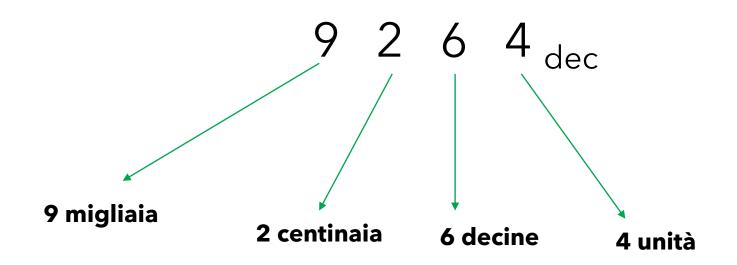
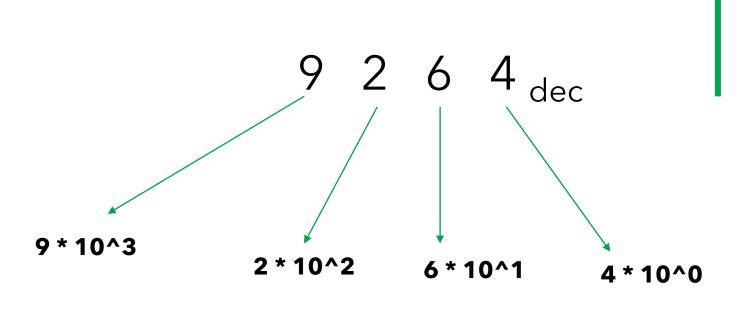
Classi prime Scientifico - opzione scienze applicate
Bassano del Grappa, Ottobre 2022
Prof. Giovanni Mazzocchin

- Il sistema che utilizziamo tutti i giorni si chiama decimale
- Utilizza 10 cifre (o simboli): {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  - NB: da 0 a 10-1 = 9
- È un sistema **posizionale** perché il valore di una cifra dipende dalla sua posizione all'interno del numero (si dice anche dal suo **peso**)



- Unità, decine, centinaia, migliaia etc... sono i **pesi** (weights) delle cifre
- Possiamo usare le potenze di 10 al posto dei termini «unità»,
   «decina» etc...



Il simbolo ^ sta per «elevamento a potenza»

- Immaginate di avere a disposizione una macchina elettronica che memorizza i numeri in formato decimale
- Dato un numero  $\mathbf{x}$ , la macchina riserva lo spazio per  $\mathbf{1}$  cifra decimale
- Quanti e quali numeri può rappresentare la macchina?

#### Valori possibili in memoria per x:

Se x = 9, la calcolatrice riesce a rappresentare x + 1?

- Se x = 9, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare x + 1
- Si dice che il calcolo x + 1 ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- Serve un altro spazio, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

#### Valori possibili in memoria per x:

02

03

04

05

06

07

08

09

10

20

20

99

- Se x = 99, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare x + 1
- Si dice che il calcolo x + 1 ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- Serve un altro spazio, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

#### Valori possibili in memoria per x:

000

001

002

090

099

100

200

200

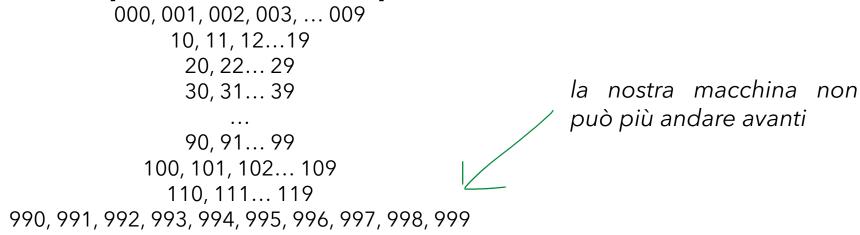
300

999

and so on...

