Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko
Podiplomski magistrski študijski program 2. stopnje Elektrotehnika
Biomedicinska tehnika - Biomedicinska informatika

NAVODILA

Vaja 5: Matematični model epidemije

Pripravila: Žiga Bizjak & Tomaž Vrtovec

Navodila

Matematični model epidemije SIR v obliki nelinearnega sistema treh navadnih diferencialnih enačb opisuje delež $s = s(t)$ za bolezen dovzetne populacije (*ang.* susceptible), delež $i = i(t)$ z boleznijo okužene populacije (*ang.* infected) in delež $r = r(t)$ populacije, ki je bolezen prebolela (*ang.* recovered), za vsak časovni trenutek t. Analitična rešitev sistema obstaja samo za posebne primere, numerično rešitev sistema pa lahko vedno določimo, npr. s pomočjo Eulerjeve metode:

$$
\begin{aligned}
\frac{ds(t)}{dt} &= -\beta s(t)i(t) & & & s(t+1) &= s(t) - \beta s(t)i(t)\Delta t \\
\frac{di(t)}{dt} &= \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) & &\longrightarrow & i(t+1) &= i(t) + \big(\beta s(t)i(t) - \gamma i(t)\big)\Delta t \\
\frac{dr(t)}{dt} &= \gamma i(t) & & & r(t+1) &= r(t) + \gamma i(t)\Delta t
\end{aligned}
$$

kjer je β stopnja okužbe in γ stopnja okrevanja. Lastnosti bolezni opisuje osnovno reprodukcijsko število $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, medtem ko je zanimiv podatek tudi točka preloma $B_0 = t|_{max(i(t))}$, ki predstavlja časovni trenutek, ki ustreza največjemu deležu z boleznijo okužene populacije $i = i(t)$.

Modelirali bomo izbruh pandemije gripe leta 1968 (t. i. hongkonške gripe), pri čemer ga bomo opazovali v zaprti populaciji prebivalcev mesta New York, ZDA.[1] Poleg tega bomo upoštevali določene predpostavke in poenostavitve, kot so na primer:

- Leta 1968 je bilo število prebivalcev New Yorka približno 7.900.000. Predpostavimo, da število prebivalcev v času opazovanja pandemije gripe ostaja nespremenjeno.
- Ob začetku opazovanja predpostavimo, da je med prebivalci 10 oseb okuženih z gripo, vse ostale osebe pa so za gripo dovzetne, pri čemer ni nobena oseba na gripo imuna.
- Povprečno obdobje od dovzetnosti do okuženosti traja $T_c = \frac{1}{\beta} = 2\,$dni (t. i. kontaktno obdobje), povprečno obdobje od okuženosti do okrevanja pa $T_r = \frac{1}{\gamma} = 3\,$dni.

1. Napišite funkcijo za izračun numerične rešitve SIR modela:

```
def solveModelSIR(iTime, iModel, iParam):
    # ...
    # your code goes here
    # ...
return oModel, oData
```

   kjer vhodni argument `iTime` $= [t_1, t_2, \Delta t]$ predstavlja vektor vrednosti začetnega časa opazovanja t_1, končnega časa opazovanja t_2 in razliko dveh zaporednih časov opazovanja Δt, `iModel` $= [S(t_1), I(t_1), R(t_1)]$ predstavlja vektor števila dovzetnih oseb $S(t_1)$, števila okuženih oseb $I(t_1)$ in števila okrevanih oseb $R(t_1)$ ob začetku opazovanja, `iParam` $= [\beta, \gamma]$ pa predstavlja vektor vrednosti stopnje okužbe β in stopnje okrevanja γ. Izhodni argument `oModel` $= [s(t), i(t), r(t), t]$ predstavlja vektorje deležev populacije $s(t)$, $i(t)$ in $r(t)$ s pripadajočim vektorjem časa t (vsaka vrstica vektorja predstavlja rešitev sistema za en časovni trenutek), izhodni argument `oData` $= [R_0, B_0]$ pa predstavlja vektor vrednosti osnovnega reprodukcijskega števila R_0 in točke preloma B_0.

[1] D.A. Smith in L.C. Moore: Calculus - Modeling and Application. Založba D. C. Heath & Co., 1996.

