

RAPPORT TD ELEMENTS FINIS

Alexandre BOUCARD

Mai 2024

Encadrant :
Paul CUPILLARD

TABLE DES MATIÈRES

Les tests.....	3
Vérification de la quadrature.....	3
Test des coordonnées des sommets.....	3
Test de la correspondance d'un point dans le repère de référence.....	3
Test de la matrice jacobienne d'un élément.....	3
Tests de la matrice et du vecteur élémentaire.....	4
Test du vecteur de Neumann.....	4
Les simulations.....	4
Problème de Dirichlet pur.....	4
Problème de Dirichlet avec un terme source.....	6
Problème sinus bump.....	7
Problème de Dirichlet et de Neumann.....	10
Problème de diffusion de la chaleur dans un mug.....	11
Problème de géothermie.....	14

INDEX DES FIGURES

Figure 1: Schéma du problème de Dirichlet pur.....	4
Figure 2: Résultats du problème de Dirichlet pur. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh.....	5
Figure 3: Schéma du problème de Dirichlet avec un terme source.....	6
Figure 4: Résultats du problème de Dirichlet avec terme source. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh.....	7
Figure 5: Schéma du problème de Dirichlet avec un terme source.....	8
Figure 6: Résultats du problème sinus bump. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh	8
Figure 7: Résultats théorique du problème sinus bump. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh.....	9
Figure 8: Différence entre la solution expérimentale et la solution théorique du problème sinus bump. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh.....	9
Figure 9: Schéma du problème de Dirichlet et de Neumann.....	10
Figure 10: Résultats du problème de Dirichlet et de Neumann. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh.....	11
Figure 11: Schéma du problème du mug.....	12
Figure 12: Résultats du problème du mug. A : Maillage mug_1.mesh. B : Maillage mug_0_5.mesh. C : Maillage mug_0_2.....	13
Figure 13: Schéma du problème du mug.....	14
Figure 14: Résultats du problème de géothermie. A : Maillage geothermie_4.mesh. B : Maillage geothermie_0_5.mesh. C : Maillage geothermie_0_1.....	16

LES TESTS

Vérification de la quadrature

Le premier test effectué consistait à calculer l'intégrale d'une fonction simple sur un triangle de référence et de vérifier si on trouvait le même résultat via la quadrature.

Calcul de l'intégral :

$$\int_{\Delta} f(\xi, \eta) d\vec{\xi} = \int_{\Delta} 1 d\vec{\xi} = \frac{1}{2}$$

Calcul via la quadrature :

$$\sum_q w_q f(\vec{x}_q) = \sum_q w_q$$

On trouve bien que la somme des poids des sommets du triangle de référence est égal à 1/2.

Test des coordonnées des sommets

Ce test consistait à afficher les coordonnées des sommets d'un triangle du maillage pour s'assurer que la déclaration d'un objet de la classe *ElementMapping* fonctionne correctement.

Pour le triangle 4 du maillage carré, on trouvait bien :

- v0 : 0.625 | 1
- v1 : 0.639235 | 0.846329
- v2 : 0.734711 | 0.900627

Test de la correspondance d'un point dans le repère de référence

Ce test visait à vérifier le fonctionnement de la fonction *transform* de la classe *ElementMapping*.

On trouve bien comme résultat pour le triangle 4 du maillage carré :

- $A(\xi=0.2, \eta=0.4) \rightarrow A'(0.671731, 0.929517)$

Test de la matrice jacobienne d'un élément

Ce test avait pour objectif de vérifier le calcul de la matrice jacobienne calculer en un point via la fonction *jacobian_matrix* et le calcul du déterminant de cette matrice via la fonction *jacobian* de la classe *ElementMapping*.

On trouve pour le triangle 4 et un point $A(\xi=0.2, \eta=0.4)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0.0142 & 0.11 \\ -0.154 & -0.0994 \end{pmatrix} \text{ et } \det(J) = 0.0155$$

Tests de la matrice et du vecteur élémentaire

Ces tests avaient pour objectif de vérifier la fabrication de la matrice et du vecteur élémentaire pour un élément du maillage.

Pour le triangle 4, $k = 1$ et $f = 1$:

$$K_e = \begin{pmatrix} 0.391 & -0.164 & -0.226 \\ -0.164 & 0.709 & -0.545 \\ -0.226 & -0.545 & 0.771 \end{pmatrix} \text{ et } F_e = \begin{pmatrix} 0.00257 \\ 0.00257 \\ 0.00257 \end{pmatrix}$$

Test du vecteur de Neumann

Ce test avait pour objectif de vérifier la création d'un vecteur élémentaire de Neumann.

LES SIMULATIONS

Problème de Dirichlet pur

Ce problème est le premier problème à traiter. Il s'agit de résoudre un problème sur un maillage carré où on impose uniquement des conditions de Dirichlet [Figure 1].

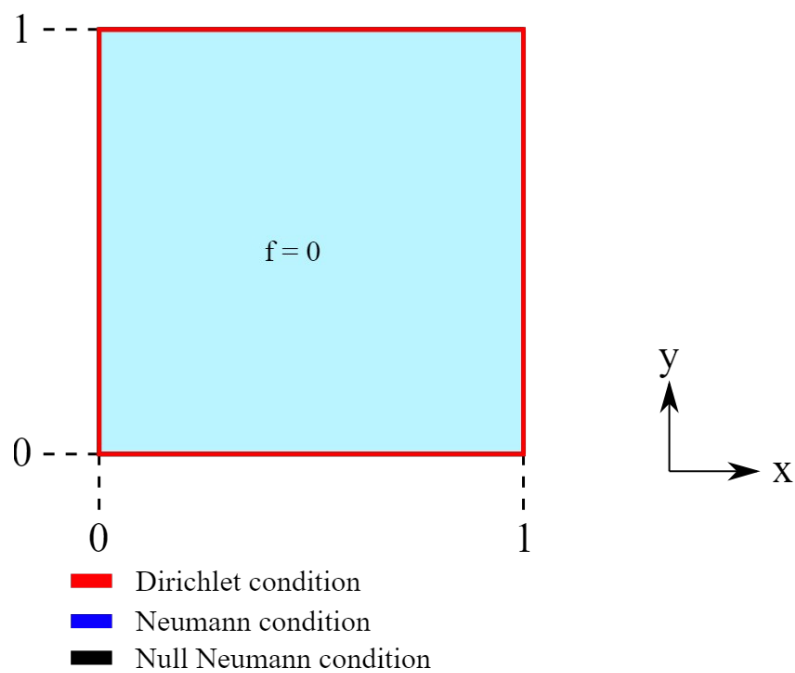


Figure 1: Schéma du problème de Dirichlet pur

Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet : $u = x + y$
- Coefficient de diffusion : $k = 1$ (constant)

Le résultat de ce problème est présenté Figure 2 pour 2 types de maillage carré. La première chose que l'on remarque est que les valeurs sont bien comprises entre des valeurs très faibles de l'ordre de 10^{-5} (correspondant à la condition $x = 0$ et $y = 0$) et 2 (correspondant à la condition $x = 1$ et $y = 1$).

