克卜勒第一定律的四種證明

摘要

克卜勒第一定律 (Kepler's First Law of Planetary Motion) 指出，在一個恆星與行星組成的系統中：

(a) 各行星以各自的橢圓軌道環繞恆星
(b) 恆星處在橢圓的其中一個焦點上

儘管第一定律的敘述十分簡潔有力，其證明卻遠比第二定律與第三定律複雜。然而，第一定律所描述的性質是平方反比連心力所獨有的結果，意義重大。以下將透過等效位能、LRL 向量、費曼失落的演講 (Feynman's Lost Lecture) 與極座標，共四種方法證明克卜勒第一定律。

等效位能 Effective Potential[1]

考慮一質量 m 的質點在中心力 (central force，即作用於連心方向的力) 的作用下的運動。其運動方程式可寫為

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - V'(r) \tag{1}$$

其中 $V(r)$ 是中心力造成的位勢 (potential)，而中心力 $F(r) = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} = -V'(r)$，因此位勢對徑向距離的微分才會出現在式 (1)。由於中心力對原點不造成力矩，角動量守恆，也就是

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{const.} \tag{2}$$

使用 (2) 把 (1) 中的 $mr\dot{\theta}^2$ 代換，得

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r) \tag{3}$$

將兩邊乘上 $\dot{r}$

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{L^2}{mr^3}\frac{dr}{dt} - \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

並對時間 t 積分可得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right) = E \tag{4}$$

其中 E 是該系統的能量，因

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E \tag{5}$$

由 (4) 可定義等效位能為

[1] Morin, D. (2008). *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge: Cambridge University Press.

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \tag{6}$$

如此一來 (4) 便會化為很簡潔的形式：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff} = E \tag{7}$$

通常使用等效位能求解時，會用一個特殊的技巧：把 (4) 式化為

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)$$

將 (1) 式兩邊平方，得到

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$

將上述兩式相除可得

$$\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2} \tag{8}$$

(8) 式給了我們一個解決 $r(\theta)$ 的方向。進入正題，重力的位勢是

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r} \tag{9}$$

因此 (9) 式化為

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{L^2r} \tag{10}$$

以下我們將巧妙地使用代換變數解出行星的軌道。首先定義[2] $y \equiv \frac{1}{r}$。計算其對角度的微分發現

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dr}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

如此一來，這就剛好把 (10) 的左手邊代換掉了。將右手邊也進行相同的代換，得

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - y^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}y \tag{11}$$

配方得

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -\left(y - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}$$

括弧內的東西可以定義為一個新的變數 $z = y - \frac{m\alpha}{L^2}$，且 $\frac{dz}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}$，故上式可再化為

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4} \equiv -z^2 + B^2 \tag{12}$$

[2] 有興趣的讀者可參閱 Binet's Equation (https://en.wikipedia.org/wiki/Binet_equation)

其中我們把那一坨很醜的東西定義為 $B^2 = \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 (1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2})$。觀察到 $\left(\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right)^2 = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$，可以猜出 (12) 式的通解為

$$z = B\cos(\theta - \theta_0) \tag{13}$$

其中 θ_0 是根據初始條件給定的常數，可設為 0。z 和 r 的關係為

$$z = y - \frac{m\alpha}{L^2} = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2}$$

並代入

$$B = \frac{m\alpha}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

可得

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1 + \epsilon\cos\theta) \tag{14}$$

其中

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \tag{15}$$

(14) 式所描述之 $r(\theta)$ 的圖形正是以原點為焦點的橢圓。因為恆星的位置 (也就是重力的指向) 是原點，恆星的確位於行星橢圓軌道的焦點上。橢圓的極座標形式為

$$r = \frac{1}{C(1 + \epsilon\cos\theta)} \tag{16}$$

而 (15) 式的 ϵ 稱為離心率 (eccentricity)。由於封閉軌道的能量為負，橢圓軌道的離心率皆為介於 0 到 1 的值。以上不僅說明了克卜勒第一定律，更給出了能從能量與角動量直接算出軌道形狀 (即離心率) 的 (15) 式。

