Тема 4

Численное интегрирование

Основные понятия и определения

В инженерной практике всегда возникает необходимость вычисления определённых интегр. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ известна первообразная $F(x)$, интеграл может быть вычислен:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

В большинстве случаев не существует конечных формул выражающих определённых интеграл в виде комбинаций элементарн функций найти $F(x)$ не предоставляется возможным. В тех случаях когда возможно аналитически получаемая конечная формула сложна для вычисления, удобнее проинтегр

функцию численно, получив приближённое значение интеграла.

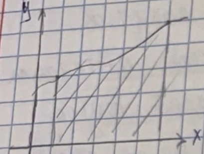
На практике подинтеграл функц может задаваться в виде таблицы. В этом случае аналит знач интеграла найти не получается возможным.

Численное интегрирование - область приближ методов вычисления определённых интегралов. Для числ интегр применяются следующ методы:

1) Аппроксимация методом Тэйлора
2) Построение квадратурных формул
2.1) Формулы Ньютона - Котеса
2.2) Метод Чебышева
2.3) Метод Лежандра - Гаусса
3) Монте - Карло

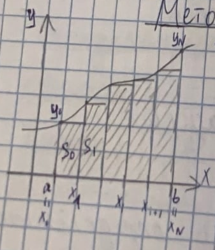
Пусть требуется вычислить определённый интеграл, где $f(x)$ подинтеграл функц. непрерывная на $[a; b]$

23

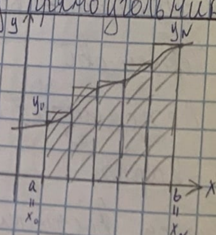


Для числ вычесления определ интеграла метод 1 и 2. интеграл разбивается на n равных частей длиною h ($h = \frac{b-a}{n}$). Длина h - шаг интегрирования. На каждом интервале приближённом находится S_i и суммируются. В основе методе Монте-Карло лежит статистический подход. В о приближении аппроксимация методом Тэйлора и все квадратурные формулы тождественны и представляют метод прямоугольника

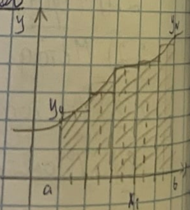
Метод прямоугольников



Лев П



Правые П



Средне П

Интервал разбивается на n равных частей длиною h. В качестве приближённого значения S_i принимается площадь прямоугольника ширина которого $= h$, а высота значению функции $y = f(x)$ на левом/правом/середине интервала. Локальная формула метода левых прямоугол.: $S_i \approx y_i h$

ПП: $S_i \approx y_{i+1} \cdot h$ СП: $S_i \approx y_{i+\frac{1}{2}} \cdot h$

Общая формула: $y = \sum_{i=0}^{N-1} S_i$

Погрешность метода ЛП: локальная погрешность $e_i \sim h^2$

ПП: $e_i \sim h^2$ СП: $e_i \sim h^3$

Глобальная погрешность $E = n \cdot e_i = \frac{b-a}{\cancel{h}} \cdot h^{\cancel{2}} = h^1$

ЛП: $E \sim h^1$ ПП: $E \sim h^1$ СП: $E \sim h^2$

Порядок погрешности E определяет порядок точности метода с помощью показателя при h, чем больше показатель, тем лучше.

Недостатки:

1) Высокая погрешность

2) Для высок точности нужно уменьшить шаг интегрирования

Достоинства:

1) Простота

Аппроксимация рядом Тэйлора

Интегральный ряд разбиваем на n равных частей длиною h

Если на этом шаге известно значение функции $y_i = f(x_i)$ и значение производной y'_i, то площадь этой полоски $S_i \simeq y_i h + \frac{y'_i}{2} h^2 + O(h^3)$.

Локальная погрешность соответствует $e_i \sim h^3$ $E \sim e_i \cdot n = h^2$. Порядок точности h^2

Для увелич. точности необходимо подключить старшие производные

Если известно $S_i \simeq y_i h + \frac{y'_i}{2} h^2 + \frac{y''_i}{6} h^3 + O(h^4)$

В общем случае $S_i = y_i h + \frac{y'_i}{2} h^2 + \frac{y''_i}{6} h^3 + \dots + \frac{y_i^{(k)}}{(k+1)!} h^{k+1} + O(h^{k+2})$. Чем больше кол-во производных тем более точный результат. Если учесть весь бесконечный ряд Тэйлор получим абсолютно точный результат. Если учитывается опр кол-во первых нескольких слагаемых, погрешность определяется первым отброшенным

Данная методика примен. для установления погрешности для любого другого метода из числен. интегр.