• Ipotizziamo di avere 3 spazi, ciascuno dei quali rappresentante una cifra decimale

#### Valori possibili in memoria per x:

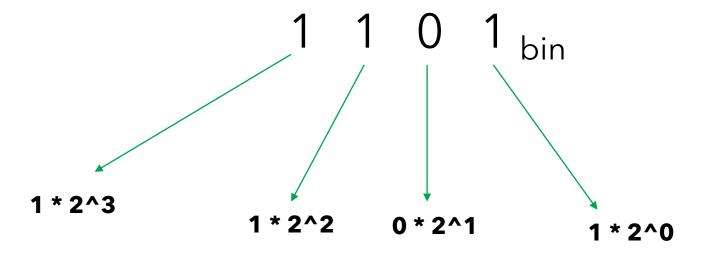


#### Procedura automatica («algoritmo») per scrivere i numeri in ordine:

Ripetere le seguenti istruzioni fintantoché ci sono ancora spazi non traboccati:

- 1. si fa traboccare lo spazio più a destra che non è ancora traboccato
- 2. al traboccamento, si porta a 0 lo spazio traboccato e si inserisce 1 nello spazio a sinistra di quello traboccato

- Uno dei sistemi più utilizzati in informatica ed elettronica è il sistema binario
- Utilizza 2 cifre (o simboli): {0, 1}
  - NB: da 0 a 2-1 = 1
- È un sistema **posizionale** perché il valore di una cifra dipende dalla sua posizione all'interno del numero (si dice anche dal suo **peso**)



- Immaginate di avere a disposizione una macchina elettronica che memorizza i numeri in formato binario
- Dato un numero  $\mathbf{x}$ , la macchina riserva lo spazio per  $\mathbf{1}$  cifra binaria
- Quanti e quali numeri può rappresentare la macchina?

#### Valori possibili in memoria per x:

0

1

Se x = 1, la calcolatrice riesce a rappresentare x + 1?

- Se x = 1, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare x + 1
- Si dice che il calcolo x + 1 ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- Serve un altro spazio, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

#### Valori possibili in memoria per x:

00

01

10

11

Se x = 11, la calcolatrice riesce a rappresentare x + 1?

- Se x = 11, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare x + 1
- Si dice che il calcolo x + 1 ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- Serve un altro spazio, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

#### Possibili valori in memoria per x

00

01

10

11

100

101

110

111

#### Procedura automatica («algoritmo») per scrivere i numeri in ordine:

Ripetere le seguenti istruzioni fintantoché ci sono ancora spazi non traboccati:

- 1. si fa traboccare lo spazio più a destra che non è ancora traboccato
- 2. al traboccamento, si porta a 0 lo spazio traboccato e si inserisce 1 nello spazio a sinistra di quello traboccato

Esempio con 4 spazi, 1 cifra binaria per ogni spazio

Abbiamo rappresentato 16 = 2^4 numeri. Da 0<sub>dec</sub> a 15<sub>dec</sub>

- Vogliamo rappresentare il numero 90<sub>dec</sub> in binario
- Come fare? **NB**: tutti i numeri in questa slide sono scritti con il sistema decimale
- Proviamo a rappresentare 90 come somma di potenze di 2 (base del sistema binario)

Le cifre in posizione 0, 2, 5 sono a zero perché non sono presenti nello sviluppo di 90<sub>dec</sub> come somma di potenze di 2

1011010<sub>bir</sub>

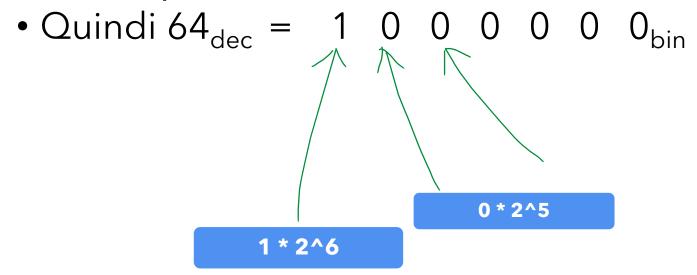
- Il calcolo della slide precedente è stato effettuato a colpi di «buon senso»
- In informatica abbiamo bisogno di procedure completamente automatizzabili, dato che le macchine elettroniche non conoscono il *buon senso*
- Dato un numero naturale *n*, questo può essere:
  - 1. una potenza di 2. In questo caso la divisione intera di n per la potenza di 2 a lui più vicina ha. Esempio: n = 64, quindi  $n = 2^6$ . 64 / 64 = 1, con resto 0;
  - 2. diverso da una potenza di 2. In questo caso dobbiamo trovare una somma di potenze di 2 che uguagli il n.