Laplace-Runge-Lenz 向量

LRL 向量是研究克卜勒問題 (Kepler Problem) 一個重要的向量。有趣的是，發現這個向量的人不是 Laplace、Runge 或 Lenz，而是一群科學家共同努力發現的成果[3]。不論在軌道上的哪一點，這個向量都是固定的。也就是說，儘管各點的速度方向、速率、加速度、與恆星的距離等等都可能不同，這個向量算出來的方向與量值竟然都是一樣的!! 不過，由於這個向量的定義十分特殊，很難直接猜出這個向量的形式，因此才會需要眾多偉大的科學家花費數百年研究它。

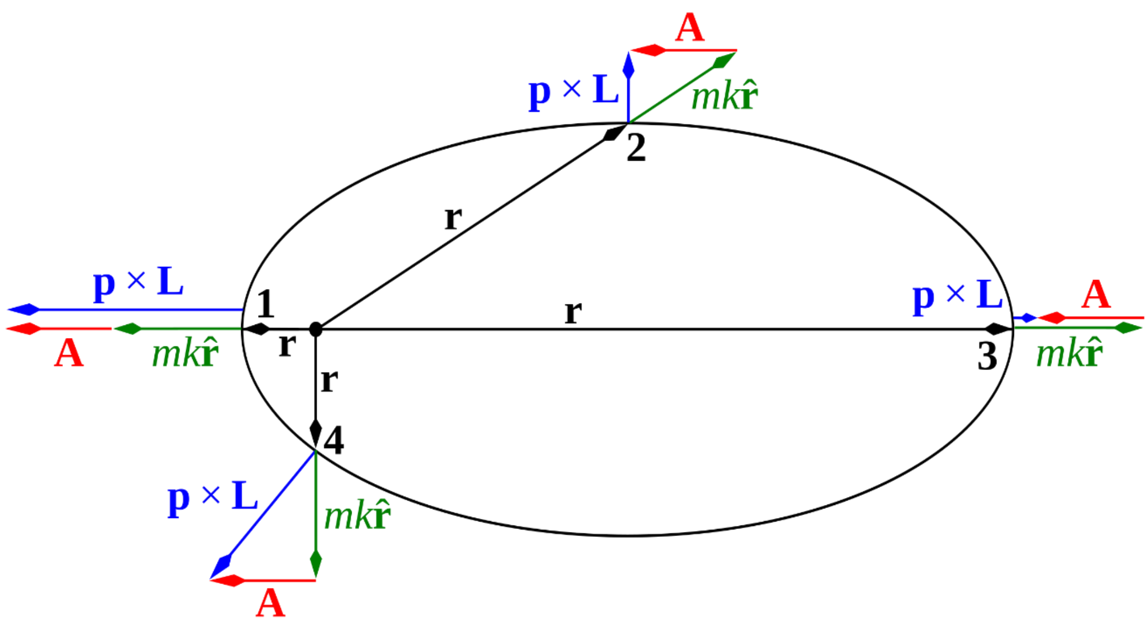
以下我們將用 **粗體** 表示 $\overrightarrow{\text{向量}}$，ex: $\boldsymbol{v} = \vec{v}$。沒有粗體的則是純量。

[3] Goldstein, H. (1975). *Prehistory of the Runge–Lenz vector*. American Journal of Physics. 43 (8): 737–738. Bibcode:1975AmJPh..43..737G. doi:10.1119/1.9745

LRL 向量以 $\boldsymbol{A}$ 表示，其定義為

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - m\alpha\hat{\boldsymbol{r}} \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 為 (線性) 動量 (linear momentum)，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 為角動量 (angular momentum)，m 為行星的質量，$\alpha = GMm$ 定義如前，$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 為徑向的單位向量。



圖(一) LRL 向量在橢圓軌道上各點的守恆[4]

我們把 LRL 向量 $\boldsymbol{A}$ 和位置向量 $\boldsymbol{r}$ 座內積

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) \cdot \boldsymbol{r} - m\alpha\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}$$

其中 $\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}$，且等號右手邊第一項可以調換順序 (如果排列 (permutation) 不同要變號)，即

$$(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) \cdot \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = |\boldsymbol{L}|^2 = L^2$$

以上用了角動量的定義。將兩式代回得

$$Ar\cos\theta = L^2 - m\alpha r$$

整理得

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + \frac{A}{L^2}\cos\theta = \frac{m\alpha}{L^2}\left(1 + \frac{A}{m\alpha}\cos\theta\right) \tag{18}$$

上式是橢圓的形式，且離心率

$$\epsilon = \frac{A}{|m\alpha|} \tag{19}$$

[4] File:Laplace Runge Lenz vector.svg. (2023, September 24). Wikimedia Commons. Retrieved 13:48, June 9, 2024 from https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Laplace_Runge_Lenz_vector.svg&oldid=804054881.

