

《数值分析》中期练习

一、计算题

1. 已知 $y = f(x)$ 的在部分节点上的函数值如下表所示:

x_i	-2	0	1	2
$f(x_i)$	-7	1	2	9

试构造三次插值多项式, 并估计在 $x = 1.3$ 处的值。

2. 已知实验数据如下:

x_i	10	11	12	13	14	15
$f(x_i)$	20	23	25	27	26	28

请列出用最小二乘法求线性及二次拟合函数的方程组。

二、证明题

1. 设 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, 节点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, $L_n(x)$ 是对应的插值多项式, 证明: 对任何 $x \in [a, b]$, 插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

其中 $\xi \in (a, b)$ 依赖于 x , 且 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

2. 设 X 是实数域上的内积空间, 证明对 $\forall u, v \in X$, 都有

$$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v).$$

3. 证明切比雪夫多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 是关于

权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的正交多项式.