Le maillage plus fin permet une plus grande précision pour la borne inférieure et semble avoir un gradient plus fluide que le pour le maillage plus grossier.

Pour ce problème, il est difficile de relever des différences significatives entre les 2 maillages.

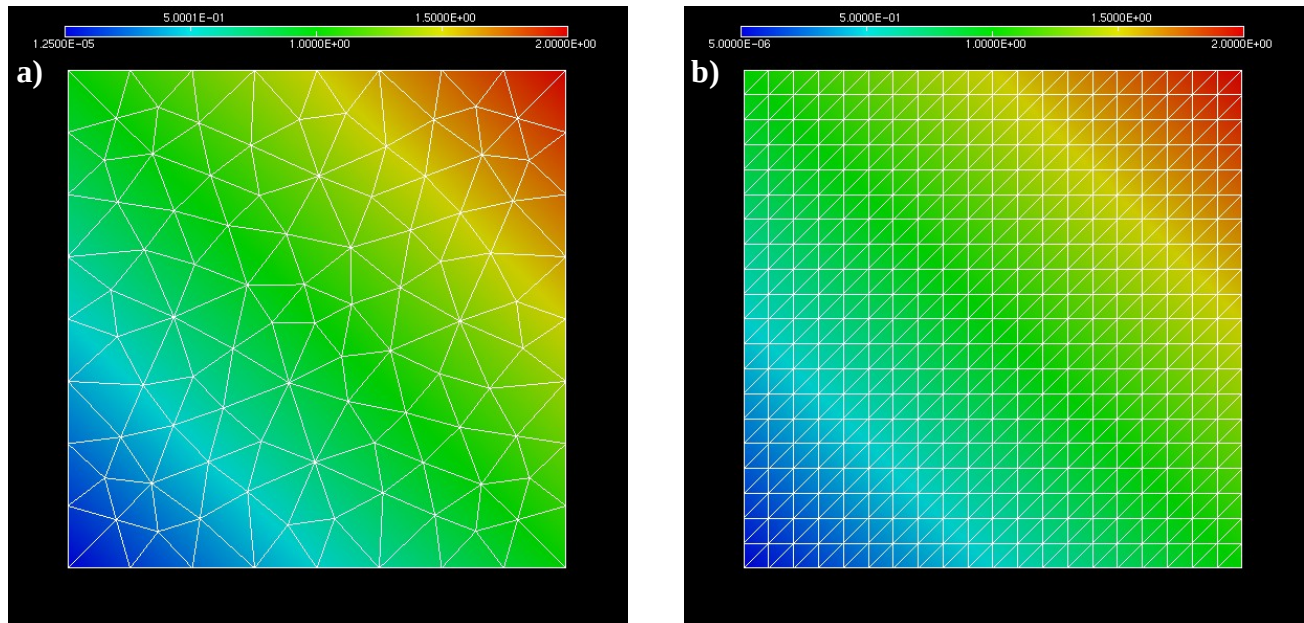


Figure 2: Résultats du problème de Dirichlet pur. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh

Problème de Dirichlet avec un terme source

On reprend la même situation que pour le problème précédent en ajoutant cette fois-ci un terme source [Figure 3].

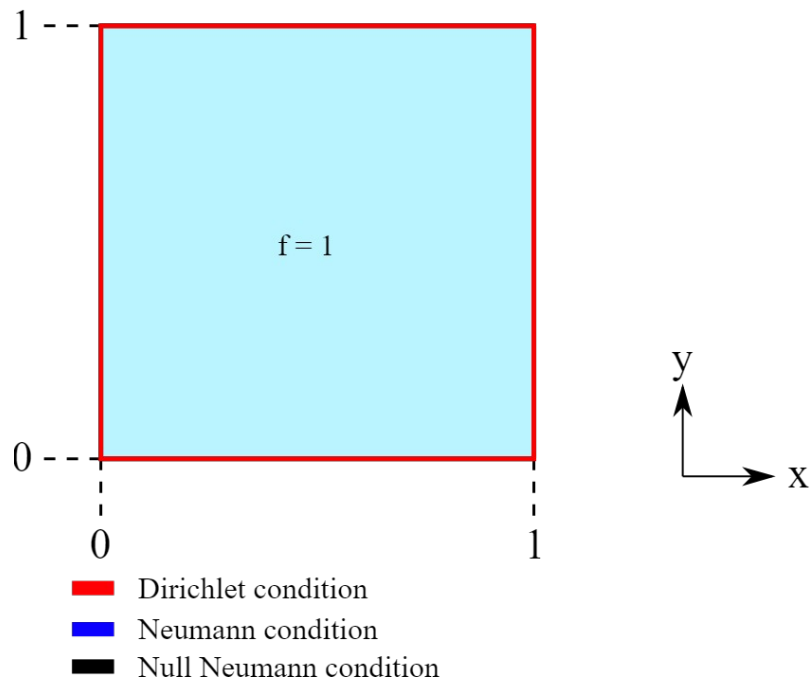


Figure 3: Schéma du problème de Dirichlet avec un terme source

Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet : $u=0$
- Coefficient de diffusion : $k=1$ (constant)
- Terme source : $f=1$ (constant)

Le résultat de ce problème est présenté Figure 4 pour 2 types de maillage carré.

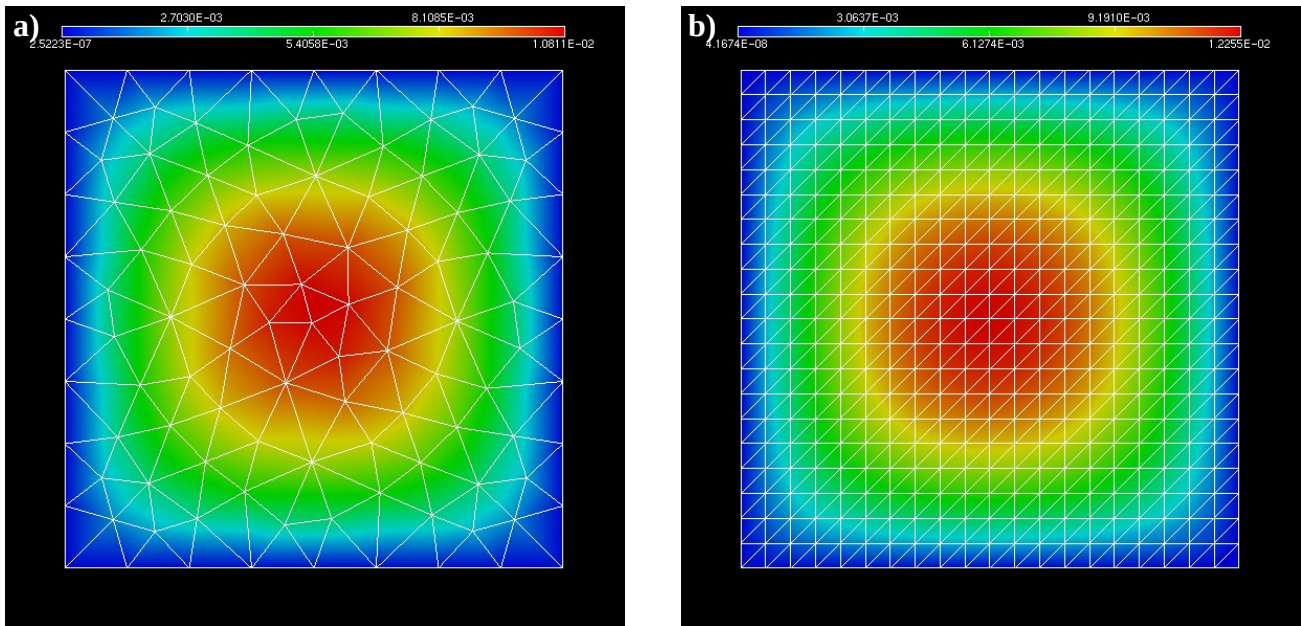


Figure 4: Résultats du problème de Dirichlet avec terme source. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh

Il est possible de relever plusieurs différences entre les 2 maillages :

- Tout d'abord concernant les valeurs : la borne inférieure du maillage le plus grossier est plus proche d'une valeur nulle que pour le maillage le plus fin. Pour la borne supérieure, le maillage fin possède une valeur légèrement plus élevée.
- Concernant l'allure de la solution : le maillage fin présente une solution plus lisse, plus arrondie, plus continue que le maillage plus grossier (chose très visible lorsque l'on suit la limite bleu clair des deux figures)

Même si les valeurs ne sont pas identiques, le maillage plus fin a l'avantage de permettre une plus grande précision pour la position spatiale des données.

Problème sinus bump

Ce problème est similaire au précédent, seul la valeur du terme source sera différente [Figure 5].

Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet : $u=0$
- Coefficient de diffusion : $k=1$ (constant)
- Terme source : $f=2.\pi^2.\sin(\pi x).\sin(\pi y)$

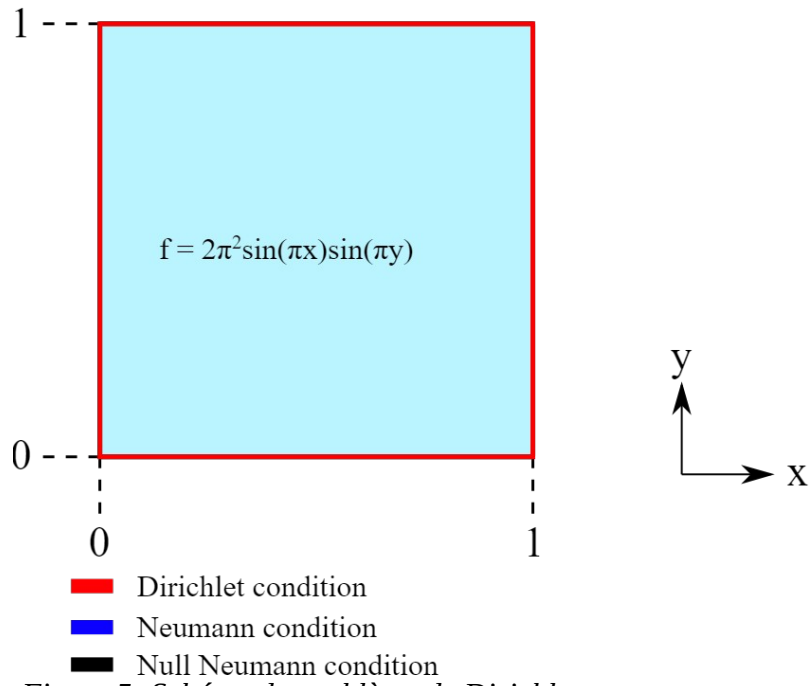


Figure 5: Schéma du problème de Dirichlet avec un terme source

Le résultat de ce problème est présenté Figure 6 pour 2 types de maillage carré.

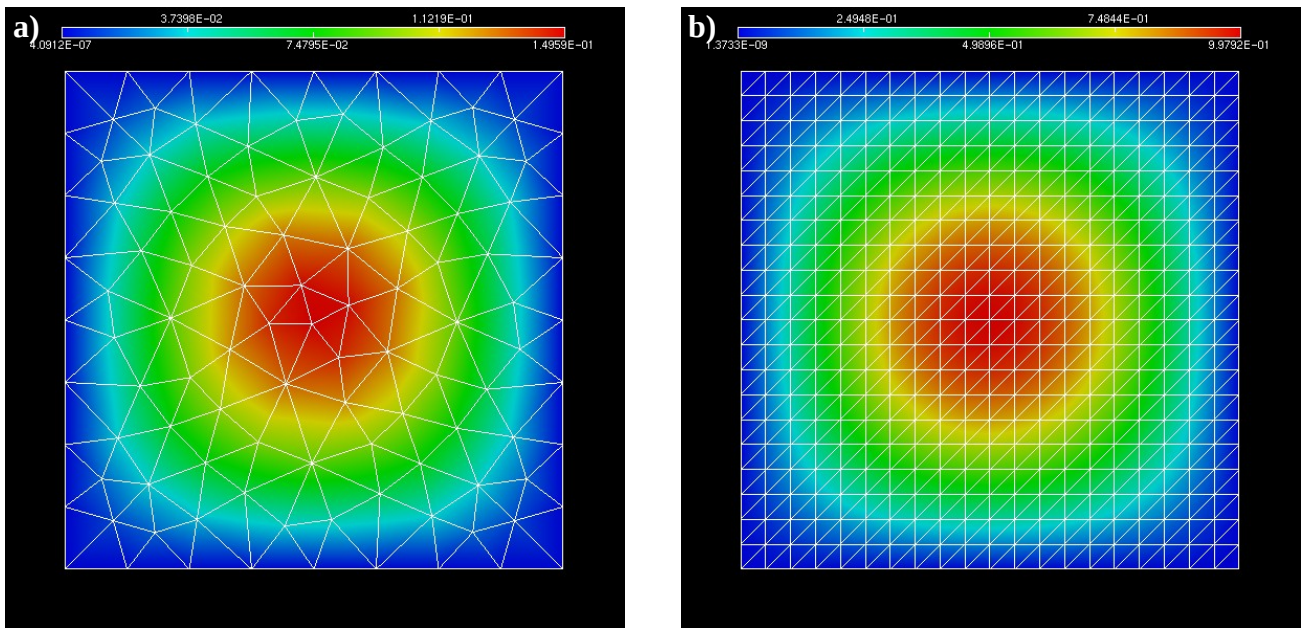


Figure 6: Résultats du problème sinus bump. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh

Là encore les valeurs aux bornes ne sont pas identiques pour les deux maillages, mais au moins elles correspondent aux conditions : proche de la bordure les valeurs sont proches de 0 (10^{-7} , 10^{-9}) et un centre impacté par le terme source ($f = 2 \cdot \pi^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$)

Il est possible de comparer la solution trouver par nos méthodes de calcul et la solution analytique [Figure 7]

