数值分析作业

CY.SP

2024 年 6 月 7 日

目录

1 第一周数值分析实验

1.1 第一节: 级数求和与二元函数绘图

题 1.1.1. *编程求* $\sum_{n=1}^{12} n!$ *的值.*

```
clc
clear
s=zeros(1,12);
for i=1:12
    %s(i)=factorial(i);%使用阶乘函数
    s(i)=prod(1:i);
end
result=sum(s);
disp(result);
```

结果: 522956313

题 1.1.2. *绘制二元函数图像.*

$$f(x,y)=x^4-2x^2y+x^2-2xy+2y^2+\frac{9}{2}x-4y+4 \quad (-2\le x\le 3,-1\le y\le 7).$$

```
clc
clear
x=linspace(-2,3,100);
y=linspace(-1,7,100);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X.^4-2.*X.^2.*Y+X.^2-2.*X.*Y+2.*Y
    .^2+9.*X./2-4.*Y+4;
fig=mesh(X,Y,Z);grid on;
```

结果:

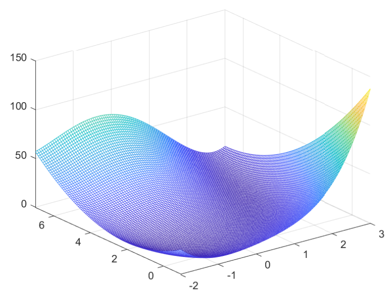


图 1: 运行结果

1.2 第二节: 积分递推公式

题 1.2.1. *计算* $I_n=e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx, (n=0,1,2,\cdots)$ *并估计误差*

方法 1: 利用递推公式 (A)

$$(A)\quad \begin{cases} I_n=1-nI_{n-1}, \quad n=1,2,\cdots,20 \\ I_0=1-e^{-1}\approx 0.6321. \end{cases}$$

方法 2: 利用递推公式 (B)

$$(B)\begin{cases}\widetilde{I_{20}}=?;\\ \widetilde{I}_{n-1}=\dfrac{1}{n}\left(1-\widetilde{I}_{n}\right), \qquad n=19,\cdots,9,8,\cdots 0.\end{cases}$$

```
%% 第一种递推方式
clc
clear
N=20;
IA=zeros(1,N);%积分值
EA=zeros(1,N);%误差估计
I0=0.6321;%by Mathematica I_0=0.632121...
EA(1)=5E-5;
IA(1)=1-I0;
for n=1:N-1
    IA(n+1)=1-(n+1)*IA(n);% k from 1 to 20
    EA(n+1)=n*EA(n);
end
disp(IA);
disp(EA);
%% Equation 第二种递推方式
clc
clear
N=20;
EB=zeros(1,N);%误差估计
IB=zeros(1,N);%积分值
IB(20)=0.0684;%by Mathematica I_{20}=0.0455449...
EB(20)=5E-2;
for n=N:-1:2
    IB(n-1)=1/n*(1-IB(n));% k from 1 to 20
    EB(n-1)=1/n*EB(n);
end
disp(IB);
disp(EB);
```

结果:

表 1: 运行结果

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IA	0.3679	0.2642	0.2074	0.1704	0.148	0.112	0.216	-0.728	7.552	-74.52
EA	5.00E-05	5.00E-05	0.0001	0.0003	0.0012	0.006	0.036	0.252	2.016	18.144
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
IA	820.72	-9847.64	128020.3	-1792283	26884253	-4.3E+08	7.31E+09	-1.3E+11	2.5E+12	-5E+13
EA	181.44	1995.84	23950.08	311351	4358915	65383718	1.05E+09	1.78E+10	3.2E+11	6.08E+12

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IB	0.367879	0.264241	0.207277	0.170893	0.145533	0.126802	0.112384	0.100932	0.091612	0.083877
EB	2.06E-20	4.11E-20	1.23E-19	4.93E-19	2.47E-18	1.48E-17	1.04E-16	8.29E-16	7.46E-15	7.46E-14
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
IB	0.077352	0.071773	0.066948	0.062732	0.059018	0.05572	0.052768	0.05018	0.04658	0.0684
EB	8.20E-13	9.84E-12	1.28E-10	1.79E-09	2.69E-08	4.30E-07	7.31E-06	0.000132	0.0025	0.05

题 1.2.2. 计算 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx, (n = 0, 1, 2, \cdots 20)$ 并估计误差.

```
%% 第一种递推方式
clc
clear
N=20;
IA=zeros(1,N);%积分值
EA=zeros(1,N);%误差值
I0=0.1823;%by Mathematica I_0=0.182322...
EA(1)=5E-6;
IA(1)=1-5*I0;
for n=1:N-1
    IA(n+1)=1/(n+1)-5*IA(n);% k from 1 to 20
    EA(n+1)=5*EA(n);
end
disp(IA);
disp(EA);
%% 第二种递推方式
clc
clear
N=20;
EB=zeros(1,N);%误差值
IB=zeros(1,N);%积分值
IB(20)=0.00799;%by Mathematica I_{20}=0.00799752...
EB(20)=5E-5;
for n=N:-1:2
    IB(n-1)=1/(5*n)-1/5*IB(n);% k from 1 to 20
    EB(n-1)=1/5*EB(n);
end
```

```
disp(IB);
disp(EB);
```

结果:

表 2: 运行结果

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IA	0.0885	0.0575	0.045833	0.020833	0.095833	-0.3125	1.705357	-8.40179	42.12004	-210.5
EA	5.00E-06	2.50E-05	0.000125	0.000625	0.003125	0.015625	0.078125	0.390625	1.953125	9.765625
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
IA	1052.592	-5262.88	26314.46	-131572	657861.2	-3289306	16446529	-8.2E+07	4.11E+08	-2.1E+09
EA	48.82813	244.1406	1220.703	6103.516	30517.58	152587.9	762939.5	3814697	19073486	95367432

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IB	0.088392	0.058039	0.043139	0.034306	0.028468	0.024325	0.021233	0.018837	0.016926	0.015368
EB	2.62E-18	1.31E-17	6.55E-17	3.28E-16	1.64E-15	8.19E-15	4.10E-14	2.05E-13	1.02E-12	5.12E-12
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
IB	0.014071	0.012977	0.01204	0.011229	0.010521	0.009896	0.009342	0.008846	0.008402	0.00799
EB	2.56E-11	1.28E-10	6.40E-10	3.20E-09	1.60E-08	8.00E-08	4.00E-07	2.00E-06	1.00E-05	5.00E-05

2 第二周数值分析实验

2.1 第一节: 插值 function

2.1.1 直接法

```
function y=Vslove(a,B) %slove Matrix AX=B
%a=matrix of 1\times n
%B=matrix of n\times 1
    syms x
    y=0;
    A=zeros(length(a),length(a));
    A=vander(a);
    X=zeros(length(B'),1);%定义X矩阵n\times 1 即为多项式系数
    X=inv(A)*B;
    for i=1:length(X')
        y=y+X(length(X')+1-i)*x^(i-1);
    end
    y=collect(y,x);%合并x项
    t=min(a):0.01:max(a);
    y1=matlabFunction(y);
    plot(t,y1(t));
    hold on
    plot(a,B,'ro');
end
```

2.1.2 Lagrange 法

```
function y=lagrangeslove(X,Y)
%X=matrix of 1\times n 各X坐标
%Y=matrix of 1\times n 相应的Y
    syms x
    s1=0;
    for i=1:length(X)
        t=1;
        for j=1:length(Y)
            if j~=i
                t=t*(x-X(j))/(X(i)-X(j));
            end
        end
```

```
        s1=s1+Y(i)*t;
    end
    y=collect(s1,x);%合并x项
    z=min(X):0.01:max(X);
    s2=matlabFunction(s1);
    plot(z,s2(z));
    hold on
    plot(X,Y,'ro');
end
```

2.2 第二节: 计算实例

题 2.2.1. 给出插值点

$$x=(0.25,0.3,0.39,0.45,0.53,0.66,0.72)^T,$$

$$y=(0.5,0.5477,0.6245,0.6708,0.7280,1.0254,0.9521)^T.$$

时的两种方法插值多项式表达式及对应的函数图像, 并与 *MATLAB* 拟合工具箱 *(cftool)* 进行比较.