- n = 64
  - Dobbiamo capire in modo automatico qual è la potenza di 2 più vicina a n
  - Vogliamo cioè scrivere 64 come 2<sup>x</sup>, senza sapere a priori quanto vale x
  - Lo dividiamo per 2 finché non otteniamo 1

6 divisioni

 $64/(2^6) = 1$  significa  $64 = 2^6$ 

- Abbiamo scoperto in modo *algoritmico* (come farebbe una macchina non pensante) che  $64 = 2^6$
- Ora, sappiamo che la cifra binaria in posizione 6 (partendo da 0) ha peso 2^6:



#### • n = 91

- Dobbiamo capire in modo automatico qual è la potenza di 2 più vicina a n, che in questo caso non è una potenza di 2
- Vogliamo cioè scrivere 91 come 2<sup>x</sup> + y, senza sapere a priori quanto valgono x e y
- Lo dividiamo per 2 finché non otteniamo 1

```
91 / 2 -> 45 (resto 1)

45 / 2 -> 22 (resto 1)

22 / 2 -> 11 (resto 0)

11 / 2 -> 5 (resto 1)

5 / 2 -> 2 (resto 1)

2 / 2 -> 1 (resto 0)
```

6 divisioni. Quindi la potenza di 2 più vicina a 91 è 2^6

• n = 91

• 
$$91 = 2^6 + y = 100000_{bin} + y$$

• quindi  $y = 91 - 2^6 = 27$ 

• Ora dobbiamo esprimere anche 27 come somma di potenze di 2!

$$6/2 -> 3 \text{ resto } 0$$

$$3/2 -> 1$$
 resto 1

4 divisioni. Quindi la potenza di 2 più vicina a 27 è 2^4

• n = 91

• 
$$91 = 2^6 + 2^4 + y = 1000000_{bin} + 100000_{bin} + y$$

- Quindi  $y = 91 2^6 2^4 = 11$
- Ora dobbiamo esprimere anche 11 come somma di potenze di 2!

```
• 11/2 = 5 (resto = 1)
• 5/2 = 2 (resto = 1)
• 2/2 = 1 (resto = 0)
```

3 divisioni. Quindi la potenza di 2 più vicina a 11 è 2^3

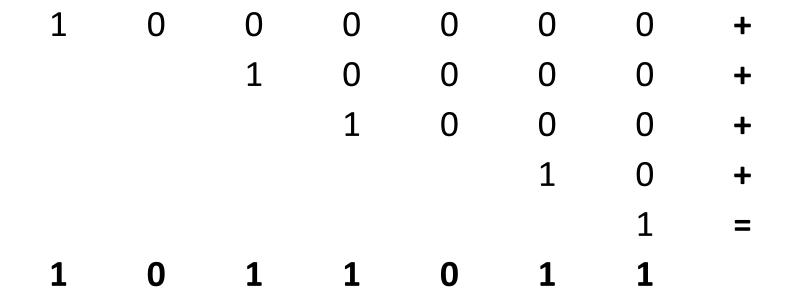
- n = 91
- $91 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + y = 1000000_{bin} + 100000_{bin} + 10000_{bin} + y$
- Quindi  $y = 91 2^6 2^4 2^3 = 3$
- Ora dobbiamo esprimere anche 3 come somma di potenze di 2
  - 3/2 = 1 (resto = 1)

1 divisione. Quindi la potenza di 2 più vicina a 1 è 2^1

20

- n = 91
- $91 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + y = 100000_{bin} + 10000_{bin} + 10000_{bin} + 10000_{bin} + 10000_{bin}$
- Quindi  $y = 91 2^6 2^4 2^3 2^1 = 1$
- 1 è già una potenza di 2 (2^0)

17/06/2023 Il sistema binario 21



```
91 / 2 = 45 (resto = 1)
45 / 2 = 22 (resto = 1)
22 / 2 = 11 (resto = 0)
11 / 2 = 5 (resto = 1)
5 / 2 = 2 (resto = 1)
2 / 2 = 1 (resto = 0)
1 / 2 = 0 (resto = 1)
```

Leggendo i resti al contrario viene fuori il numero che abbiamo calcolato prima in modo più macchinoso.
NB: sicuramente il resto di una divisione intera per 2 può essere solo 0 oppure 1

### Addizione in colonna decimale

Descrivere in modo algoritmico la procedura detta addizione decimale in colonna

## Addizione in colonna decimale

- 1. 9 + 9 = 18. Traboccamento e riporto;
- 2. 9 + 9 = 18, 18 + 1 = 19. Traboccamento e riporto;
- 3. 1 + 0 = 1;
- 4. Fine della procedura.

