理论背景

竞争交易的启示

无套利条件意味着在任意时间 t，对于任何给定资产 i 的价格可以被写作：

$$P_{i,t} = \sum_s \pi_{t+1}(s) m_{t+1}(s) x_{i,t+1}(s)$$

s代表某种自然状态，π代表该状态发生的概率，m非负的折现权值。x是支付额，对于股票可以定义为：$x_{i,t+1} = P_{i,t+1} + d_{i,t+1}$。无套利定价共识还可写成：

$$P_{i,t} = E_t\left(m_{t+1} x_{i,t+1}\right) \tag{1}$$

对于无风险资产 f，x不取决于s，因此他的定价公式可以写作：

$$P_{f,t} = x_{f,t+1}(s) \sum_s \pi_{t+1}(s) m_{t+1}(s)$$

因此，我们可以将$\sum_s \pi_{t+1}(s) m_{t+1}(s)$定义成时期 t 时的安全资产无风险贴现率$R_{f,t}$：

$$\sum_s \pi_{t+1}(s) m_{t+1}(s) \equiv 1/(1 + R_{f,t})$$

因为折现和风险时不可忽视的，因此对竞争性交易基本应用进行检验时，需要考虑折现因子m的性质：它平均而言多大，波动多少，更广义上来说他的时间序列性质如何。因此，检验无套利理论时，还涉及到检验一个关于 m 如何变化的特定理论。

假定我们讨论一个无风险资产 f 和一个风险资产 i。我们可将式（1）写成：

$$P_{i,t} = \frac{E_t(x_{i,t+1})}{1 + R_{f,t}} + var_t(m_{t+1}) \frac{cov_t(m_{t+1}, x_{i,t+1})}{var_t(m_{t+1})}$$

折现因子$m_{t+1}(s)$可以被视作钱在状态 s 下的价值。

推导过程如下：

$$P_{i,t} = E_t\left(m_{t+1} x_{i,t+1}\right)$$

$$E_t\left(m_{t+1} x_{i,t+1}\right) = E_t\left(x_{i,t+1}\right) E_t(m_{t+1}) + cov_t(m_{t+1}, x_{i,t+1})$$

$$E_t(m_{t+1}) \approx 1/(1 + R_{f,t})$$

$$P_{i,t} = E_t\left(m_{t+1}x_{i,t+1}\right) = E_t\left(x_{i,t+1}\right)E_t(m_{t+1}) + cov_t(m_{t+1}, x_{i,t+1})$$
$$= \frac{E_t(x_{i,t+1})}{1+R_{f,t}} + var_t(m_{t+1})\frac{cov_t(m_{t+1}, x_{i,t+1})}{var_t(m_{t+1})}$$

因此，上述方程的意思就是，资产的价值取决于它的支付额与钱之间的协方差。如果协方差为负，也就是说在钱的价值低的时候资产支付额高，或者反之，那么资产的价值就比支付额的折现期望值要低。此外，差异项可以分解为两部分：资产的“风险载荷”（风险的大小）$var_t(m_{t+1})$以及“风险敞口” $\frac{cov_t(m_{t+1},x_{i,t+1})}{var_t(m_{t+1})}$。

定价公式可以表示为超出无风险资产的超额回报的期望：$E_t[(R_{i,t+1} - R_{f,t})m_{t+1}] = 0$，其中$1 + R_{i,t+1} = x_{i,t+1}/P_t$。因此：

$$E_tR_{i,t+1} - R_{f,t} = -(1 + R_{f,t})cov_t(m_{t+1}R_{i,t+1})$$

推导过程如下：

$$P_{i,t} = E_t\left(m_{t+1}x_{i,t+1}\right)$$

$$x_{i,t+1} = (1 + R_{i,t+1})\, P_{i,t}$$

$$P_{i,t} = E_t\left(m_{t+1}(1 + R_{i,t+1})\, P_{i,t}\right)$$

$$1 = E_t\left(m_{t+1}(1 + R_{i,t+1})\,\right)$$

$$E_t(m_{t+1}) \approx 1/(1 + R_{f,t})$$

$$E_t\left(m_{t+1}(1 + R_{i,t+1})\,\right) - (1 + R_{f,t})E_t(m_{t+1}) = 0$$

$$E_t\left(m_{t+1}(R_{i,t+1} - R_{f,t})\,\right) = 0$$

$$Cov_t(m_{t+1}, R_{i,t+1} - R_{f,t}) = E_t[m_{t+1}(R_{i,t+1} - R_{f,t})] - E_t[m_{t+1}]E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t}].$$

$$Cov_t(m_{t+1}, R_{i,t+1} - R_{f,t}) = -E_t[m_{t+1}]E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t}]$$

$$Cov_t(m_{t+1}, R_{i,t+1} - R_{f,t}) = -\frac{1}{1 + R_{f,t}}E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t}]$$

$$(1 + R_{f,t})Cov_t(m_{t+1}, R_{i,t+1} - R_{f,t}) = -E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t}]$$

