

## 天物盃初賽與秒題大賽題庫

### 一. 找到手機了!!

Sahur 同學的手機不小心在沙烏地阿拉伯弄丟了。八名台灣選手在接駁車上東翻西找，一無所獲。幸運的是，兩個月後，熱心的 Tralala 在「法赫德國王石油與礦業大學 (KFUPM, 26.3°N, 50.3°E)」找到了。然而，Sahur 此時早已回國，住在「師大會館(25.0°N, 121.5°E)」。

於是，Tralala 想到一個不用付運費且快速的方法，把手機還給 Sahur。假設地球為半徑  $R_E$  的完美球體。

- (a) 求穿過地球，連接 KFUPM 與師大會館的線段長度，以  $R_E$  表示。提示：可使用極座標。
- (b) Tralala 在 KFUPM 將手機高速射向空中，且手機飛行的軌跡恰好是半個橢圓。已知貼地飛行的衛星週期為 85.0 分鐘，請問 Sahur 在 Tralala 發射幾分鐘後可以拿到手機？

若您解不出(a)小題，請在(a)的答案內寫「我不會:(」，並用「線段長度 =  $0.85 R_E$ 」挑戰(b)小題!

### 二. 懸崖有多高?

在沙烏地阿拉伯的世界之崖(Edge of the World)觀光時，Patapim 為了測量懸崖的高度  $h$ ，把一顆大石頭水平拋出，並同時用手機計時，發現經過  $t \pm \Delta t = (5.20 \pm 0.10) \text{ s}$  才聽到回音。地表重力加速度  $g = 9.800 \text{ m/s}^2$ 。

- (a) 假設聲速無限大，求懸崖高度與其不確定度  $h \pm \Delta h$ 。記得取適當的位數!
- (b) 實際聲速為  $c = 350 \text{ m/s}$ ，考慮聲音傳播時間後，求懸崖高度  $h'$ 。
- (c) 已知  $h' - h = \frac{A_1}{c} + \frac{A_2}{c^2} + \dots$ ，求  $A_1$  的表達式。

### 三. 超導體守恆量

假設在一個超導體中，單位體積有  $n_s$  個超導電子。這些電子不受阻力，造成電流密度（單位面積的電流） $\vec{J}_s$ ，且受到外加電場  $\vec{E}$ 。

- (a) 求  $\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t}$ ，以  $\vec{E}$  與其他參數表示。

馬克士威方程組描述了電場  $\vec{E}$  與磁場  $\vec{B}$  的特性。使用 CGS 制，其在真空中微分形式為

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \left( 4\pi\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

其中  $\rho$  是電荷密度，而  $c$  為光速。 $\nabla$  為向量微分算子，沒看過的話可以暫時把它當成有「微分」功能的向量，但考完一定要去弄懂它是什麼!

(b) 由 (a) 的結果可得  $\vec{B} + k\nabla \times \vec{J}_s = \text{定值}$ ，求  $k$ 。由邊界條件可知此定值為零

(c) 已知  $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ 。若  $yz$  平面是超導體表面， $+x$  為進入超導體的方向，

$\nabla^2 \vec{B}$  相當於  $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$ ，磁場會以  $B \propto e^{-\frac{x}{\lambda}}$  衰減，求  $\lambda$ 。

#### 四. RLC 電路

電阻  $R$ 、電感  $L$ 、電容  $C = 1.0 \mu\text{F}$  與正弦波產生器串聯。實驗時，測量不同輸出頻率  $f$  下的方均根電壓  $V_{rms}$  與電流  $I_{rms}$ 。取頻率平方  $f^2$  與某適當變量  $Y$  作圖，可得  $Y = af^2 + b$  的直線。