2. Napišite funkcijo za prikaz numerične rešitve SIR modela:

```
def displayModel(iModel):
    # ...
    # your code goes here
    # ...
```

kjer vhodni argument `iModel` $= [s(t), i(t), r(t), t]$ predstavlja vektorje deležev populacije $s(t)$ (prikazan z modro barvo), $i(t)$ (prikazan z rdečo barvo) in $r(t)$ (prikazan z zeleno barvo) s pripadajočim vektorjem časa t. S pomočjo funkcije ???subplot? izrišite krivulje potekov deležev populacije ???plot??? ter kumulativne površine deležev populacije ???area??? vzdolž časa v isto prikazno okno.

3. Uporabite funkcijo `solveModelSIR` za izračun numerične rešitve SIR modela, pri čemer upoštevate zgoraj omenjene predpostavke in poenostavitve. Prikažite pridobljeno rešitev s funkcijo `displayModel`.

Vprašanja

Odgovore na sledeča vprašanja zapišite v poročilo, v katerega vstavite zahtevane izrise in programske kode.

1. Pridobite numerično rešitev SIR modela, pri čemer uporabite $\Delta t = 1\,\mathrm{dan}$, $\beta = \frac{1}{2}\,\mathrm{dan}^{-1}$ in $\gamma = \frac{1}{3}\,\mathrm{dan}^{-1}$, ostale parametre pa ustrezno nastavite. Priložite sliko pridobljene rešitve in zapišite vrednosti R_0 in B_0.

2. Spremenite stopnjo okužbe na vrednost $\beta = 0{,}35$, $\beta = 1$ in $\beta = 2\,\mathrm{dan}^{-1}$ ter pridobite numerično rešitev SIR modela. Zapišite vrednosti R_0 in B_0 za vsak primer posebej. Opišite spremembe z vidika razširjanja epidemije. Priložite sliko pridobljene rešitve za $\beta = 0{,}35\,\mathrm{dan}^{-1}$.

3. Spremenite stopnjo okrevanja na vrednost $\gamma = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}2$ in $\gamma = 1\,\mathrm{dan}^{-1}$ ter pridobite numerično rešitev SIR modela. Zapišite vrednosti R_0 in B_0 za vsak primer posebej. Opišite spremembe z vidika razširjanja epidemije. Priložite sliko pridobljene rešitve za $\gamma = 0{,}1\,\mathrm{dan}^{-1}$.

4. Spremenite razliko dveh zaporednih časov opazovanja na vrednost $\Delta t = 3$, $\Delta t = 5$ in $\Delta t = 10\,\mathrm{dni}$ ter pridobite numerično rešitev SIR modela. Zapišite vrednosti R_0 in B_0 za vsak primer posebej. Obrazložite, zakaj pride do sprememb v rezultatih. Priložite sliko pridobljene rešitve za $\Delta t = 3\,\mathrm{dni}$.

5. Dokažite ali ovržite enakost $\dfrac{ds(t)}{dt} + \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{dr(t)}{dt} = 0$.

Dodatek

Odgovore na sledeče probleme ni potrebno prilagati k poročilu, prispevajo pa naj k boljšemu razumevanju vsebine.

1. Napišite funkcijo za izračun numerične rešitve SIS modela:

```python
def solveModelSIS(iTime, iModel, iParam)(iModel):
    # ...
    # your code goes here
    # ...
    return oModel, oData
```

kjer sta vhodna argumenta `iTime` in `iParam` enaka kot pri funkciji `solveModelSIR`, vhodni argument `iModel` $= [S(0), I(0)]$ pa predstavlja vektor števila dovzetnih oseb $S(0)$ in števila okuženih oseb $I(0)$ ob začetku opazovanja. Izhodni argument `oModel` $= [s(t), i(t), t]$ predstavlja vektor deležev populacije $s(t)$ in $i(t)$ s pripadajočim vektorjem časa t, izhodni argument `oData` pa je enak kot pri funkciji `solveModelSIR`.

2. Napišite funkcijo za izračun numerične rešitve SIRS modela:

```python
def solveModelSIRS(iTime, iModel, iParam):
    # ...
    # your code goes here
    # ...
    return oModel, oData
```

kjer sta vhodna argumenta `iTime` in `iModel` enaka kot pri funkciji `solveModelSIR`, vhodni argument `iParam` $= [\beta, \gamma, \nu]$ pa predstavlja vektor vrednosti stopnje okužbe β, stopnje okrevanja γ in stopnje dovzetnosti ν. Izhodna argumenta `oModel` in `oData` sta enaka kot pri funkciji `solveModelSIR`. Za stopnjo dovzetnosti uporabite vrednost $\nu = \frac{1}{16}$.

3. Pridobite in prikažite numerično rešitev SIS in SIRS modela.