因为无风险利率是一个常数，所以$Cov_t(m_{t+1}, R_{f,t}) = 0$，

$$E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t}] = -(1 + R_{f,t})Cov_t(m_{t+1}, R_{i,t+1})$$

那些随即折现因子高（也就是支付额对投资者价值更高时）回报低的资产必须有更高的“风

险溢价”，即超出无风险利率的超额回报。超额回报平均有多大？他们如何随时间而变化？它们如何根据资产种类不同而变化？

随机折现因子相关理论

目前有两种方式来研究随机折现因子 m 的决定因素：一种是基于理性的投资者行为，但是可能涉及较为复杂的制度以及投资者的异质性等；另一种是基于投资者行为的心理学模型，通常被称为行为金融。

理性投资者理论

基于理性投资者行为假设的理论通过对于偏好的假设，把随机折现因子同投资者行为联系起来。这一理论假设投资者作出投资组合的决定时，是为了使消费达到期望的时间和风险特征，这样就把市场均衡时投资者面对的资产价格与投资者自身的福利联系起来了。这种联系通过 m 来体现，它可以捕捉效用中影响资产估值的方面。通常情况下，关键的联系来自于消费的时间特征。导出这一联系的一种基本模型就是 CCAPM。它拓展了个股价格的静态 CAPM 理论，为决定市场组合估值的因素提供了一个基于消费的动态理论。CCAPM 是基于对投资者效用函数和对风险的态度的关键假设，大部分实证工作旨在根据资产价格而推断该效用函数的性质。

最基本的 CCAPM 模型里有一个具有时间可加性偏好的“代表性投资者”，其处在一个完备的市场环境，即每个自然状态下至少有一个独立资产。这一理论由此推导出 m 是 t+1 时刻和 t 时刻代表性投资者消费水平的函数。

为了更好地使 CCAPM 符合实证结果，人们开始对该模型进行扩展以便处理更复杂的投资者偏好（如时间不可分割性，习惯的习得，厌恶的模糊性，及稳健性），投资者的异质性，不完备的市场，以及各种市场约束，比如借贷限制和保证金限制。

行为金融

对数据中观察到m的隐含波动的另一种解释是基于投资者并非完全理性的观点。学者们从很多方面探究了投资者行为如何偏离理性。一种类型的偏离是用经济心理学文献中提出的函数取代传统的期望效用函数。一个突出的例子是 2002 年获奖者 Daniel Kahneman 和 Amos Tversky 提出的前景理论。另一种方法基于市场情绪，即考虑市场预期非理性地乐观

或悲观的情况。然而，这也为理性投资者利用非理性投资者错误认知所创造的套利机会获利提供了可能性。理性套利交易会将价格推回到非行为理论预测的水平。因此，行为金融模型通常还涉及制度决定的套利限制。

将行为因素与套利限制相结合可能会产生基于行为的随机折现因子，其决定因素与传统理论得出的决定因素不同。例如，如果使用方程 (1) 从数据中估计 m 并假设理性预期（错误），则较高的 m 值可能是由于乐观情绪造成的，且无法反映消费变动。换句话说，数据可能会满足 (1) 这样的方程，但由于预期算子对好的结果赋予了过高的权重，因此计量经济学家会高估 m。

CAPM 及资产收益的横截面差异

$$P_{i,t} = \frac{E_t(x_{i,t+1})}{1+R_{f,t}} + var_t(m_{t+1}) \frac{cov_t(m_{t+1}, x_{i,t+1})}{var_t(m_{t+1})}$$

根据这个式子，我们可知个股的价格可以写成下一期收益的现值以无风险利率折现加上由资产的风险大小$var_t(m_{t+1})$乘以风险敞口$\frac{cov_t(m_{t+1}, x_{i,t+1})}{var_t(m_{t+1})}$构成的风险溢价。后一个项是特定资产的“$\beta$”，即以资产收益为因变量，$m$ 为自变量回归的斜率系数。这就表达出了 CAPM 的一个关键特征。具有高 β 的资产应该价格较低(等价于带来更高的预期收益)，因为它风险更大，而风险是由它和 m 的协方差定义的。特别地，CAPM 用市场组合的收益作为 m。更普遍来说，因为股票一般会随不同因子作不同的变化，我们可以找出几个决定 m 的因子，并且可以指定资产回报横截面的更丰富的多因子模型。