(a) 求  $Y = af^2 + b$  形式的式子。

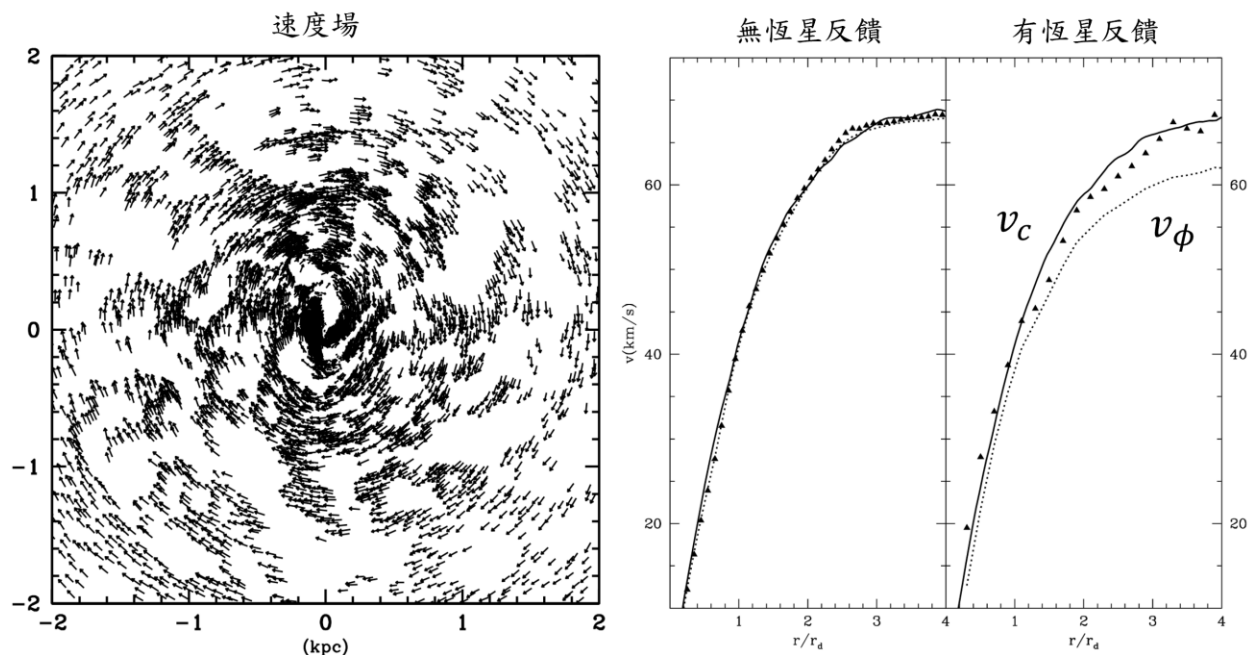
(b) 測得數據如下表。求電感  $L$ 。

| $f$ (Hz) | $V_{rms}$ (V) | $I_{rms}$ (mA) | $\omega = 2\pi f$   | $Z = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}$ ( $\Omega$ ) |
|----------|---------------|----------------|---------------------|--|
| 1000     | 10.00         | 62.95          | $6.283 \times 10^3$ | 158.84                                     |
| 1500     | 10.00         | 94.66          | $9.425 \times 10^3$ | 105.64                                     |
| 2500     | 10.00         | 159.02         | $1.571 \times 10^4$ | 62.88                                      |
| 6000     | 10.00         | 405.50         | $3.770 \times 10^4$ | 24.66                                      |

## 五. 星系旋轉曲線

星系是由恆星、塵埃、氣體、暗物質等組成的系統。我們的銀河系是一個螺旋星系。在這中星系，可見物質常分佈於旋轉盤中。透過測量物質旋轉速度隨距離的關係，我們可以得知星系的質量分布。這種關係稱作旋轉曲線(rotation curve)，而它是暗物質存在的重要證據。然而，天文學家發現，觀測得到的實際旋轉速度 $v_\phi$ (圖中虛線)和用萬有引力算出的旋轉速度 $v_c$ (圖中實線)有些微差距。附圖是流體動力學模擬的結果，在有恆星反饋 (stellar feedback, 即恆星可以源源不絕地生成) 的條件下，可觀察到 $v_\phi, v_c$ 的差異。天文學家認為這是氣體壓力隨距離變化所致。

- 令 $r$ 表示離星系中心的徑向距離， $M(r)$ 表示以星系中心為球心，半徑 $r$ 的球所包含的質量，以上述物理量與基本常數表示  $v_c(r)$ 。
- 求  $v_\phi(r)$ ，以 $v_c(r)$ 、氣體密度 $\rho(r)$ ，壓力 $p(r)$ 與其微分等表示。
- 由附圖判斷  $\frac{dp(r)}{dr}$  的正負。在答案卷中填寫「正」或「負」。



Valenzuela, O., Rhee, G., Klypin, A., Governato, F., Stinson, G., Quinn, T., & Wadsley, J. (2007). *Is there evidence for flat cores in the halos of dwarf galaxies? The case of NGC 3109 and NGC 6822.* The Astrophysical Journal, 657, 773–789. <https://doi.org/10.1086/508674>

# 天物盃初賽與秒題大賽簡答

## 一. 找到手機了!!

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| (a) | $1.05 R_E$                        |
| (b) | 65.5 分鐘；若第一題回答「我不會:(」，答案為 67.1 分鐘 |

## 二. 懸崖有多高?

|     |                             |
|-----|-----------------------------|
| (a) | $(132.5 \pm 5.1) \text{ m}$ |
| (b) | 116.1 m                     |
| (c) | $-\frac{1}{2}g^2t^3$        |

## 三. 超導體守恆量

|     |   |
|-----|---|
| (a) | $\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}$ |
| (b) | $\frac{mc}{n_s e^2}$  |
| (c) | $\sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$                                  |

## 四. RLC 電路

|     |  |
|-----|--|
| (a) | $\left(\frac{V_{rms}}{I_{rms}}\right)^2 - \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} = 4\pi^2 f^2 L^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)$ ，或等價者 |
| (b) | 50 $\mu\text{H}$ (45~65 $\mu\text{H}$ 皆給分)   |

## 五. 星系旋轉曲線

|     |                          |
|-----|--------------------------|
| (a) | $\sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$ |
|-----|--------------------------|

|     |  |
|-----|--|
| (b) | $\sqrt{v_c^2(r) + \frac{r}{\rho(r)} \frac{dp(r)}{dr}}$ |
| (c) | 負  |

米聯元塔禁止搭利