Пример. Требуется найти решение системы с точностью ε=0,001.

$$\begin{cases} x_1 + 5\cdot x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad\qquad 2\cdot x_3 = -1 \\ 2\cdot x_1 - x_2 - 3\cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Приведем систему к новому, **<u>каноническому виду</u>** метода простых итераций. Для этого нужно преобразовать исходную систему так, чтобы в каждой строке новой матрицы А коэффициент, расположенный на главной диагонали, превышал по абсолютной величине сумму абсолютных значений остальных коэффициенты в этой сроке.

При выполнении эквивалентных линейных преобразований системы нужно соблюдать следующие требование: каждое уравнение исходной системы должно участвовать хотя бы в одном преобразовании.

В первом уравнении исходной системы коэффициент при x_2 больше суммы модулей других коэффициентов: 5> 1+1. Поэтому это уравнение в новой системе нужно записать вторым уравнением. Для получения нового первого уравнения можно второе уравнение умножить на 2 и сложить с третьим уравнением. Для получения нового третьего уравнения можно из третьего уравнения вычесть второе.

В итоге описанных преобразований получиться следующая система:

$$\begin{cases} \underline{4}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + \underline{5}x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - \underline{5}x_3 = 6 \end{cases}$$

Важно отметить, что подобные преобразования не меняют решения системы.

Выразим явно из каждого <u>нового</u> уравнения очередное неизвестное – получим формулы итерационного процесса.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(2 - x_1 + x_3) \\ x_3 = -\frac{1}{5}(6 - x_1 + x_2) \end{cases} \qquad (*)$$

Возьмем <u>любое начальное</u> приближение $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$, например $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0$.

Вычислим новое приближение решения $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, подставив в правую часть $(*)$ начальное приближение:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(2 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(6 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

Оценим достигнутую точность δ по формуле:

$$\delta = \max_{i=\underline{1,3}} \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| = \max\left(\left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right|, \left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right|, \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| \right) = \max(0{,}75; 0{,}4; 1{,}2) = 1{,}2$$

Итерационный процесс нужно продолжить, т.к. $\delta > \varepsilon$.

Вычислим второе приближение $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$, подставив в правую часть $(*)$ первое приближение:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(3 + 0{,}4 + 1{,}2) = \frac{4{,}6}{4} = 1{,}15$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(2 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{5}(2 - 0{,}75 - 1{,}2) = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{5}(6 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = -\frac{1}{5}(6 - 0{,}75 + 0{,}4) = -\frac{5{,}65}{5} = -1{,}13$$

$$\delta = \max_{i=\underline{1,3}} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right| = \max(|\,1{,}15 - 0{,}75\,|; |\,0{,}01 - 0{,}4\,|; |\,-1{,}13 + 1{,}2\,|) = 0{,}4$$

Третье приближение:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(3 + 0,01 + 1,13) = \frac{4,14}{4} = 1,0350$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{5}(2 - 1,15 - 1,13) = -\frac{0,28}{5} = -0,056$$

$$x_3^{(3)} = -\frac{1}{5}(6 - 1,15 + 0,01) = -\frac{4,86}{5} = -0,972 \qquad \delta = 0,158$$

Четвертое приближение:

$$x_1^{(4)} = 1,007,\ x_2^{(4)} = -0,0014,\ x_3^{(4)} = -0,9818, \qquad \delta = 0,0546$$

Очевидно, что итерационный процесс сходиться, т.к. значение δ монотонно убывает. Для достижения требуемой точности ε=0,001 потребуется еще несколько итераций.