Matemáticas Computacionales
Práctica 3
Métodos de Bisección

Cynthia Ivanna Cruz Quiñones
Matricula: 1854499
Grupo: 002

A 26 de Marzo del 2021

1. Introdcción

En esta práctica 3 se implementa un método de Análisis Numérico para determinar los ceros de una función. En general, encontrar los ceros de una función en un número finito pasos casi nunca es posible. Para ello se utilizan métodos de aproximación. Estos métodos son iterativos iniciando con una aproximacón x_0 o un intervalo $[a, b]$, calculamos aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, ..., x_n$ y se escoge x_n como aproximación del cero de la función cuando se cumpla un criterio de paro. [1]

2. Método de Bisección

Este es uno de los métodos más sencillos y de fácil intuición, para resolver ecuaciones en una variable. Se basa en el Teorema de los Valores Intermedios, el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ ($f \epsilon C[a, b]$) toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, que todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es la imagen de al menos un valor en el intervalo $[a, b]$.

Observe la siguiente figura 1

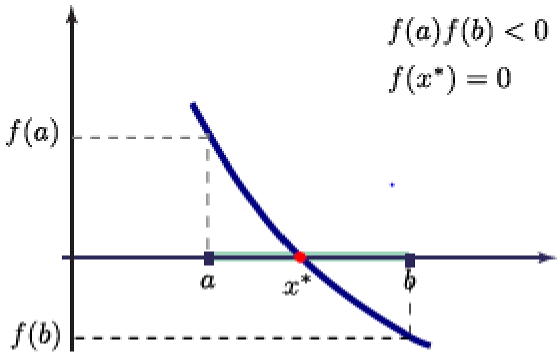

Figura 1: Representación grafica

El método consiste en lo siguiente: Supongamos que en el intervalo $[a, b]$ hay un cero de f. Calculamos el punto medio $m = \frac{a+b}{2}$ del intervalo $[a, b]$ A continuación calculamos $f(m)$. En caso de que $f(m)$ sea igual a cero, ya hemos encontrado la solución buscada. En caso de que no lo sea, verificamos si $f(m)$ tiene signo opuesto al de $f(a)$. Se redefine el intervalo $[a, b]$ como $[a, m]$ o $[m, b]$ según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo. A este nuevo intervalo se le aplica el mismo procedimiento y así, sucesivamente, iremos encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada.

La siguiente representación gráfica 2 se muestra el procedimiento descrito.