Недостатки:

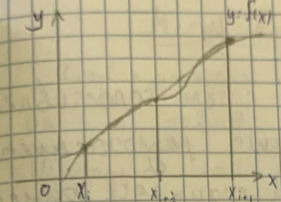
Необходим расчёт производных

Плюс:

Можно получить абсолют. точное значени

Построение формул Ньютона - Котеса

Суть: интервал интегр. разбивается на n равных отрезков длиною h $\left(= \frac{b-a}{n}\right)$. Для приближ. оценка S_i $y=f(x)$ на интервале $[x_i; x_{i+1}]$ аппроксимируется конечным полиномом степени m $y=f(x) \approx P_m(x) =$ $y_i + a_1(x-x_i) + a_2(x-x_i)^2 \ldots$



Для определ. коэфф. a_i:

$[x_i; x_{i+1}]$ дополн. разбивается на 5 одинаковых подинтервалов

$x_i;\ x_i+\frac{h}{m};\ x_i+\frac{2h}{m};\ \ldots;\ x_i+h$

Используя значени функции в узлах $x_i + jh/m$ $\quad j=1,\ldots,m$

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} y(x_i + h/m) = y_i + a_1\frac{h}{m} + a_2\left(\frac{h}{m}\right)^2 + \ldots + a_m\left(\frac{h}{m}\right)^m \\ y\left(x_i + 2\frac{h}{m}\right) = y_i + a_1\frac{2h}{m} + a_2\left(\frac{2h}{m}\right)^2 + \ldots + a_m\left(\frac{2h}{m}\right)^m \\ \ldots \\ y(x_i + h) = y_i + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_m h^m \end{cases}$$

Данная система позволяет определить все коэффициенты a_i. Непосредственно интегрирую полином $P_n(x)$ получаем весовые коэфф. для i-ой полоски

$$S_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} C_i y_i$$

Погрешность опред. путём сопоставлен результата с точным разложением в ряд Тэйлора. Если подинтегр функц представляет собой полином степени m квадратурная формула даст точное решение. Это позволя сформулир условие для опр коэфф C_i вес коэфф квадрат формулы определяются таким способом. ~~Таким~~ Полученная форма точно интегрируется. Данная задача подходит для любых m. Ограничен

Полиномы 0-ой степени приводят к виду прямоугольника

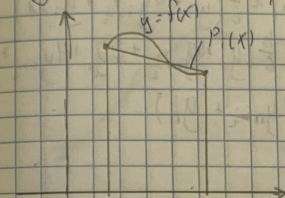
$m=1$ метод трапеций

$m=2$ метод парабол

$m=3$ Правило 3-ех восьмых

Метод Трапеций

Интервал интеграла разбиваем на n равных частей длиной h. Площадью i-ой полоски принимается площадь трапеции определённой значениями функции



Общ формула

$$I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$S_i \approx \frac{y_{i+1} + y_i}{2} h$$

~~Об~~ $e_i \sim h^3$ $E \sim h^2$

Недостатки:

Высокая погрешность

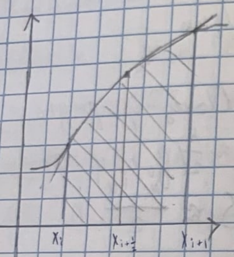
Для малой погрешности сильно уменьшать шаг

Плюсы:

Зная знач узлов можно решить

Метод парабол

Площадь i-ой полоски аппроксимируется полиномом 2-ой степени



$S_i \approx \frac{h}{6}(y_i + 4y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i+1})$

$I \approx \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{0+\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{1+\frac{1}{2}} + 2y_2 + \dots + 4y_{n-\frac{1}{2}} + y_n)$

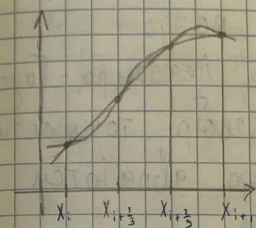
$E \sim h^4$

Характерные св-ва делают метод самым распространенным, так как незначительное усложнение по сравнению с методом трапеций приводит к значительному увеличению точности

Старшие формулы Ньютона - Котеса

$m = 3$

$[x_i, x_{i+1}]$ разбивается на 3 подинтервала



$I \approx \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \dots + 3y_{n-4} + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$

