) с осью абсцисс

$$x_3^M = x_2^M - \frac{2C(x_2^M - x_1^M)}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}},$$

здесь $A = qf(x_2^M) - q(1+q)f(x_1^M) + q^2f(x_0^M)$,

$$B = (2q+1)f(x_2^M) - (1+q)^2 f(x_1^M) + q^2 f(x_0^M),$$

$$C = (1+q)f(x_2^M),$$

$$q = \frac{x_2^M - x_1^M}{x_1^M - x_0^M}.$$

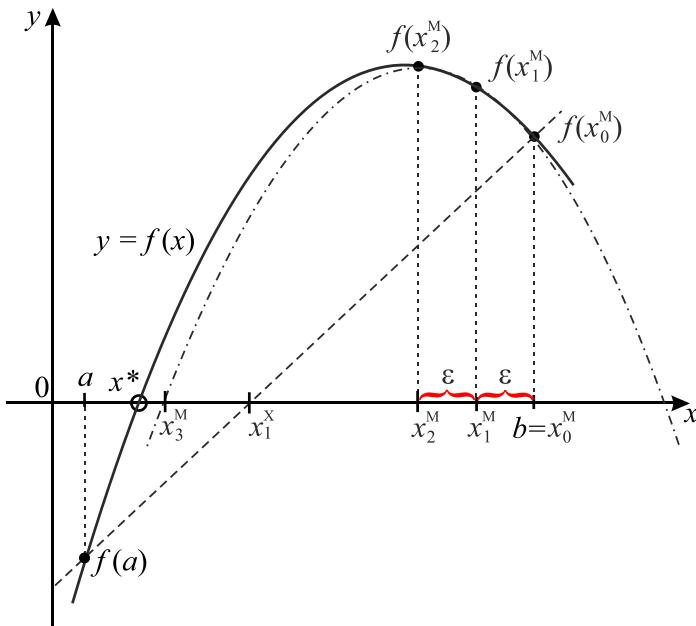


Рис. 67 – Начальные данные и первое приближение при комбинировании метода хорд и Мюллера

Начальные данные и вычисленные координаты точек x_1^X и x_3^M приведены на рис. 67. В найденных точках x_1^X и x_3^M вычисляются значения функции и их модули сравниваются между собой.

На рис. 68 видно, что модуль функции определенной в координате, вычисленной по методу Мюллера $|f(x_3^M)|$ меньше, чем найденный по методу хорд $|f(x_1^X)|$ на величину Δf . Следовательно, точку x_1^X необходимо исключить из дальнейшего рассмотрения, а координата x_3^M будет использоваться в последующих расчетах. Определенная координата x_3^M разделяет заданный интервал на два подинтервала $[a, x_3^M]$ и $[x_3^M, b]$ из них выбирается и остается один на котором происходит смена знака функции.

