Пример. Уточнить решение нелинейного уравнения

$$x^3 - \frac{x^2 + x}{5} = 1{,}2$$

применив метод Мюллера на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$.

Решение. Чтобы запустить итерационный процесс по методу Мюллера необходимо задать три начальных точки. В качестве первой x_0 выбирается правая граница интервала, точка $b = 1{,}5$, а вторая и третья вычисляется с помощью выражения

$x_1 = x_0 - \varepsilon = 1{,}5 - 0{,}001 = 1{,}499$ и $x_2 = x_0 - 2\varepsilon = 1{,}5 - 0{,}002 = 1{,}498$.

В каждой точке вычисляется значение функции

$$f(1,5)=1,5^3-\frac{1,5^2+1,5}{5}-1,2=1,425,$$

$$f(1,499)=1,499^3-\frac{1,499^2+1,499}{5}-1,2=1{,}41905,$$

$$f(1,498)=1,498^3-\frac{1,498^2+1,498}{5}-1,2=1{,}41312.$$

Заданные точки и определенные в них значения функций применяются для определения вспомогательных переменных

$$q=\frac{1,498-1,499}{1,499-1,5}=1,$$

$$A=1\cdot 1{,}41312-1\cdot(1+1)\cdot 1{,}41905+1^2\cdot 1,425=8{,}594\text{e-}06,$$

$$B=(2\cdot 1+1)\cdot 1{,}41312-\left(1+1\right)^2\cdot 1{,}41905+1^2\cdot 1{,}425=-0{,}01187,$$

$$C=(1+1)\cdot 1{,}41312=2{,}82623.$$

Определенные значения используются для вычисления координаты новой точки x_3, определяющей место пересечения параболы с осью абсцисс

$$x_3=1{,}498-\frac{2\cdot 2{,}82623\cdot(1{,}498-1{,}499)}{-0{,}01187-\sqrt{\left(-0{,}01187\right)^2-4\cdot 8{,}594\text{e-}06\cdot 2{,}82623}}=$$

$$=1{,}19199.$$

Вычисленное значение x_3 сравнивается с x_2 и проверяется на достижение заданной точности

$$\left|x_2-x_1\right|\le\varepsilon \text{ или } \left|1{,}19199-1{,}498\right|=0{,}30601<0{,}001.$$

Требуемая точность после первой итерации не достигнута, следовательно, процедура уточнения корня должна быть продолжена.

На второй итерации проводится вычисление значения функции только во вновь найденной точке x_3

$$f(1{,}19199) = 1{,}19199^3 - \frac{1{,}19199^2 + 1{,}19199}{5} - 1{,}2 = -0{,}02894$$

и пересчет вспомогательных переменных

$$q = \frac{1{,}19199 - 1{,}498}{1{,}498 - 1{,}499} = 306{,}00945\,,$$

$$A = 306{,}00945 \cdot (-0{,}02894) - 306{,}00945 \cdot (1 + 306{,}00945) \cdot 1{,}41312 +$$

$$+ 306{,}00945^2 \cdot 1{,}41905 = 114{,}67914,$$

$$B = (2 \cdot 306{,}00945 + 1) \cdot (-0{,}02894) - (1 + 306{,}00945)^2 \cdot 1{,}41312 +$$

$$+306{,}00945^2 \cdot 1{,}41905 = -328{,}04507,$$

$$C = (1 + 306{,}00945) \cdot \left(-0{,}02894\right) = -8{,}88387\ .$$

Полученные значение подставляются в выражение для определения координаты следующей точки x_4 пересечения параболы с осью абсцисс

$$x_4 = 1{,}19199 - \frac{2 \cdot (-8{,}88387) \cdot (1{,}19199 - 1{,}498)}{-328{,}04507 - \sqrt{(-328{,}04507)^2 - 4 \cdot 114{,}67914 \cdot (-8{,}88387)}} =$$

$$= 1{,}20020.$$

Вновь найденная координата x_4 сравнивается с координатой, вычисленной на предыдущем шаге x_3, для оценки точности вычислений

$$|1{,}20020 - 1{,}19199| = 0{,}00821 < 0{,}001.$$

Видно, что погрешность уменьшилась почти в сорок раз, но требуемой точности достигнуть не получилось, значит, итерационный процесс следует продолжить. Процесс решения методом Мюллера сведен в табл. 15.

Анализируя данные в табл. 15 видно, что после третьей итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$\left|1,20000-1,20020\right|=0,00020<0,001.$$

Таблица 15 – Уточнение решения нелинейного уравнения методом Мюллера.

k	x_{k-2}	$f(x_{k-2})$	x_{k-1}	$f(x_{k-1})$
0	1,5	1,425	1,499	1,41905
1	1,499	1,41905	1,498	1,41312
2	1,498	1,41312	1,19199	-0,02894

k	x_k	$f(x_k)$	q	A
0	1,498	1,41312	1	8,594e-06
1	1,19199	-0,02894	306,00945	114,67914
2	1,20020	0,00073	-0,02683	0,00024

k	B	C	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	-0,01187	2,82623	1,19199	-0,02894
1	-328,04507	-8,88387	1,20020	0,00073
2	0,02911	0,00071	1,20000	4,786e-07

Кроме того, вычисленное значение функции в найденной точке, также существенно меньше заданной точности.

Ответ. Найдено численное решение методом Мюллера заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = \delta = 10^{-3}$ после третьей итерации и равно $x = 1{,}20000$.