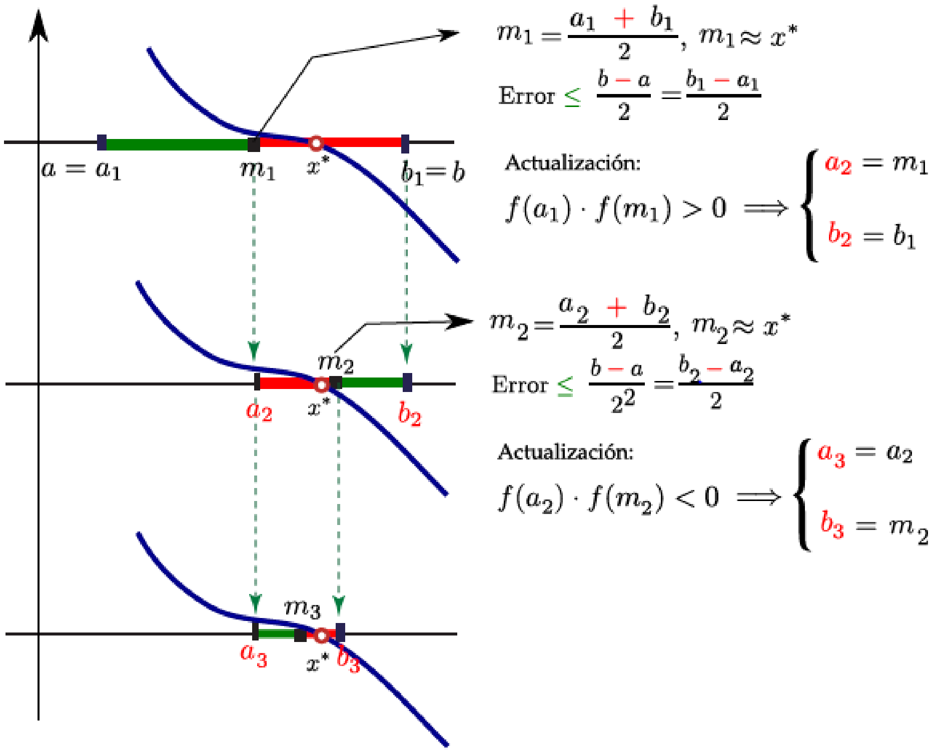

Figura 2: El procedimiento construye tres sucesiones a_n, b_n, m_n

Para $k = 1, 2, ..., m_k = \frac{b_k + a_k}{2}$ y

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [m_{k-1}, b_{k-1}] & si f(a_{k-1}) f(m_{k-1}) > 0 \\ [a_{k-1}, m_{k-1}] & si f(a_{k-1}) f(m_{k-1}) < 0 \end{cases} \tag{1}$$

2.1. Estimación del error

El error exacto en el k-ésimo paso en $|m_k - x^*|$. Geométricamente se puede ver esto que esto es menos que la mitad del intervalo $|a_k - b_k|$, esto quiere decir que

$$|m_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k} \tag{2}$$

Esto se muestra en la siguiente figura 3

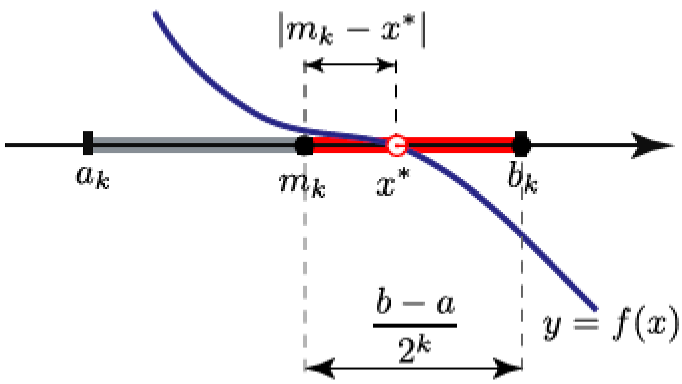

Figura 3: Estimación del error en bisección.

3. Tarea

1.- Para $x^3 = 0$ con bisección en $[-0{,}2, 0{,}1]$

La tolerancia dada para esta funcion fue de 0,000001 por lo que la función necesito de 18 iteraciones para encontrar los ceros dentro de el intervalo dado. [tabla 1] y su representación gráfica en la figura 4

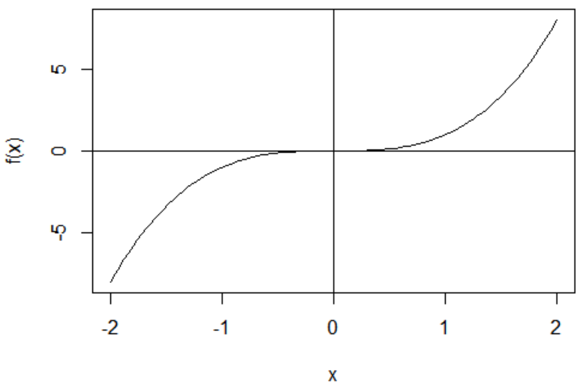

Figura 4: Función $x^3 = 0$ con bisección $[-0{,}2, 0{,}1]$ y de curva de $(-2, 2)$

a	b	m	Error est.
-0.0500000	0.1000000	-0.0500000	0.0750000
-0.0500000	0.0250000	0.0250000	0.0375000
-0.0125000	0.0250000	-0.0125000	0.0187500
-0.0125000	0.0062500	0.0062500	0.0093750
-0.0031250	0.0062500	-0.0031250	0.0046875
-0.0031250	0.0015625	0.0015625	0.0023437
-0.0007812	0.0015625	-0.0007812	0.0011719
-0.0007812	0.0003906	0.0003906	0.0005859
-0.0001953	0.0003906	-0.0001953	0.0002930
-0.0001953	0.0000977	0.0000977	0.0001465
-0.0000488	0.0000977	-0.0000488	0.0000732
-0.0000488	0.0000244	0.0000244	0.0000366
-0.0000122	0.0000244	-0.0000122	0.0000183
-0.0000122	0.0000061	0.0000061	0.0000092
-0.0000031	0.0000061	-0.0000031	0.0000046
-0.0000031	0.0000015	0.0000015	0.0000023
-0.0000008	0.0000015	-0.0000008	0.0000011
-0.0000008	0.0000004	0.0000004	0.0000006

