9.09.22

Методы решения СЛАУ

Основные понятия и определения

Система M линейных уравнений с n неизвестн. называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} - известные коэффициенты системы, b_i - свободные члены (вектор правых частей), x_j - неизвестные (необходимо определить). Первый индекс i показывает № уравнен. 2-ой индекс-неизвестного.

СЛАУ представляют в матрично-векторном виде $A\vec{x} = \vec{b}$,

где матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_m \end{bmatrix}$ $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x \end{bmatrix}$ a_{ij} x_1 b_1

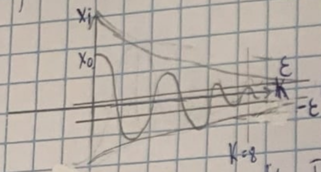
Матрица A - основная матрица системы. Помимо основной присутствует расширенная, полученная путём дополнения матр. вектором свободн. членов.

Методы решения СЛАУ

1. Точные (прямые) - выполняются за заранее известное кол-во действий. К прямым относятся методы Крамера, Гаусса, Гаусса-Жордана, и матричный

метод. (лимит 100-200 неизвестных)

2. Итерационные методы - основаны на использовании повторяющихся процессов, они позволяют получить решение в результате постепенной сходимости к корню уравнения (лимит неизвестных до $10^6 - 10^7$)



К итерационным относятся метод Якоби, Гаусса-Зейделя, Релаксации и т. д.

3. Вероятностные методы - применяются для решения СЛАУ, подходы основаны на теории вероятности (не имеют ограничений на кол-во) (метод Монте-Карло). Критерием эффективности является кол-во действий

Проверка корректности поставленной задачи

Перед решением СЛАУ требуется проверить корректность поставленной задачи.

1. Кол-во неизвестных и кол-во уравнений должно быть равным.

Достаточное условие

2. Det A отличен от 0 - решение существует и единствен.

Если Det A = 0, то если матрица А является вырожденной (одна строка должна быть нулевой) то решений бесконечное множество. Иначе, решений не существует

3. Показателем плохо обусловленной системы является. Det A близкий к нулю. Если матрица будет содержать элементы с большими по модулю значениями (главн диагональ) то она станет устойчивой

Точные методы решения

Метод Крамера - способ решения квадратных СЛАУ с ненулевым определителем основной матрицы.

Смысл метода:

1. Находим определитель основной и всех доп. матриц, полученных путем замены соответствующего столбца вектором свободн членов.

2. В результате вычисляется n+1 определитель, для нахождения неизвестного каждый доп определитель делится на основной для получения неизвестных

Количество действий которые необходимо выполнить N^4

Метод Гаусса - классический метод решения СЛАУ

Смысл метода:

Последовательное исключение переменных с помощью элементарных преобразований. Общий вид приводится к равносильной системе треугольного вида из которой последовательно находится [...] последняя переменная, подставляется в вышестоящее уравнение до тех пор пока не будут известны все переменные.

Алгоритм метода Гаусса

1 этап (прямой ход) состоит из исключения неизвестных из системы уравнений (зануляем коэф-ы ниже главн. диагонали)

2 этап (обратный ход) состоит в последовательном определении неизвестных начиная с X_n после нахождения X_n находится X_{n-1} и продолжается до X_1.

Проверяем методом подстановки, в идеале $\Delta \to 0$

Количество действий: $\frac{2}{3}N^3$.

Помимо классического метода существует его модификация:

- с выбором главного элемента (для уменьшения погрешности вычислений) с помощью перестановки строк помещается вверх максимальный по модулю коэффициент либо увеличить кол-во решаемых уравнений)

Плюсы Гаусса: Значительно меньше кол-во действий, можно решать не только квадратные матрицы

Минусы: При значительном кол-ве неизвестных резко увеличивается время счёта и погрешность.

Метод Гаусса - Жордана (метод полного исключения неизвестных) - Используется для решения квадратных СЛАУ и нахождения обратной матрицы

Идея метода:

С помощью элементарных преобразований, СЛАУ преобразуется к диагональному виду, где коэф-ы на глав. диагонали равны единице, а значения помимо неё равны нулю

Основное применение метода используют для вычисления обратной матрицы. С помощью элементарных преобразований -

, на месте основной будет единичная, а на месте единичной будет обратная для основной

Матричный метод - метод решения СЛАУ с ненулевым определителем

Идея метода основана на использовании обратной матрицы домноженной на вектор правых частей

С левой стороны домножаем левую и правую часть когда перемножаем исходную и обратную получим единичную, а на месте получаем решение.