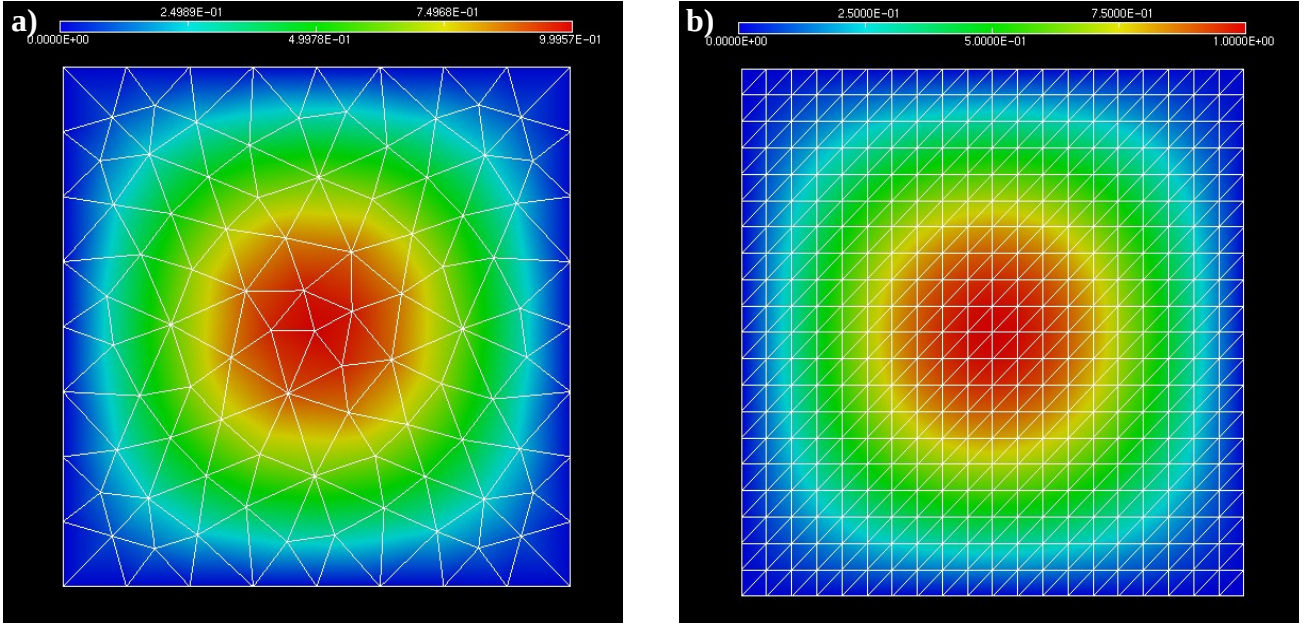


Figure 7: Résultats théorique du problème sinus bump. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh

La solution analytique se présente de la manière suivante : $u = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$. Il est donc normal de trouver des valeurs nulles sur les bordures et des valeurs très proche de 1 (voir égale) au centre.

La meilleure façon de constater la différence entre notre solution et la solution théorique est de calculer $u_{\text{exp}} - u_{\text{th}}$ [Figure 8]

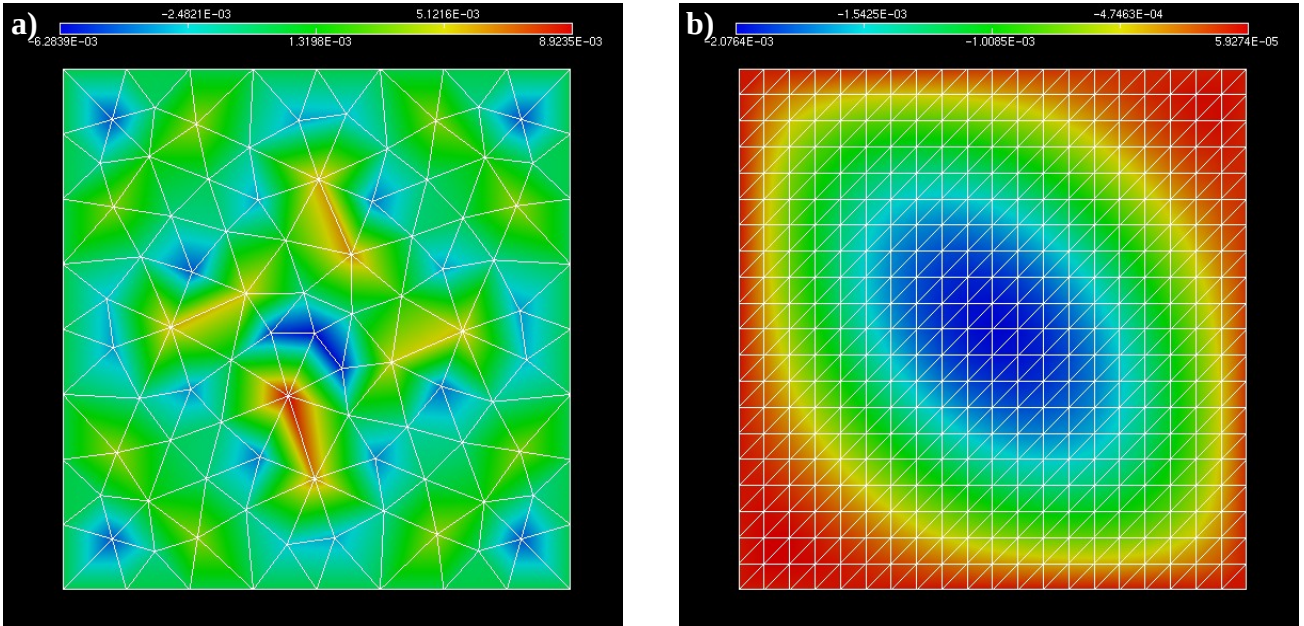


Figure 8: Différence entre la solution expérimentale et la solution théorique du problème sinus bump. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh

Commençons par analyser le résultat pour le maillage grossier [Figure 8, a)]. Les valeurs rouges et bleues montrent un gros écart ($\sim 0,01$) entre les deux solutions tandis que les valeurs vertes montrent un écart plus faible ($\sim 0,001$). Les erreurs les plus importantes ne semblent pas avoir de schéma défini mais se situent au niveau de certains nœuds et le long de certains côtés.

Concernant le maillage le plus fin [Figure 8, b)], les plus grosses différences entre les deux solutions sont les valeurs bleues ($\sim -0,002$) et les différences les plus petites sont rouges ($\sim 0,00006$). Cette fois l'erreur ne semble pas présenter sur les nœuds mais suit une tendance globale. Plus on se rapproche de la bordure, plus l'erreur devient petite mais à l'inverse plus on se rapproche vers le centre, plus l'erreur augmente (il ne sera pas mentionné l'asymétrie du résultat).

Pour conclure sur ce problème et le rôle des différents maillages, le maillage grossier permet une erreur globale plutôt faible tout en possédant sur certains nœuds des erreurs très fortes tandis que le maillage plus fin permet une quasi-exactitude des données proche des conditions de Dirichlet et possède une légère erreur lorsqu'on s'éloigne de ces conditions (erreur tout de même moins importante que pour le précédent maillage).

