Вычислить приближенно определенный интеграл, предварительно разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$$

Решение: Идея метода состоит в том, чтобы заменить подынтегральную функцию соответствующим **степенным рядом** *(если он, конечно, **сходится к ней** на промежутке интегрирования).*

Поэтому на первом этапе нужно разложить подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Эту распространенную на практике задачу мы очень подробно рассмотрели на уроке **Разложение функций в степенные ряды**. Кстати, рекомендую всем прочитать, поскольку некоторые вещи, о которых сейчас пойдет разговор, могут показаться малопонятными.

Используем табличное разложение:

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \ldots$$

В данном случае $\alpha = -2x^2$

$$e^{-2x^2} = 1 + \frac{-2x^2}{1!} + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + \frac{(-2x^2)^3}{3!} + \ldots = 1 - 2x^2 + \frac{2^2x^4}{2!} - \frac{2^3x^6}{3!} + \ldots$$

Обратите внимание, как я записал ряд. Специфика рассматриваемого задания требует **записывать только несколько первых членов ряда**. Мы не пишем общий член ряда $\frac{\alpha^n}{n!}$, он здесь ни к чему.

Чем больше членов ряда мы рассматриваем – тем лучше будет точность. Сколько слагаемых рассматривать? Из практики могу сказать, что в большинстве случаев для достижения точности 0,001 **достаточно записать первые 4 члена ряда**. Иногда требуется меньше. А иногда больше. Если в практическом примере их не хватило, то придётся переписывать всё заново =(Поэтому целесообразно провести предварительный черновой анализ или перестраховаться, изначально записав побольше членов (собственно, такой же совет как и для **приближенного вычисления значения функции с помощью ряда**).

Следует также отметить, что точность до трёх знаков после запятой самая популярная. Также в ходу и другая точность вычислений, обычно 0,01 или 0,0001.

Теперь второй этап решения:
Сначала меняем подынтегральную функцию на полученный степенной ряд:

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^6}{3!}+\ldots\right)dx$$

Почему это вообще можно сделать? Данный факт пояснялся ещё на уроке о **разложении функций в степенные ряды** – график бесконечного многочлена $y=1-2x^2+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^6}{3!}+\ldots$ в точности совпадает с графиком функции $y=e^{-2x^2}$! Причем, в данном случае утверждение справедливо для любого значения «икс», а не только для отрезка интегрирования $[0;0,3]$.

На следующем шаге максимально упрощаем каждое слагаемое:

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^6}{3!}+\dots\right)dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+2x^4-\frac{4}{3}x^6+\dots\right)dx$$

Лучше это сделать сразу, чтобы на следующем шаге не путаться с лишними вычислениями.

После упрощений **почленно интегрируем** всю начинку – напоминаю, что эта замечательная возможность обусловлена **равномерной сходимостью степенных рядов**:

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^6}{3!}+\dots\right)dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+2x^4-\frac{4}{3}x^6+\dots\right)dx =$$

$$= \left(x-2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots\right)\Bigg|_0^{0,3}$$

Интегралы здесь простейшие, на этом я не останавливаюсь.

На завершающем этапе вспоминаем школьную **формулу Ньютона-Лейбница**

$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$. Для тех, кто не смог устоять перед Ньютоном и Лейбницем, есть урок **Определенные интегралы. Примеры решений**.

Техника вычислений стандартна: сначала подставляем в каждое слагаемое 0,3, а затем ноль. Для вычислений используем калькулятор:

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^6}{3!}+\ldots\right)dx = \int_0^{0,3}\left(1-2x^2+2x^4-\frac{4}{3}x^6+\ldots\right)dx =$$

$$=\left(x-2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots\right)\Big|_0^{0,3} = 0{,}3-2\cdot\frac{(0{,}3)^3}{3}+2\cdot\frac{(0{,}3)^5}{5}-\frac{4}{3}\cdot\frac{(0{,}3)^7}{7}+\ldots-0=$$

$$=0{,}3-0{,}018+0{,}000972-\ldots\approx 0{,}3-0{,}018=0{,}282$$

Сколько членов ряда нужно взять для окончательных вычислений? Если сходящийся ряд **знакочередуется**, то *абсолютная погрешность* вычислений **по модулю** не превосходит последнего отброшенного члена ряда. В нашем случае **уже третий член ряда меньше требуемой точности 0,001**, и поэтому если мы его отбросим, то заведомо ошибёмся не более чем на 0,000972 *(осознайте, почему!)*. Таким образом, для окончательного расчёта достаточно первых двух членов: $0{,}3-0{,}018$.

Ответ: $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx \approx 0{,}282$, с точностью до 0,001