$m = 4$ $\quad I \approx \frac{2}{45}h(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5 + 12y_6 + \dots + 14y_{n-4} + 32y_{n-3} + 12y_{n-2} + 32y_{n-1} + 7y_n)$

$E \sim h^6$

Все формулы Ньютона - Котеса являются квадратурными. $I = \sum^{N}$

Узлы x_i которые расположены эквидистантно за счёт которых достигается точность интегрирования полинома степени N являются весовые коэф-ы C_i. Противоположность формуле Ньютона-Котеса в формуле Чебышева свободн параметрами являются узлы и общий весовой коэф-о $C_i = const$. В методе Лежандра-Гаусса (метод наивысшей алгебр точности) и узлы и вес коэф-о являются искомыми параметрами

Метод Чебышева

Для числ оценки интеграла интервал $[a; b]$ делится на n отрезков h-шаг. Для приближённой оценки этой площади строится квадратурная формула при этом $[x_i; x_{i+1}] \to [x_{i-1}; x_{i+1}]$

$$S_i = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m} C_i f(x_i)$$

в которой свободн параметрами явл координаты узлов x_i

$C_1 = C_2 = C_3 = const$

Требуется чтобы квадратурн формула точно интегрировала любой полином степени m

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} C_i Q(x_i) \quad Q_m(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_m x^m$$

Вводим в пространство полиномов базис степени m

$$x^0: \int_{-1}^{+1} x^0\,dx = \sum_{i=1}^{m} C_i x^0 \to 2 = Cm$$

$$x^1: \int_{-1}^{+1} x^1\,dx = \sum_{i=1}^{m} C_i x^1 \Rightarrow 0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

$$\ldots$$

$$x^m: \int_{-1}^{+1} x^m\,dx = \sum_{i=1}^{m} C_i x^m \to x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+(-1)^m}{m+1}$$

Квадратурная формула точно интегрирует любой полином степени m. Тогда и только тогда когда точно интегрирует любой элемент базиса. Это даёт для определ - системы из $m+1$ уравн

Частный случай $m=2$

$m=2 \Rightarrow C=1 \quad x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=-x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$m=3 \quad C=\frac{2}{3} \quad x_2=-x_3 \quad x_1=0$

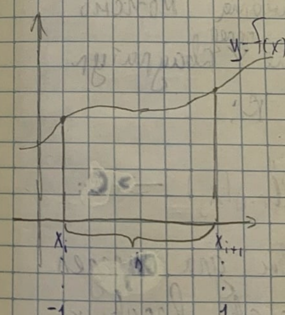
Координаты узлов всегда распологаются симметрично относительно 0, нечётная m имеет 1 узел $=0$. Погрешность метода Чебышева. m-точечный метод Чебыше точно интегрирует полином степени $n+1$. Аналог m-той формулы Ньютона Котеса для чётных m. 2-ух точный аналог метода парабол

1) Веществен решение существуе только для $m<8$ и $m=9$

При заметном усложнении по сравн с формулам Ньютона-Котеса точность не повысилась

Метод Лежандра-Гаусса

Для числ оценки интервал $[a;b]$ разбивается на n отрезков длиноно h. Для приближ оценки площадь i-ой полоски S_i строится квадратурн формула при этом интервал $[x_i;x_{i+1}]$ преобразуется в интерв $[-1;1]$



$$S_i=\sum_{j=1}^{m} c_j\, y(x_j)$$

В которой свободн параметром являются кордин узлов x_j и весовые множит c_j. Требуется чтобы квадратур. формула точно интегриров. любой полином от степени $2m-1$

$$\int_{-1}^{1} Q(2m-1)\,dx = \sum_{j=1}^{m} C_j\, Q(2m-1)(x_j);$$

$$Q_{(2m-1)}(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_{(m-1)} x^{(2m-1)}$$

Произвольный полином $Q_{(2m-1)}$ всегда может быть представлен в виде:

$$Q_{(2m-1)} = Q'_{(m-1)}(x)\,P_m(x) + Q''_{(m-1)}x$$

где $P_m(x)$ полином Лежандра степени m

В качестве m узлов квадра. формулы используется m действит. корней полинома Лежандра. Используя известные свойства данного полинома можно показать, что условие опред. квадратур. формулу сводится к:

$$\int_{-1}^{1} Q''_{(m-1)}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} C_j\, Q''_{(m-1)}(x_j) \longrightarrow C_j$$

которая дает m уравн для определ m оставшихся неизв. весовых коэф. (метод Чебышева)

Относит. весов коэф при заданных

координ x_j получаем ~~систему~~ СЛАУ решение для которой существует для любых m.

