4.2.1. Метод Ньютона

Метод Ньютона (метод касательных, метод линеаризации, метод Ньютона-Рафсона) является одним из популярнейших итерационных методов решения нелинейных уравнений, т.к. он отличается простотой и быстрой сходимостью. Выражение для итерационного процесса можно получить двумя способами, первый опирается на геометрическое представление, а второй на аналитическое разложение заданной нелинейной функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Получим выражение, для итеративной последовательности исходя из геометрического представления метода (рис. 25). В качестве начального приближения x_0 примем правую границу интервала локализации b. Вычисляем в этой точке значение функции $f(x_0)$ на рис. 25 определенное значение соответствует точке $\boldsymbol{B}$. Проводим через точку $\boldsymbol{B}(x_0, f(x_0))$ касательную к кривой $y = f(x)$. Эта касательная пересекается с осью абсцисс в точке x_1, которая в дальнейшем рассматривается в качестве следующего приближения и является искомым параметром.

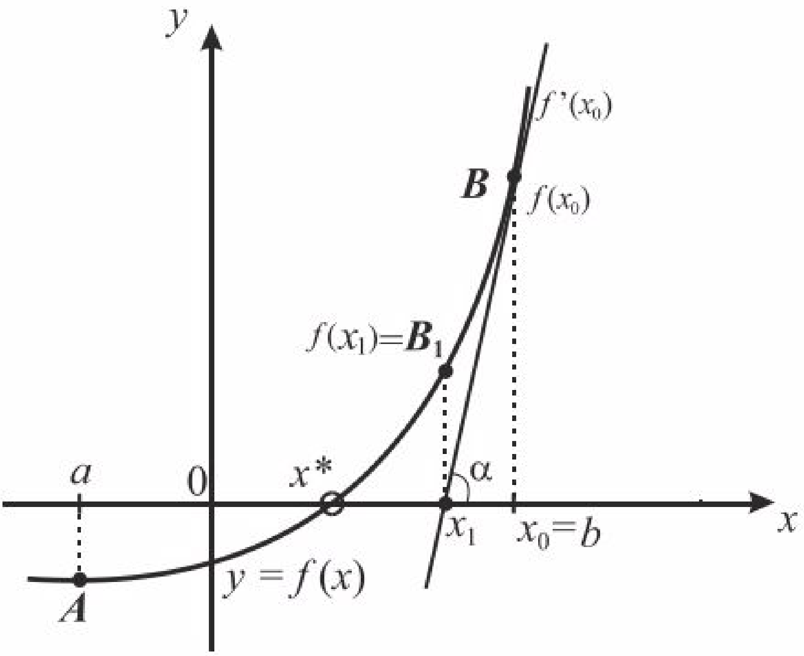

Рис. 25 – Визуализация процесса построения решения с помощью метода касательных

Значение новой точки x_1 можно достаточно легко определить, опираясь на математическое выражение для тангенса угла $\boldsymbol{\alpha}$ в прямоугольном треугольнике

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0).$$

Данное выражение позволяет определить искомую величину x_1 в следующем виде

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Для нахождения следующего приближения x_2 вычисляется значение функции в точке x_1, на рис. 26 это точка $\boldsymbol{B}_1(x_1, f(x_1))$ и вычисляется первая производная в точке x_1, т.е. проводится касательная через точку $\boldsymbol{B}_1$ к функции $y = f(x)$.