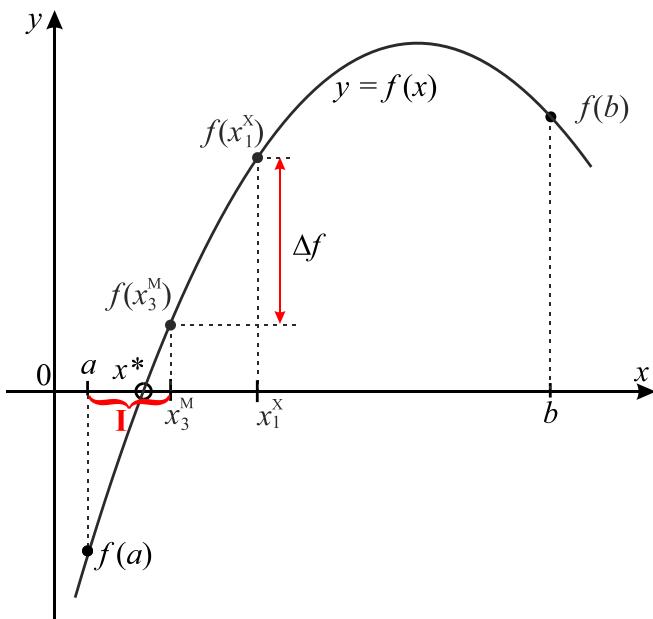


Рис. 68 – Выбор интервала для второго приближения

Определенная координата x_3^M разделяет заданный интервал на два подинтервала $[a, x_3^M]$ и $[x_3^M, b]$ из них выбирается и остается один на котором происходит смена знака функции. В рассматриваемом примере (см. рис. 68) это будет подинтервал $[a, x_3^M]$, следовательно, правая граница перемещается в точку x_3^M , т.е. $b = x_3^M$.

В конце осуществляется проверка условия остановки итерационного процесса или его продолжения. После проведенной проверки осуществляется переход либо к выдаче результата, либо к следующей итерации соответственно.

Рассмотрим ещё один пример для монотонно возрастающей функции с особенностью (см. рис. 69), которая существенно замедляет процесс получения решения по методу хорд.

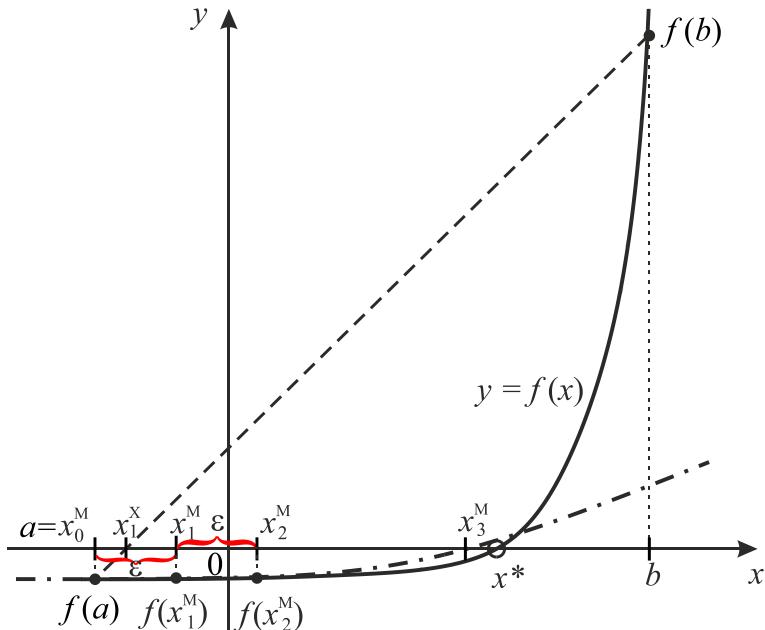


Рис. 69 – Начальные данные и первое приближение при комбинированном методе хорд и Мюллера

Как видно из рис. 69 использование гибридного алгоритма комбинирующего метод хорд и Мюллера позволяет на первом приближении значительно приблизиться к искомому решению. Таким образом, применение одного приближения по методу Мюллера существенно сократило количество итераций, которое могло потребоваться для метода хорд, если бы он применялся без комбинирования с методом Мюллера. На рис. 70 показан процесс выбора нового интервала для последующей итерации. Процесс получения решения на втором приближении представлен на рис. 71.

