

# CADENAS DE MARKOV

Calixtro Ames Cynthia Lizeth 1, Nesiosup Vilca Marcia Paulina 2

Huamaní Inga Alex Raúl 3, Romero Gómez Yasmyn Stephany 4

*E.P.Ciencia de la computación 1, Facultad de Ciencias 1, Universidad Nacional de Ingeniería 1,  
e-mail:ccalixtroa@uni.pe*

*E.P.Matemática 2, Facultad de Ciencias 2, Universidad Nacional de Ingeniería 2,  
e-mail:marcia.nesiosup@gmail.com*

*E.P.Matemática 3, Facultad de Ciencias 3, Universidad Nacional de Ingeniería 3, e-mail:ahuamanii@uni.pe*

*E.P.Matemática 4, Facultad de Ciencias 4, Universidad Nacional de Ingeniería 4, e-mail:*

## Resumen

Una cadena de Markov es una serie de eventos, en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior. En efecto, las cadenas de este tipo tienen memoria, "recuerdan" el último evento y esto condiciona las posibilidades de los eventos futuros. Esta dependencia del evento anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado. En el presente estudio realizamos un estudio general de las cadenas de markov, su convergencia y la implementación de un algoritmo (empleando el lenguaje de programación R) que nos permita simular 3 diferentes tipos de cadenas de Markov (irreducibles, periódicas y estacionarias).

Palabras Claves: Cadenas, Markov, Implementación, Estocástico.

Keywords: Chains, Markov, Implementation, Estochastic.

## 1. INTRODUCCIÓN

Para una mejor comprensión de las cadenas de Markov y la posterior simulación de algunos ejemplos empezaremos por establecer algunos conceptos previos requeridos.

### 1.1. CONCEPTOS

#### *Procesos Estocásticos*

Un proceso estocástico se puede definir equivalentemente de las siguientes dos maneras.

1. Como un conjunto de realizaciones temporales y un índice aleatorio que selecciona una de ellas.

2. Como un conjunto de variables aleatorias  $X_t$  indexadas por un índice  $t$ , dado que  $t \in T$  con  $T \subseteq \mathbb{R}$ .

Un proceso estocástico se dice de **tiempo continuo** si  $T$  es un intervalo (usualmente este intervalo se toma como  $[0, \infty)$ ) o de **tiempo discreto** si  $T$  es un conjunto numerable (solamente puede asumir determinados valores, usualmente se toma  $T \subseteq \mathbb{N}$ ), donde el conjunto  $T$  sera llamado **espacio parametral** y las variables aleatorias toman valores en un conjunto  $S$  llamado **espacio de estados**.

### Trayectoria de un proceso estocástico

Una *trayectoria* de proceso estocástico  $x_t : t \in T$  es una función

$$t \mapsto X_t(w)]$$

para cada  $w \in \omega$ .

Existen distintos tipos de procesos estocásticos, estos se obtienen al considerar:

- Distintos espacios parametrales.
- Distintos espacios de estado.
- Distintas características de la trayectorias.
- Distintas relaciones de dependencia estocástica entre las variables aleatorias que conforman el proceso.

Veamos algunos ejemplos de procesos estocásticos.

#### ■ Procesos de ensayos independientes

Supongamos que el espacio parametral  $T = 1, 2, \dots$  es el conjunto de números naturales y  $S \subseteq \mathbb{R}$ , cuando las variables aleatorias  $(X_1, X_2, \dots)$  son independientes se dice que este es un proceso estocástico de ensayos independientes (*Recordar que una colección infinita de variables es independiente si toda subcolección finita lo es.*)

#### ■ Procesos de Markov

El proceso  $X_t : t = 0, 1, \dots$  (donde  $X_t \in S$  es discreto) es un **proceso de Markov** si para cada  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in S$  se cumple la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \end{aligned}$$

Es decir la historia del proceso hasta el tiempo  $n-1$  es irrelevante cuando se conoce el estado

del proceso al tiempo  $n$  a esta identidad se le conoce con el nombre de **propiedad de Markov** y es un buen ejemplo del tipo de dependencia estocástica que puede existir entre las variables de un proceso, en este caso las variables aleatorias son discretas y al proceso lo llamaremos **Cadenas de Markov**.

#### ■ Procesos con incrementos independientes

El proceso  $X_t : t \geq 0$  tiene **incrementos independientes** si las variables aleatorias

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes para cualesquiera tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .

