Laboratorijska vaja 1

Uvod

V uvodni vaji bomo na preprostem primeru pokazali, kako previdni moramo biti pri teoretični obravnavi problemov, ki vključujejo *naključni izbor* enega od možnih izidov eksperimenta. Kaj je v konkretnem primeru naključno in na kakšen način je naključno? Primer tudi nazorno pokaže na težave, na katere lahko naletimo, ko naključne dogodke in njihove verjetnosti obravnavamo s *klasično teorijo* verjetnosti (verjetnost *a priori*):

- ali je zagotovljena enaka verjetnost za vse možne izide?
- kako obravnavati eksperimente z neskončnim številom možnih izidov (zvezna verjetnost)?

Pogledali bomo, kaj pomenita pojma *gostota verjetnosti* in *porazdelitev verjetnosti* naključne spremenljivke, ki sta ključna pojma v moderni verjetnosti teoriji.

Formulacija problema

Vzemimo krog s polmerom r. *Naključno* izberemo tetivo na tem krogu. Kolikšna je verjetnost dogodka Q, da je ta *naključno* izbrana tetiva daljša od stranice krogu včrtanega enakostraničnega trikotnika (tetiva daljša od $r\sqrt{3}$).

Opisani problem in težave z njegovo rešitvijo se imenujejo po matematiku J. L. F. Bertrandu[1]. Videli bomo, da ima ob različnih interpretacijah naključnega izbora tetive ta problem (vsaj) tri različne rešitve. Problem torej nima enolične rešitve in to navidezno protislovje je matematike s konca prejšnjega stoletja navedla na to, da so vse skupaj poimenovali Bertrandov paradoks. V tistem času, skoraj 50 let pred razvojem aksiomske teorije verjetnosti[2], so namreč mislili, da mora obstajati za zastavljeni problem le ena rešitev.

Teoretično reševanje problema

S pristopom klasične teorije verjetnosti izračunamo za dogodek Q verjetnost njegovega nastopa $P[Q]$ a priori, torej brez izvedbe eksperimenta, kot razmerje:

$$P[Q] = \frac{N_Q}{N},$$

pri čemer sta N število vseh možnih izidov eksperimenta in N_Q število izidov, ko se zgodi dogodek Q. Pri tem morajo biti vsi izidi enako verjetni! V primeru, ko izidi niso števni (jih je neskončno mnogo), moramo namesto števil N in

[1] Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), francoski matematik. Ukvarjal se je predvsem z diferencialno geometrijo in teorijo verjetnosti. Obravnavani problem je opisal v knjigi *Calcul des probabilitiés* (1888).

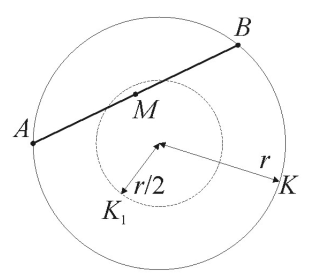
[2] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), ruski matematik in utemeljitelj aksiomske teorije verjetnosti v monografiji *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1933).

N_Q uporabiti neko zvezno veličino, s katero ponazorimo razmerje neskončnega števila ugodnih proti vsem možnim izidom eksperimenta.

Take veličine so na primer dolžina, površina ali na primer prostornina. Več kot očitno je, da lahko na krogu poiščemo neskončno število tetiv in moramo tudi tu ubrati to pot. V nadaljevanju bomo predpostavili, da je polmer kroga $r = 1$.

1. Postopek 1

   Z nekaj preproste matematike lahko ugotovimo, da se središčne točke M vseh tetiv na krogu K, ki so daljše od $\sqrt{3}$, nahajajo znotraj manjšega kroga s polmerom $r/2 = 0,5$ (slika 1). Torej lahko smatramo, da bodo pri eksperimentu naključnega izbiranja tetiv ugodni izidi vsi tisti, pri katerih bo središčna točka tetive M padla v notranjost kroga K_1. Površina kroga K predstavlja vse možne izide, površina manjšega kroga K_1 pa ugodne izide. Iskano verjetnost izračunamo po enačbi 1:

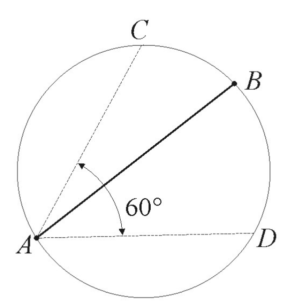


$$P[Q] = \frac{površina(K_1)}{površina(K)} = \frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

Slika 1

2. Postopek 2

   Na robu kroga izberimo fiksno začetno točko tetive A. Z lahkoto pokažemo, da se drugi konec vseh tetiv, ki so daljše od $\sqrt{3}$, nahaja med točkama C in D, pri čemer je trikotnik ACD enakostraničen (slika 2). Vse možne izide eksperimenta sedaj predstavljajo vse točke na obsegu kroga, ugodne izide pa točke na loku med C in D. Iskano verjetnost podaja enačba 3.