Problème de Dirichlet et de Neumann

On va introduire une condition de Neumann pour ce problème. Un flux de chaleur sera imposé sur la frontière gauche et une valeur fixe sur la frontière droite [Figure 9].

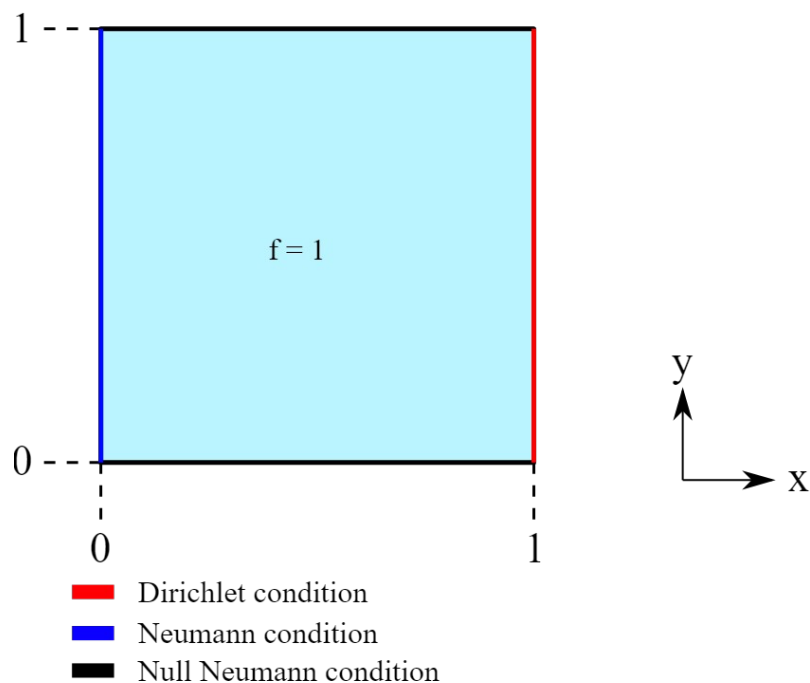


Figure 9: Schéma du problème de Dirichlet et de Neumann

Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet : $u=0$
- Condition de Neumann : $h=\sin(\pi y)$
- Coefficient de diffusion : $k=1$ (constant)
- Terme source : $f=1$ (constant)

La solution de ce problème est présentée [Figure 10].

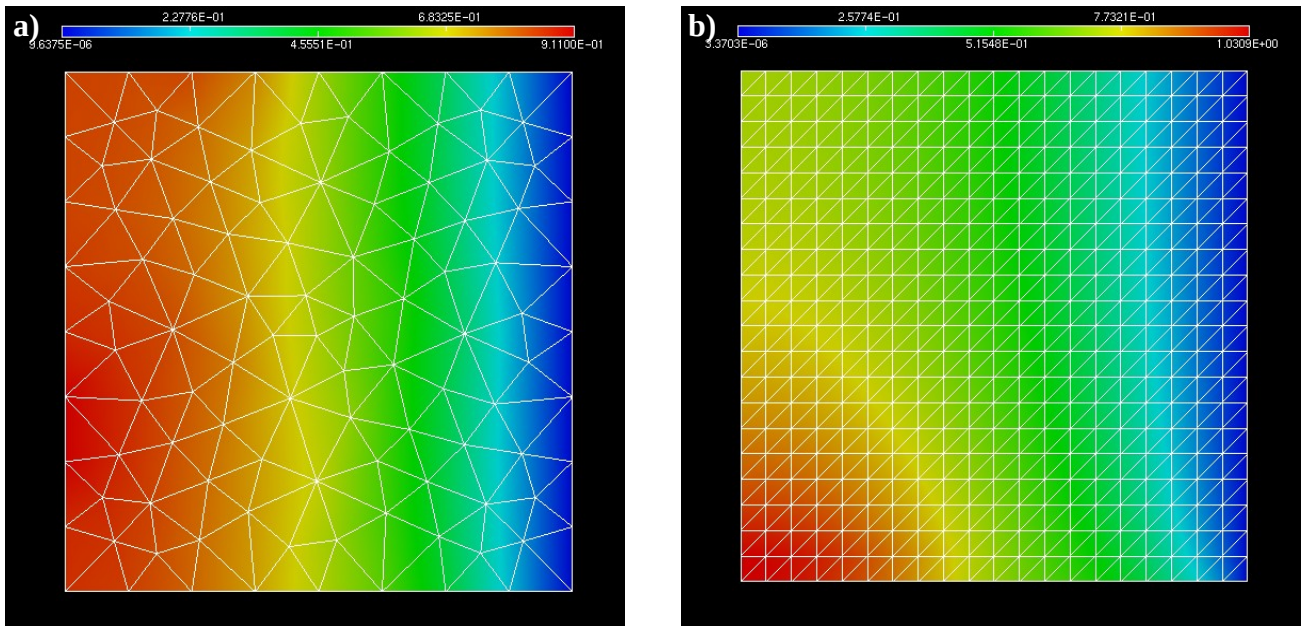


Figure 10: Résultats du problème de Dirichlet et de Neumann. A : Maillage carre.mesh. B : Maillage carre_fine.mesh

Pour le maillage grossier [Figure 10, a)], la condition de Dirichlet semble être respectée mais la condition de Neumann ne semble pas avoir été appliquée correctement. La forme de la condition de Neumann était la suivante : $h = \sin(\pi y)$, ainsi les valeurs prises sur la bordure gauche ne devraient pas être constantes et identiques.

Pour le maillage fin [Figure 10, b)], la condition de Dirichlet a bien été respectée aussi mais la bordure gauche n'est pas identique au maillage précédent. Pour ce maillage on trouve bien des valeurs variables, mais on a du mal à discerner le sinus de la condition.

Pour ce problème deux questions se posent : la condition de Neumann a-t-elle été bien appliquée ? Si oui, le maillage fin semble mieux la prendre en compte que le maillage grossier.

Problème de diffusion de la chaleur dans un mug

Ce problème s'intéresse à la diffusion thermique au sein d'un mug contenant de l'eau bouillante [Figure 11].

