Метод релаксации

Иногда исходную систему (2.1) не удается привести к виду (2.9), выполнив при этом условие сходимости метода. В этом случае можно воспользоваться методом релаксации. Этот метод основывается на соотношении

$$\frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} = -A\vec{x}^{(k)} + \vec{f},$$

откуда $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau\left(A\vec{x}^{(k)} - \vec{f}\right)$, где τ – *итерационный параметр*. Скалярные формулы метода релаксации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \tau\left(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1m}x_m^{(k)} - f_1\right)\\
&x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \tau\left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + \ldots + a_{2m}x_m^{(k)} - f_2\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_m^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \tau\left(a_{m1}x_1^{(k)} + a_{m2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{mm}x_m^{(k)} - f_m\right)
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Раскрыв скобки, можно привести (2.12) к виду (2.10), где коэффициенты матрицы $\boldsymbol{C}$ и вектор свободных членов $\vec{d}$ будут иметь вид: $C_{ij} = \begin{cases} 1-\tau\ a_{ij}, i=j \\ -\tau\ a_{ij},\ \ i \neq j \end{cases}$, $d_i = \tau\ f_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Подбором параметра τ можно добиться сходимости метода релаксации.

При использовании итерационных методов мы можем найти решение исходной СЛАУ (2.1) лишь приближенно с заданной точностью. Поэтому важной проблемой является вопрос о способе остановки итерационного процесса при достижении точности. Наиболее простой способ – это сравнение между собой соответствующих неизвестных с двух соседних итераций (k+1) и (k). Если максимальная из всех разностей становится меньше заданной точности ε, то итерационный процесс останавливается

$$\max_{1 \le i \le m}\left|x_i^k - x_i^{k+1}\right| < \varepsilon .$$

При использовании метода релаксации для остановки итерационного процесса можно применить способ, связанный с вычислением вектора невязки $\vec{r}$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j^k - f_i ,$$

показывающий, насколько полученное приближение $\vec{x}^k$ отличается от точного решения. Затем вычисляется норма вектора невязки

$$\left\|\vec{r}\right\| = \max_{1 \le i \le m} |\, r_i \,| .$$

Если она мала, т.е. $\left\|\vec{r}\right\| < \varepsilon$, то итерационный процесс останавливается.