АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

В практике известны 3 способа задания функции: аналитический, графический, табличный. В инженерной практике наиболее распространенным является случай, когда вид связи между параметрами X и Y неизвестен, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. Как правило, даже при известной зависимости $y = f(x)$, она настолько громоздка, что ее использование в практических расчетах затруднительно. Чаще всего эта связь представлена в виде таблицы, т.е. дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}(i = 1, 2, .., n)$. Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Часто эти значения можно получить лишь путем сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов. Таким образом, необходимо использовать имеющиеся табличные данные для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y = f(x)$ неизвестна. Задачи исследования в большинстве случаев требуют установить определенный вид функциональной зависимости между характеристиками изучаемого явления. Этой цели и служит задача о приближении функции. Т.е. задача о приближении (аппроксимации) функции состоит в том, чтобы данную функцию $f(x)$ приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$, значения которой в заданной области мало отличались от опытных данных – $f(x) \approx \varphi(x)$. Методы решения такой задачи относятся к категории *численных методов или методов вычислительной математики*. Один из способов аппроксимации функций – *интерполяция*. Он используется в тех случаях, когда основная информация о приближаемой функции дается в виде таблицы ее значений. В результате решения задачи *интерполяции* линия, соответствующая интерполирующей функции, будет обязательно проходить через все точки исходных данных. В этом случае точки являются *узлами интерполяции*.

При интерполяции от приближения требуется, чтобы оно имело ту же таблицу значений, что и приближаемая функция:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Это условие называется *условием интерполяции*. Функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям интерполяции, называется *интерполяционной*, а точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *узлами интерполяции*.

Чаще всего в качестве *интерполяционных функций* выбирают алгебраические многочлены, так как их значения вычисляются проще всего. Таким образом, решается следующая задача – определяется алгебраический многочлен n-й степени:

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \qquad (1)$$

удовлетворяющий условиям интерполяции:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Алгебраический многочлен, удовлетворяющий этим условиям, называется *интерполяционным многочленом*. Геометрический смысл интерполяции состоит в том, что графики функции $y = f(x)$ и интерполяционного многочлена $y = P_n(x)$ должны проходить через все табличные точки (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. На рис. 1, а эти точки выделены. Именно это условие должно обеспечить близость графиков этих функций на рассматриваемом отрезке, чтобы можно было использовать интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в качестве приближения для функции $f(x)$. Существуют различные формы записи интерполяционного многочлена: традиционная форма (1), многочлен Лагранжа и интерполяционная формула Ньютона. В данном учебном пособии они не рассматриваются.

Кроме построения *интерполяционных зависимостей*, можно использовать более общий вариант приближения функции – построение *аппроксимирующих зависимостей* на основе различных функциональных взаимосвязей между двумя рассматриваемыми величинами.

Приближенная функциональная зависимость, полученная на основании экспериментальных данных, называется *аппроксимирующей функцией или эмпирической формулой.*

