21. Метод Рунге-Кутта второго порядка с полным шагом для решения дифференциальных уравнений.

Для уменьшения погрешности метода интегрирования ОДУ, использующего разложение искомого решения в ряд Тейлора

($y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + 0{,}5(x-x_0)^2y''(x_0) + \ldots..$), необходимо учитывать

большее количество членов ряда. Однако при этом возникает необходимость аппроксимации производных от правых частей ОДУ. Основная идея методов Рунге-Кутты заключается в том, что производные аппроксимируются через значения функции f(x,y) в точках на интервале $[x_o, x_o + h]$, которые выбираются из условия наибольшей близости алгоритма к ряду Тейлора. В зависимости от старшей степени К, с которой учитываются члены ряда, построены вычислительные схемы Рунге-Кутты разных порядков точности.

Так, например, для второго порядка получено однопараметрическое семейство схем вида

$y(x_0 + h) = y_0 + h[(1- £)f_0 + £f(x_0 + γh,\ y_0 +γf_0h) +0(h^3)$, (1)

где $o < £ < 1$ - свободный параметр

$f_0 = f(x_0\ ,y_0),\ γ = (2£)^{-1}$

В случае при £ = 1 от формулы (1) переходим к схеме

$$y(x_0 + h) = y_0 + hf(x_0 + h/2, y_0 + hf_0/2), \quad (2)$$

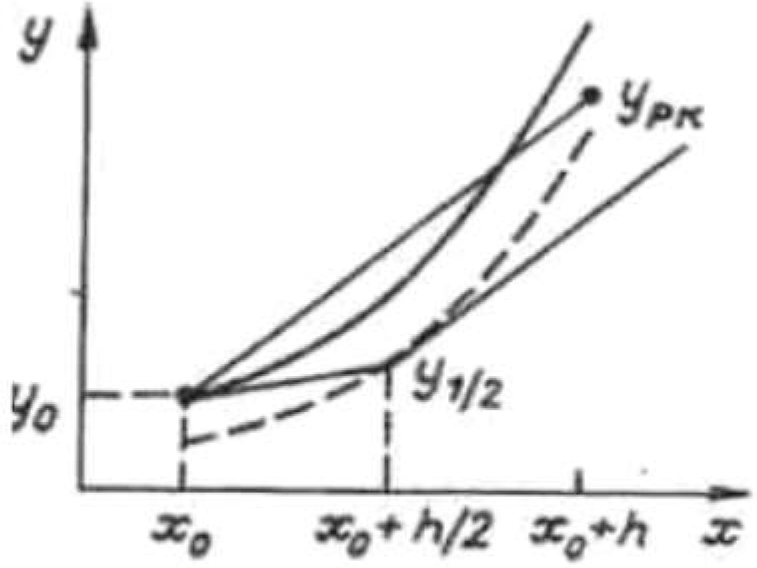

Рис. 6.4. Метод Рунге-Кутты второго порядка (£ = 1,0)

геометрический смысл которой отражает рис 1. Здесь при прогнозе определяется методом Эйлера решение в точке $x_0 + h/2$

$$y_{1/2} = y_0 + hf_0/2$$

а после вычисления наклона касательной к интегральной кривой в средней точке решение корректируется по этому наклону.

Формула (2) обобщается на системы ОДУ аналогично схеме с половинным шагом. По сравнению с программой метода Эйлера для сохранения начальных значений y_{k0} придется ввести дополнительный массив.

Схему (2) можно получить из метода Эйлера с помощью первой и второй формул Рунге без использования общего соотношения (1) для методов второго порядка.

22. Метод Рунге-Кутта второго порядка с половинным шагом для решения дифференциальных уравнений.