2.2.1 直接法计算

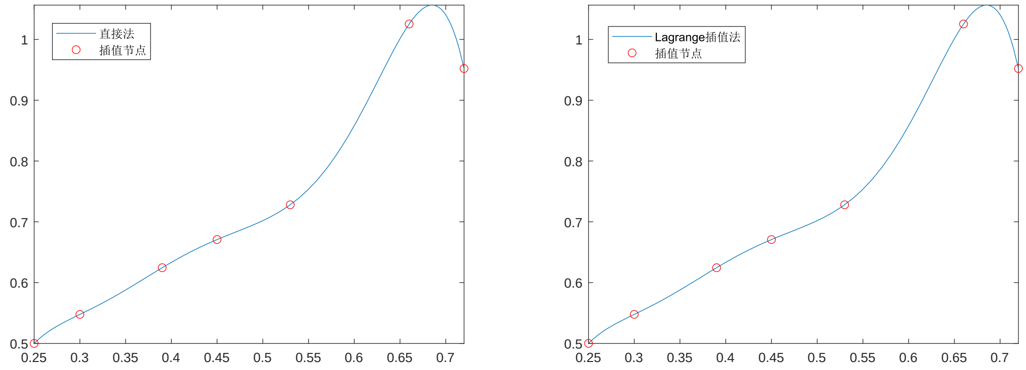
```
clc
clear
a=[0.25, 0.3, 0.39, 0.45, 0.53, 0.66, 0.72];
B=[0.5, 0.5477, 0.6245, 0.6708, 0.7280, 1.0254, 0.9521]';
y=Vslove(a,B);
```

结果: $y=-\frac{6036797614447613\,x^6}{2199023255552}+\frac{2000819460633247\,x^5}{274877906944}-\frac{4307287503018749\,x^4}{549755813888}+\frac{4823507311313907\,x^3}{1099511627776}-\frac{1483367792093851\,x^2}{1099511627776}+\frac{7639215406409353\,x}{35184372088832}-\frac{1947716212680825}{140737488355328}.$

2.2.2 Lagrange 法计算

```
clc
clear
a=[0.25, 0.3, 0.39, 0.45, 0.53, 0.66, 0.72];
B=[0.5, 0.5477, 0.6245, 0.6708, 0.7280, 1.0254, 0.9521];
y=lagrangeslove(a,B)
```

结果： $y = -\dfrac{5060842318750000\,x^6}{1843512183513} + \dfrac{4472937450287500\,x^5}{614504061171} - \dfrac{2063393234673125\,x^4}{263358883359} + \dfrac{10783205041239325\,x^3}{2458016244684} - \dfrac{2210764632642529\,x^2}{1638677496456} + \dfrac{4941513026732767\,x}{22759409673000} - \dfrac{163157510611}{11789386000}.$



(a) 直接法图像

(b) Lagrange 法图像

图 2: 运行结果

3 第三周数值分析实验

3.1 Newton 法均差表 function

```
function A=newtonmatrix(X,Y)
%均差表
    %X为所有x_i所构成的行向量
    %Y为所有y_i所构成的行向量
    n=length(X);
    A=[X',Y',zeros(n,n-1)];%l=n+1,h=n
    for l=3:n+1 %列
        for h=l-1:n %行
            A(h,l)=(A(h,l-1)-A(h-1,l-1))/(X(h)-X(h-l+2));
        end
    end
end
```

3.2 page32ex4 实例

```
clc
clear
syms x
X=[0.40 0.55 0.65 0.80 0.90 1.05];
Y=[0.41075 0.57815 0.69675 0.88811 1.02652 1.25382];
y=Y(1);
%非调用自定义函数法
n=length(X);
A=[X',Y',zeros(n,n-1)];%l=n+1,h=n
for l=3:n+1 %列
    for h=l-1:n %行
        A(h,l)=(A(h,l-1)-A(h-1,l-1))/(X(h)-X(h-l+2));
    end
end
disp(A);%均差表
%调用自定义函数法
%A=newtonmatrix(X,Y);%均差表
%代入求函数表达式
for h=2:length(X)
    y=y+A(h,h+1)*prod(x-X(1:h-1));
```

```
end
y=collect(y,x);%合并化简
disp(y);
%绘图
fplot(y,[0.35 1.10]);
hold on
plot(X,Y,'ro');
legend({'Newton法图像','插值节点'});
```

结果: $y=\frac{2702819642032443\,x^5}{9223372036854775808}+\frac{2792012692852253541\,x^4}{92233720368547758080}+\frac{456060272710172342613\,x^3}{3689348814741910323200}+\frac{218532157850334883771\,x^2}{7378697629483820646400}+\frac{913222701223677374461 43\,x}{92233720368547758080000}+\frac{146974433410736655459}{115292150460684697600000}.$

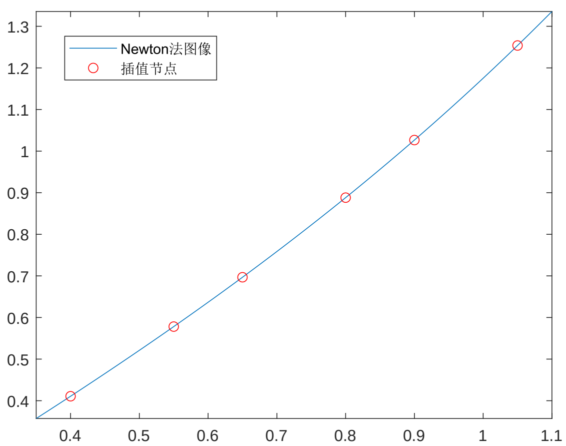


图 3: Newton 法结果

4 第四周数值分析实验

题 4.0.1. 自行选择节点，构造插值多项式，并估计 $\sqrt{2}, \sqrt{2.2}, \sqrt{2.5}$ 的值. 不得使用牛顿切线法; 不得涉及无理数运算; 有效数字位数不少于 5 位.

4.1 三点三次 Hermite 插值

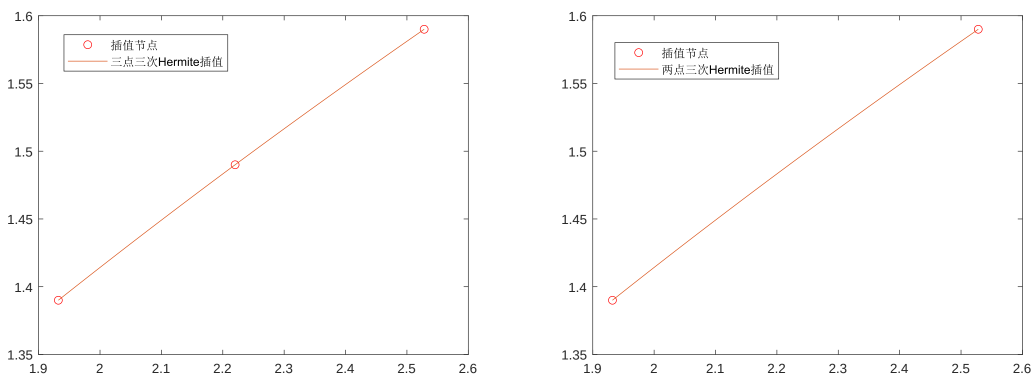
```
%% 三点三次Hermite插值方式
clc
clear
syms x a
X=[1.9321 2.2201 2.5281];%选择的插值节点
Y=sqrt(X);%Y=[1.39 1.49 1.59]
i=2;
DY_i=subs(diff(sqrt(x),1),x,X(i));
n=length(X);
y=Y(1);
A=[X',Y',zeros(n,n-1)];%均差表(l=n+1,h=n)
for l=3:n+1 %列
    for h=l-1:n %行
        A(h,l)=(A(h,l-1)-A(h-1,l-1))/(X(h)-X(h-l+2));
    end
end
for h=2:length(X)
    y=y+A(h,h+1)*prod(x-X(1:h-1));%前n-1项
end
y1=y+a*prod(x-X(1:n));
a1=solve(diff(y1,x)==DY_i,a);%符号运算求解
a2=subs(a1,x,X(i));%代值已知f'(x_i)求a
y2=y+a2*prod(x-X(1:n));
y=collect(y2,x);%化简
X2=[2 2.2 2.5];%估计点值
y3=vpa(subs(y,x,X2),5);
disp(y3);%估计点函数值
%绘图
plot(X,Y,'ro');
hold on
fplot(y,[min(X) max(X)]);
legend({'插值节点','三点三次Hermite插值'});
```

结果： [1.4142, 1.4832, 1.5811]

4.2 两点三次 Hermite 插值

```
%% 两点三次Hermite插值方式
clc
clear
syms x
X=[1.9321 2.5281];%选择的插值节点
Y=sqrt(X);%Y=[1.39 1.59]
DY_all=subs(diff(sqrt(x),1),x,X);
syms x
y=(1+2*(x-X(1))/(X(2)-X(1)))*((x-X(2))/(X(1)-X(2)))^2*Y(1)+...
  (1+2*(x-X(2))/(X(1)-X(2)))*((x-X(1))/(X(2)-X(1)))^2*Y(2)+...
  (x-X(1))*((x-X(2))/(X(1)-X(2)))^2*DY_all(1)+...
  (x-X(2))*((x-X(1))/(X(2)-X(1)))^2*DY_all(2);
y=collect(y);
X2=[2 2.2 2.5];%估计点值
y2=vpa(subs(y,x,X2),5);
disp(y2);%估计函数值
%绘图
plot(X,Y,'ro');
hold on
fplot(y,[min(X) max(X)]);
legend({'插值节点','两点三次Hermite插值'});
```

结果： [1.4142, 1.4833, 1.5811]



(a) 三点三次 Hermite 插值 (b) 两点三次 Hermite 插值

图 4: 运行结果

5 第六周数值分析实验

5.1 Bernstein 多项式

定义 5.1.1. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, 称

$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x), x\in[0,1]$$

为 f 的 n 次 *Bernstein* 多项式, 其中 $B_i^n(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$.

```
function y=bernstein_n(f,n)
%f为[0,1]区间上的连续函数
%n为Bernstein多项式的次数
syms x
y=0;
f1=matlabFunction(f);
for k=0:1:n
    B_in=nchoosek(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k);%Bernstein基底
    y=y+f1(k/n)*B_in;
end
y=collect(y);
end
```

