Метод Якоби — один из наиболее простых методов приведения системы матрицы к виду, удобному для итерации: из 1-го уравнения матрицы выражаем неизвестное x_1, из 2-го выражаем неизвестное x_2 и т.д.

Результатом служит матрица B, в которой на главной диагонали находятся нулевые элементы, а все остальные вычисляются по формуле:

$$b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii},\ i,j = 1,\ 2\ldots,\ n$$

Элементы (компоненты) вектора d вычисляются по следующей формуле:

$$d_i = b_i/a_{ii},\ i = 1,\ 2,\ldots,\ n$$

Расчетная формула метода простой итерации:

$$x^{(n+1)} = Bx^{(x)} + d$$

Матричная запись (координатная):

$$x_i{}^{(n+1)} = b_{i1}x^n{}_1 + b_{i2}x^{(n)}{}_2 + \ldots + b$$

Критерий окончания в методе Якоби:

$\text{open}x^{(n+1)} - x^{(n)}|| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \frac{1-\text{open}B||}{\text{open}B||}\varepsilon$

В случае если $B < 1/2$, то можно применить более простой критерий окончания итераций:

$$\text{open}x^{(n+1)} - x^{(n)}|| < \varepsilon$$

Пример

Решить СЛАУ методом Якоби:

$$
\begin{aligned}
&10x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\
\mathbf{open}\, &x_1 + 10x_2 - x_3 = 10 \\
&-x_1 + x_2 + 10x_3 = 10
\end{aligned}
$$

<u>Как решить?</u>

Необходимо решить систему с показателем точности $\varepsilon = 10^{-3}$.

Приводим СЛАУ к удобному виду для итерации:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -0,1x_2 + 0,1x_3 + 1,1 \\
\mathbf{open}\, &x_2 = -0,1x_1 + 0,1x_3 + 1 \\
&x_3 = 0,1x_1 - 0,1x_2 + 1
\end{aligned}
$$

Выбираем начальное приближение, например: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — вектор правой части.

В таком случае, первая итерация имеет следующий внешний вид:

$$x_1{}^{(1)} = -0,1 \times 1 + 0,1 \times 1 + 1,1 = 1,1$$
$$x_2{}^{(1)} = -0,1 \times 1,1 + 0,1 + 1 = 0,99$$
$$x_3{}^{(1)} = 0,1 \times 1,1 - 0,1 \times 1 + 1 = 1,01$$

Аналогичным способом вычисляются приближения к решению:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,102 \\ 0,991 \\ 1,011 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,102 \\ 0,9909 \\ 1,0111 \end{pmatrix}, x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1,10202 \\ 0,99091 \\ 1,01111 \end{pmatrix}$$

Находим норму матрицы B, для этого используем норму $\mathbf{open} B||_\infty$.

Поскольку сумма модулей элементов в каждой строке равна 0,2, то $\mathbf{open} B||_\infty = 0,2 < 1/2$, поэтому можно вычислить критерий окончания итерации:

$$\mathbf{open} x^{(n+1)} - x^{(n)}|| < \varepsilon$$

Далее вычисляем нормы разности векторов:

$$\mathbf{open} x^{(3)} - x^{(2)}||_\infty = 0,002, \mathbf{open} x^{(4)} - x^{(3)}||_\infty = 0,00002.$$

Поскольку $\mathbf{open} x^{(4)} - x^{(3)}||_\infty < \varepsilon$, то можно считать, что мы достигли заданной точности на 4-ой итерации.

<u>Ответ:</u>

$x_1 = 1,102$; $x_2 = 0,991$; $x_3 = 1$,01 1.