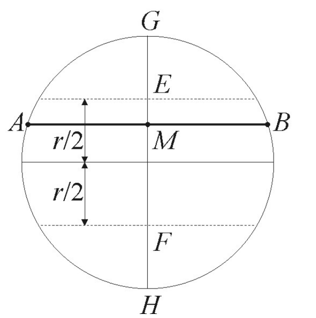
$$P[Q] = \frac{dolžina\ loka}{obseg\ kroga} = \frac{2\pi r/3}{2\pi r} = \frac{1}{3} \tag{2}$$

Slika 2

Pri tej rešitvi je treba omeniti, da se je s tem, ko smo fiksirali eno točko tetive, sicer zmanjšalo število možnih tetiv. Toda sorazmerno se je zmanjšalo tudi število možnih tetiv daljših kot $\sqrt{3}$, tako da je razmerje ostalo isto.

3. Postopek 3

   Sedaj vzemimo, da so vse tetive pravokotne na daljico GH, ki je nek v naprej izbrani premer kroga. Hitro lahko pokažemo, da bodo daljše od $\sqrt{3}$ samo tetive, katerih središčna točka M se nahaja na razdalji največ $r/2 = 0,5$ od središča kroga, torej med točkama E in F (slika 3). Dolžini daljic GH in EF sta torej meri za število vseh možnih in ugodnih izidov eksperimenta. Rešitev problema je enačba 3.



$$P[Q] = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Slika 3

   Tako kot pri postopku 2 smo z omejitvijo na tetive, ki so pravokotne na GH, omejili število možnih tetiv, toda sorazmerno se je zmanjšalo tudi število tetiv daljših od $\sqrt{3}$, torej se je razmerje ohranilo.

Kot vidimo, obstajajo vsaj tri rešitve Bertrandovega problema. Katera je prava? Zakaj so različne? Razlog za navidez protislovno (paradoksalno) večličnost rešitve tiči v tem, da smo dejansko izračunali verjetnosti *RAZLIČNIH* dogodkov. Pojem nakjučno izbrane tetive v zadanem problemu namreč ni zadovoljivo definiran. V ozadju postopkov za izračun rešitev so bili *RAZLIČNI* eksperimenti, kar morda na prvi pogled ni očitno. Dolžina tetive pri vsakem postopku predstavlja drugo naključno spremenljivko. Te različne naključne spremenljivke pa imajo zato (lahko, ne pa nujno) tudi *RAZLIČNE* porazdelitve verjetnosti oziroma gostote verjetnosti. Z vsemi temi pojmi se bomo srečali kasneje, ko bomo spoznali aksiomsko teorijo verjetnosti. Realizacija opisanih eksperimentov na računalniku je zelo preprosta. Potrebujemo generator (psevdo-) naključnih števil, ki so *enakomerno*[3] porazdeljene na intervalu $[0, 1]$. Ta števila potem z ustreznim algoritmom spremenimo v druga naključna števila, ki predstavljajo porazdelitev naključnih spremenljivk, ki jih želimo realizirati (koordinate točk in/ali koti ter dolžina tetive).

[3]Enakomerna porazdelitev naključne spremenljivke pomeni, da je gostota verjetnosti te naključne spremenljivke na podanem intervalu konstantna. V MATLABU nam taka števila generira funkcija `rand`.

Naloge

1. Naloga 1

   - Napišite progam, ki bo generiral 10^5 tetiv po postopku 1, opisanem zgoraj. To izvedete tako, da žrebate obe koordinati sredinske točke tetive M na intervalu $[1, 1]$. Izžrebane koordinate upoštevate le, če se nahajajo znotraj kroga z radijem $r = 1$, sicer izžrebate novo točko.

     $$x_M \in [-1, 1];\ y_M \in [-1, 1] \xrightarrow{\check{c}e\ velja\ x_M^2 + y_M^2 \leq 1} M = (x_M, y_M)$$

