第九屆天物盃P19至P23詳解

何承祐

August 2025

1 找到手機了!!

Sahur同學的手機不小心在沙烏地阿拉伯弄丟了。八名台灣選手在接駁車上東翻西找，一無所獲。幸運的是，兩個月後，熱心的Tralala在「法赫德國王石油與礦業大學 (KFUPM, 26.3°N, 50.3°E)」找到了。 然而，Sahur此時早已回國，住在「師大會館 (25.0°N, 121.5°E)」。 假設地球為半徑 R_E 的完美球體。

(a) 求穿過地球，連接 KFUPM 與師大會館的線段長度，以 R_E 表示。

球面座標：

$$\phi_1 = 26.3^\circ,\ \lambda_1 = 50.3^\circ; \quad \phi_2 = 25.0^\circ,\ \lambda_2 = 121.5^\circ.$$

將兩點的經緯度轉為地心直角座標：

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad x_i = R_E \cos\phi_i \cos\lambda_i, \quad y_i = R_E \cos\phi_i \sin\lambda_i, \quad z_i = R_E \sin\phi_i, \quad i = 1, 2.$$

其中 $\phi_1 = 26.3^\circ, \lambda_1 = 50.3^\circ$， $\phi_2 = 25.0, \lambda_2 = 121.5^\circ$。

兩點間的弦長即為

$$\begin{aligned} L &= \left\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right\| \\ &= R_E\sqrt{\left(\cos\phi_1\cos\lambda_1 - \cos\phi_2\cos\lambda_2\right)^2 + \left(\cos\phi_1\sin\lambda_1 - \cos\phi_2\sin\lambda_2\right)^2 + \left(\sin\phi_1 - \sin\phi_2\right)^2}. \end{aligned}$$

代入數值可得 $L \approx \boxed{1.05\,R_E}\Theta$

(b) Tralala 在 KFUPM 將手機高速射向空中，且手機飛行的軌跡恰好是半個橢圓。已知貼 地飛行的衛星週期為 $T_0 = 85.0$ min，請問 Sahur 在 Tralala 發射幾分鐘後可 拿到手機?

請見附圖。藍色粗線為手機的飛行軌跡，因為是半個橢圓，$a = R,\ b = a\sin\frac{\theta}{2}$，$\theta$ 為兩地和地心連線的張角. 又 $2R\tan\frac{\theta}{2} = L$，由此可得 $\theta = 63.3^\circ$. 根據 Kepler 第二定律，半橢圓掃過面積比率

$$\frac{A_{\text{sec}}}{A_{\text{tot}}} = \frac{A_1 + A_2}{A_{tot}}.$$

其中 $A_1 = \frac{A_{tot}}{2} = \frac{\pi ab}{2}$，$A_2 = \frac{1}{2}a^2\sin\theta$。 故飛行時間

$$\Delta t = T_0\left(\frac{A_1 + A_2}{A_{tot}}\right) \approx \boxed{65.5 \text{ min.}}$$

有三隊參賽者的答案是 42.5 min，錯誤之處在於 Kepler 第二定律的面積是指焦點和物體連線所掃過的面積 $A_1 + A_2$，而非橢圓中心和物理連線的掃過面積 A_1。

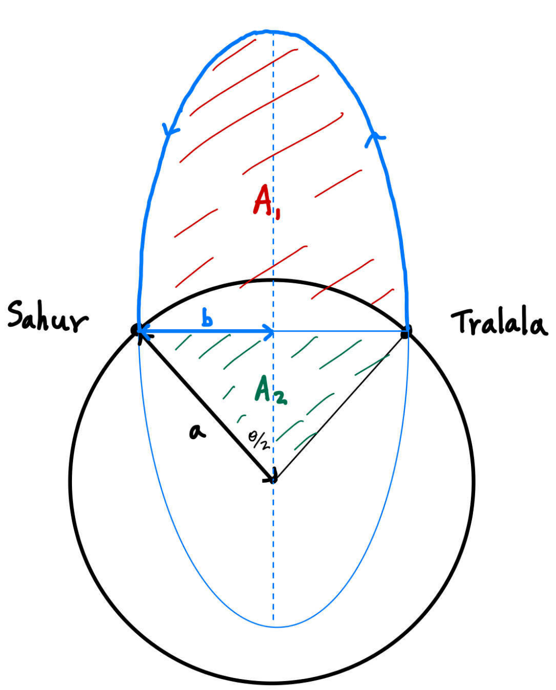

Figure 1: Sahur 和 Tralala 相對位置、軌跡與相關參數示意圖

二・懸崖有多高?