Les conditions sont les suivantes :

- Conditions de Dirichlet : $u=100$
- Condition de Neumann : $h=-0,1$
- Coefficient de diffusion : $k=1$ (constant)
- Terme source : aucun

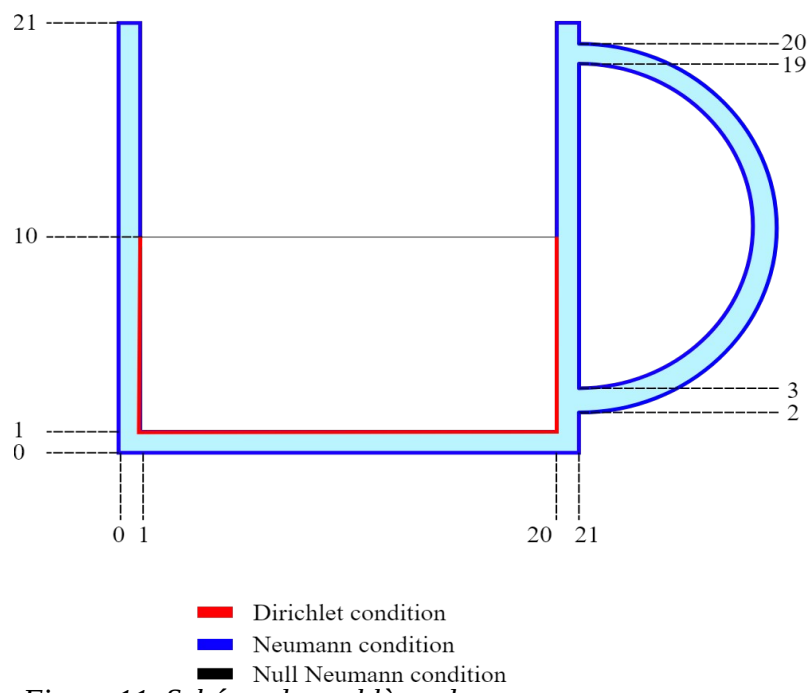
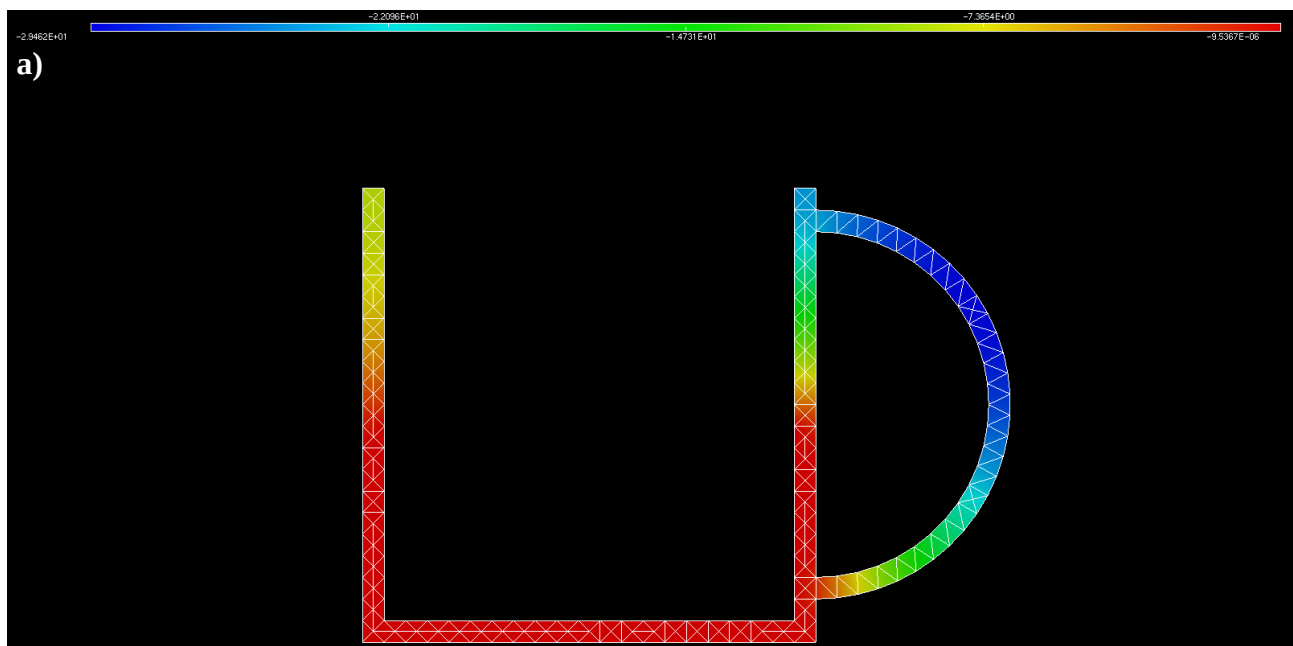


Figure 11: Schéma du problème du mug

La solution de ce problème a été calculé pour les différents maillages disponibles [Figure 12].



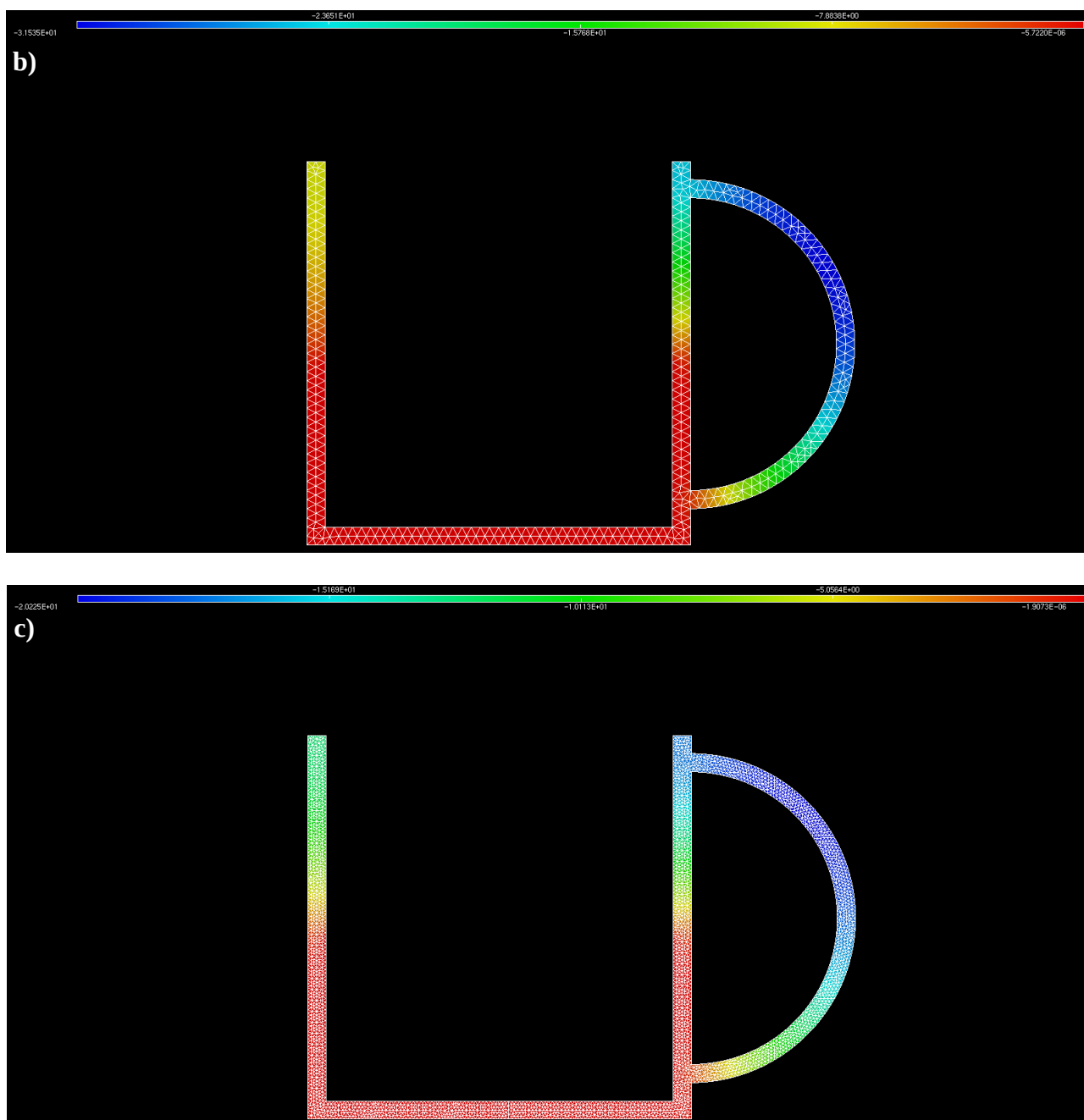


Figure 12: Résultats du problème du mug. A : Maillage mug_1.mesh. B : Maillage mug_0_5.mesh. C : Maillage mug_0_2