Для уменьшения погрешности метода интегрирования ОДУ, использующего разложение искомого решения в ряд Тейлора

($y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + 0{,}5(x-x_0)^2y''(x_0) + \ldots$), необходимо учитывать

большее количество членов ряда. Однако при этом возникает необходимость аппроксимации производных от правых частей ОДУ. Основная идея методов Рунге-Кутты заключается в том, что производные аппроксимируются через значения функции $f(x,y)$ в точках на интервале $[x_o, x_o + h]$, которые выбираются из условия наибольшей близости алгоритма к ряду Тейлора. В зависимости от старшей степени К, с которой учитываются члены ряда, построены вычислительные схемы Рунге-Кутты разных порядков точности.

Так, например, для второго порядка получено однопараметрическое семейство схем вида

$y(x_0 + h) = y_0 + h[(1- \pounds)f_0 + \pounds f(x_0 + \gamma h, y_0 + \gamma f_0 h) + 0(h^3)$, (1)

где о $< \pounds <$ 1 - свободный параметр

$f_0 = f(x_0 , y_0)$, $\gamma = (2\pounds)^{-1}$

В этом случае формула (1) приобретает вид

$y(x_0+h) = y_0+h[f_0+f(x_0+h,\ y_0 +hf_0)]/2$, (2) (6.15)

геометрическая интерпретация, которой представлена на рис. 6.3. Вначале вычисляется приближенное решение ОДУ в точке $x_o+ h$ по формуле Эйлера $y_э = y_o + hf_0$. Затем определяется наклон интегральной кривой в найденной точке $f(x_o + h,\ y_э)$, и после нахождения среднего наклона на шаге h находится уточненное значение

$y_{зк}= y(x_o+ h)$. Схемы подобного типа называют "прогноз-коррекция", что подразумевает грубое вычисление решения по формуле низкого порядка, а затем уточнение с учетом полученной информации о поведении интегральной кривой.

С целью экономии памяти при программировании алгоритма (2) , обобщенного на системы ОДУ, изменим его запись с учетом т ого, что

$y_0 = Y_э – hf_0$

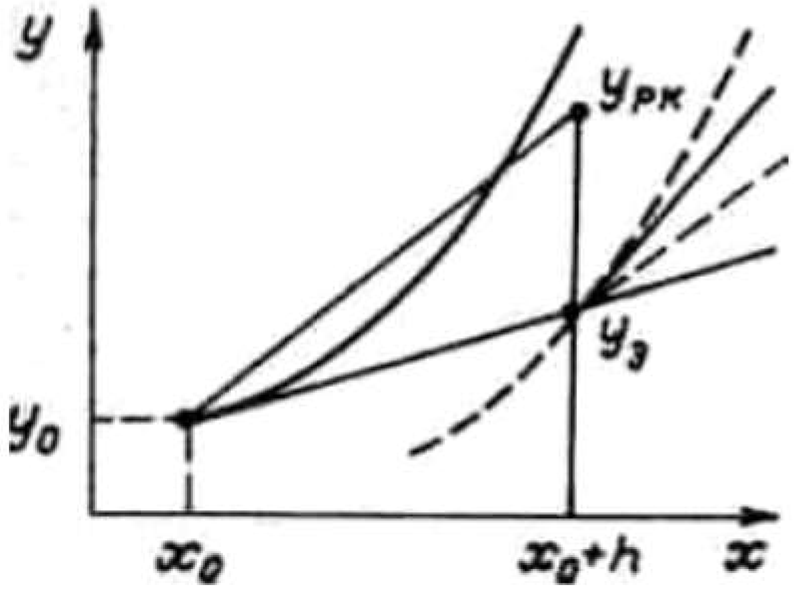

Рис. 6.3. Метод Рунге-Кутты второго порядка (£ = 0,5)

$$y_k(x_0 + h) = y_{kэ} + h[f_{k0} – f_k(x_0 + h\ ,\ y_{kэ})]/2\ , \quad (3)$$

где k - номер решения для системы ОДУ. Теперь не придется держать в памяти ЭВМ массив начальных значений y_{k0}, его можно "забыть" после вычисления значений эйлеровских приближений $y_{kЭ}$, размещаемых на месте массива y_{k0} . Хотя по сравнению с методом Эйлера схема (3) требует дополнительного массива для запоминания f_{k0} .