题 5.1.1. 当 $f(x)=\cos 2\pi x$ 时, 分别给出 $n=3,5,7,9,10$ 时的 $B_n(f,x)$ 表达式, 并绘制 $f(x)$ 与 $B_n(f,x)$ 的图像.

```
clc;clear;
syms x
f=cos(2*pi*x);
N=[3 5 7 9 10];
fplot(f,[0 1]);
hold on
for n=1:5
    y=bernstein_n(f,N(n));%此处调用自定义函数
    %disp(y);
    latex(y)
    fplot(y,[0 1]);
    hold on
end
legend('$f$','$B_3(f,x)$','$B_5(f,x)$','$B_7(f,x)$','$B_9(f,x)$','$B_{10}(f,x)$','Interpreter','latex');
```

结果:

$$B_3(f,x)=\frac{9\,x^2}{2}-\frac{9\,x}{2}+1.$$

$$\begin{aligned}B_5(f,x)=&-\frac{17396110258977045\,x^4}{2251799813685248}+\frac{69584441035908185\,x^3}{4503599627370496}\\&-\frac{19232666484692435\,x^2}{4503599627370496}-\frac{3889888508315415\,x}{1125899906842624}+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_7(f,x)=&\frac{7\,x^7}{36028797018963968}+\frac{48511846945173955\,x^6}{18014398509481984}-\frac{291071081671043793\,x^5}{36028797018963968}\\&-\frac{39777928968693195\,x^4}{9007199254740992}+\frac{100417737650160665\,x^3}{4503599627370496}-\frac{22201645688437845\,x^2}{2251799813685248}\\&-\frac{11869558316351393\,x}{4503599627370496}+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_9(f,x)=&-\frac{63\,x^9}{2251799813685248}-\frac{3651501963845295\,x^8}{9007199254740992}+\frac{912875490961461\,x^7}{562949953421312}\\&+\frac{4844390630064489\,x^6}{1125899906842624}-\frac{41846600653847829\,x^5}{2251799813685248}+\frac{21573830928373101\,x^4}{4503599627370496}\\&+\frac{26215294559596821\,x^3}{1125899906842624}-\frac{29056921947987975\,x^2}{2251799813685248}-\frac{18965558858231295\,x}{9007199254740992}+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{10}(f,x)=&\frac{36617051598889\,x^{10}}{4503599627370496}-\frac{183085257994425\,x^9}{4503599627370496}-\frac{1745013596718105\,x^8}{2251799813685248}\\&+\frac{3764655080427825\,x^7}{1125899906842624}+\frac{16286793569370555\,x^6}{4503599627370496}-\frac{51167254958838837\,x^5}{2251799813685248}\\&+\frac{42639379132365645\,x^4}{4503599627370496}+\frac{25803329789012535\,x^3}{1125899906842624}-\frac{15656499233079345\,x^2}{1125899906842624}\\&-\frac{1075138741208855\,x}{562949953421312}+1.\end{aligned}$$

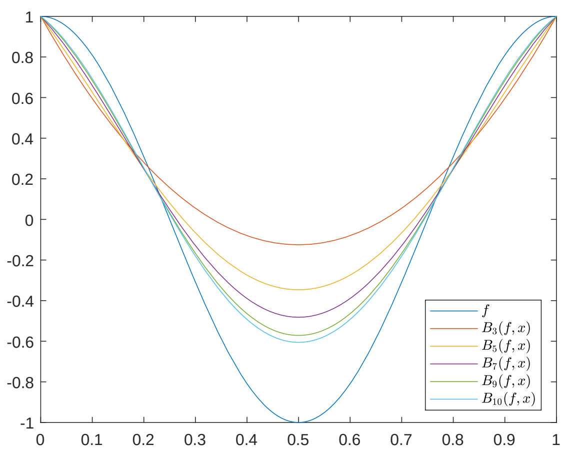


图 5: Bernstein 多项式图像

6 第七周数值分析实验

6.1 Gram-Schmidt 正交化

题 6.1.1. 编程实现幂函数使用施密特正交化方法生成正交多项式

施密特正交化: 只要给定 $[a,b]$ 上的权函数 $\rho(x)$, 由 $\{1, x, \cdots x^n, \cdots\}$ 利用逐个正交化立得正交多项式序列.

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1, \\
\varphi_1(x) &= x, \\
\varphi_2(x) &= x^2 - \frac{(x^2, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}\varphi_0(x) - \frac{(x^2, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\varphi_1(x), \\
\varphi_n(x) &= x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}\varphi_j(x), \quad n = 3, 4, \cdots .
\end{aligned}
$$

或利用递推公式:

$$
\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\,\varphi_n(x) - \beta_n \varphi_{n-1}(x), n = 0, 1, \cdots
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1, \varphi_{-1}(x) = 0, \\
&\alpha_n = \frac{(x\varphi_n(x), \varphi_n(x))}{(\varphi_n(x), \varphi_n(x))}, \beta_n = \frac{(\varphi_n(x), \varphi_n(x))}{(\varphi_{n-1}(x), \varphi_{n-1}(x))}, \\
&\text{这里}\ (x\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b x\varphi_n^2(x)\rho(x)dx.
\end{aligned}
$$

```
function s=Schmidt1(a,b,rho,n)
%Schmidt正交化方法
syms x
P=[1,x];
for i=2:n
    P=[P,x^i];
end
for i=2:n
    sum=0;
    for k=1:i
        sum=sum+P(k)*int(rho*x^i*P(k),a,b)/int(rho*P(k)*P(k),a,b);
    end
    P(i+1)=x^i-sum;
end
s=P;
%示例Legendre多项式
%Schmidt1(-1,1,1,6)
```

6.2 正交化-Legendre 多项式

```
(* ::Package:: *)

a=-1;b=1;rho=1;n=7;
P=Table[x^k,{k,0,n}];
For[i=3,i<=n+1,i++,
  P[[i]]=x^(i-1)-Sum[(Integrate[rho x^(i-1) P[[j]],{x,a,b}])/(Integrate
      [rho P[[j]]^2,{x,a,b}])P[[j]],{j,1,i-1}]
  ];
P
```

结果： (Mathematica)

```
In[1]:= a = - 1; b = 1; rho = 1; n = 7;
        P = Table[x^k, {k, 0, n}];
            表格
        For[i = 3, i ≤ n + 1, i ++,
        For循环
          P⟦i⟧ = x^(i - 1) - Sum[(Integrate[rho x^(i - 1) P⟦j⟧, {x, a, b}]) /
                             求和  积分
             (Integrate[rho P⟦j⟧^2, {x, a, b}]) P⟦j⟧, {j, 1, i - 1}]
              积分
          ];
        P
```

Out[4]=
$$\left\{1,\ x,\ -\frac{1}{3}+x^2,\ -\frac{3x}{5}+x^3,\ -\frac{1}{5}+x^4-\frac{6}{7}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right),\ -\frac{3x}{7}+x^5-\frac{10}{9}\left(-\frac{3x}{5}+x^3\right),\ -\frac{1}{7}+x^6-\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)-\frac{15}{11}\left(-\frac{1}{5}+x^4-\frac{6}{7}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)\right),\ -\frac{x}{3}+x^7-\frac{35}{33}\left(-\frac{3x}{5}+x^3\right)-\frac{21}{13}\left(-\frac{3x}{7}+x^5-\frac{10}{9}\left(-\frac{3x}{5}+x^3\right)\right)\right\}$$

图 6: Legendre

6.3 正交化-Chebyshev 多项式

```
(* ::Package:: *)

a=-1;b=1;rho=1/Sqrt[1-x^2];n=7;
P=Table[x^k,{k,0,n}];
For[i=3,i<=n+1,i++,
  P[[i]]=x^(i-1)-Sum[(Integrate[rho x^(i-1) P[[j]],{x,a,b}])/(Integrate
      [rho P[[j]]^2,{x,a,b}])P[[j]],{j,1,i-1}]
  ];
P
```

结果： (Mathematica)

```
In[1]:= a = - 1; b = 1; rho = 1 / Sqrt[1 - x^2] ; n = 7;
        P = Table[x^k, {k, 0, n}] ;
        For[i = 3, i ≤ n + 1, i ++,
            P[[i]] = x^(i - 1) - Sum[(Integrate[rho x^(i - 1) P[[j]], {x, a, b}]) /
              (Integrate[rho P[[j]]^2, {x, a, b}]) P[[j]], {j, 1, i - 1}]
            ];
        P
```

Out[4]=~ $1,\ x,\ -\frac{1}{2}+x^2,\ -\frac{3x}{4}+x^3,\ \frac{1}{8}-x^2+x^4,\ -\frac{5x}{8}+x^5-\frac{5}{4}\left(-\frac{3x}{4}+x^3\right),\ -\frac{5}{16}+x^6-\frac{15}{16}\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{8}-x^2+x^4\right),\ -\frac{35x}{64}+x^7-\frac{21}{16}\left(-\frac{3x}{4}+x^3\right)-\frac{7}{4}\left(-\frac{5x}{8}+x^5-\frac{5}{4}\left(-\frac{3x}{4}+x^3\right)\right)$

图 7: Chebyshev

6.4 递推法-Legendre 多项式

```
function y=legendremap(n)
%递推公式法求Legendre多项式
syms x;
P0=1;
P1=x;
for i=1:n-1
    P_idelete1=P0;
    P_i=P1;
    P_iadd1=(2*i+1)/(i+1).*x*P_i-i/(i+1)*P_idelete1;
    P0=P_i;
    P1=P_iadd1;
end
if n==0
    y=1;
elseif n==1
    y=x;
else
    y=collect(P_iadd1);
end
end
%示例
%legendremap(6)
```