#### Addizione in colonna decimale

- 1. 9 + 9 = 18. Traboccamento e riporto.
- 2. 9 + 9 = 18, 18 + 1 = 19. Traboccamento e riporto;
- 3. 9 + 9 = 18, 18 + 1 = 19. Traboccamento e riporto
- 4. 0 + 1 = 1;
- 5. Fine della procedura.

NB: qualsiasi sia il sistema di numerazione, la cifra da riportare a sinistra in caso di traboccamento è sempre 1.

#### Addizione in colonna tra numeri nel sistema binario

- 1. 0 + 1 = 1;
- 2. Secondo spazio 1 + 0 = 1;
- 3. Fine della procedura.

#### Addizione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$3_{\text{dec}} + 3_{\text{dec}} = 6_{\text{dec}}$$

- 1. 1 + 1 = 10. Traboccamento e riporto;
- 2. 1 + 1 = 10.10 + 1 = 11. Traboccamento e riporto;
- 3. 0 + 1 = 1;
- 4. Fine della procedura.

### Addizione in colonna tra numeri in sistema binario

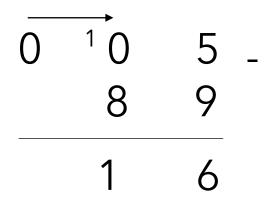
$$7_{\text{dec}} + 7_{\text{dec}} = 14_{\text{dec}}$$

- 1. 1 + 1 = 10. Traboccamento e riporto;
- 2. 1 + 1 = 10, 10 + 1 = 11. Traboccamento e riporto;
- 3. 1 + 1 = 10, 10 + 1 = 11. Traboccamento e riporto;
- 4. 0 + 1 = 1;
- 5. Fine della procedura.

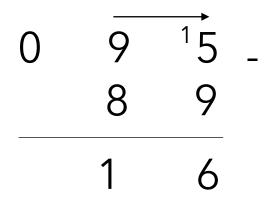
prima, seconda, terza, quarta etc.. colonna: si conta a partire da destra

- 1. 5 9 < 0. Necessità di un **prestito** dalla seconda colonna (**borrow**);
- 2. Il 2 della seconda colonna del sottraendo diventa 1, il 5 della prima colonna diventa 15;
- 3. 15 9 = 6. Prima colonna completata;
- 4. 1 0 = 1. Seconda colonna completata;
- 5. Fine della procedura.

- 1. 5 9 < 0. Necessità di un **prestito** da sinistra (**borrow**);
- 2. La seconda colonna del sottraendo non può prestare niente;
- 3. La terza colonna presta 1 alla seconda e diventa 0;
- 4. La seconda colonna diventa 10;
- 5. La seconda colonna presta 1 alla prima e diventa 9;
- 6. Il 5 della prima colonna del sottraendo diventa 15;
- 7. 15 9 = 6. Prima colonna completata;
- 8. 9 8 = 1. Seconda colonna completata;
- 9. Fine della procedura.



- 1. 5 9 < 0. Necessità di un **prestito** da sinistra (**borrow**);
- 2. La seconda colonna del sottraendo non può prestare niente;
- 3. La terza colonna presta 1 alla seconda e diventa 0;
- 4. La seconda colonna diventa 10;
- 5. La seconda colonna presta 1 alla prima e diventa 9
- 6. Il 5 della prima colonna del sottraendo diventa 15;
- 7. 15 9 = 6. Prima colonna completata;
- 8. 9 8 = 1. Seconda colonna completata;
- 9. Fine della procedura.



- 1. 5 9 < 0. Necessità di un **prestito** da sinistra (**borrow**);
- 2. La seconda colonna del sottraendo non può prestare niente;
- 3. La terza colonna presta 1 alla seconda e diventa 0;
- 4. La seconda colonna diventa 10;
- 5. La seconda colonna presta 1 alla prima e diventa 9
- 6. Il 5 della prima colonna del sottraendo diventa 15;
- 7. 15 9 = 6. Prima colonna completata;
- 8. 9 8 = 1. Seconda colonna completata;
- 9. Fine della procedura.