將 LRL 向量和它自己內積

$$A^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\hat{\boldsymbol{r}}) = p^2L^2 + m^2k^2 = 2mEL^2 + m^2k^2$$

可用 A 表示能量

$$E = \frac{A^2 - m^2k^2}{2mL^2} \tag{20}$$

將 (20) 代入 (19) 可以重新得到 (15)。

以下簡要證明 LRL 向量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - m\alpha\hat{\boldsymbol{r}}$ 不隨時間變化的特性。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \times \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{F} \times m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \frac{-\alpha}{r^3}\boldsymbol{r} \times m\left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\\ &= \frac{-m^2\alpha}{r^3}\boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\end{aligned}$$

使用 BAC-CAB 法則

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

另外注意對任意向量 $\boldsymbol{v}$，

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2v \cdot \frac{dv}{dt} = 2\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

以及微分的除法律，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

可得

$$\boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\left(r\frac{dr}{dt}\right) - r^2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -r^3\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

請讀者留意純量與向量的差別。代入原本的式子有

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \times \boldsymbol{L} = \frac{m\alpha}{r^3} \cdot r^3\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = m\alpha\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

最後我們把 LRL 向量微分

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{p} \times \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} - m\alpha\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}\\ &= m\alpha\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} + 0 - m\alpha\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

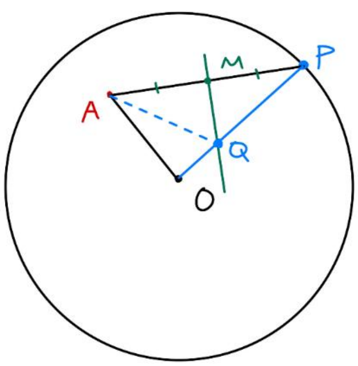
發現 $\boldsymbol{A}$ 對時間的微分是零，因此 $\boldsymbol{A}$ 不隨時間變化，證畢。

Feynman's Lost Lecture[5]

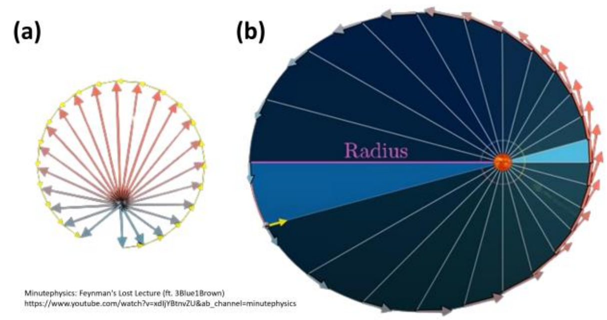
美國物理學家理查·費曼 (Richard Feynman) 於 1964 年三月十三日在加州理工學院 (Caltech) 給了一場有關行星運動的演講。照慣例而言，費曼的講堂都會收錄到一套非常有名的書，也就是費曼物理學講義 (Feynman's Lectures on Physics)。然而，那場。直到數年後，那場講堂的筆記 (lecture notes) 才被 David L. Goodstein 與 Judith R. Goodstein 夫婦找到並整理。在缺少上課時黑板的照片下，Goodstein 靠著他的筆記拼湊出了那堂遺失的講堂，並在 1995 年寫了 Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun 一書[6]，有興趣的讀者可以參考。

這個證明的偉大之處在他並沒有用到艱深的公式，連基本的微積分都沒有。事實上，他唯一用到的只有簡單的幾何。就讓我們來看看費曼的證明吧!

首先我們先看一個有關橢圓的有趣性質。給定兩焦點，橢圓是所有到這兩焦點距離和相等的點所構成的圖形。也就是說，橢圓上任一點到兩焦點距離和為定值。圖(二) 中，O 是圓的圓心，A 是圓內任取的一點，而 P 是圓周上任一點。做 $\overline{AP}$ 的中垂線，交 $\overline{OP}$ 於 Q 點。根據中垂線的性質，$\overline{AQ}+\overline{QO}=\overline{QP}+\overline{QO}=$ 圓半徑 $=$ 常數，故隨著點 P 在圓周上移動，點 Q 會描出一個以 A、O 為兩焦點的橢圓上。