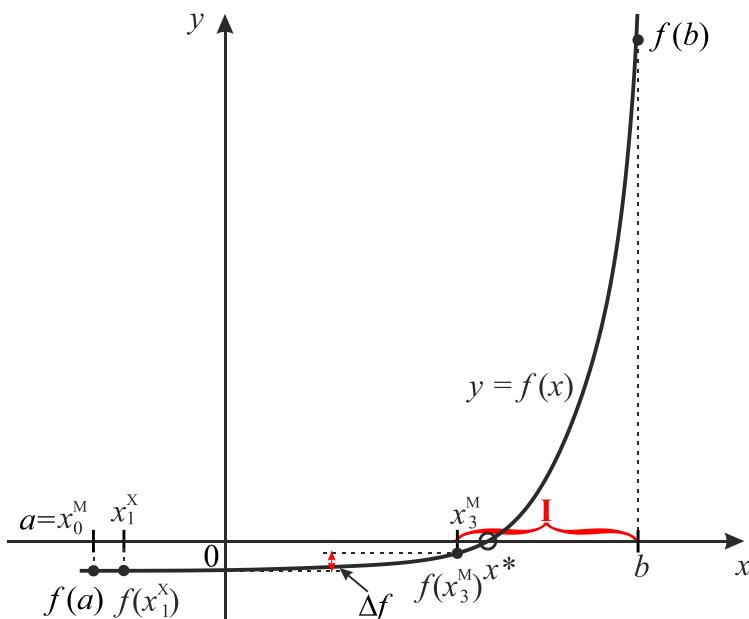


Рис. 70 – Выбор интервала для второго приближения

Проводя обобщение результатов, получаемых в рассмотренных ранее примерах, можно заключить, что в случаях комбинирования интервальных и итерационных методов обеспечивается оптимизация вычислительной технологии решения нелинейных уравнений. Выделим эти преимущества:

- 1) нет необходимости проводить продолжительный анализ функции для обеспечения условия сходимости итерационного метода;
- 2) простой алгоритм выбора одного решения из двух возможных полученных с помощью интервального и итерационного метода;
- 3) после получения на определенной итерации решения, которое удовлетворяет условию сходимости итерационного метода, все последующие итерации выполняются по итерационному методу, поскольку он обладает более высокой скоростью сходимости.

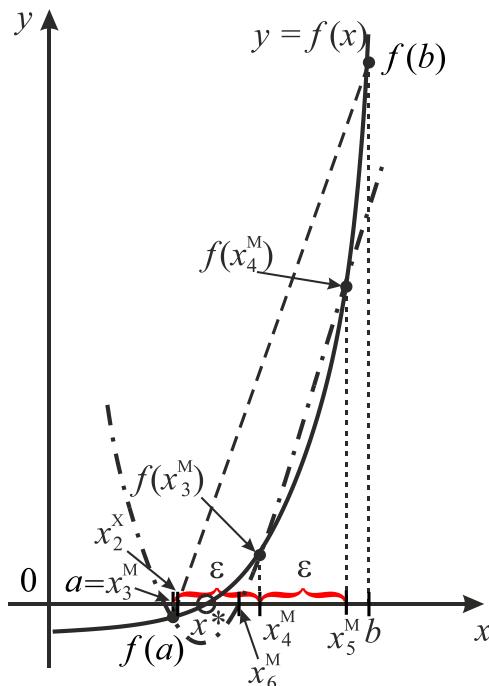


Рис. 70 – Второе приближение

Задание на лабораторную работу № 2.4

Цель: закрепить теоретические знания по методам решения нелинейных уравнений: интервального, итерационного и комбинированного.

Каждый пример уточняется до заданной точности с помощью трех методов: интервального, итерационного и комбинированного. Для каждого примера требуется составить алгоритм, реализовать вычислительную технологию и произвести серию расчетов с целью нахождения уточненного корня нелинейного уравнения с требуемой точностью.

Процедуру решения нелинейного уравнения реализовать для трех значений точности $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$.

В результаты для каждого метода формируется таблица, в которую вносится найденное решение, значение функции для этого решения и номер итерации по аналогии с таблицами, представленными в примерах.

По возможности провести сравнение полученного решения с точным значением.