Pour l'ensemble des maillages, les valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-30 ; -0,000005]$. La condition de Dirichlet ne semble pas être strictement respectée, néanmoins on constate bien que les parties les plus « chaudes » (comportant les valeurs les plus élevées) se situe au fond du mug, où la condition de Dirichlet était posée. A mesure que le maillage se peaufine, les valeurs semblent mieux se répartir. Ceci est surtout visible sur la partie gauche du maillage, si pour les premiers maillages la partie la plus haute possède une valeur proche de -7 tandis que pour le maillage le plus fin cette valeur est plus proche de $-0,1$.

Les différents maillages montrent un résultat sensiblement identique : une partie plus chaude au fond du mug et une poignée plus froide, pour tenir le mug. La taille du maillage joue surtout sur la précision des valeurs.

Problème de géothermie

Pour ce problème, deux couches géologiques sont définies où une couche produit de la chaleur et la seconde possède un fort potentiel isolant [Figure 13].

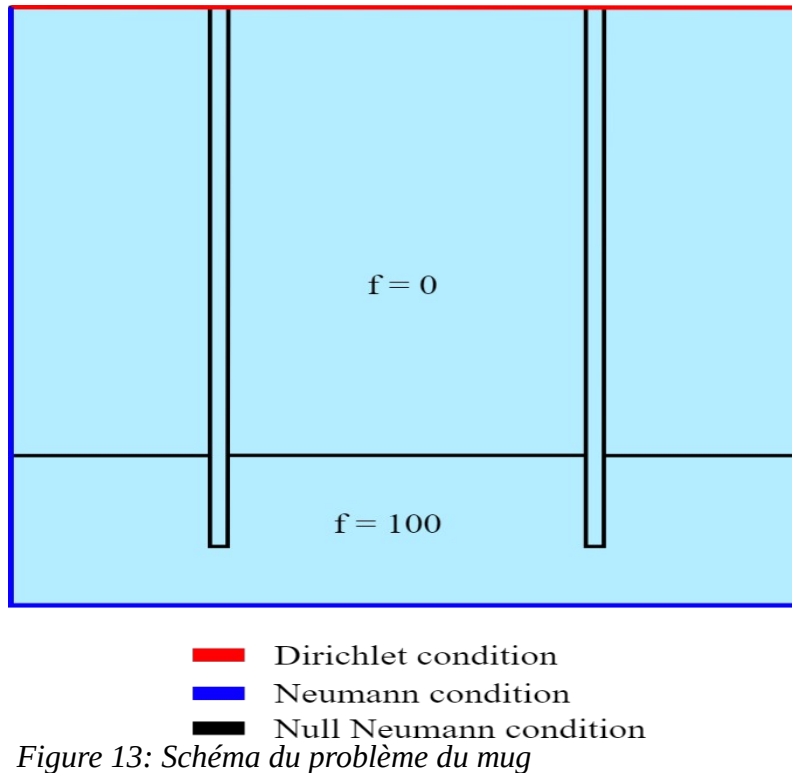


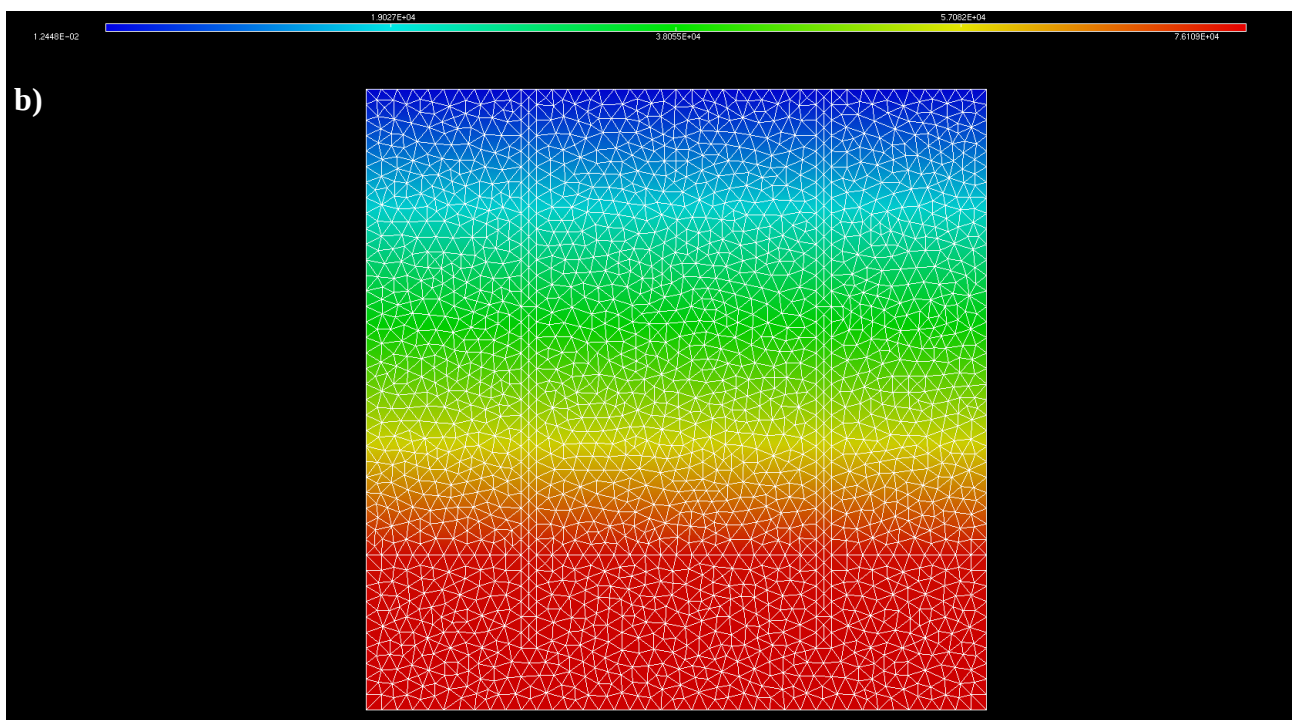
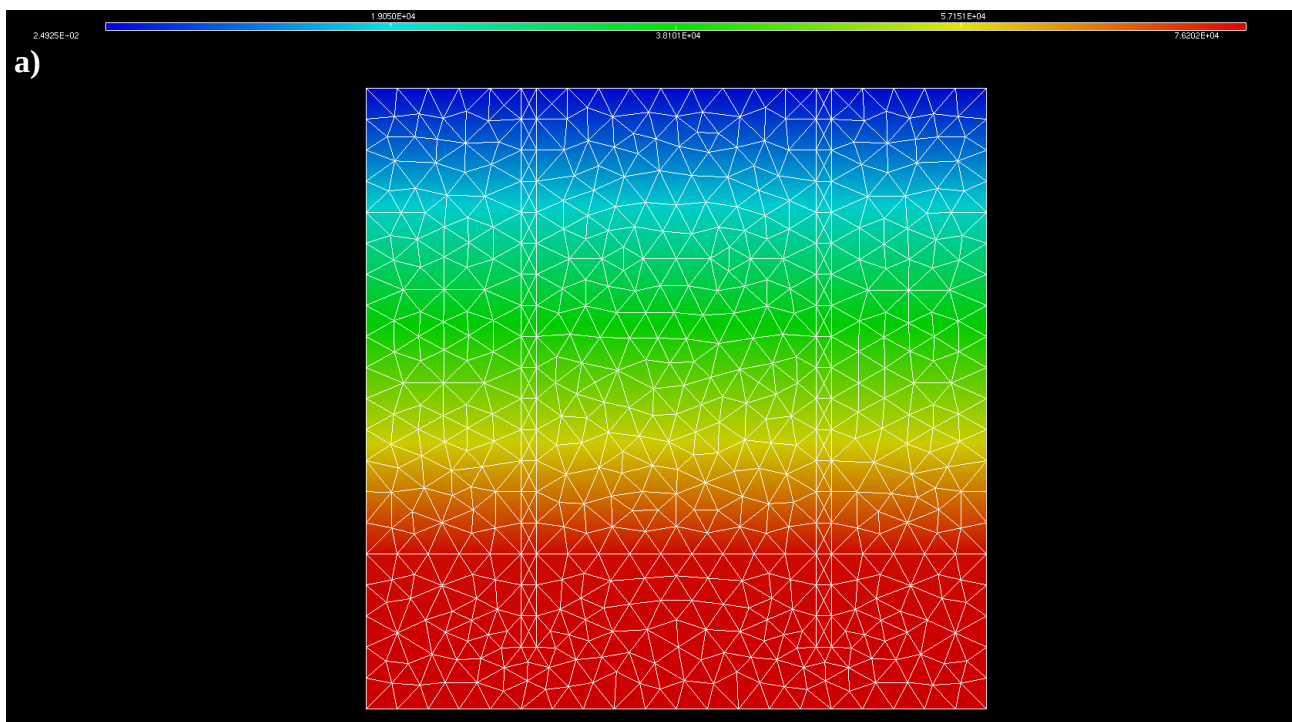
Figure 13: Schéma du problème du mug

Conditions de ce problème :

- Conditions de Dirichlet : $u=100$
- Condition de Neumann : $h=-0,1$
- Coefficient de diffusion : $k=1$ pour la couche inférieure, $k=0,1$ pour la couche supérieure
- Terme source : $f=100$ pour la couche inférieure, $f=0$ pour la couche supérieure

Le résultat a été calculé pour différent maillage [Figure 14].

Les valeurs sont comprises entre 0,02 et 76000. Pour tous les maillages, on observe que la couche inférieure produit de la chaleur, et cette chaleur diminue à mesure qu'elle traverse la couche supérieure définie comme étant isolante. La taille du maillage n'a pas l'air d'avoir d'impact marquant dans ce problème (excepté pour le temps de calcul).



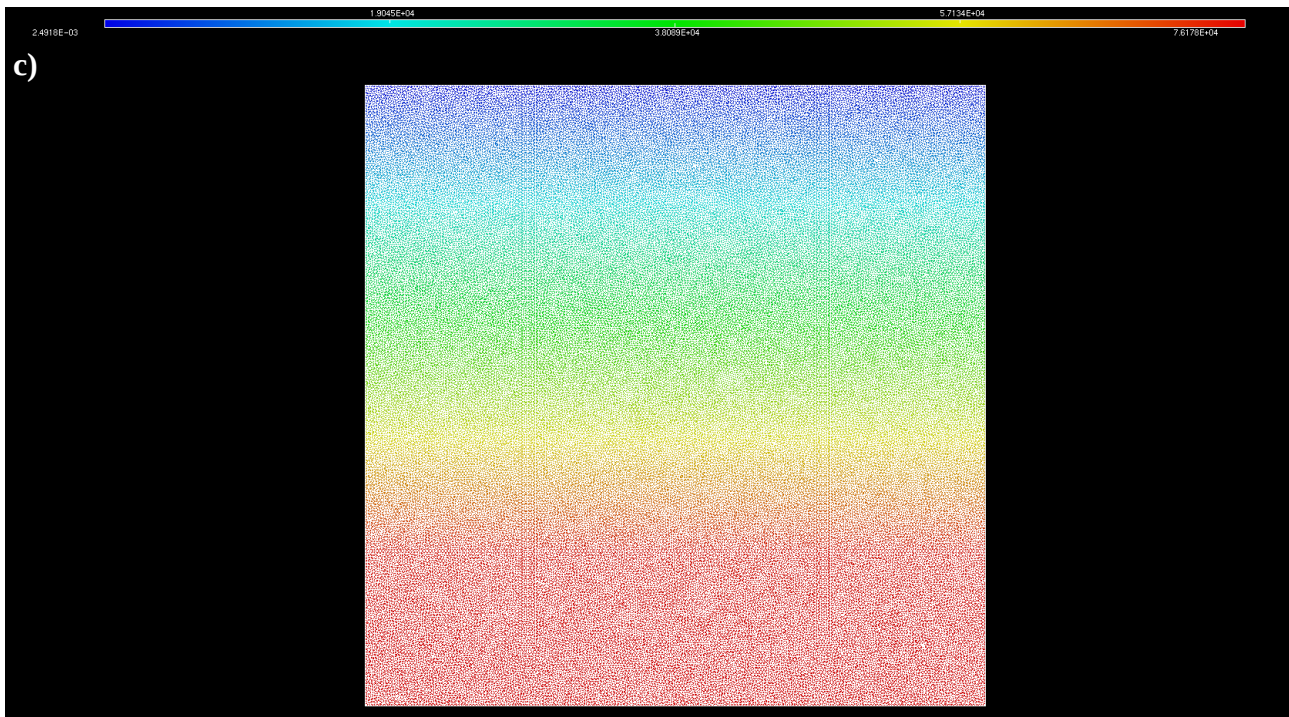


Figure 14: Résultats du problème de géothermie. A : Maillage geothermie_4.mesh. B : Maillage geothermie_0_5.mesh. C : Maillage geothermie_0_1