圖(二) 有趣的橢圓性質



圖(三) 行星軌道與速度向量。(a) 頂端描出正多邊形的速度向量；(b) 行星運行的軌道，切成等角度區塊。
此圖為 Minutephysics 的影片之截圖。

接下來，我們把橢圓切成等角度的區塊，如圖(三) (b)。根據可以單純從角動量守恆推導出的克卜勒第二運動定律，行星與恆星的連線每單位時間掃出的面積是定值。當我們切得無限細，每一小塊都近似張角相同的扇形，其面積正比於該位置到恆星的距離，我們先姑且稱作「半徑」。根據等面積定律，

$$\text{通過扇形的時間} \propto \text{扇形面積} \propto \text{半徑}^2$$

[5] 非常推薦 3Blue1Brown 的影片! https://www.youtube.com/watch?v=xdIjYBtnvZU&ab_channel=minutephysics

[6] Goodstein & Goodstein (1996). *Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun*. https://ia902700.us.archive.org/24/items/richard-feynman-pdf-library/Feynman%2C%20Richard%20%2837%20books%29/Feynman%27s%20Lost%20Lecture%20%5Bed.%20Goodstein%5D/Goodstein%2C%20D.%20%28ed.%29%20-%20Feynman%27s%20Lost%20Lecture%20%28Vintage%2C%201997%29.pdf

此外，根據牛頓萬有引力定律

$$F = ma \propto \frac{1}{半徑^2}$$

當我們從一個扇形移動到下一個扇形，速度將有所變化，速度的變化量

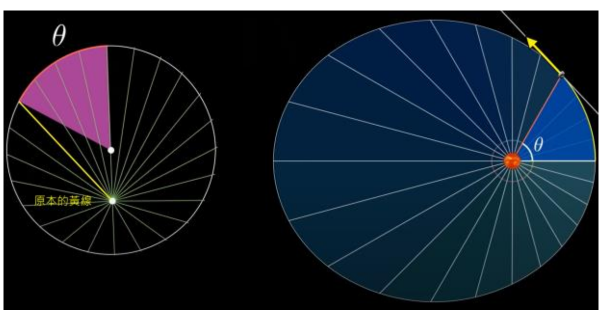
$$\Delta\vec{v} = 加速度 \times 通過扇形的時間 \propto \frac{1}{半徑^2} \times 半徑^2 = 定值$$

竟然是固定的! 也就是說，當我們畫出每一個扇形上的速度向量，並把他們平移使尾部相接，他們的頂端會描出一個正多邊形，因為每一個邊對應速度向量的變化$\Delta\vec{v}$，而 $\Delta\vec{v}$ 是定值，所以各個邊長都相等。當我們切得無限細，我們將會得到一個圓，如圖(三) (a)。

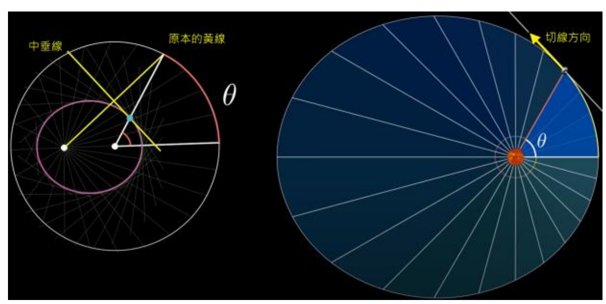
速度方向是行星軌道的切向方向。如圖(四)，我們只要找到在每一個角度的軌跡切線方向，都和對應的速度向量平行的圖形，就是行星的軌跡了。現在，我們把圖(四)左圖整張順時針旋轉 90 度，但把速度向量的綠線都繞中心逆時針旋轉 90 度回來，所以這些綠線的方向不變，得到圖(五)的左圖。這些綠線會包絡出圖中紫色的橢圓。根據我們一開始提到的橢圓性質，在左右兩圖角度都是 θ 的地方，即紫色橢圓上以青藍色標示的那一點，中垂線就是該處的綠線 (有點不明顯)，也就是速度向量的方向。此外，中垂線還恰好是紫色橢圓的切線方向。因此，在圖(五)左圖紫色橢圓上所有角度 θ 處的切線方向，都完美的對應右圖的軌跡角度 θ 處該點的速度方向，亦即橢圓的軌跡能夠滿足我們所要求的性質。

所以，行星的運行軌跡是橢圓!