     Nato določimo premico, ki gre skozi točko M in je pravokotna na zveznico med središčem kroga in točko M. Presečišči te premice s krožnico da krajišči tetive A in B. Ker nas zanima samo dolžina tetive lahko izračunate samo dolžino tetive s pomočjo Pitagorevega izreka, kjer je dolžina tetive $\overline{AB} = 2\sqrt{1 - \overline{0M}^2}$.
   - Določite histogram porazdelitve dolžin vseh generiranih tetiv. Dolžina tetive je vedno znotraj intervala $[0, 2]$. Za generiranje histograma razdelite interval na 100 razredov in določite število tetiv znotraj vsakega razreda z Matlabovo funkcijo `histogram`. Z uporabo ustreznih argumentov funkcije `histogram` normirajte histogram tako, da delite število tetiv v posameznem razredu s številom vseh generiranih tetiv. Tako dobljeni histogram je ocena za *gostoto verjetnosti* (angl. *probability density function - pdf*) naključne spremenljivke, ki je dolžina tetive. Izrišite ta histogram *pdf.*
   - Iz histograma pdf iz prejšnjega koraka določite histogram kumulativne porazdelitve dolžin generiranih tetiv. To storite tako, da vrednost za vsak razred n ($n \in [1, N]$) v novem histogramu izračunate kot vsoto vrednosti vseh razredov od 1 do n iz histograma *pdf.* Lahko uporabite tudi ustrezno normiranje Matlabove funkcije `histogram`. Tako dobljeni novi histogram je ocena za *porazdelitev verjetnosti* (angl. *probability distribution function - PDF*) naključne spremenljivke, ki je dolžina tetive. Izrišite histogram *PDF.*
   - Določite verjetnost dogodka Q po enačbi $P[Q] = \frac{N_P}{N}$. H kateri vrednosti limitira verjetnost dogodka Q?

2. Naloga 2

   - Napišite program, ki bo generiral veliko število tetiv po postopku 2, opisanem zgoraj. Za fiksno prvo krajišče tetive (točka A) izberemo točko (-1,0). Koordinate drugega krajišča (točke B) žrebamo preko polarnega kota te točke:

     $$\phi_B \in [0, 2\pi] \to x_B = \cos\phi_B; y_B = \sin\phi_B;$$

   - Določite in izrišite histogram *pdf.*

- Določite in izrišite histogram *PDF*.
- H kateri vrednosti limitira verjetnost dogodka Q?

3. Naloga 3

   - Napišite program, ki bo generiral veliko število tetiv po postopku 3, opisanem zgoraj. Žrebamo središčno točko tetive M, ki naj leži na osi y:
     $$x_M = 0;\ y_M \in [-1, 1] \rightarrow M = (x_M, y_M)$$
     Dolžino tetive $\overline{AB}$ lahko ponovno določimo s Pitagorovim izrekom, saj poznamo oddaljenost od središča in polmer kroga.
   - Določite in izrišite histogram *pdf*.
   - Določite in izrišite histogram *PDF*.
   - H kateri vrednosti limitira verjetnost dogodka Q?

4. Naloga 4

   - Pri tem postopku žrebamo obe krajišči tetive, pri čemer se obe krajišči nahajata na krožnici. Ponovno je najučinkovitejši pristop preko naključne izbire polarnega kota obeh točk:
     $$\alpha \in [0, 2\pi];\ \beta \in [0, 2\pi]\ \rightarrow\ x_A = \cos\alpha; y_A = \sin\alpha; x_B = \cos\beta; y_B = \sin\beta;$$
     Dolžino tetive $\overline{AB}$ lahko ponovno določimo s Pitagorovim izrekom, saj poznamo oddaljenost od središča in radij kroga.
   - Določite in izrišite histogram *pdf*.
   - Določite in izrišite histogram *PDF*.
   - H kateri vrednosti limitira verjetnost dogodka Q? Ali je enakovreden kateremu izmed prejšnjih štirih postopkov? Komentirajte!

5. Naloga 5

   - Predlagajte svoj postopek za *naključno izbiro* tetive na krogu. Bodite pozorni, da naj bo postopek različen od prejšnjih štirih postopkov.
   - Določite in izrišite histogram *pdf*.
   - Določite in izrišite histogram *PDF*.
   - H kateri vrednosti limitira verjetnost dogodka Q?
   - Ali ima postopek podobno verjetnost dogodka Q kot eden izmed prejšnjih štirih postopkov?

Priročni MATLAB ukazi

Spodaj imate navedene MATLAB ukaze, ki vam lahko zelo olajšajo delo pri vaji. Ne pozabite na pomoč (tipka F1)!

`[nelements,centers]=histcounts(data, nbins)`
Izračuna število elementov posameznega razdelka v histogramu in vrne središča razdelkov (verzija 2014b ali novejša). V starejših verzijah uporabite funkcijo `hist`.

`histogram(X, nbins)`
Izriše histogram vektorja `X` (verzija 2014b ali novejša).V starejših verzijah uporabite funkcijo `hist`. Z uporabo parametrov `'Normalization', 'pdf'`, in `'Normalization', 'CDF'` lahko prikažete ustrezne histograme, ki jih zahteva naloga in so približki pravima funkciji gostote verjetnosti in funkciji porazdelitve verjetnosti.

`bar(x_bin, y_bin)`
Izrište stolpični diagram v trenutno aktivno okno.

`cumsum(A)`
Funkcija ki izračuna kumulativno vsoto elementov v vektorju ali matriki (uporabite za računanje *PDF* iz *pdf*).