7 第八周数值分析实验

7.1 Chebyshev 多项式零点插值

题 7.1.1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，在 $[-5,5]$ 上分别利用 $T_{11}(x),T_{15}(x),T_{21}(x)$ 的零点作为插值点，构造 10 次，14 次，20 次插值多项式 $L_{10}(x),L_{14}(x),L_{20}(x)$，并作图表示；此外，作出误差曲线 $f(x)-L_{10}(x),f(x)-L_{14}(x),f(x)-L_{20}(x)$.

```
clc;clear
syms x
f=1/(1+x^2);f1=matlabFunction(f);
a=-5;b=5;N=[11 15 21];X=zeros(length(N),max(N));
for i=1:length(N)-1
    Y=[x,x^(i)];
end
for i=1:length(N)
    for j=1:N(i)
        X(i,j)=(b-a)/2*cos((2*(j-1)+1)/(2*N(i))*pi)+(a+b)/2;
    end
end
for i=1:length(N)
    P=X(i,1:N(i));R=f1(P);
    %Y(i)=lagrangeslove(P,R);%第二周作业
    s1=0;
    for l=1:length(P)
        t=1;
        for j=1:length(R)
            if j~=l
                t=t*(x-P(j))/(P(l)-P(j));
            end
        end
        s1=s1+R(l)*t;
    end
    Y(i)=collect(s1,x);latex(vpa(Y(i),5))
    % 绘图
    fplot(Y(i));%Lagrange插值多项式图像
    % fplot(f-Y(i));%误差曲线
    hold on
end
legend({'$L_{10}(x)$','$L_{14}(x)$','$L_{20}(x)$'},'Interpreter','latex'
```

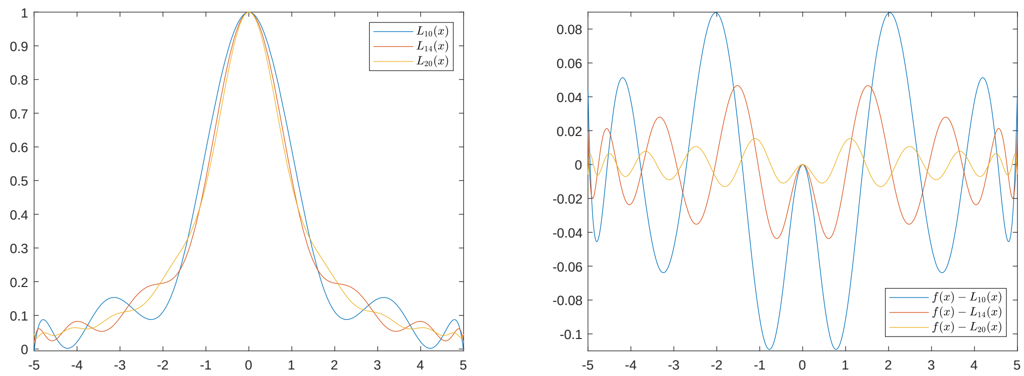
```
    );
% legend({'$f(x)-L_{10}(x)$','$f(x)-L_{14}(x)$','$f(x)-L_{20}(x)$'},'
    Interpreter','latex');
```

结果:

$$
\begin{aligned}
L_{10}(x) \approx & -4.7752e-6\,x^{10}+1.0795e-20\,x^{9}+0.00033307\,x^{8}-6.2457e-19\,x^{7}\\
&-0.0085405\,x^{6}+1.1751e-17\,x^{5}+0.098309\,x^{4}-7.3764e-17\,x^{3}-0.49906\,x^{2}\\
&+4.8306e-17\,x+1.0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{14}(x) \approx & -5.466e-8\,x^{14}+2.5422e-23\,x^{13}+5.179e-6\,x^{12}-0.00019734\,x^{10}\\
&+2.2204e-16\,x^{9}+0.0038672\,x^{8}-0.041399\,x^{6}+0.23844\,x^{4}+5.6843e-14\,x^{3}\\
&-0.69456\,x^{2}-1.1369e-13\,x+1.0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{20}(x) \approx & 6.7807e-11\,x^{20}+4.8908e-26\,x^{19}-8.9674e-9\,x^{18}-1.3553e-20\,x^{17}\\
&+5.0957e-7\,x^{16}-1.301e-18\,x^{15}-0.000016269\,x^{14}+2.7756e-17\,x^{13}\\
&+0.00032046\,x^{12}+1.1102e-15\,x^{11}-0.0040277\,x^{10}+0.032347\,x^{8}\\
&-1.4211e-14\,x^{7}-0.16239\,x^{6}+1.5632e-13\,x^{5}+0.49061\,x^{4}-0.87049\,x^{2}+1.0.
\end{aligned}
$$



(a) Lagrange 插值多项式图像　　(b) 误差曲线 $f(x)-L_n(x)$

图 8: 结果图示

7.2 最佳一致逼近与最佳平方逼近

题 7.2.1. 设 $f(x)=2x^4-3x^3+2x-1$, 绘制 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式 $P_3(x)$, 二次最佳平方逼近多项式 $S_2(x)$, 伯恩斯坦多项式 $B_1(f,x), B_2(f,x), B_3(f,x)$.

7.2.1 最佳一致逼近

```
clc;clear;
syms x t
a=0;b=1;
f=2*x^4-3*x^3+2*x-1;f1=matlabFunction(f);
%求解Berstein多项式
Y=[x x x];%初始化定义Berstein多项式
for i=1:3
    y=0;
    for k=0:1:i
        B_in=nchoosek(i,k)*x^k*(1-x)^(i-k);%Bernstein基底(第六周作业)
        y=y+f1(k/i)*B_in;
        Y(i)=collect(y);
    end
    latex(Y(i))
    fplot(Y,[a b]);
end
hold on;fplot(f,[a b]);
%求解三次最佳一致逼近多项式P_3(x)=f(x)-a_n*T'_4(x)
T_4=(8*t^4-8*t^2+1)/(2^3);%首一
x1=((b-a)*t+a+b)/2;
f2=collect(subs(f,x1),t);%t\in [-1,1]
c=coeffs(f2);
P_3=f2-c(end)*T_4;
t=(2*x-a-b)/(b-a);P=subs(P_3,t);latex(P)
hold on;fplot(P,[a b]);
legend({'$B_1(f,x)$','$B_2(f,x)$','$B_3(f,x)$','$f(x)$','$P_3^*(x)$'},'
    Interpreter','latex');
```

结果:

$$B_1(f,x) = x - 1.$$

$$B_2(f,x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3\,x}{2} - 1.$$

$$B_3(f,x) = \frac{2\,x^3}{9} - \frac{26\,x^2}{27} + \frac{47\,x}{27} - 1.$$

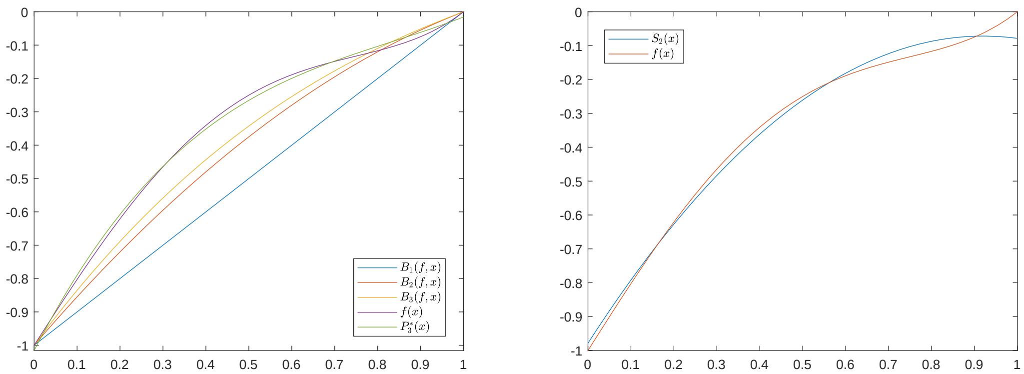
$$P_3(x) = \frac{3\,x}{4} - \frac{(2\,x-1)^2}{4} + \frac{(2\,x-1)^3}{8} - \frac{41}{64}.$$

7.2.2 最佳平方逼近

```
clc;clear;
syms x t;
a=0;b=1;
f=2*x^4-3*x^3+2*x-1;
x1=(b-a)/2*t+(b+a)/2;
f1=subs(f,x1);S=0;
%直接定义Legendre多项式
L=[1 t (3*t^2-1)/2 (5*t^3-3*t)/2];
for n=0:2
    S=(2*n+1)/2*int(f1*L(n+1),-1,1)*L(n+1)+S;
end
% 递推函数法求Legendre多项式
% for n=0:2
%     S=(2*n+1)/2*int(f1*legendremap(n),-1,1)*legendremap(n)+S;
% end
t=(2*x-a-b)/(b-a);
S=subs(S,t);S=collect(S,x);latex(S)
fplot(S,[a b]);hold on;fplot(f,[a b]);
legend({'$S_2(x)$','$f(x)$'},'Interpreter','latex');
```