9 0 0 5 -

9 9 9

8 10 0 5 -

9 9 9

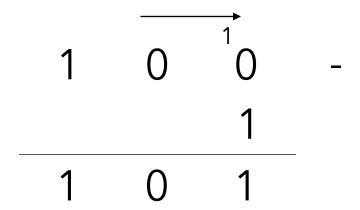
8 9 1 0 5 -

9 9 9

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale



$$6_{\text{dec}} - 1_{\text{dec}} = 5_{\text{dec}}$$



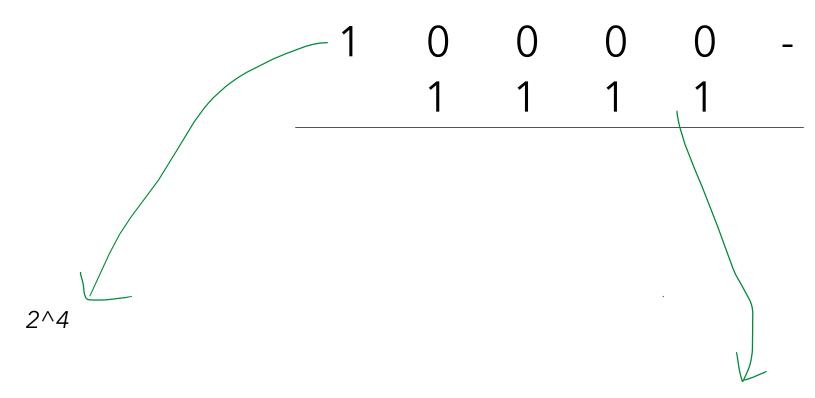
$$6_{\text{dec}} - 1_{\text{dec}} = 5_{\text{dec}}$$

$$16_{dec} - 15_{dec} = 1_{dec}$$

L'occhio esperto vede subito che il risultato è 1. E' la differenza tra 2<sup>n</sup> e (2<sup>n</sup> - 1)

17/06/2023 Il sistema binario 42

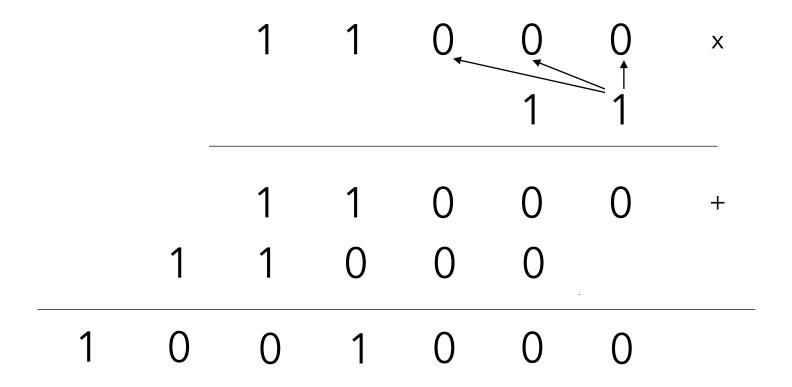
$$16_{\text{dec}} - 15_{\text{dec}} = 1_{\text{dec}}$$



Un numero binario composto da n 1 è uguale a 2^n - 1

$$2^4 - (2^4 - 1) = 1$$

# Moltiplicazione nel sistema binario



24<sub>dec</sub> \* 3<sub>dec</sub> = 72<sub>dec</sub>

# Divisione nel sistema decimale

• Vediamo la divisione come sottrazione ripetuta:

$$20 / 6 = 3$$
, resto 2

$$20 - 6 = 14$$
 $14 - 6 = 8$ 
 $8 - 6 = 2$ 
 $2 - 6 \rightarrow STOP$ 

Il quoziente è il numero di volte che siamo riusciti a sottrarre senza oltrepassare lo zero

Il resto è il sottraendo della sottrazione che non siamo riusciti a fare

# Divisione nel sistema decimale

• Vediamo la divisione come sottrazione ripetuta:

$$28 / 7 = 4$$
, resto 0

Il quoziente è il numero di volte che siamo riusciti a sottrarre senza oltrepassare lo zero

# Divisione nel sistema binario

• Vediamo la divisione come **sottrazione ripetuta**:

10100 / 110