Исходные нелинейные уравнения представлены ранее в таблице 6, вариант задания выбирается, в соответствии со своим порядковым номером в журнале группы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение нелинейного уравнения.
2. На какие классы подразделяются нелинейного уравнения?
3. Приведите пример нелинейного алгебраического уравнения.
4. Приведите пример нелинейного трансцендентного уравнения.
5. Что означает корень нелинейного уравнения?
6. Покажите на графике корня нелинейного уравнения?
7. Сформулируйте постановку задачи решения нелинейного уравнения.
8. Какие виды нелинейных уравнений бывают?
9. Какие методы решения нелинейных уравнений существуют?
10. Назовите этапы численного нахождения решения нелинейных уравнений.
11. Приведите пример точного решения нелинейного уравнения.
12. Какими достоинствами и недостатками обладают точные методы решения нелинейных уравнений?
13. Как определить число действительных корней нелинейного алгебраического уравнения?
14. С помощью, каких методов можно определить границы действительных корней?
15. С помощью, каких методов можно определить границы комплексных корней?
16. Сформулируйте задачу локализации корня нелинейного уравнения.
17. Перечислите способы локализации корней нелинейного уравнения.
18. Суть аналитического способа локализации корней нелинейного уравнения.
19. Методика графического способа локализации корней нелинейного уравнения.
20. Алгоритм табличного способа локализации корней нелинейного уравнения.
21. Сформулируйте задачу уточнения корня нелинейного уравнения.
22. Поясните понятие «начальное приближение».
23. Что такое итерация?

24. Как вы понимаете сходимость итерационного процесса?
25. Что означает термин «порядок сходимости»?
26. В чем отличие между глобально и локально сходящимся методом?
27. Назовите группы, на которые подразделяются все методы уточнения корней нелинейного уравнения.
28. Сформулируйте идею интервальных методов уточнения корня нелинейного уравнения
29. Сущность метода половинного деления, применяемого для решения нелинейных уравнений.
30. Условие окончания итерационного процесса в методе половинного деления.
31. Как определить количество итераций в методе половинного деления для достижения требуемой точности?
32. Сформулируйте достоинства и недостатки методе половинного деления.
33. Сущность правила золотого сечения, применяемого для решения нелинейных уравнений.
34. Какие отличительные особенности в методе золотого сечения имеются по отношению к методу половинного деления?
35. В чем суть метода хорд, применяемого для решения нелинейных уравнений?
36. Условие окончания итерационного процесса в методе хорд.
37. При каких условиях у метода хорд одна из границ остается неподвижной?
38. В каком случае метод хорд сходится очень медленно?
39. Основная идея, заложенная в метод Риддерса применяемый для решения нелинейных уравнений.
40. Сколько начальных точек необходимо задать для запуска итерационного процесса в методе Риддерса.
41. Сформулируйте достоинства и недостатки методе Риддерса.
42. Каким порядком сходимости обладает метод Риддерса?
43. Сформулируйте идею итерационных методов уточнения корня нелинейного уравнения
44. Суть метода Ньютона, применяемого для решения нелинейных уравнений.
45. Сформулируйте условие сходимости метода Ньютона.
46. Как выбрать начальное приближение для метода Ньютона?

