ecuación $x = xR(x)$ establece un vínculo entre el número de individuos en una generación X y el número de individuos en la siguiente generación. La función $R(x)$ modela la tasa de cambio de la población considerada.

Llamemos $\phi(x) = xR(x)$. La dinámica de una población se define por el proceso iterativo

$$x_k = \phi(x_{k-1}) \text{ con } k \geq 1,$$

donde x_k representa el número de individuos presentes k generaciones más tarde de la generación x_0 inicial. Por otra parte, los estados estacionarios (o de equilibrio) x^* de la población considera son las soluciones de un problema de punto fijo

$$x^* = \phi(x^*),$$

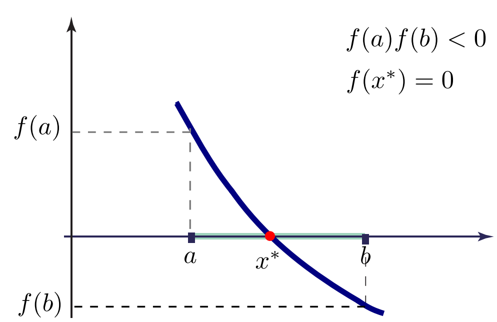
Vamos a usar el modelo "predador-presa con saturación": $R(x) = \dfrac{rx}{1+(x/K)^2}$ con $r = 3$ y $K = 1$

- Graficar la función $\phi(x) = xR(x)$ con $x \in [0,5]$, junto con la función $y = x$ (para la función $y = x$ usar `curve(1*x,...)`). Además usar `abline()` para los ejes.

- De acuerdo a la gráfica, elija una valor inicial x_0 cerca del punto fijo donde la función ϕ se empieza a estabilizar y obtenga la aproximación a este punto fijo usando el programa que ya implementamos.

4.3 El método de Bisección

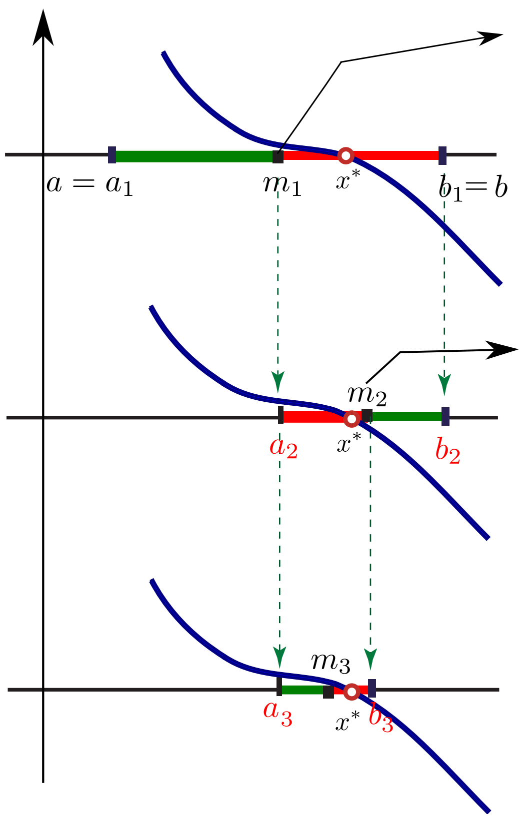
Este es uno de los métodos más sencillos y de fácil intuición, para resolver ecuaciones en una variable. Se basa en el Teorema de los Valores Intermedios, el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$ ($f \in C[a,b]$) toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, que todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es la imagen de al menos un valor en el intervalo $[a,b]$.



En caso de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), el valor cero sería un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo que con certeza existe un x^* en $[a,b]$ que cumple $f(x^*) = 0$. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

El método consiste en lo siguiente: Supongamos que en el intervalo $[a, b]$ hay un cero de f. Calculamos el punto medio $m = (a + b)/2$ del intervalo $[a, b]$. A continuación calculamos $f(m)$. En caso de que $f(m)$ sea igual a cero, ya hemos encontrado la solución buscada. En caso de que no lo sea, verificamos si $f(m)$ tiene signo opuesto al de $f(a)$. Se redefine el intervalo $[a, b]$ como $[a, m]$ o $[m, b]$ según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo. A este nuevo intervalo se le aplica el mismo procedimiento y así, sucesivamente, iremos encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada.