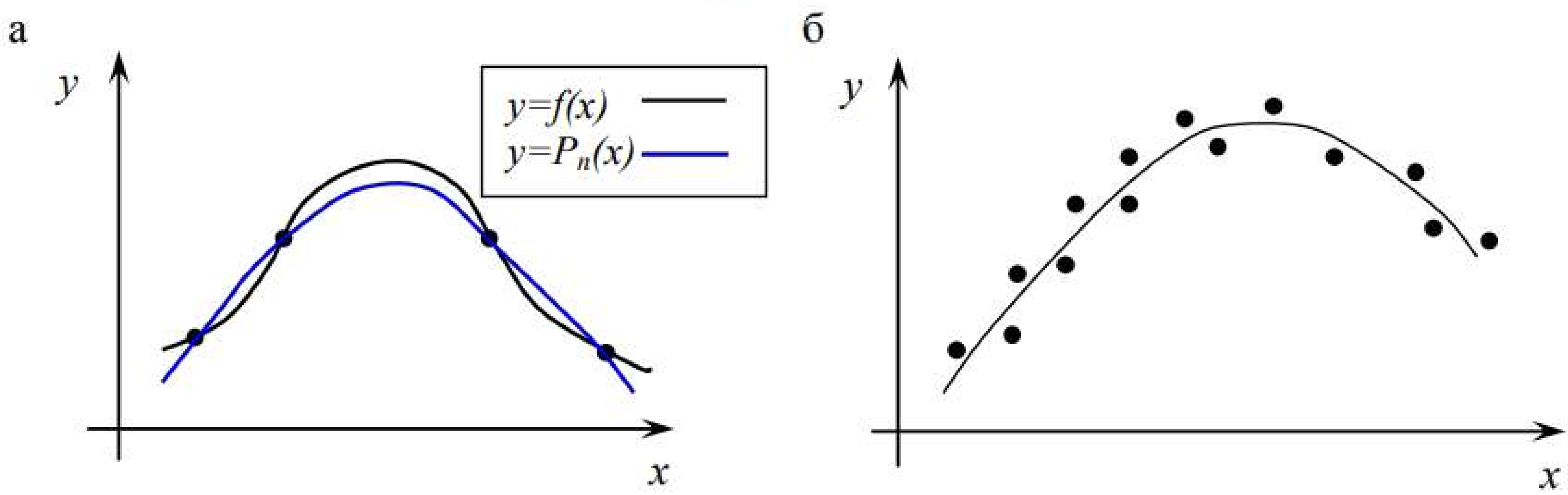

Рис. 1. Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующей линии (б) для точечно заданной функции

Построение эмпирической формулы состоит из 2 этапов:

1. Подбор общего вида формулы. Иногда он известен из физических соображений. Если характер зависимости неизвестен, то первоначально его выбирают геометрически: экспериментальные точки наносятся на график и примерно угадывается общий вид зависимости путем сравнения полученной кривой с графиками известных функций (многочлена, логарифмической, показательной функций и т.п.). Выбор вида эмпирической зависимости – наиболее сложная часть решения задачи, ибо класс известных аналитических зависимостей необъятен. Практика, однако, показывает, что при выборе аналитической зависимости достаточно ограничиться довольно узким кругом функций: линейные, степенные и показательные.

2. Определение значений параметров аппроксимирующей функции.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Будем считать, что вид аппроксимирующей функции или эмпирической формулы выбран и представлен в виде:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m),$$

где φ – известная функция, a_0, a_1, $a_2, \dots, a_m$ – неизвестные параметры.

Требуется определить такие параметры, при которых значения аппроксимирующей функции приблизительно совпадали со значениями исследуемой функции в точках x_i, т.е. $y_i \approx \varphi(x_i)$. Разность между этими значениями (отклонения) обозначим через ε_i.

Тогда $\varepsilon_i = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i, i = 1,2, \dots n$

Мерой отклонения многочлена $\varphi(x)$ от заданной функции $f(x)$ на множестве точек (x_i, y_i) является величина S, равная сумме квадратов разности между значениями многочлена и функции для всех точек $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \to \min .$$

Задача нахождения наилучших значений параметров $a_0, a_1, \dots, a_m$ сводится к некоторой минимизации отклонений ε_i. Существует несколько способов решения этой задачи. Рассмотрим один из наиболее используемых – метод наименьших квадратов. Параметры $a_0, a_1, \dots, a_m$ эмпирической формулы находятся из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$,. Так как здесь параметры выступают в роли независимых переменных функции S, то ее минимум найдем, приравнивая к нулю частные производные по этим переменным:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Полученные соотношения – система уравнений для определения $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Линейная аппроксимация

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы линейную функцию:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b.$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min.$$

Для нахождения a и b необходимо найти минимум функции $S(a,b)$. Необходимое условие существования минимума для функции S:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Упростим полученную систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad SY = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Получим систему уравнений для нахождения параметров a и b:

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY, \end{cases} \qquad (2)$$

из которой находим:

$$a = \frac{SXY \cdot n - SX \cdot SY}{SXX \cdot n - SX \cdot SX}, \quad b = \frac{SXX \cdot SY - SX \cdot SXY}{SXX \cdot n - SX \cdot SX}.$$