除了簡單的正比關係外，費曼的證明完全沒有用到任何數學公式，這便是其美妙之處。不過，這個證明需要比較多抽象的思考與幾何上的理解，因此強力推薦大家去看那部 Minutephysics & 3Blue1Brown 的影片，影片中所有的幾何性質都用動畫呈現，相信讀者會更能理解!



圖(四) 速度向量與行星軌跡的對應。兩條黃色線必須平行。(Minutephysics)



圖(五) 將圖(四) 左圖的黃線旋轉 90 度，並把每一條綠線都繞中心旋轉 90 度的結果。(Minutephysics)

極座標[7]

極座標 (polar coordinates) 是以原點為中心，使用徑向距離 r 與方位角 θ 描述某點的座標系。以下將說明如何直接從極座標出發，證明克卜勒第一定律。這個方法比較直覺，但數學比較複雜。此外，因為過程中必須猜出某些特殊的解，可以說必須事先知道解出來是橢圓，才能用這個方式推導，因此放在本文較後面的地方。

由於橢圓的極座標形式(16)和徑向距離的倒數有關，定義 $\rho = 1/r$，並留意

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{d\rho/dt} = -\frac{r^2}{\dot{r}} = -\frac{1}{\rho^2\dot{r}}$$

軌道運動的能量是

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GMm}{r} \tag{21}$$

角動量為

$$L = mr^2\dot{\theta} = \frac{m\dot{\theta}}{\rho^2} = \frac{m}{\rho^2}\frac{d\theta}{dt} \tag{22}$$

首先我們 (似乎必須事先知道最後解的形式) 通靈出

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m(GMm)^2}}$$

由(21)求出

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{2E}{m} + 2GM\rho - \frac{L^2\rho^2}{m^2} \\ \dot{r} &= \end{aligned} \tag{23}$$

並由(22)，

$$\begin{aligned} \theta = \int d\theta &= \int \rho^2\frac{L}{m}dt = \int \rho^2\frac{L}{m}\frac{dt}{d\rho}d\rho = \\ &= \int \rho^2\frac{L}{m}\left(-\frac{1}{\rho^2\dot{r}}\right)d\rho = -\int\frac{L}{m\dot{r}}d\rho \end{aligned} \tag{24}$$

最後得到橢圓軌跡

[7] A1 Dynamical Astronomy. *Proof of Kepler's laws from Newtonian dynamics*.

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos\theta} \tag{25}$$

結論

以上展示了四種證明克卜勒第一運動定律的方法。在等效位能的方法中，透過巧妙的變數代換可以整理出橢圓的極座標形式，即 (14)、(15) 式。使用守恆的 LRL 向量，可以簡單地用內積化簡得出同樣的結果。費曼著名的 Lost Lecture 不需要用到複雜的數學方法，僅使用幾何的手法就能定性證明軌道是橢圓的，非常獨特。最後，極座標的方法較為直覺，和等效位能的方法類似，使用微積分的技巧證明，不過數學上比較複雜。

希望讀者未來看到這個定律時，並不是死背它 (雖然定性敘述不難記)，而是能了解其最根本的物理意義。

參考資料

1. Morin, D. (2008). *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Goldstein, H. (1975). *Prehistory of the Runge–Lenz vector*. American Journal of Physics. 43 (8): 737–738. Bibcode:1975AmJPh..43..737G. doi:10.1119/1.9745 https://ia902700.us.archive.org/24/items/richard-feynman-pdf-library/Feynman%2C%20Richard%20%2837%20books%29/Feynman%27s%20Lost%20Lecture%20%5Bed.%20Goodstein%5D/Goodstein%2C%20D.%20%28ed.%29%20-%20Feynman%27s%20Lost%20Lecture%20%28Vintage%2C%201997%29.pdf
3. File:Laplace Runge Lenz vector.svg. (2023, September 24). Wikimedia Commons. Retrieved 13:48, June 9, 2024 from https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Laplace_Runge_Lenz_vector.svg&oldid=804054881.
4. Goodstein & Goodstein (1996). *Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun*.
5. minutephysics. July 20, 2018. *Feynman's Lost Lecture (ft. 3Blue1Brown)*. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=xdIjYBtnvZU&ab_channel=minutephysics
6. A1 Dynamical Astronomy. *Proof of Kepler's laws from Newtonian dynamics*.