Cuadro 1: Tabla de iteración

Cero de f en $[-0{,}2, 0{,}1]$ es approx: $3{,}814697e - 07$ con $error \Leftarrow 5{,}722046e - 07$

2.- Para $x^5 - 100x^4 + 3995x^3 - 79700x^2 + 794004x - 3160075$ **con bisección en** $[17, 22{,}2]$

Esta cuenta con 22 iteraciónes, de las cuales solo se muestran las primeras 5 y ultimas dos generadas por la consola en la tabla 2 al igual que la gráfica generada representada en la figura 5, de la cual se tiene una tolerancia de 0,000001 y dentro del intervalo dado con curva de $(-200, 200)$

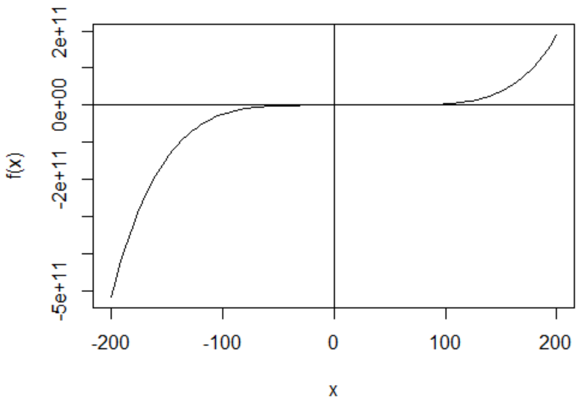

Figura 5: Función $x^5 - 100x^4 + 3995x^3 - 79700x^2 + 794004x - 3160075$ con bisección en $[17, 22{,}2]$

a	b	m	Error est.
17.0000000	19.6000000	19.6000000	1.3000000
17.0000000	18.3000000	18.3000000	0.6500000
17.6500000	18.3000000	17.6500000	0.3250000
17.6500000	17.9750000	17.9750000	0.1625000
....	....	....	....
17.8463633	17.8463657	17.8463633	0.0000012
17.8463645	17.8463657	17.8463645	0.0000006

Cuadro 2: Tabla de iteración de la función 2

Cero de f en $[17, 22{,}2]$ es approx: 17,84636 con $error \Longleftarrow 6{,}198883e - 07$

3.- Para $x^3 - 2x - 5 = 0$

En esta función se generaron 21 iteraciones con una tolerancia de 0,000001 y bisección en $[2{,}094, 5]$, de las cuales se presentan las primeras 5 y las ultimas dos en la tabla 3 y su representacion gráfica en la figura 6; depende de la tolerancia para el numero de iteraciones que se generan. Se toma el 2.094 ya que la raiz de la función $x^3 - 2x - 5 = 0$ es 2.094564.

a	b	m	Error est.
2.0000000	3.5000000	3.5000000	0.7500000
2.0000000	2.7500000	2.7500000	0.3750000
2.0000000	2.3750000	2.3750000	0.1875000
2.0000000	2.1875000	2.1875000	0.0937500
....	....	....	....
2.0945511	2.0945539	2.0945539	0.0000014
2.0945511	2.0945525	2.0945525	0.0000007

Cuadro 3: Tabla de iteración para la funcón $x^3 - 2x - 5 = 0$

Cero de f en $[2{,}094, 5]$ es approx: 2,09455 con $error <=\Leftarrow 6{,}928444e - 07$

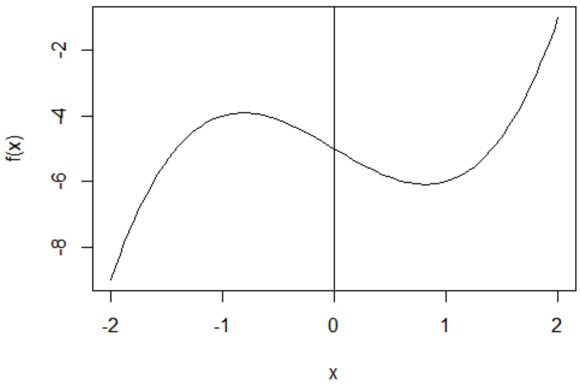

Figura 6: Función $x^3 - 2x - 5 = 0$

Referencias

[1] Cynthia Ivanna Cruz Quinones. Repositorio de Github. `https://github.com/CynthiaCruzqn/MatematicasComputacionales.git`, 2021.