47. Сущность модифицированного метода Ньютона, применяемого для решения нелинейных уравнений.
48. Какими преимуществами и недостатками обладает модифицированного метода Ньютона?
49. Суть метода секущих, применяемого для решения нелинейных уравнений.
50. В чем отличие метода секущих от метода хорд?
51. Сущность метода простой итерации, применяемого для решения нелинейных уравнений.
52. Графически визуализируйте сходящийся и расходящийся интеграционный процесс для метода простой итерации.
53. Сформулируйте условие сходимости метода простой итерации.
54. Показать на примере особенности преобразования исходно заданных уравнений к итерационному виду.
55. Критерий окончания итераций для метода простой итерации.
56. Идея метода Мюллера, применяемого для решения нелинейных уравнений.
57. Как задать начальные точки для запуска итерационного процесса по методу Мюллера.
58. Сформулируйте достоинства и недостатки методе Мюллера.
59. Каким порядком сходимости обладает метод Мюллера?
60. Какая идея заложена в комбинированные методы уточнения корня нелинейного уравнения.
61. Выберите комбинацию двух методов и визуализируйте процесс получения решения нелинейного уравнения.
62. В чем особенности условия сходимости для интервальных и итерационных методов решения нелинейных уравнений?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов, Н.С., Жидков, Н.П., Кобельков, Г.М.** Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987
2. **Березин, И.С., Жидков, Н.П.** Методы вычислений, том 1 (2-е изд.). – М.: Физматлит, 1962
3. **Березин, И.С., Жидков, Н.П.** Методы вычислений, том 2. – М.: Физматлит, 1959
4. **Вержбицкий, В.М.** Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2000.
5. **Демидович, Б.П., Марон, И.А.** Основы вычислительной математики (3-е изд.). – М.: Наука, 1966
6. **Дьяченко, В.Ф.** Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1972
7. **Калиткин, Н.Н.** Численные методы. – М.: Наука, 1978
8. **Крылов, В.И., Бобков, В.В., Монастырный, П.И.** Вычислительные методы. Том II. – М.: Наука, 1977
9. **Марчук, Г.И.** Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977
10. **Гателюк, О.В., Исмаилов, Ш.К., Манюкова, Н.В.** Численные методы. – М.: Юрайт, 2018.
11. **Пирумова, У.Г.** Численные методы: учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Юрайт, 2019.
12. **Зализняк, В.Е.** Численные методы. Основы научных вычислений: учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Юрайт, 2019.
13. **Зенков, А.В.** Численные методы: учебное пособие для прикладного бакалавриата. – М.: Юрайт, 2018.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Понятие нелинейное уравнение	5
1.1. Понятие корень уравнения	5
1.2. Геометрическое представление корня уравнения	6
1.3. Формулировка задачи численного решения нелинейного уравнения и этапы получения	7
1.4. Точные методы нахождения корней.....	8
2. Анализ количества и границ корней.....	23
2.1. Число корней	23
2.2. Определение границ действительных корней	23
2.3. Определение границ комплексных корней.....	28
3. Понятие и способы локализации корней.....	32
3.1. Аналитический способ.....	32
3.2. Графический способ.....	36
3.3. Табличный способ	39
4. Методы уточнения локализованного корня с требуемой точностью.....	48
4.1. Интервальные методы.....	49
4.1.1. Метод половинного деления	50
4.1.2. Метод золотого сечения	56
4.1.3. Метод хорд.....	62
4.1.4. Метод Риддерса (C. J. F. Ridders).....	70
4.2. Итерационные методы	77
4.2.1. Метод Ньютона	77
4.2.2. Модифицированный метод Ньютона.....	86
4.2.3. Метод секущих	90
4.2.4. Метод простых итераций (МПИ).....	95
4.2.5. Метод Мюллера (D. E. Muller).....	105
4.3. Комбинированные методы	115
4.3.1. Метод хорд и Ньютона	115
4.3.2. Метод половинного деления и секущих	121
4.3.3. Метод половинного деления и Ньютона.....	125
4.3.4. Метод хорд и Мюллера.....	128
Контрольные вопросы.....	142
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	145
Содержание	146

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Жилин Александр Анатольевич

**ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ.
Исследование и решение нелинейных уравнений**

Учебное пособие

Компьютерная верстка: Жилин А. А.

Подписано в печать 15.03.2022 с оригинал-макета.

Бумага офсетная №1, формат 60×84 1/16, печать трафаретная – Riso.
Усл. печ. л. 8.5 , тираж 50 экз., заказ № . Цена договорная.

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет водного транспорта»
(ФГБОУ ВО "СГУВТ"), 630099, г. Новосибирск, ул. Щетинкина, 33.

Отпечатано в издательстве ФГБОУ ВО "СГУВТ".