#### ■ Procesos estacionarios

El proceso  $X_t : t \geq 0$  es **estacionario** en el sentido estricto si para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n, h \geq 0$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

de donde el vector aleatorio del lado derecho tiene la misma distribución que el vector aleatorio del lado izquierdo. Esto significa que el vector aleatorio del lado izquierdo se puede trasladar en el tiempo como indica el vector del lado derecho sin que cambie su distribución de probabilidad.

#### ■ Procesos con incrementos estacionarios

El proceso  $X_t : t \geq 0$  tiene **incrementos estacionarios** si para cualesquiera  $0 \leq s < t; h \geq 0$

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$$

### ■ Martingalas

El proceso  $X_t : t = 0, 1, \dots$  es una **Martingala** si

$$E(X_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = x_n$$

pero en realidad hay otras condiciones técnicas que se piden a un proceso para que sea un martingala.

### ■ Procesos de Lévy

El proceso  $X_t : t \geq 0$  es un **proceso de Lévy** si sus incrementos son:

- Independientes
- Estacionarios

### ■ Procesos Gaussianos

El proceso  $X_t : t \geq 0$  es un **proceso gaussiano** si para cualesquiera tiempos  $t_1, \dots, t_n$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \text{Normal multivariada}$$

No debe pensarse que estas características de los procesos son excluyentes unas de otras, existen varios procesos estocásticos que cumplen varias de estas propiedades al mismo tiempo, por ejemplo el movimiento Browniano que es un proceso estocástico muy importante es a la vez un proceso **gausiano** con **incrementos independientes** y **estacionarios** por lo tanto es un proceso de **Lévy** y puede además demostrarse que es una **Martingala** y que cumple la **propiedad de Markov**.

Con un panorama más amplio de conocimiento acerca de los procesos estocásticos entraremos a profundidad en el concepto y diversos ejemplos de cadenas de Markov.

## 1.2. CADENAS DE MARKOV IRREDUCIBLES Y APERIÓDICAS

### Definición 1. Espacio de estados

Definimos el *espacio de estados* como el conjunto formado por todos los posibles valores que puede tomar  $X_n$  donde el índice  $n$  representa la evolución del proceso en el *tiempo*. Para una cadena de Markov tanto el *espacio de estados* como el *tiempo* pueden ser discreto o continuo.

### Definición 2. Cadena de Markov

Una cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias  $X_0, X_1, X_2, \dots$  que toman valores en el *espacio de estados*  $\{1, 2, \dots, M\}$  si para todo  $n \geq 0$  se cumple la propiedad de Markov. Donde  $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$  se denomina probabilidad de transición desde el estado  $i$  hacia el estado  $j$ . Como esta probabilidad no depende de el valor de  $n$  se dice que el tiempo es *homogeneo*.

### Definición 3. Matriz de transición

Sean  $X_0, X_1, X_2, \dots$  una cadena de Markov con espacio de estados  $\{1, 2, \dots, M\}$  y sea

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

la probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$ . Entonces, a la matriz  $M \times M$ ,  $P = \{p_{ij}\}$  se le denomina *matriz de transición* de la cadena. Además, la suma de los valores por fila es igual a 1.

### Definición 4. Probabilidad de transición en n pasos

La probabilidad de transición en  $n$  pasos de  $i$  hacia  $j$  es la probabilidad de ir de  $i$  hacia  $j$  en  $n$  pasos. Denotamos esto como  $p_{ij}^{(n)}$  y se define de la siguiente manera:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

y se cumple que  $p_{ij}^{(n)}$  es el elemento de subíndices  $(i, j)$  de la matriz  $P^n$

#### Definición 5. Distribución Marginal de $X_n$

Sea el vector fila  $q = (q_1, \dots, q_M)$  con  $q_i = P(X_0 = i)$  entonces la *distribución marginal* de  $X_n$  está dada por el vector  $qP^n$ . Es decir, el  $j$ -ésimo componente del vector  $qP^n$  es  $P(X_n = j)$

#### Tipos de cadenas de Markov:

1. **Cadena de Markov Irreducible** Se dice que una cadena de Markov con matriz de transición  $P$  es *irreducible* si para dos estados  $i$  y  $j$  cualesquiera existe un entero positivo  $n$  tal que el elemento de índices  $(i, j)$  en la matriz  $P^n$  es positivo. Es decir, es posible ir de  $i$  a  $j$  en un número finito de pasos. En caso contrario se dirá que la cadena de Markov es *reducible*.

#### 2. Cadena de Markov Periódica

##### Definición 6. Periodo de un estado

Se define el periodo  $d_i$  de el estado  $i$  como

$$d_i = \gcd\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Esto es, el *gcd* (*máximo común divisor*) del posible número de pasos que puede tomar para regresar al mismo estado, en este caso, al estado  $i$ . Cuando un estado tiene periodo igual a 1 entonces se dirá que es *aperiódico*, en caso contrario, se le llamará *periódico*.