Пример:

$m=2$; $C_1 = C_2 = 1$; $x_{1(2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

В случае 2-ух узлов метод Лежандра-Гаусса и Чебышева тождественны

$m=3$; $x_{1,3} = \pm\sqrt{0,6}$ $x_2 = 0$; $C_{1,3} = \frac{5}{9}$ $C_2 = \frac{8}{9}$

Для m-точечного метод

$$C_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_n(x_i)]^2}$$

Достоинства:

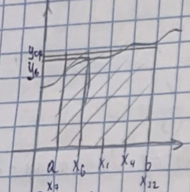
1) Точно проинтегр. полином степени $2m-1$ это максимум который может быть достигнут в m узлах подинтеграл функции. Поэтому метод называется методом наивысшей алгебраич точности

Метод Монте-Карло

Требуется вычисл $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Пусть на интерв $[a,b]$ задана послед

случ чисел x_i с заданном распредел вероятности $\varphi(x)$.



По матем ожидании величины y определ

$$M_y = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$$

Для вычисл исходн интегра необход рассмотреть матем. ожид. y/φ

$$M_{y/\varphi} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\varphi(x_i)}$$

В случае равномер распр $f(x) = const$ функция распр нормируется на 1

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = 1 \qquad Y = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y(x_i)$$

Погрешность опред объёмом выборки x_i и ~~соглас~~ равна $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad E \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

+:

1) Возможность остановить исчисл при любом n

2) Оказывается предпочт при вычисл

кратных интегралов особенно при наличии сложной области интегрир.

−:

1) Крайне низкая скорость уменьш погрешности $\quad E = \frac{1}{10} \quad n = 100$

Кратные интегралы

– интеграл по области в пространств от функции от нескольких переменных

$$\underbrace{\int\ldots\int}_{n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots\,dx_n$$

n – кратность интеграла

Метод повторного применения квадратурных формул

Пусть $n = 2$

$$Y = \iint\limits_{G} F(x_i, y_-)\,dx_1\,dx_2$$

$$G: \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$$

Вычисление такого интеграла сводится к двухкратному интегрир. Обозначим внутр интегр ~~Fext~~ $F(x)$

74

$$y = \int_a^b dx \int_c^d \overbrace{f(x_i; y)}^{F(x)} dy = \int_a^b F(x)\, dx \approx$$

И для полученного применим метод Симсона с шагом h по x

$$\approx \frac{h}{3}[F_0 + F_n + 2(F_2 + F_4 + \ldots + F_{n-2}) + 4(F_1 + F_3 + \ldots + F_{n-1})$$

$$F_i = F(x_i) = \int_c^d f(x_i; y)\, dy$$

Таким образом задача сводится к вычисл n+1 интегралов

+:

1) Наиболее простой ~~ме~~ метод приближ вычисл

2) Аналогично может быть вычислен интеграл размерности $n > 2$

−:

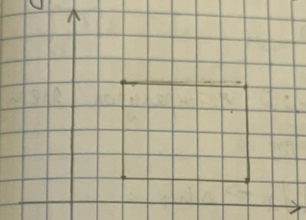
1) Метод применять удобно только для прямоуг областей

2) С ростом кратности резко возрастает объём вычислений

3) Увеличение точности за счёт

75

уменьшен шагов интегр заметно увеличивает объём вычисл

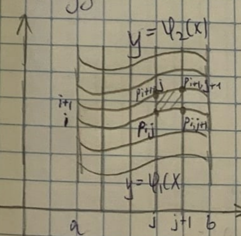


Кратные интегралы формула прямоугольника

Рассмотрим замкнутую область D ограничен по оси X [a; b] по оси Y

$y = \varphi_1(x)$; $y = \varphi_2(x)$ $\qquad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$

Разделим область D на n частей



линиями

$$y = \varphi_1(x) + \frac{j}{n}[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]$$

Разобьём [a; b] на m равных частей

В итоге получаем элементарную площадку

Область D разбивается на n·m криволинейных прямоугольников с вершинами

$P_{ij}; P_{i,j+1}; P_{i+1,j}; P_{i+1,j+1}$

Площадь криволинейной четырехугол элем площадки вычисл по

$$\Delta w_{ij} = \frac{1}{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx \to \Delta w_i$$