<u>Метод прогонки</u> (алгоритм Томаса) - используется для решения СЛАУ вида $A\vec{x} = \vec{f}$, где A - трехдиагональная матрица и представляет собой разновидность метода последовательного исключения неизвестных

Система может быть записана в виде:

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i$$

Вариант I. Основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекурсивным соотношением

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Выражаем x_i и x_{i-1} через x_{i+1}

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i) x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} -$$

$$- F_i = 0$$

Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если

$$\begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \dfrac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i} \end{cases}$$

Из первого ур-я получаем $\begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{-B_1}{C_1} \\ \beta_2 = \dfrac{F_1}{C_1} \end{cases}$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \beta_n}{A_n \alpha_n + C_n}$$

Вариант II. Метод прогонки реализуется с помощью конечноразностных схем. Уравнение преобразуется к эквивалентному виду

$$A' \vec{x} = \vec{f}$$

$$A' = \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_n \end{pmatrix}$$

1) Вычисляются компоненты C' и F'

$i \in [2; n]$

$C_1 = C_1 \quad C_i = C_i - \frac{A_i B_{i-1}}{C_{i-1}}$

$F_1 = F_1 \quad F_i = F_i - \frac{A_i F_{i-1}}{C_{i-1}}$

2) $i \in [n; 1]$, вычисляется решение:

$x_n = \frac{F_n}{C_n}$

$x_i = \frac{F_i - B_i x_{i+1}}{C_n}$

Для применяемости метода прогонки должно удовлетворяться условие диагонального преобладания

9.09.22

Итерационные методы решения СЛАУ

Для обеспечения сходимости итерац. процессов, все итерационные методы должны удовлетворять условию диагонального преобладания.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Причём хотя бы одно неравенство является строгим. Если все неравенства строгие, то говорят, что матрица A обладает строгим диагональным преобладанием. Если матрица облад. строгим диаг. преоблад., то итерационные методы решения СЛАУ сходятся к точному решению, которое существует и единственное.

Для итерационных методов необходимо задать начальное приближение (старт. значение) и требуемая точность (ε)

1) Метод Якоби - модификация метода простой итерации для решения СЛАУ.
Для применения необходимо проведение предварительных преобразований исходного СЛАУ к итерационному виду

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = B\vec{x} + \vec{g}$

В данном выражении добавляется счётчик итерации

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$ K

$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n$

Итерационный процесс в общем случае - бесконечный, для его прекращения необходимо ввести условие окончания итерационного процесса, для этого вводится точность

$\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon$

2) Метод Гаусса - Зейделя - классический итерационный метод решения СЛАУ.
Исходную СЛАУ представляют в следующем виде, где L - нижняя треугольная часть основной матрицы, D - диагональная часть, U - верхняя треуг часть осн. матрицы

$(L + D + U)\vec{x} = \vec{b}$

$(L + D)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$

Метод Гаусса-Зейделя можно рассматривать как модификацию метода Якоби.
Идея состоит в том, что новые знач. $x_i^{(k+1)}$ используются сразу же по мере их получения, в то время, в методе Якоби они не использовались до следующей итерации

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i}$$

$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}; \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

В случае метода Якоби нужно хранить 2 вектора, а для метода Гаусса-Зейделя 1 вектор (программирование)

релаксаций
3) Метод Релаксации – исходная СЛАУ приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n + c_n = 0 \end{cases}$$

$$b_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\begin{cases} \Psi_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^{n} b_{1j} x_j^{(0)} \\ \Psi_2^{(0)} = c_2 - x_2^{(0)} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} b_{2j} x_j^{(0)} \\ \Psi_n^{(0)} = c_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} x_j^{(0)} \end{cases}$$

В качестве начального приближения задаётся нулевой вектор, на каждом шаге необходимо обратить в ноль максимальная невязку

$$\Psi_s^{(k)} = \delta x_s^{(k)} \Rightarrow \Psi_s^{(k+1)} = 0, \quad \Psi_i^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + b_{is}\delta x_s^{(k)}$$

$|\Psi^{(k)}| \leq \varepsilon$ При достижении ε:

$$x_i \approx x_i^0 + \sum_{s} \delta x_i^{(s)}$$

Тема 2. Решение нелинейных уравнений

Основные понятия

В общем случае нелин. уравн. с ~~ед~~ 1 неизвестн. записывается в след. виде:

$f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция аргумента x. Простой однократный корень уравнения x^* обращает функцию в 0

Если точки x^* вместе с функцией обраща в 0 и её производные до k-1 порядка включит., то x^* называется корнем k-той кратности. В зависимости от $f(x)$ нелинейные уравнения подразделяются на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраическое уравн. – уравн., в котором $f(x)$ имеет алгебраический вид

$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$

a_i – коэффициент