结果:

$$S_2(x) = -\frac{15\,x^2}{14} + \frac{69\,x}{35} - \frac{137}{140}.$$



(a) Berstein 多项式及 $P_3(x)$ 图像　　(b) 二次最佳平方逼近 $S_2(x)$

图 9: 结果图示

8 第九周数值分析实验

8.1 正交函数族最佳平方逼近

题 8.1.1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}, x\in[-1,1]$，利用勒让德正交多项式族，分别构造 3 次，6 次，10 次最佳平方逼近多项式，并绘图与 $f(x)$ 比较.

```
function y=legendremap(n)
%递推公式法
syms x;
P0=1;
P1=x;
for i=1:n-1
    P_idelete1=P0;
    P_i=P1;
    P_iadd1=(2*i+1)/(i+1).*x*P_i-i/(i+1)*P_idelete1;
    P0=P_i;
    P1=P_iadd1;
end
if n==0
    y=1;
elseif n==1
    y=x;
else
    y=collect(P_iadd1);
end
end
```

```
clc;clear
syms x
f=1/(1+25*x^2);
N=[3 6 10];
S=[x x x];
for i=1:3
    s=0;
    for j=0:N(i)
        s=s+int(legendremap(j)*f,-1,1)*legendremap(j)*(2*j+1)/2;%自定义函数legendremap第七周作业
    end
    S(i)=collect(s,x);latex(S(i))
```

```
    fplot(S(i),[-1,1]);hold on
end
hold on
fplot(f,[-1 1]);
legend({'$S_3^*$','$S_6^*$','$S_{10}^*$','$f(x)$'},'Interpreter','latex'
    );
```

结果:

$$S_3(x) = \left(\frac{9}{20} - \frac{21\,\mathrm{atan}\,(5)}{25}\right) x^2 + \frac{12\,\mathrm{atan}\,(5)}{25} - \frac{3}{20}.$$

$$\begin{aligned} S_6(x) = &\left(\frac{6579573}{250000} - \frac{28501473\,\mathrm{atan}\,(5)}{1250000}\right) x^6 + \left(\frac{1102563\,\mathrm{atan}\,(5)}{31250} - \frac{1988679}{50000}\right) x^4 \\ &+ \left(\frac{787143}{50000} - \frac{3698793\,\mathrm{atan}\,(5)}{250000}\right) x^2 + \frac{166579\,\mathrm{atan}\,(5)}{125000} - \frac{52633}{50000}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{10}(x) = &\left(\frac{15053862021341}{15000000000} - \frac{37844796458469\,\mathrm{atan}\,(5)}{50000000000}\right) x^{10} + \left(\frac{4806364476771\,\mathrm{atan}\,(5)}{2500000000} - \right. \\ &\left.\frac{4448386331961}{1750000000}\right) x^8 + \left(\frac{1145902042857}{500000000} - \frac{8707875715539\,\mathrm{atan}\,(5)}{5000000000}\right) x^6 \\ &+ \left(\frac{1668177980469\,\mathrm{atan}\,(5)}{2500000000} - \frac{217491363947}{250000000}\right) x^4 + \left(\frac{123339641139}{1000000000} - \right. \\ &\left.\frac{970103687553\,\mathrm{atan}\,(5)}{10000000000}\right) x^2 + \frac{19197012681\,\mathrm{atan}\,(5)}{6250000000} - \frac{1037189439}{312500000}. \end{aligned}$$

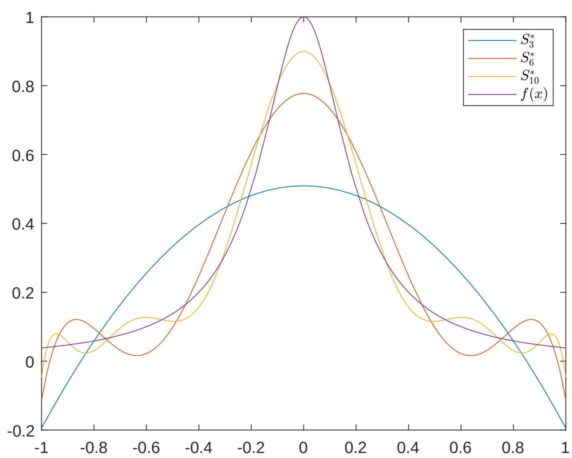


图 10: 最佳平方逼近

8.2 最小二乘拟合

题 8.2.1. 实验数据如下

x_i	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.3	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

(1) 确定法方程组，并求 2 次及 3 次拟合多项式函数 $s = s(x)$;

(2) 与 MATLAB 拟合工具箱 cftool 对比.

```
%% base {1,x,x^2}
clc;clear;
G=zeros(3,3);
syms x
B=[1 x x^2];
X=[-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.3 -0.1 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
Y=[0 1.27 2.16 2.86 3.44 3.87 4.15 4.37 4.51 4.58 4.62 4.64];
%Gram Matrix
for i=2:3
    f1=matlabFunction(B(i));
    for j=2:3
        f2=matlabFunction(B(j));
        G(i,j)=f1(X)*f2(X)';
    end
end
for j=2:3
    f3=matlabFunction(B(j));
    G(1,j)=sum(f3(X));
end
G(1,1)=length(X);
for j=2:3
    G(j,1)=G(1,j);
end
D=zeros(3,1);
for i=1:3
    if i==1
        D(i,1)=sum(Y);
    else
        f4=matlabFunction(B(i));
        D(i,1)=f4(X)*Y';
    end
end
A=G\D;
y=0;
for i=1:length(A)
```

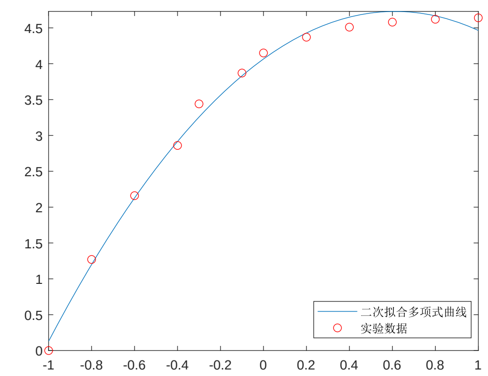
```
    y=y+A(i)*x^(i-1);
end
y=collect(y,x);latex(y)
fplot(y,[min(X) max(X)]);
hold on
plot(X,Y,'ro');
legend({'二次拟合多项式曲线','实验数据'});
%% base {1,x,x^2,x^3}
clc;clear;
G=zeros(4,4);
syms x
B=[1 x x^2 x^3];
X=[-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.3 -0.1 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
Y=[0 1.27 2.16 2.86 3.44 3.87 4.15 4.37 4.51 4.58 4.62 4.64];
%Gram Matrix
for i=2:4
    f1=matlabFunction(B(i));
    for j=2:4
        f2=matlabFunction(B(j));
        G(i,j)=f1(X)*f2(X)';
    end
end
for j=2:4
    f3=matlabFunction(B(j));
    G(1,j)=sum(f3(X));
end
G(1,1)=length(X);
for j=2:4
    G(j,1)=G(1,j);
end
D=zeros(4,1);
for i=1:4
    if i==1
        D(i,1)=sum(Y);
    else
        f4=matlabFunction(B(i));
        D(i,1)=f4(X)*Y';
    end
end
```

```
A=G\D;
y=0;
for i=1:length(A)
    y=y+A(i)*x^(i-1);
end
y=collect(y,x);latex(y)
fplot(y,[min(X) max(X)]);
hold on
plot(X,Y,'ro');
legend({'三次拟合多项式曲线','实验数据'});
```

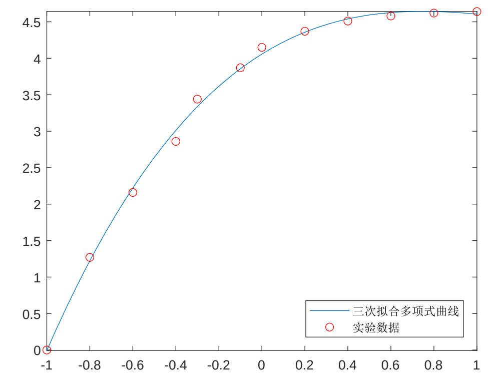
结果:

$$y = -\frac{3982742614460357\,x^2}{2251799813685248} + \frac{2439825684435733\,x}{1125899906842624} + \frac{2288943766543947}{562949953421312}.$$

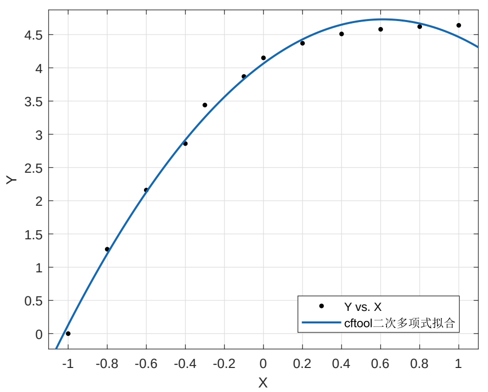
$$y = \frac{8521429937993895\,x^3}{18014398509481984} - \frac{7918081977677879\,x^2}{4503599627370496} + \frac{4129100537421519\,x}{2251799813685248} + \frac{4568116039683039}{1125899906842624}.$$



