Пример. Уточнить решение нелинейного уравнения

$$x^3-\frac{x^2+x}{5}=1,2$$

с помощью метода простых итераций на интервале [1; 1,5] с точностью $\varepsilon=\delta=10^{-3}$.

Решение. Перед запуском итерационного процесса по методу простых итераций необходимо выполнить преобразование исходного уравнения к итеративному виду:

$$x=\phi(x).$$

Заданное уравнение возможно представить в итеративном виде тремя способами:

1) выражаем неизвестное x, стоящее в первой степени, тогда результирующее выражение имеем вид

$$x=5x^3-x^2-6;$$

2) выписываем неизвестное x из члена во второй степени и получаем следующее равенство

$$x = \sqrt{5x^3 - x - 6}\,;$$

3) записываем неизвестное x как кубический корень в следующем виде

$$x = \sqrt[3]{1,2 + \frac{x^2 + x}{5}}\,.$$

После приведения исходного уравнения к итеративному виду необходимо проверить сходимость итерационного процесса. Для выполнения этого требования необходимо найти выражение для первой производной и провести вычисление значений производных на границах локализованного интервала. Проведем данное исследование для правых частей каждого из трех представленных способов получения итеративного выражения.

1) Первая производная имеет вид

$$\phi'(x) = 15x^2 - 2x\ .$$

Проводя подстановку в качестве неизвестного x левую a и правую b границу интервалов локализации, получаем следующие значения:

$$\phi'(a) = 15 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 13\ ,$$

$$\phi'(b) = 15 \cdot 1{,}5^2 - 2 \cdot 1{,}5 = 30{,}75\ .$$

Как видно из представленных результатов условие сходимости не выполняется на обеих границах, следовательно, первый способ представления итеративного выражения является не применимым.

2) Вычисленная производная итеративной формулы для второго случая определяется как

$$\phi'(x) = \frac{15x^2 - 1}{2\sqrt{5x^3 - x - 6}}.$$

Выполняем проверку значений полученной производной на границах рассматриваемого интервала, получаем следующие значения:

$$\phi'(a) = \frac{15 \cdot 1^2 - 1}{2\sqrt{5 \cdot 1^3 - 1 - 6}} = \frac{7}{\sqrt{-2}},$$

$$\phi'(b) = \frac{15 \cdot 1{,}5^2 - 1{,}5}{2\sqrt{5 \cdot 1{,}5^3 - 1{,}5 - 6}} = 5{,}21.$$

Полученные результаты показывают, что условие сходимости не выполняется, таким образом, второй вариант итеративного выражения также не приводит к сходимости к искомому решению.

3) Производная правой части третьего итеративного выражения записывается следующим образом:

$$\phi'(x)=\frac{2x+1}{15\cdot\sqrt[3]{\left(1,2+\frac{x^2+x}{5}\right)^2}}.$$

В полученное выражение производится подстановка значений границ интервала:

$$\phi'(a)=\frac{2\cdot1+1}{15\cdot\sqrt[3]{\left(1,2+\frac{1^2+1}{5}\right)^2}}=0,146,$$

$$\phi'(b)=\frac{2\cdot1,5+1}{15\cdot\sqrt[3]{\left(1,2+\frac{1,5^2+1,5}{5}\right)^2}}=0,171.$$

Результаты расчетов показывают, что условие сходимости выполняется на двух границах, поэтому выражение, представленное третьим способом, позволяет приблизиться к решению с заданной точностью.

После получения итерационного выражения, удовлетворяющего условиям сходимости, переходим к расчету первого приближения. Для запуска итерационного процесса необходимо задать начальное значение x_0, по аналогии с предыдущими примерами полагаем $x_0 = b$ и вычисляем значение функции $\phi(x)$ в этой точке

$$\phi(1,5)=\sqrt[3]{1,2+\frac{1,5^2+1,5}{5}}=1,24933.$$

Вычисленное значение используются для определения координаты точки x_1, согласно выражения $x_1=\phi(x_0)$, то есть

$$x_1=1,24933.$$

Полученное значение x_1 сравнивается с x_0 и проверяется на достижение заданной точности

$$|1,24933-1,5|=0,25067<0,001.$$

Как видно, точность полученного результата после первой итерации не достигла требуемого значения, следовательно, итерационный процесс продолжается.

На второй итерации вычисляется значения функции в найденной точке x_1

$$\phi(1,24933) = \sqrt[3]{1,2 + \frac{1,24933^2 + 1,24933}{5}} = 1,20783.$$

Найденное значение функции является новым решением

$$x_2 = \phi(x_1) = 1,20783.$$

Повторно поводится процедура сравнения координаты найденной и предыдущей точки

$$\left|1,21364 - 1,26033\right| = 0,04669 < 0,001.$$

Как видно, погрешность уменьшилась, но требуемая точность не достигнута, т.е. итерационный процесс необходимо продолжить. Последующие итерации метода простых итераций представлены в табл. 14.

Анализируя данные в табл. 14 видно, что после пятой итерации получено решение, удовлетворяющее заданной точности

$$\left|1{,}20003-1{,}20019\right|=0{,}00016<0{,}001\,.$$

Отметим, что достаточное условие сходимости по значению исходной функции $f(x)$ было выполнено еще на предыдущей (четвертой) итерации.

Таблица 14 – Уточнение решения нелинейного уравнения методом простых итераций

k	x	$\varphi(x)$	$f(x)$
0	1,5	1,24933	1,425
1	1,24933	1,20783	0,18797
2	1,20783	1,20123	0,02870
3	1,20123	1,20019	0,00449
4	1,20019	1,20003	0,00071
5	1,20003	1,20001	0,00011

<u>Ответ.</u> Полученное численное решение заданного нелинейного уравнения методом простой итерации с точностью 10^{-3} было достигнуто после пятой итерации и равно $x = 1{,}20003$.