Таким образом 2-ной интеграл по области D: 1) $\iint_D f(x;y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=0}^{m-1} \Delta w_i \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}$

2) $\iint \dots z_{(i+1)j}$ 3) $\dots z_{i,(j+1)}$ 4) $\dots z_{(i+1),(j+1)}$

В случае прямоугольной области элементарная площадка = const

$$\Delta w = \frac{(b-a)(d-c)}{m \cdot n} \Rightarrow$$

1) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx \Delta w \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}$

2) $\dots$ $z_{(i+1),j}$

3) $\dots$ $z_{i,(j+1)}$

4) $\dots$ $z_{(i+1)(j+1)}$

Формула касательных

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx (b-a)(d-c)\, f(\bar{x}, \bar{y})$$

$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ $\bar{y} = \frac{d+c}{2}$

$$\dots \approx \frac{(b-a)(d-c)}{m \cdot n} \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{x}_i; \bar{y}_j)$$

$\bar{x}_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$

$\bar{y}_j = \frac{y_{j+1}+y_j}{2}$

58

Формула трапеций

Рассмотрим 2-ухкратный интеграл по области D

$$y = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Глобальная

1) $y = \Delta w \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$

$z_1 = f(a,c)$ $z_2 = f(b,c)$ $z_3 = f(a,d)$ $z_4 = (b,d)$

Разобъём область D на $m \cdot n$ равных прямоугольников

2) $y_{ij} \approx \frac{\Delta w}{4}(z_{i,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1})$

3) $y \approx \frac{\Delta w}{4}(S_0 + 2S_1 + 4S_2)$

$S_0 = z_{00} + z_{0n} + z_{mn} + z_{m0}$ – сумма ~~вершин~~ знач функ в вершинах прям

$S_1 = \sum_{i=1}^{m-1}(z_{i0} + z_{in}) + \sum_{j=1}^{n-1}(z_{0j} + z_{mj})$ – сумма знач функ в узлах на сторонах прямоугольника, исключая знач функц в вершинах

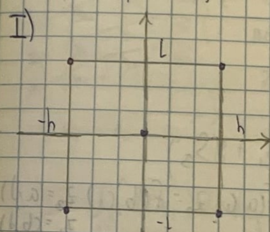
$S_2 = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}$ сумма знач функций в узлах лежащих внутри прямоугольника

Формула Симпсона

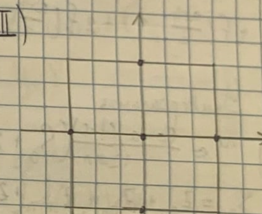
Рассмотрим прямоуг област D огранич следующими значениями

по оси X: $[-h;h]$ по оси Y: $[-l;l]$

I)



II)



$P_3(x,y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$

Строим полином

I вариант

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{hl}{3}[f(h,l) + f(-h,l) + f(h,-l) + f(-h,-l) + 8f(0,0)]$$

$$\text{II}.\ \int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{2hl}{3}\left[f(h,0)+f(-h,0)+f(0,l)+f(0,-l)+2f(0,0)\right]$$

Глобальная

$$\text{I)}\ y = \frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+8f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{d+c}{2}\right)\right]$$

$$\text{II)}\ y = \frac{(b-a)(d-c)}{6}\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)+2f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]$$

Универсальная

$$\text{I)}\ y \approx \frac{(b-a)(d-c)}{12mn}\left(S_0+2S_1+4S_1+8S_3\right)$$

$S_0 = Z_{00}+Z_{0n}+Z_{mn}+Z_{m0}$ $Z_1 = f(a,c)$ $Z_2 = f(b,c)$ $Z_3=(a,d)$
$Z_4=(b,d)$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m-1}(Z_{i0}+Z_{in})+\sum_{j=1}^{n-1}(Z_{0j}+Z_{mj})$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} Z_{ij}$$

$$S_3 = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{x}_i;\bar{y}_i) \qquad \bar{x}_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} \qquad \bar{y}_i = \frac{y_{j+1}+y_j}{2}$$

$$\text{III)}\ y \approx \frac{(b-a)(d-c)}{6mn}\left(S_1+S_2+4S_3\right)$$

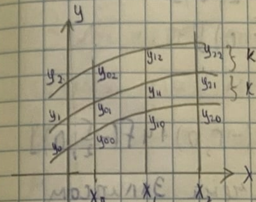
$$S_1 = \sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(a,\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)+f\left(b,\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)\right]+\sum_{i=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},c\right)+f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},d\right)\right]$$

$$S_2 = \sum\sum f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)$$

$$S_3 = \sum\sum\left[f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2};y_j\right)+f\left(x_i,\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)\right]$$

