Korelacijske funkcije stacionarnih signalov

Uvod

Z obravnavo preprostih signalov bomo preverili lastnosti, ki veljajo za avtokorelacijske in križnokorelacijske funkcije. Nato bomo z križnokorelacijsko funkcijo našli pare signalov in določili časovni zamik med signali.

Teoretično ozadje

Definicija korelacijskih funkcij

Z momentnimi funkcijami opisujemo statistične lastnosti naključnih procesov. Med temi funkcijami daleč najpogosteje obravnavamo momentne funkcije prvega in drugega reda, to so srednja povprečna vrednost, avtokorelacijska funkcija, križnokorelacijska funkcija, avtokovariančna funkcija, križnokovariančna funkcija in variančna funkcija. Za splošne naključne procese so vse te funkcije nekega zveznega parametra, največkrat je to čas (t). Splošne definicije teh funkcij za realne signale, ki jih generirata naključna procesa $X(t)$ in $Y(t)$, so:

Srednja vrednost:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx \tag{1}$$

Avtokorelacijska funkcija:

$$r_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{2}$$

Križnokorelacijska funkcija:

$$r_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y) dx dy \tag{3}$$

Avtokovariančna funkcija[1] :

$$m_X(t_1, t_2) = E[X_C(t_1)X_C(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_X(t_1))(x_2 - \mu_X(t_2)) f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{4}$$

Križnokovariančna funkcija:

$$m_{XY}(t_1, t_2) = E[X_C(t_1)Y_C(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X(t_1))(y - \mu_Y(t_2)) f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y) dx dy \tag{5}$$

[1] $X_C(t)$ pomeni, da gre za naključni proces, ki ga premaknemo za srednjo vrednost. S tem ga centriramo okoli srednje vrednosti 0 kot: $X_C(t) = X(t) - \mu_X(t)$.

Variančna funkcija:

$$\sigma_X^2(t) = m_X(t,t) = E[X_C^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X(t))^2 f_{X(t)}(x)dx \tag{6}$$

Za stacionarne naključne procese (dovolj je stacionarnost v širšem smislu) velja, da zgoraj definirane momentne funkcije niso več funkcije absolutnega časa, kar pomeni:

$$\mu_X(t) \xrightarrow{stacionarnost} \mu_X = E[X(t)] \tag{7}$$

$$r_X(t_1,t_2) \xrightarrow{stacionarnost} r_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \tag{8}$$

$$r_{XY}(t_1,t_2) \xrightarrow{stacionarnost} r_X Y(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] \tag{9}$$

$$m_X(t_1,t_2) \xrightarrow{stacionarnost} m_X(\tau) = E[X_C(t)X_C(t+\tau)] \tag{10}$$

$$m_{XY}(t_1,t_2) \xrightarrow{stacionarnost} m_{XY}(\tau) = E[X_C(t)Y_C(t+\tau)] \tag{11}$$

$$\sigma_X^2(t) \xrightarrow{stacionarnost} \sigma_X^2(t) = E[X_C^2(t)] \tag{12}$$

Lastnosti korelacijskih funkcij stacionarnih naključnih procesov

Naštejmo najpomembnejše lastnosti avtokorelacijskih in križnokorelacijskih funkcij za stacionarne naključne procese:

i. Vrednost avtokorelacijske funkcije pri $\tau = 0$ je enaka srednji kvadratični vrednosti naključnega procesa:

$$r_X(\tau) = E[X^2(t)] \tag{13}$$

ii. Avtokorelacijska funkcija je soda funkcija:

$$r_X(\tau) = r_X(-\tau) \tag{14}$$

iii. Avtokorelacijska funckija ima največjo vrednost pri $\tau = 0$:

$$|r_X(\tau)| \leq r_X(0) \tag{15}$$

iv. Če vsebuje $X(t)$ periodično komponento, jo vsebuje tudi $r_X(\tau)$. Sinusne komponente, ki nastopajo v $X(t)$, se v $r_X(\tau)$ vedno odrazijo kot kosinusne funkcije. Avtokorelacijska funkcija torej vsebuje informacijo o frekvenčni vsebini procesa $X(t)$, vendar brez informacije o faznih kotih pripadajočih sinusoid.

v. Če $X(t)$ ne vsebuje periodične komponente (konstanto obravnavamo kot poseben primer periodične funkcije s periodo ∞), potem velja:

$$\lim_{\tau \to \infty} r_X(\tau) = 0 \tag{16}$$

vi. Fourierov transform avtokorelacijske funkcije, ki je spekter močnostne gostote naključnega procesa $S_X(\omega)$, je realna, soda in nenegativna funkcija frekvence. Vse to so posledice lastnosti avtokorelacijske funkcije.

