2.2.2. Метод Гаусса

Метод Гаусса (или **метод последовательного исключения неизвестных**) – классический точный метод решения СЛАУ.

Смысл метода Гаусса: последовательное исключение переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Метод Гаусса состоит из 2 этапов:

I. **Этап. Прямой ход** – путем преобразований над строками система, приводится к треугольной форме, а именно, среди элементов первого столбца матрицы выбирается не нулевой, он перемещается в крайнее верхнее положение перестановкой строк и получившаяся после перестановки первая строка вычитается из остальных строк, умноженная на величину, равную отношению первого элемента каждой из строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершенны, первую строку и первый столбец мысленно вычеркивают и продолжают, пока не останется матрица нулевого размера.

II. Этап. Обратный ход – заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через не базисные и построить фундаментальную систему решения, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение СЛАУ. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответственную базисную переменную и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь вверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего, ситуация в точности повторяет случай последней строки.

Алгоритм метода Гаусса

Дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = a_{3,n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases}$$

1. *Прямой ход* заключается в последовательном исключении неизвестных из системы n линейных уравнений. На примере первого уравнения СЛАУ рассмотрим выражение для x_1:

$$x_1 = \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n .$$

Подставим выражение для x_1 во второе и все остальные уравнения системы:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2+\left(a_{23}-\frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3+\ldots+$$

$$+\left(a_{2n}-\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n=a_{2,n+1}-\frac{a_{21}a_{1,n+1}}{a_{11}}.$$

Для расширенной матрицы коэффициентов это означает, что каждый элемент первой строки следует поделить на диагональный элемент, а все остальные строки преобразовать, как показано выше. Таким образом, станут равны нулю все коэффициенты первого столбца, лежащие ниже главной диагонали и заданная СЛАУ примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=a_{1,n+1}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(1)}x_n=a_{3,n+1}^{(1)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2+a_{n3}^{(1)}x_3+\ldots+a_{nn}^{(1)}x_n=a_{n,n+1}^{(1)}. \end{cases}$$

Коэффициенты с верхним индексом (1) подсчитываются по формуле:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}.$$

Аналогичную процедуру проводим со второй строкой матрицы и нижележащими строками, при этом первая строка и первый столбец уже не изменяются. В результате получаем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,n+1}^{(2)}. \end{cases}$$

В выражении для расчета коэффициентов с верхним индексом (2) применяются коэффициенты с верхним индексом (1):

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Затем аналогичная процедура проводится с третьей строкой матрицы и нижележащими строками до тех пор, пока все коэффициенты, лежащие ниже главной диагонали, не будут равны нулю.

Общие формулы прямого хода:

$$a_{kj}^{*} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$. Звездочкой отмечены элементы k-й строки с измененными значениями, которые будут подставлены в следующую формулу:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{*},$$

$i = k + 1, k + 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, k фиксировано в предыдущем выражении. Для определенности будем считать первый индекс – по строкам, второй – по столбцам. Чтобы уменьшить количество действий достаточно изменять значения элементов, находящихся выше главной диагонали.

2. *Обратный ход* решения СЛАУ методом Гаусса состоит в последовательном определении x_k, начиная с x_n, так как для последнего решение фактически получено:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_2 = \frac{a_{2,n+1}^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3 - \ldots - a_{2n}^{(1)} x_n}{a_{22}^{(1)}},$$

$$x_1 = \frac{a_{1,n+1} - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \ldots - a_{1n} x_n}{a_{11}}.$$

Общая формула обратного хода:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(a_{k,n+1}^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right),$$

где k полагается равным n, $n-1$, …, 2, 1.

Для численной реализации метода Гаусса наиболее оптимальной является следующая реализация:

1) для $k = 1, 2, \ldots, n$,
2) для $i = k+1, k+2, \ldots, n$:
3) $t_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$,
4) для $j = k+1, k+2, \ldots, n$:
5) $a_{ij} = a_{ij} - t_{ik} a_{kj}$.
6) $x_n = a_{n,n+1} / a_{nn}$,
7) для $k = i-1, i-2, \ldots, 2, 1$:
8) $x_k = \left(a_{k,n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j \right) \Big/ a_{kk}$.

Таким образом, вычисление корней x происходит за 2/3 n^3 арифметических действий.