En la siguiente figura se ilustra el procedimiento descrito.



$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m_1 \approx x^*$$

$$\text{Error} \leq \frac{b-a}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

Actualización:

$$f(a_1) \cdot f(m_1) > 0 \implies \begin{cases} a_2 = m_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

$$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad m_2 \approx x^*$$

$$\text{Error} \leq \frac{b-a}{2^2} = \frac{b_2 - a_2}{2}$$

Actualización:

$$f(a_2) \cdot f(m_2) < 0 \implies \begin{cases} a_3 = a_2 \\ b_3 = m_2 \end{cases}$$

El procedimiento construye tres sucesiones a_n, b_n y m_n,

- Para $k = 1, 2, \ldots,$ $\quad m_k = \dfrac{b_k + a_k}{2}$ y $[a_k, b_k] = \begin{cases} [m_{k-1}, b_{k-1}] & \text{si} \quad f(a_{k-1}) f(m_{k-1}) > 0 \\ [a_{k-1}, m_{k-1}] & \text{si} \quad f(a_{k-1}) f(m_{k-1}) < 0 \end{cases}$

Estimación del error: El error exacto en el $k-$ésimo paso es $|m_k - x^*|$. Geométricamente se puede ver que esto es menos que la mitad del intervalo $[a_k, b_k]$, es decir

$$|m_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}$$

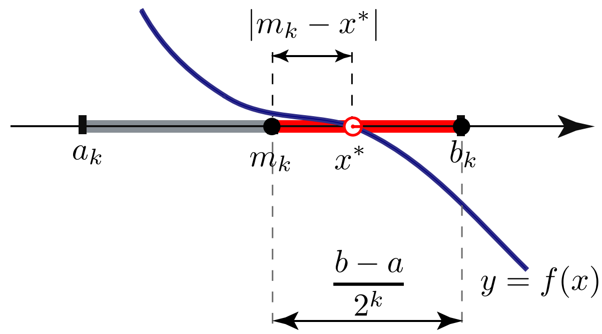


Figura 4.3: Estimación del error en bisección.

Ejemplo 4.11

Aplicar el método de bisección para aproximar la solucióndе la ecuación $x^2 = \cos(x) + 1$ en $[1,2]$

- Debemos reescribir la ecuación como $x^2 - \cos(x) - 1 = 0$. En este caso, $f(x) = x^2 - \cos(x) - 1$. Podemos hacer una gráfica de esta función y observar que esta función tiene un cero en el intervalo $[1,2]$ pues, efectivamente $f(1) \cdot f(2) = -1.84575... < 0$.

  Calculemos ahora a_k, b_k y m_k así como la estimación del error.

$k = 1:$	$a_1 = 1,\ \ b_1 = 2$ y $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 1.5.$	Error ≤ 0.5
$k = 2:$	$f(a_1) \cdot f(m_1) = -0.637158 < 0,$	
	$a_2 = 1,\ \ b_2 = 1.5$ y $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 1.25.$	Error ≤ 0.25
$k = 3:$	$f(a_2) \cdot f(m_2) = -0.13355064 < 0,$	
	$a_3 = 1,\ \ b_3 = 1.25$ y $m_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = 1.125.$	Error ≤ 0.125
$\vdots$	$\vdots$	
$k = 44:$	$m_{44} = 1.17650193990184.$	Error $\leq 2.84 \times 10^{-14}$

- Así, $m_{44} = 1.17650193990184$ aproxima el cero de $f(x) = x^2 - \cos(x) - 1$ en $[1,2]$ con un error $\leq 2,84 \times 10^{-14}$

Podemos poner estos cálculos (junto con otros adicionales) en una tabla