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{r_X(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \in \mathbb{R} \tag{17}$$

vii. Križnokorelacijska funkcija v splošnem ni soda funkcija. Zanjo velja tako imenovana poševna simetričnost:

$$r_{XY}(\tau) = r_{YX}(-\tau) \tag{18}$$

viii. Križnokorelacijska funkcija v splošnem nima največje absolutne vrednosti pri $\tau = 0$, velja pa zveza:

$$|r_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{r_X(0) r_Y(0)} \tag{19}$$

ix. Fourierov transform križnokorelacijske funkcije je v splošnem kompleksna funkcija frekvence. Veljajo pa zveze:

$$S_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{r_{XY}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \in \mathbb{C} \tag{20}$$

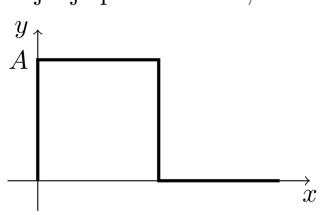
$$S_{YX}(\omega) = \mathcal{F}\{r_{YX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \in \mathbb{C} \tag{21}$$

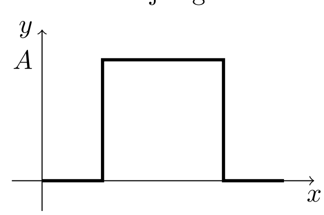
$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) \Rightarrow S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega) \in \mathbb{R} \tag{22}$$

Naloge

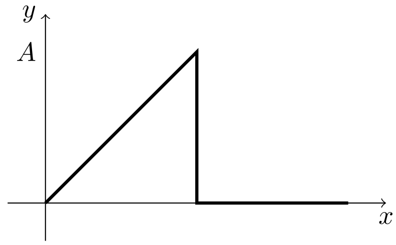
1. Naloga 1 - Signali Generirajte naslednje deterministične in (psevdo-) naključne umetne signale za preverjanje lastnosti korelacijskih funkcij. Vsak naj ima dolžino $N = 2000$ vzorcev.

   - Signala $X_{Pa}(t)$ in $X_{Pb}(t)$: dva enaka pravokotna pulza amplitude in trajanja po vaši izbiri, od katerih je eden zakasnjen glede na drugega:

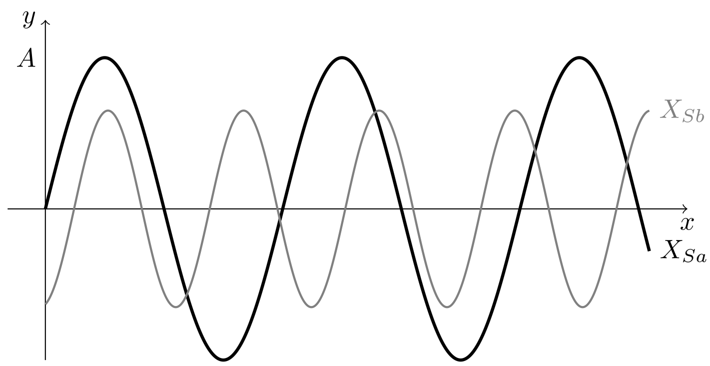




- Signal $X_T(t)$: trikotni pulz oziroma linearno naraščajočo strmino z amplitudo in trajanjem po vaši izbiri:



- Signala $X_{Sa}(t)$ in $X_{Sb}(t)$: dve sinusoidi z različnimi amplitudami, frekvencami in faznimi koti (izberite tako, da bodo v signalu vsaj 3 periode signala):



- Signal $X_e(t)$: šum z enakomerno porazdeljeno amplitudo na intervalu $[-1, 1]$. Uporabite MATLABov ukaz `rand`.
- Signal $X_g(t)$: Gaussov šum s srednjo vrednostjo 1 in varianco 2^2. Uporabite MATLABov ukaz `randn`.

2. Naloga 2. Avtokorelacijske funkcije

- Izračunajte, izrišite in primerjajte avtokorelacijske funkcije teh signalov. Za pravilno oznako zamika τ na grafih uporabite naslednji format klica MATLABovega ukaza `xcorr`:

```
[Rx, tau] = xcorr(signal, 'biased')
```

- Na izrisanih avtokorelacijskih funkcijah preverite lastnosti avtokorelacijske funkcije (i - v) in primerjajte vrednosti dobljene z funkcijo `xcorr` s teoretičnimi vrednostmi.
- Signali X_{Pa}, X_{Pb} in X_T so prehodni pojavi, ki so dejansko časovno omejeni. Na ostale signale pa lahko gledamo tudi kot na časovno omejene vzorčne funkcije sicer neskončnih naključnih procesov. To dejstvo lahko upoštevamo pri izračunu korelacijskih funkcij, tako da namesto zgornjega ukaza uporabimo ukaz:

```
[Rx, tau] = xcorr(signal, 'unbiased').
```

To povzroči, da MATLAB oceni avtokorelacijsko funkcijo z *nepristransko* cenilko. Izračunajte avtokorelacijske funkcije signalov X_{Sa}, X_{Sb}, X_e in X_g z *nepristransko* cenilko in nove izračune primerjajte s prejšnjimi.