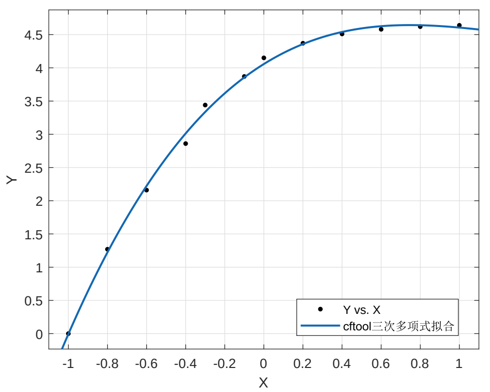
(a) 二次拟合多项式



(b) 三次拟合多项式



(c) 二次拟合多项式



(d) 三次拟合多项式

图 11: 最小二乘拟合

9 第十周数值分析中期练习

9.1 三次插值

题 9.1.1. 已知 $y=f(x)$ 的在部分节点上的函数值如下表所示:

x_i	-2	0	1	2
$f(x_i)$	-7	1	2	9

试构造三次插值多项式，并估计在 $x=1.3$ 处的值。

```
%% Lagrange方法
clc
clear
X=[-2 0 1 2];
Y=[-7 1 2 9];
syms x
s1=0;
for i=1:length(X)
    t=1;
    for j=1:length(Y)
        if j~=i
            t=t*(x-X(j))/(X(i)-X(j));
        end
    end
    s1=s1+Y(i)*t;
end
y=collect(s1,x);%合并x项
disp(y);
fplot(y,[min(X) max(X)]);
hold on
plot(X,Y,'ro');
legend({'Lagrange插值法','插值节点'});
f=matlabFunction(y);
Output=f(1.3);
disp(Output);
```

结果： x^3+1; 3.1970e+000

9.2 最小二乘法

题 9.2.1. 已知实验数据如下:

x_i	10	11	12	13	14	15
$f(x_i)$	20	23	25	27	26	28

请列出用最小二乘法求线性及二次拟合函数的方程组。

```
%% base {1,x}
clc
clear
G=zeros(2,2);
syms x
B=[1 x];
X=[10 11 12 13 14 15];
Y=[20 23 25 27 26 28];
%Gram Matrix
for i=2:2
    f1=matlabFunction(B(i));
    for j=2:2
        f2=matlabFunction(B(j));
        G(i,j)=f1(X)*f2(X)';
    end
end
for j=2:2
    f3=matlabFunction(B(j));
    G(1,j)=sum(f3(X));
end
G(1,1)=length(X);
for j=2:2
    G(j,1)=G(1,j);
end
D=zeros(2,1);
for i=1:2
    if i==1
        D(i,1)=sum(Y);
    else
        f4=matlabFunction(B(i));
        D(i,1)=f4(X)*Y';
    end
end
A=G\D;
y=0;
```

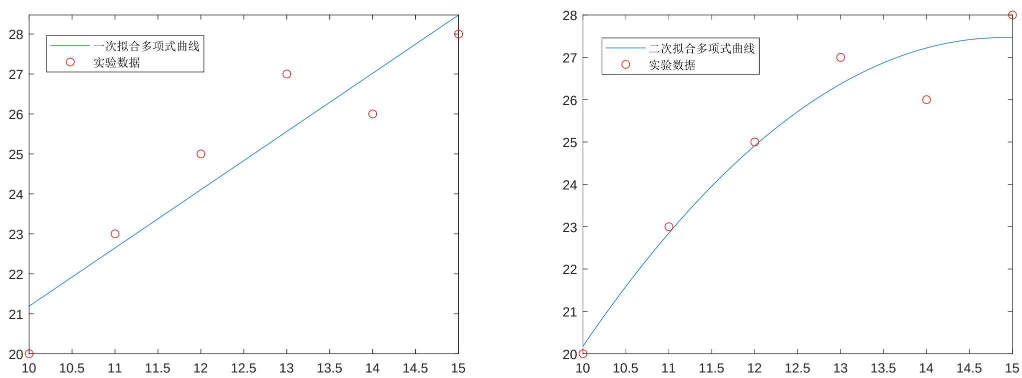
```
for i=1:length(A)
    y=y+A(i)*x^(i-1);
end
y=collect(y,x);
fplot(y,[min(X) max(X)]);
hold on
plot(X,Y,'ro');
legend({'一次拟合多项式曲线','实验数据'});
%% base {1,x,x^2}
clc
clear
G=zeros(3,3);
syms x
B=[1 x x^2];
X=[10 11 12 13 14 15];
Y=[20 23 25 27 26 28];
%Gram Matrix
for i=2:3
    f1=matlabFunction(B(i));
    for j=2:3
        f2=matlabFunction(B(j));
        G(i,j)=f1(X)*f2(X)';
    end
end
for j=2:3
    f3=matlabFunction(B(j));
    G(1,j)=sum(f3(X));
end
G(1,1)=length(X);
for j=2:3
    G(j,1)=G(1,j);
end
D=zeros(3,1);
for i=1:3
    if i==1
        D(i,1)=sum(Y);
    else
        f4=matlabFunction(B(i));
        D(i,1)=f4(X)*Y';
```

```
    end
end
A=G\D;
y=0;
for i=1:length(A)
    y=y+A(i)*x^(i-1);
end
y=collect(y,x);
fplot(y,[min(X) max(X)]);
hold on
plot(X,Y,'ro');
legend({'二次拟合多项式曲线','实验数据'});
```

结果:

$$y = \frac{51\,x}{35} + \frac{1863096274418193}{281474976710656}.$$

$$y = -\frac{683582086296581\,x^2}{2251799813685248} + \frac{5092686542910377\,x}{562949953421312} - \frac{5619446856466419}{140737488355328}.$$



(a) 一次拟合多项式　　(b) 二次拟合多项式

图 12: 最小二乘法

10 第十一周数值分析实验

10.1 牛顿—科特斯积分

题 10.1.1. 编写牛顿—科特斯积分公式程序，思路如下：

(1) 对区间 $[a, b]$ 作 n 等份，确定数值点 x_k，求解被积函数的函数值 $y_k = f(x_k)$；

(2) 计算第 k 个科特斯系数 $C_k^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \displaystyle\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (t-j)\mathrm{d}t$

(3) 构造牛顿—科特斯积分公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$.

(4) 利用 $MATLAB$ 编写算法实现，参考函数格式为：

$$I_{out} \ = \ NewtonCotesIntegration\left(f, a, b, n\right)$$

```
function result=NewtonCotesIntegration(f,a,b,n)
syms x t
h=(b-a)/n;
X=a:h:b;
f1=matlabFunction(f);
Y=f1(X);
S=zeros(1,n+1);
for k=0:n
    prod_c=1;
    for j=0:n
        if j~=k
            %prod_c=prod_c*(t-j)/(k-j);
            prod_c=prod_c*(t-j);
        end
    end
    int_prod=int(prod_c,0,n);
    %S(k+1)=h/(b-a)*int_prod;
    S(k+1)=(-1)^(n-k)/(n*factorial(k)*factorial(n-k))*int_prod;
end
result=vpa(sum(Y.*S)*(b-a));
end
```

题 10.1.2. 利用程序计算下列两个积分

$$I_1 = \int_1^9 \sqrt{x}dx \quad \text{及} \quad I_2 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x$$

并比较结果 *1.* 梯形公式；*2.* 辛普森公式；*3.* 科特斯公式.

```
%% I1=\int_1^9 \sqrt(x) dx
clc
clear
syms x t
f=sqrt(x);
a=1;b=9;
f1=matlabFunction(f);
%梯形公式
I1=(f1(a)+f1(b))*(b-a)/2;
I11=NewtonCotesIntegration(f,a,b,1);
%Simpson公式
I2=(f1(a)+4*f1((a+b)/2)+f1(b))*(b-a)/6;
I21=NewtonCotesIntegration(f,a,b,2);
%柯特斯公式
I31=NewtonCotesIntegration(f,a,b,4);
%% I2=\int_0^2 \sqrt(4-x^2) dx
clc
clear
syms x t
f=sqrt(4-x^2);
a=0;b=2;
f1=matlabFunction(f);
%梯形公式
I1=(f1(a)+f1(b))*(b-a)/2;
I11=NewtonCotesIntegration(f,a,b,1);
%Simpson公式
I2=(f1(a)+4*f1((a+b)/2)+f1(b))*(b-a)/6;
I21=NewtonCotesIntegration(f,a,b,2);
%柯特斯公式
I31=NewtonCotesIntegration(f,a,b,4);
```

结果:

表 3: 运行结果

	梯形公式	Simpson 公式	柯斯特公式
I_1	16	17.25903	17.32644
I_2	2	2.976068	3.090764

题 10.1.3. 选择尽可能精确的方法计算下列积分

$$S = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin^2\theta}d\theta$$

其中

$$a = (2R+H+h)/2, c = (H-h)/2,$$

$$R = 6371, \quad H = 2384, \quad h = 439$$

结果:

```
In[1]:= R = 6371; H = 2384; h = 439;
        a = (2 R + H + h) / 2; c = (H - h) / 2;
        S = a Integrate[Sqrt[1 - (c / a) ^2 Sin[x] ^2], {x, 0, Pi / 2}]
              积分       平方根             正弦                 圆周率

Out[3]= 15565/2 EllipticE[151321/9690769]

In[4]:= N[S, 30]
        数值运算

Out[4]= 12176.8596279750388997885325568
```

图 13: Mathematica 数值结果

```
clc
clear
syms x t
R=6371;H=2384;h=439;
a=(2*R+H+h)/2;c=(H-h)/2;
f=sqrt(1-(c/a)^2*sin(x)^2);
xmin=0;xmax=pi/2;
f1=matlabFunction(f);
S=12176.8596279750388997885325568;%from Mathematica N[S,30]
X=1:7;
Y=1:7;
for i=1:7
    Y(i)=S-a*NewtonCotesIntegration(f,xmin,xmax,X(i));
end
plot(X,Y,'r-o');grid on;
legend('Mathematica计算结果减NC公式计算结果');
xlabel('牛顿科特斯公式划分数目');
%% 结果
%由上则n=2时(Simpson)计算结果与Mathematica结果更接近
I=a*NewtonCotesIntegration(f,xmin,xmax,2);
disp(I);
```