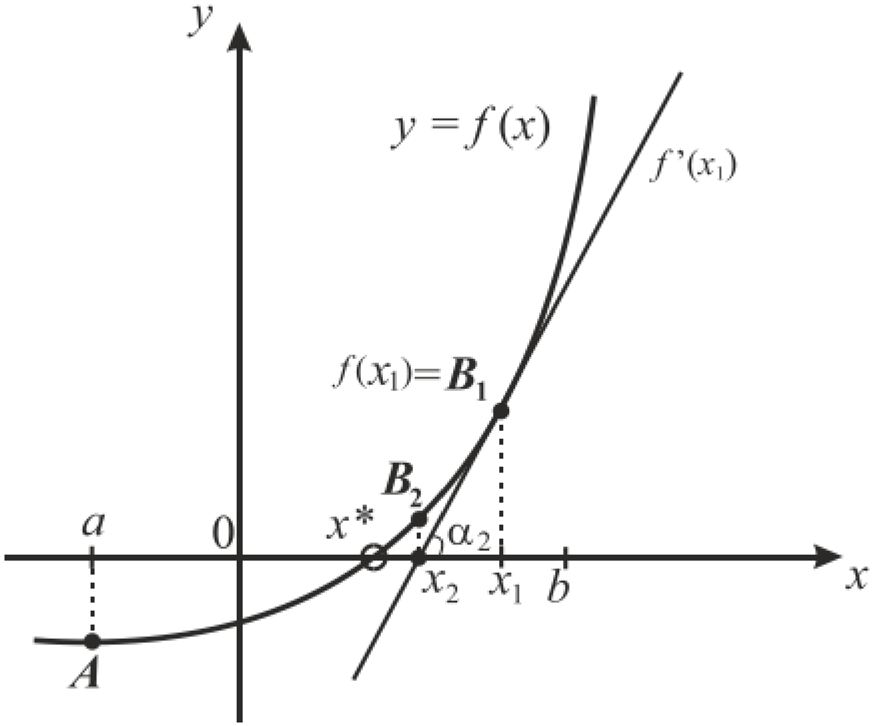

Рис. 26 – Второе приближение по методу касательных

Математическое выражение для нахождения x_2 имеет вид

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогично находятся все последующие приближения x_3, x_4, и т.д. Формула для $k + 1$ приближения будет иметь вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Отсюда вытекает условие применимости метода: функция $f(x)$ должна быть дифференцируемой, и её первая производная $f'(x)$ в окрестности корня не должна менять знак.

Замечание. Если вместо правой границы b для начального приближения x_0 взять левую a, то проводя касательную к функции $y = f(x)$ в точке $\boldsymbol{A}(a, f(a))$, получаемая точка пересечения касательной с осью абсцисс x_1, как видно из рис. 27, находится за пределами интервала локализации корня. Таким образом, процесс выбора начального приближения в методе Ньютона требует особого внимания и будет подробно рассмотрен в дальнейшем.

Рассмотрим второй способ получения выражения для определения x_{k+1}. Для этого предполагается, что заданная функция $f(x)$ является непрерывной и минимум дважды дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, внутри которого находится один искомый корень x^*.

На рассматриваемом интервале уже имеется одна точка x_k, являющаяся начальным приближением x_0, т.е. $k = 0$. В заданной точке наша функция имеет значение $f(x_k)$, а также первую $f'(x_k)$ и вторую производную $f''(x_k)$. Между заданной точкой x_k и искомым решением x^* имеется некоторое малое расстояние, тогда для определения значения функции в точке x^* применяем разложение в ряд Тейлора, ограниченное до членов со второй производной

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x^* - x_k)^2.$$

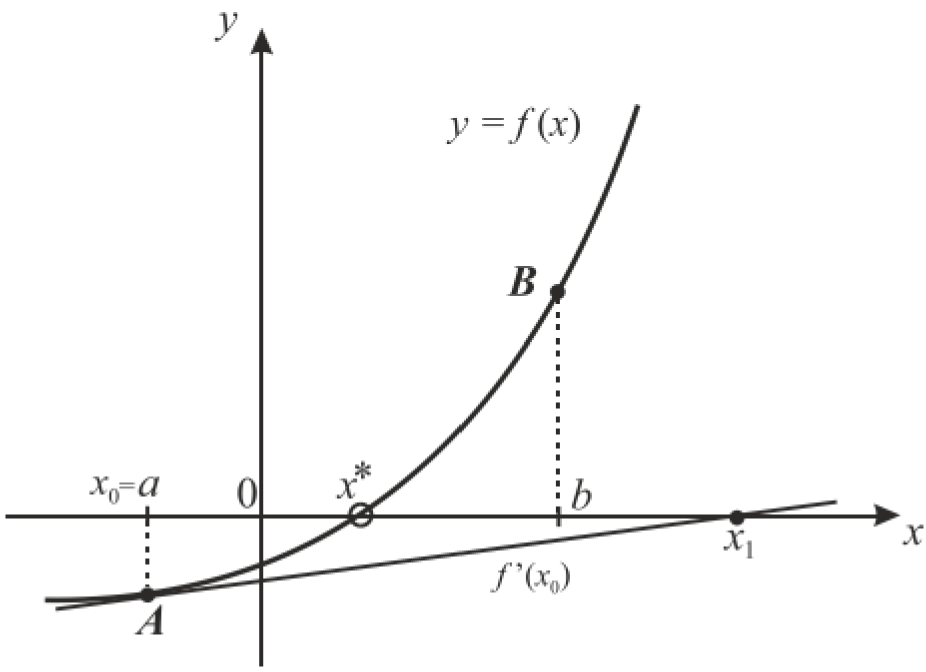

Рис. 27 – Выбор левой границы интервала в качестве начального приближения в методе касательных