Пусть область D определяется:

$$D: \begin{cases} x_0 \le x \le x_2 \\ y_0(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$



Соответствующие знач по оси Z имеют

$$Z_{ij} = f(x_i, y_{ij})$$

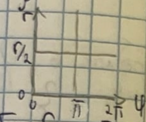
$$I = \iint_D f(x_i)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_2}dx\int_{y_0(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Применяя несколько раз формулу Симпсона получаем

$$I \approx \frac{x_2-x_0}{36}\left[(y_{02}+y_{00})(Z_{00}+4Z_{01}+Z_{02})+4(y_{12}-y_{10})(Z_{10}+4Z_{11}+Z_{12})+(y_{22}-y_{20})(Z_{20}+4Z_{21}+Z_{22})\right]$$

Если расст между $y_0(X)$, $y_1(X)$, $y_2(X)$ = const, то 1-ый множитель равен соответствующему знач K

Для расчёта области D может являться кругом, с радиусом r, в этом случае область можно отобразить в полярных координатах φ, ρ



В результате получаем формулу: 1) $I \approx \frac{S}{3}[f(r,0) + 2f(-\frac{r}{2}, 0)]$

2) $I \approx \frac{S}{3}[f(\frac{r}{2},0) + f(-r,0) + f(-\frac{r}{2}, 0)]$

$S = \pi r^2$

3) $I \approx \frac{S}{9}[f(r,0) + 2f(\frac{r}{2},0) + 2f(-r,0) + 4f(-\frac{r}{2},0)]$

Если область интегр ограничена эллипсом

$S = \pi ab$ $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$

Двойной интеграл равен:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho\, f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\, d\rho$$

1) $I \approx \frac{S}{3}[f(a,0) + 2f(-\frac{a}{2}, 0)]$

2) $I \approx \frac{S}{3}[f(\frac{a}{2},0) + f(-a,0) + f(-\frac{a}{2},0)]$

3) $I \approx \frac{S}{3}[f(a,0) + 2f(\frac{a}{2},0) + 2f(-a,0) + 4f(-\frac{a}{2},0)]$

$S = \pi ab$

Метод Люстерника - Диткина

~~Приммен~~ Для вычисл 2-ного интеграла применяются формулы:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1} C_i f(x_i, y_i)$$ C_i - коэфф точки $M_i(x_i, y_i)$

Выбирается так чтобы формула была точной для многочленов некоторой достат. высокой степени при min кол-ве точек M_i

Область D - единичный круг, центр в начале координат, то кубатурн формул Люстерника-Диткина имеет вид

$I = \pi[\frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)]$ $M_i: \rho_i = \frac{\sqrt{14}}{15}$ $\varphi_i = \frac{\pi}{3}i,\ i = 0,1,..5$

То есть M_i - вершины правильного шестиугол вписанного в окр радиусом $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Метод Монте-Карло

Пусть треб вычислить m-кратный интеграл по области D лежащий m-мерном едини кубе. Выбираем m равномерно распр на отрезке $(0;1)$ последоват случ чисел, тогда точки M_i можно рассматривать как случ равномер распредел в едени кубе пусть из общ числа N случ точек, n попали в область D, остальные $N-n$ оказались вне области D, тогда при достаточно большом кол-ве N точек формула:

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$$

Указанный способ можно применять к вычисл кратн интегралов и произвол области D, если существ замена перемен при которой новая обл интегр будет заключена m-мерном едениx кубе

Тема 5. Численное дифференцирование

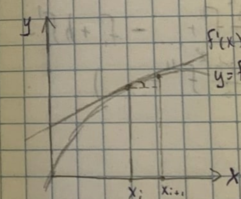
Дано $y = f(x)$ $\quad f'(x)$ - ?

Когда применяется:

1) Дифференцир таблично-заданной функции
2) Вычисление производн в процессе числен счёта (Метод Ньютона)
3) Упрощен аналитич заданной функции

Конечно-разностная аппроксимация

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



От непрерывн функций переходим к дискретной

$x \to x_i \quad f \to f_i$

$$\boxed{f'_R(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}} \qquad h = x_{i+1} - x_i$$

правая конечно-разностная формула

$$\boxed{f'_L(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}$$ левая конечно-разностная

$$\boxed{f'_C(x) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}}$$ средняя