3. Naloga 3. Križnokorelacijske funkcije Izračunajte križnokorelacijske funkcije:
   $r_{XPaXPb}(\tau)$ in $r_{XPbXPa}(\tau)$;
   $r_{XPaXT}(\tau)$ in r_{XTXPa};
   $r_{XSaXSb}(\tau)$ in $r_{XSbXSa}(\tau)$.

   Uporabite ukaz:
   `[Rxy,tau] = xcorr(signal_x, signal_y, 'biased')`

   Preverite lastnosti križnokorelacijske funkcije. Ali je križnokorelacijska funkcija dveh periodičnih signalov periodična?

4. Naloga 4. Koreliranost naključnih procesov

   S spletne učilnice si prenesite datoteko s podatki za tretjo vajo. V Matlab naložite datoteko s svojim imenom (`v4_xxxxxxxx.mat`). V datoteki je v stolpec zloženih šest nekajminutnih posnetkov pretoka krvi v podkožnih tumorjih. Signale smo zajeli pri vzorčni frekvenci 10 Hz z metodo LDF in sicer v treh različnih tumorjih pri miših. Po dva signala smo torej zajeli v istem tumorju, toda na različnih lokacijah. Za vsak signal lahko torej na nek način smatramo, da ga je generiral drug naključni proces. Upravičeno pa lahko pričakujemo, da bo med dvema signaloma, ki izvirata iz istega tumorja, obstajala močnejša korelacija kot med signaloma, ki izvirata iz različnih tumorjev.

   Zgodila pa se nam je neprijetna stvar, da smo bili pri zajemanju meritev nekoliko raztreseni, zato smo meritve po nesreči naredili s časovnim zamikom, poleg tega pa so se nam je pomešal vrstni red.

   - Naredite kopijo svoje datoteke s podatki in preberite signale v okolje MATLAB.
   - Za lažjo primerljivost signalov jih najprej normirajte po amplitudi glede na srednjo vrednost posameznega signala.
   - Odstranite linearni trend (oz. enosmerno komponento) signala. Uporabite ukaz `detrend()`.
   - Izrišite tako predelane signale. Ali lahko najdete pare signalov in časovni zamik med njimi?
   - S pomočjo korelacijskih funkcij razvrstite signale v pare, ki pripadajo istemu tumorju. Zamik ni večji od 2000 vzorcev. Uporabite lahko pristransko ali nepristransko cenilko korelacijske funkcije.
   - Določite *časovni* zamik med signali v posameznem paru

5. Naloga 5. Spekter močnostne gostote

   Preverite lastnosti spektrov močnostne gostote (realnost, sodost in nenegativnost $S_X(\omega)$ ter konjugirano kompleksnost $S_{XY}(\omega)$ in $S_{YX}(\omega)$ za testne signale, ki ste jih definirali v prvi nalogi.

   Pozor! Zaradi lastnosti algoritma FFT, ki ne upošteva negativnih indeksov, ampak šteje vzorce od $m = 0$ do $N-1$ za to nalogo ne morete uporabiti hitrega algoritma FFT. Fourierev transform, ki bo pravilno upošteval sodost avtokorelacijske funkcije je treba izračunati po definiciji formule za disktretni Fourierev transform (DFT):

$$\hat{S}_X(k) = \Delta t \sum_{m=-M}^{M} \hat{r}_X(m) e^{-j2\pi \frac{mk}{2M+1}}; -M \leq k \leq M \tag{23}$$

   Pri čemer Δt ustreza koraku zamika τ, k pa vrednosti τ pri indeksu m.

Priročni MATLAB ukazi

Spodaj imate navedene MATLAB ukaze, ki vam lahko zelo olajšajo delo pri vaji. Ne pozabite na pomoč (tipka F1)!

```
[c, tau] = xcorr()
```

Izračun različnih korelacijskih funkcij, ki ima možne različne načine delovanja (Glej F1)

```
[c, tau] = xcov()
```

Izračun različnih kovariančnih funkcij, ki ima možne različne načine delovanja.

```
y=detrend(x)
```

Ukaz za odstranjevanje enosmerne komponente oziroma trenda iz signala.

```
Y = fft(x)
```

Hitri Fourierjev transform. Algoritem za FFT ne upošteva negativnih indeksov, zato se sodost avtokorelacijske funkcije izgubi.