在沙烏地阿拉伯的世界之崖(Edge of the World)觀光時，Patapim 為了測量懸崖的高度 ， 把一顆大石頭水平拋出，並同時用手機計時，發現經過 $t \pm \Delta t = (5.20 \pm 0.10)\,\mathrm{s}$ 才聽到回 音。地表重力加速度$g = 9.800$ m/s^2，$c = 350$ m/s。

(a) 假設聲速無限大，求懸崖高度與其不確定度 $h \pm \Delta h$。記得取適當的位數!

$$h \pm \Delta h = \frac{1}{2} g\,(t+\Delta t)^2 = \frac{1}{2}(9.800)(5.20^2 \pm 2 \cdot 5.20 \cdot 0.10) = (132.5 \pm 5.1)\ \mathrm{m}$$

(b) 實際聲速為 $c = 350$ m/s，考慮聲音傳播時間後，求懸崖高度 h。

$$h' = \tfrac{1}{2} g \Big(t + \tfrac{h'}{c}\Big)^2 \quad \Longrightarrow \quad h' \approx 116.1\ \mathrm{m}.$$

(c) 已知 $h' - h = \frac{A_1}{c} + \frac{A_2}{c^2} + \cdots,$，求 A_1 的表達式。 由上一小題的方程式可解得

$$h' = ct + \frac{c^2}{g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\right)$$

如果你/妳得到一個一元二次方程式，不知道該取正根或負根，可將根號內做一次近似，並要求最終答案和 $c \to \infty$ 時相同。 為了得到更高階修正項，我們利用

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + O(x^4).$$

其中 $x = \frac{2gt}{c}$。代入 h' 表達式可得 $A_1 = -\frac{1}{2} g^2 t^3$。

三・超導體守恆量

設單位體積超導電子數 n_s、質量 m、電荷 e、電流密度 $\mathbf{J}_s = n_s e\,\mathbf{v}$、外加電場 $\mathbf{E}$。

(a)

$$\partial_t \mathbf{J}_s = n_s e\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = n_s e\,\frac{e\,\mathbf{E}}{m} = \frac{n_s e^2}{m}\,\mathbf{E}.$$

(b) Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}, \quad \partial_t \mathbf{E} = \frac{m}{n_s e^2}\,\partial_t^2 \mathbf{J}_s$$

整理得

$$\mathbf{E} + k\,\nabla \times \mathbf{J}_s = 0, \quad k = \frac{m\,c}{n_s e^2}.$$

(c) 若 $\mathbf{B} \propto e^{-x/\lambda}$，則

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{B},$$

由 (b) 得

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}.$$

四・RLC 電路

串聯 $R, L, C = 1.0\,\mu\mathrm{F}$，測不同 f 下 $V_{\mathrm{rms}}, I_{\mathrm{rms}}$。取

$$Y = Z^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}$$

對 f^2 作圖，得 $Y = a\,f^2 + b$。

(a)

$$Z^2 = R^2 + (\omega L - \tfrac{1}{\omega C})^2 \implies Y = L^2\omega^2 + (R^2 - 2\tfrac{L}{C}).$$

(b) 實測數據：

f (Hz)	I_{rms} (mA)	$\omega = 2\pi f$ (rad/s)	Y (Ω^2)
1000	62.95	6.283×10^3	25231.4
1500	94.66	9.425×10^3	11159.1
2500	159.02	1.571×10^4	3954.5
6000	405.50	3.770×10^4	608.2

線性回歸得斜率 $a = (2\pi)^2 L^2$，解出

$$L = \sqrt{\frac{a}{(2\pi)^2}} \approx 50\,\mu\mathrm{H}.$$

五・星系旋轉曲線

觀測星系旋轉速率 $v_\phi(r)$ 與理論 $v_c(r)$ 差異，認為壓力梯度所致。

(a)

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{m\,v_c^2}{r} \implies v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}.$$

(b)

$$m\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{GM(r)m}{r^2} - \frac{1}{\rho(r)}\frac{dp}{dr} \implies v_\phi(r) = \sqrt{v_c^2(r) + \frac{r}{\rho(r)}\frac{dp}{dr}}.$$

(c) 觀測顯示 $p(r)$ 隨 r 增大而減少，即 $\frac{dp}{dr} < 0$。