Так как точка x^* является точным решением, то значение функции в этой точке обращается в ноль. В результате получается квадратное уравнение для нахождения корня x^*

$$f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(x^*-x_k)^2=0.$$

Поскольку расстояние между точками x_k и x^* мало, то квадратом их разности можно пренебречь и результирующее уравнение будет линейным. Поскольку в процессе получения точного решения x^* от бесконечного ряда Тейлора осталось только два слагаемых, то полученное решение будет отличаться от точного. Определенная таким образом точка обозначается x_{k+1} и определяется с помощью следующего выражения

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Следовательно, второе слагаемое с дробью является тем самым приращением, на которое новая точка приближается к точному решению нелинейного уравнения на каждой итерации.

Для окончания итерационного процесса используются стандартное условие

$$|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon.$$

Замечание. В методе Ньютона нет необходимости задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения, а достаточно задать только точку x_0 являющуюся начальным приближением.

Пример. Найти корень нелинейного уравнения

$$x^3-\frac{x^2+x}{5}=1,2$$

с помощью метода Ньютона на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon=\delta=10^{-3}$.

Решение. Первым действием определяется первая производная заданной функции

$$f'(x)=\left(x^3-\frac{x^2+x}{5}-1,2\right)'=3x^2-\frac{2x+1}{5}.$$

В качестве начальной точки x_0 выбираем правую границу заданного интервала (в нашем случае это точка $b = 1{,}5$). Далее в данной начальной точке вычисляется значение функции

$$f(1{,}5) = 1{,}5^3 - \frac{1{,}5^2 + 1{,}5}{5} - 1{,}2 = 1{,}425$$

и ее первой производной

$$f'(1{,}5) = 3 \cdot 1{,}5^2 - \frac{2 \cdot 1{,}5 + 1}{5} = 5{,}95.$$

Полученные значения подставляются в выражение для вычисления координаты точки пересечения касательной с осью абсцисс

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{1{,}425}{5{,}95} = 1{,}26050.$$

Полученное значение x_1 сравнивается с начальным x_0 для проверки достигнутой точности

$$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon \text{ или } |1{,}26050 - 1{,}5| = 0{,}23950 < 0{,}001.$$

Как видно требуемое условие по точности не выполнено, следовательно, процесс уточнения необходимо продолжить. Для этого проводится повторное вычисление значения функции в точке x_1

$$f(1{,}26050) = 1{,}26050^3 - \frac{1{,}26050^2 + 1{,}26050}{5} - 1{,}2 = 0{,}23290$$

и значение первой производной в этой же точке

$$f'(1{,}26050) = 3 \cdot 1{,}26050^2 - \frac{2 \cdot 1{,}26050 + 1}{5} = 4{,}06241.$$

Вычисленные значения функции и ее производной в точке x_1 подставляются в выражение для определения координаты следующей точки пересечения касательной $f'(x_1)$ с осью абсцисс

$$x_2 = 1{,}26050 - \frac{0{,}23290}{4{,}06241} = 1{,}20317.$$

Используя полученное значение координаты x_2 и предыдущее x_1, определяется погрешность

$$|1,20317-1,26050|=0,05733<0,001.$$

Таким образом, погрешность уменьшилась, но требуемая точность не достигнута, а следовательно, процедуру нахождения решения необходимо продолжить.

Процесс нахождения решения нелинейного уравнения методом Ньютона представлен в табл. 11. Из табл. 11 видно, что после четвертой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$|1,2-1,200009|=0,00009<0,001.$$

Таблица 11 – Решение нелинейного уравнения методом Ньютона

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,5	1,425	5,95
1	1,26050	0,23290	4,06241
2	1,20317	0,01158	3,66161
3	1,200009	3,41E-05	3,64006
4	1,2	2,98E-10	3,64

Также осуществляется проверка условия достижения значением функции во вновь найденной точке заданной точности, т.е. $|f(x_4)|<\delta$. Стоит отметить, что значение функции, определенное после четвертой итерации, отличается от нуля в десятом знаке после запятой.

Ответ. Решение заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получено методом Ньютона за четыре итерации и соответствует $x = 1,2$.