Una cadena de Markov es llamada *aperiódica* cuando todos sus estados son aperiódicos. En caso contrario, se le denomina *periódica*.

### 1.3. Distribuciones estacionarias

Un vector fila  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_M)$  con  $\pi_i \geq 0$  and  $\sum_i \pi_i = 1$  es una *distribución estacionaria* para una cadena de Markov con *matriz de transición*  $P$  si

$$\pi P = \pi$$

Si  $\pi$  es la distribución de  $X_0$ , esto es si  $\pi_i = P(X_0 = i)$ , entonces  $\pi P$  vendría a ser la distribución marginal de  $X_1$ . Esto significa que, si  $X_0$  tiene distribución  $\pi$ , entonces  $X_1$  también tendrá una distribución  $\pi$ . Si  $X_2$  tiene una distribución  $\pi$  entonces  $X_3$  también la tendrá y así sucesivamente. Por lo tanto, una distribución estacionaria de una cadena de Markov es una distribución de probabilidad que se mantiene sin cambios en la cadena a medida que avanza el tiempo.

### 1.4. Convergencia

Ya hemos declarado informalmente que la distribución estacionaria describe el comportamiento a largo plazo de la cadena, en el sentido de que si ejecutamos la cadena por un largo tiempo, la distribución marginal de  $X$  converge a la distribución estacionaria  $S$ . El siguiente teorema establece que esto es cierto siempre que la cadena sea tanto irreducible como aperiódica. Entonces, independientemente de las condiciones iniciales de la cadena, el PMF de  $X_n$  convergerá a la distribución estacionaria cuando  $n \rightarrow \infty$ . theorem 11.3.6 (Convergencia a la distribución estacionaria). Sea  $X_0, X_1, \dots$  sea una cadena de Markov con distribución estacionaria  $S$  y matrix de transición  $Q$ , tal que la potencia  $Q^n$  tiene todas las entradas positivas. Entonces  $P(X_n = i)$  converge a  $S_i$  mientras  $n \rightarrow \infty$ . En terminos de la matriz de

transición,  $Q^n$  converge a una matriz en la que cada fila es  $S$ .

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^n \rightarrow \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

### 1.5. Reversibilidad

Hemos visto que la distribución estacionaria de una cadena de Markov es extremadamente útil para entender su comportamiento a largo plazo. Desafortunadamente en general puede ser computacionalmente difícil de encontrar la distribución estacionaria cuando el espacio de estados es grande.

”Definición” Sea  $Q = (q_{ij})$  sea la matriz de transición de una cadena de Markov, Suponiendo que es  $S = (S_1, \dots, S_M)$  con  $S_i \geq 0$ ,  $\sum_i S_i = 1$  tal que

$$S_i q_{ij} = S_j q_{ji}$$

Para todos los estados  $i$  and  $j$ . Esta ecuación es llamada *reversibilidad* o *Detalle de la condición de equilibrio*, y nosotros diremos que la cadena *reversible* respecto a  $S$  si la contiene.

Dada una matriz de transición, si podemos encontrar un vector no negativo  $s$  cuyas componentes suman 1 y que satisfaga la condición de reversibilidad, entonces  $s$  es automáticamente una distribución estacionaria.

## Referencias

- [1] Autor, *Título*, Revista/Editor, (año)

## 2. IMPLEMENTACIÓN EN R

A. Simulación de una cadena de Markov  
 B. Simulación de una cadena de Markov Irreducible  
 C. Simulación de una cadena de Markov Estacionaria  
 D. Convergencia de cadena de Markov  
 E. Simulación de una cadena de Markov Reversible  
 Ver todas las implementaciones en el Jupyter adjunto <https://github.com/CynthiaCalixtro/Proyecto-de-Laboratorio-R/blob/master/PROYECTO>

## 3. PRUEBAS

Ver pruebas en el Jupyter adjunto <https://github.com/CynthiaCalixtro/Proyecto-de-Laboratorio-R/blob/master/PROYECTO>

## 4. CONCLUSIONES

- Se creó una función que nos permite simular 3 diferentes tipos de cadenas de Markov tomando una matriz de transición.
- Cualquier problema para el que puede obtenerse un diagrama de transición de estado y que sigue el enfoque presentado puede analizarse mediante las cadenas de Markov.
- La teoría de Markov es un modelo simplificado de un proceso de toma de decisión complejo.