结果： 12176.875336227736163485779741222

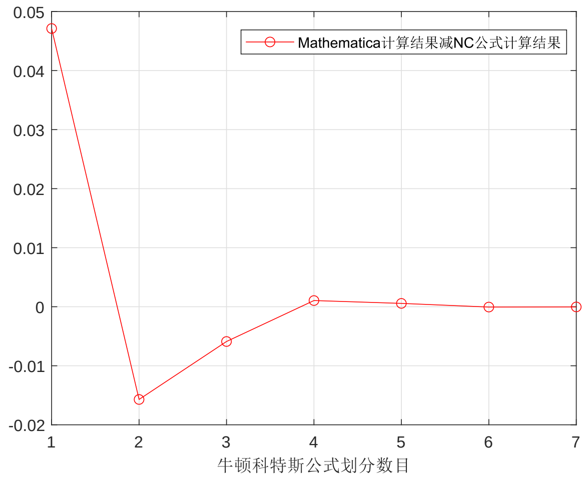


图 14: 结果比较

11 第十二周数值分析实验

11.1 复合梯形公式与复合 Simpson 公式

题 11.1.1. 试用复合梯形公式、复合辛普森公式 $(n = 4, 8, 16, 32, 64)$ 求解积分

$$I = \int_0^5 x^5 e^{-x} \sin x dx.$$

已知精确值 $-e^{-5}(3660\cos 5 + 487.5\sin 5) - 15 \approx -18.8455351153$.

```
%% 复合梯形求积公式
clc
clear
syms x
y=x^5*exp(-x)*sin(x);
f=matlabFunction(y);
N=[4 8 16 32 64];
I=zeros(1,length(N));%积分结果
a=0;b=5;
for n=1:length(N)
    h=(b-a)/N(n);
    X=a:h:b;
    Y=f(X);
    I(n)=(2*sum(Y)-Y(1)-Y(length(X)))*h/2;
end
%% 复合Simpson公式
clc
clear
syms x
y=x^5*exp(-x)*sin(x);
f=matlabFunction(y);
N=[4 8 16 32 64];
I=zeros(1,length(N));%积分结果
a=0;b=5;
for n=1:length(N)
    h=(b-a)/N(n);
    X=a:h:b;
    Y=f(X);
    Z=zeros(1,length(X)-1);
    for i=1:length(Z)
        Z(i)=X(i)+h/2;
```

```
    end
    D=f(Z);
    I(n)=(4*sum(D)+2*sum(Y)-Y(1)-Y(length(X)))*h/6;
end
```

结果:

表 4: 运行结果

n	4	8	16	32	64
复合梯形公式	-18.0457	-18.6488	-18.7968	-18.8334	-18.8425
复合 Simpson 公式	-18.8498	-18.8461	-18.8456	-18.8455	-18.8455

11.2 高斯—勒让德求积公式

题 11.2.1. 试用 5 个节点的高斯—勒让德求积公式计算上例.

```
%% 高斯-勒让德求积公式
clc
clear
syms x t
y=x^5*exp(-x)*sin(x);
a=0;b=5;
x=(b-a)*t/2+(a+b)/2;
y1=subs(y,x);%区间变换
f=matlabFunction(y1);
%求解t_k
P_6=(231*t^6-315*t^4+105*t^2-5)/16;
T=vpa(solve(P_6==0));
Y=f(T);
A=[0.4679139 0.3607616 0.1713245 0.4679139 0.3607616 0.1713245];
I=A*Y*(b-a)/2;
```

结果: -18.850292536760721693352062553335

11.3 复合型的高斯—勒让德求积公式

题 11.3.1. 试用复合型的高斯—勒让德求积公式计算上例, 其中区间做 $n(n=5,10)$ 等份, 每个小区间上使用 2 个节点的 $G-L$ 公式.

```
%% 复合高斯-勒让德求积公式
clc
```

```
clear
syms x t
y=x^5*exp(-x)*sin(x);
a=0;b=5;
XK=[0.7745967 -0.7745967 0];
A=[0.5555556 0.5555556 0.8888889];
N=[5 10];
Result=zeros(1,length(N));
for n=1:length(N)
    h=(b-a)/N(n);
    X=a:h:b;
    I=zeros(1,length(X)-1);%小区间上的积分值
    for i=1:length(I)%小区间G-L
        x=h*t/2+(X(i+1)+X(i))/2;
        y1=subs(y,x);
        f=matlabFunction(y1);
        I(i)=A*f(XK)'*h/2;
    end
    Result(n)=sum(I);
end
```

结果： [-18.8454781687866,-18.8455360298194]

12 第十三周数值分析实验

12.1 矩阵的 LU 分解

题 12.1.1. *实现 n 阶非奇异矩阵 A 的 LU 分解程序，函数格式为：$[L,U] = lu\_decomposition(A)$ 并计算 P153, 例 5.*

```
function [L,U]=lu_decomposition(A)
[m,n]=size(A);
L=eye(m);
L(:,1)=A(:,1)/A(1,1);%L第一列赋值
U=zeros(m,n);
U(1,:)=A(1,:);%U第一行赋值
for i=2:m
    for j=2:n
        if i<=j
            U(i,j)=A(i,j)-sum(L(i,1:i-1).*U(1:i-1,j)');
        else
            if U(j,j)==0
                L(i,j)=0;
            else
                L(i,j)=(A(i,j)-sum(L(i,1:j-1).*U(1:j-1,j)'))/U(j,j);
            end
        end
    end
end
end
```

```
%page153ex5
clc
clear
A=[1 2 3;2 5 2;3 1 5];
b=[14;18;20];
%使用内置函数lu
[L,U]=lu(A);
y=L\b;
x=U\y;
%使用lu_decomposition
[L1,U1]=lu_decomposition(A);
y1=L1\b;
```

```
x1=U1\y1;
%直接计算
x2=A\b;
```

结果:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{bmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

12.2 矩阵的 Cholesky 分解

题 12.2.1. *实现 n 阶对称正定矩阵 A 的 Cholesky 分解程序, 函数格式为: $L = cholesky\_Factorization(A)$ 并计算 P177 第 9 题. (MATLAB 自带程序为 chol(A)).*

```
function L=cholesky_Factorization(A)
N=size(A);%记录矩阵的大小
m=N(1);%矩阵的行数
n=N(2);%矩阵的列数
L=zeros(m,n);%初始化L矩阵
for i=1:n
    L(i:n,i)=A(i:n,i);%将A的下半矩阵赋值给L
end
L(1,1)=sqrt(A(1,1));%步骤一: 先算矩阵的第一个元素
L(2:n,1)=L(2:n,1)/L(1,1);%步骤二: 利用第一个元素计算第一列元素
for k=2:n
    L(k,k)=sqrt(A(k,k)-L(k,k-1)*(L(k,k-1)));%步骤三: 计算所有的对角线元素
    for j=k+1:n
        L(j,k)=(A(j,k)-L(j,k-1)*L(k,k-1))/L(k,k);%步骤四: 计算对角线以下元
            素的值
    end
end
end
```

```
%page177ex9
clc
clear
A=[2 -1 0 0 0;-1 2 -1 0 0;0 -1 2 -1 0;0 0 -1 2 -1;0 0 0 -1 2];
b=[1;0;0;0;0];
%使用内置函数chol
```

```
L=chol(A);%L'L=A
y=L'\b;
x=L\y;
%使用cholesky_Factorization
L1=cholesky_Factorization(A);%L1L1'=A
y1=L1\b;
x1=L1'\y1;
%直接计算
x2=A\b;
```

结果:

$$\begin{bmatrix} 1.41421356237310 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707106781186548 & 1.22474487139159 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.816496580927726 & 1.15470053837925 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866025403784439 & 1.11803398874990 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.894427190999916 & 1.09544511501033 \end{bmatrix}$$

$$x = [0.833333333333333, 0.666666666666667, 0.500000000000000, 0.333333333333333, 0.166666666666667]^T$$

13 第十五周数值分析实验

13.1 迭代法

题 13.1.1. 设线性方程组 $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20, \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33, \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36. \end{cases}$ 精确解是 $x^* = (3,2,1)^T$. 按如下格式求解

$$\begin{cases} {x_1}^{(k+1)} = \left(3{x_2}^{(k)} - 2{x_3}^{(k)} + 20\right)/8 \\ {x_2}^{(k+1)} = \left(-4{x_1}^{(k)} + {x_3}^{(k)} + 33\right)/11 \\ {x_3}^{(k+1)} = \left(-6{x_1}^{(k)} - 3{x_2}^{(k)} + 36\right)/12 \end{cases}.$$

其中 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. 试给出第 $10, 20, 100, 200, 1000$ 次的迭代结果及误差向量的无穷范数.

```
clc
clear
B=[0 3/8 -2/8;-4/11 0 1/11;-6/12 -3/12 0];
f=[20/8 33/11 36/12]';
x=[3,2,1]';%方程组的解
N=[10,20,100,200,1000];%迭代次数
for i=1:length(N)
    j=0;
    x0=[0,0,0]';%迭代初始值
    while j<N(i)
            x0=B*x0+f;
            j=j+1;
    end
    disp(x0);
    disp(max(abs(x0-x)));%误差值
end
```

结果:

表 5: 运行结果

	10	20	100	200	1000
x_1	3.0000	3.0000	3	3	3
x_2	1.9999	2.0000	2	2	2
x_3	0.9999	1.0000	1	1	1
误差向量的无穷范数	1.26E-04	3.84E-09	0	0	0

13.2 高斯塞德尔迭代法

题 13.2.1. 用高斯一赛德尔迭代法求解练习 *1*，试给出第 $10, 20, 100, 200, 1000$ 次的迭代结果及误差向量的无穷范数.

```
clc
clear
A=[8 -3 2;4 11 -1;6 3 12];
D=diag(diag(A));%对角阵
L=D-tril(A);%下三角阵
U=D-triu(A);%上三角阵
B=(D-L)\U;
b=[20 33 36]';
f=(D-L)\b;
x=[3,2,1]';%方程组的解
N=[10,20,100,200,1000];%迭代次数
for i=1:length(N)
    j=0;
    x0=[0,0,0]';%迭代初始值
    while j<N(i)
            x0=B*x0+f;
            j=j+1;
    end
    disp(x0);
    disp(max(abs(x0-x)));%误差值
end
```

结果:

表 6: 运行结果

	10	20	100	200	1000
x_1	3.0000	3	3	3	3
x_2	2.0000	2	2	2	2
x_3	1.0000	1	1	1	1
误差向量的无穷范数	6.32E-09	0	0	0	0

14 第十六周数值分析实验

14.1 Jacobi 和 G-S 迭代法

题 14.1.1. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

试编制程序，列表给出前 *10* 个迭代向量，并考察 *Jacobi* 和 $G-S$ 迭代法的收玫性.

```
%% Jacobi
clc;clear;
A=[1 2 -2;1 1 1;2 2 1];
D=diag(diag(A));%对角阵
L=D-tril(A);%下三角阵
U=D-triu(A);%上三角阵
B=D\(L+U);
b=[1 1 1]';
f=D\b;
N=10;%迭代次数
x0=[0,0,0]';%迭代初始值
j=0;
while j<N
    x0=B*x0+f;
    j=j+1;
    disp(x0);
end
%% G-S
clc;clear;
A=[1 2 -2;1 1 1;2 2 1];
D=diag(diag(A));%对角阵
L=D-tril(A);%下三角阵
U=D-triu(A);%上三角阵
B=(D-L)\U;
b=[1 1 1]';
f=(D-L)\b;
N=10;%迭代次数
x0=[0,0,0]';%迭代初始值
j=0;
while j<N
```

```
    x0=B*x0+f;
    j=j+1;
    disp(x0);
end
```

结果:

表 7: 运行结果

n(Jacobi)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	0	1	1	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
x_2	0	1	-1	3	3	3	3	3	3	3	3
x_3	0	1	-3	1	1	1	1	1	1	1	1

n(G-S)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	0	1	-1	-11	-43	-131	-355	-899	-2179	-5123	-11779
x_2	0	0	3	15	51	147	387	963	2307	5379	12291
x_3	0	-1	-3	-7	-15	-31	-63	-127	-255	-511	-1023

14.2 SOR 迭代法

题 14.2.1. *用 SOR 方法解线性方程组*

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

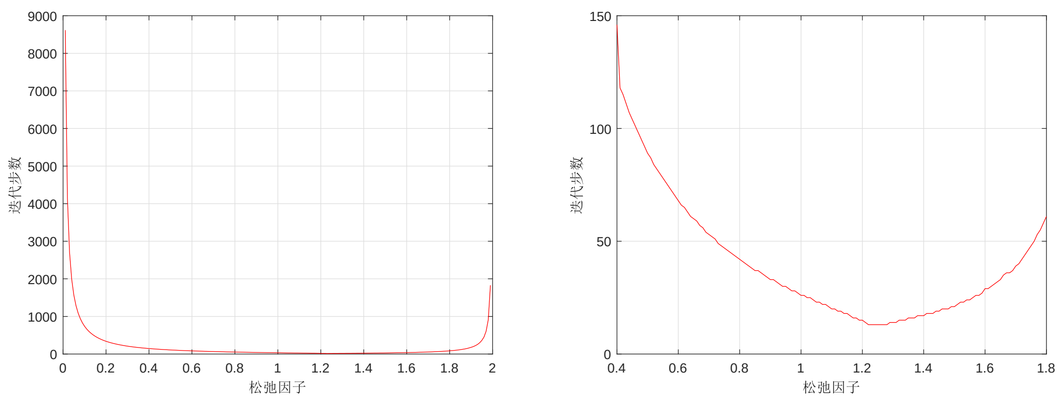
初值取 $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$, *计算到* $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-8}$ *停止, 并绘制迭代步数 IT 关于松驰因子* ω *(步长取 0.01) 的图像.*

```
clc;clear;
A=[4 -1 -1 -1;-1 4 -1 -1;-1 -1 4 -1;-1 -1 -1 4];
b=ones(4,1);
x0=zeros(4,1);%初值
omgea=0.01:0.01:1.99;
I=length(omgea);
N=zeros(1,length(omgea));%迭代步数
for i=1:length(N)
    N(i)=SOR(A,b,x0,omgea(i));
end
plot(omgea,N,'r-');
xlabel('松弛因子');
```

```
ylabel('迭代步数');
grid on;

function n=SOR(A,b,x0,omgea)
D=diag(diag(A));%对角阵
L=D-tril(A);%下三角阵
U=D-triu(A);%上三角阵
B=(D-omgea*L)\((1-omgea)*D+omgea*U);
f=omgea*(D-omgea*L)\b;
n=0;
epsilon=1;%误差初始值
while epsilon>=10^(-8)
    d=x0;
    x0=B*x0+f;
    c=x0;
    epsilon=max(abs(c-d));
    n=n+1;
end
end
```

结果： $\mathbf{x} = [0.308641974897860, 0.308641979217244, 0.308641971803977, 0.308641977711201]^T$.



(a) $0.01 \le \omega \le 1.99$ (b) $0.40 \le \omega \le 1.80$

图 15: 迭代步数

14.3 选做题

题 14.3.1. 已知 50×50 带状方程组，设初始解向量为 $x^{(0)} = 0.01\ ones\,(50,1)$，精度 $\varepsilon = 10^{-14}$，试采用 *Jacobi* 迭代法和 $G-S$ 迭代法求解带状线性方程组满足精度要求

的近似解.

$$\begin{pmatrix} 12 & -2 & 1 & & & & & \\ -2 & 12 & -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 12 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 12 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 12 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 & 12 & -2 \\ & & & & & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{48} \\ x_{49} \\ x_{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
%% Jacobi
clc;clear;
A=zeros(50,50)+diag(12*ones(1,50));
for i=1:length(A(:,1))-1
    A(i,i+1)=-2;
end
for i=1:length(A(:,1))-2
    A(i,i+2)=1;
end
for i=1:length(A(:,1))%行
    for j=1:i%列
        A(i,j)=A(j,i);
    end
end
D=diag(diag(A));%对角阵
L=D-tril(A);%下三角阵
U=D-triu(A);%上三角阵
B=D\(L+U);
b=5*ones(50,1);
f=D\b;
x=A\b;%精确值
x0=0.01*ones(50,1);%迭代初始值
epsilon=1;%误差初始值
while epsilon>10^(-14)
    x0=B*x0+f;
    epsilon=norm(x0-x,"inf");
end
disp(x0);
%% G-S
clc;clear;
```

```
clc;clear;
A=zeros(50,50)+diag(12*ones(1,50));
for i=1:length(A(:,1))-1
    A(i,i+1)=-2;
end
for i=1:length(A(:,1))-2
    A(i,i+2)=1;
end
for i=1:length(A(:,1))%行
    for j=1:i%列
        A(i,j)=A(j,i);
    end
end
D=diag(diag(A));%对角阵
L=D-tril(A);%下三角阵
U=D-triu(A);%上三角阵
B=(D-L)\U;
b=5*ones(50,1);
f=(D-L)\b;
x=A\b;%精确值
x0=0.01*ones(50,1);%迭代初始值
epsilon=1;%误差初始值
while epsilon>10^(-14)
    x0=B*x0+f;
    epsilon=norm(x0-x,"inf");
end
disp(x0);
```

结果:

表 8: 运行结果

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0.46379552381655	0.537284605199966	0.509022924601331	0.498221634436174	0.498941860239762	0.499985351248131	0.500088723890136	0.500015318846052
x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
0.499994793266975	0.499997856913468	0.500000108425199	0.500000201576687	0.500000022610945	0.499999986238572	0.499999995873979	0.500000000530294
x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
0.500000000439039	0.500000000023939	0.499999999966017	0.499999999992557	0.500000000001741	0.500000000000922	0.499999999999990	0.499999999999923
x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	x_{31}	x_{32}
0.499999999999998	0.499999999999987	0.499999999999921	0.500000000000001	0.500000000000915	0.500000000001741	0.499999999992558	0.499999999966019
x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}	x_{40}
0.500000000023937	0.500000000439038	0.500000000530295	0.499999995873980	0.499999986238572	0.500000022610945	0.500000201576688	0.500000108425199
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}	x_{47}	x_{48}
0.499997856913467	0.499994793266975	0.500015318846052	0.500088723890136	0.499985351248131	0.498941860239762	0.498221634436174	0.509022924601331
x_{49}	x_{50}						
0.537284605199966	0.463795523816550						

参考文献

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 (第 5 版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.