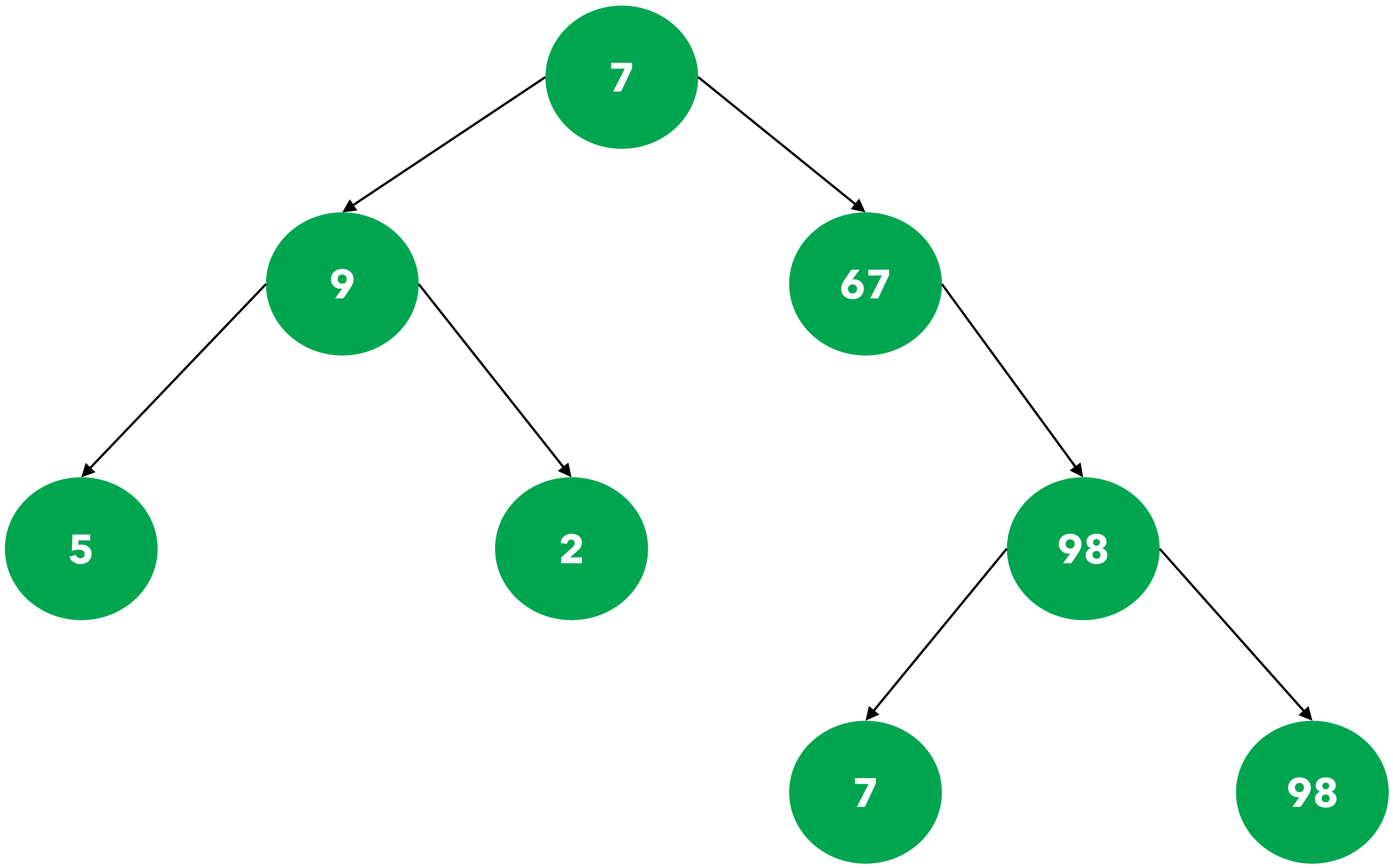
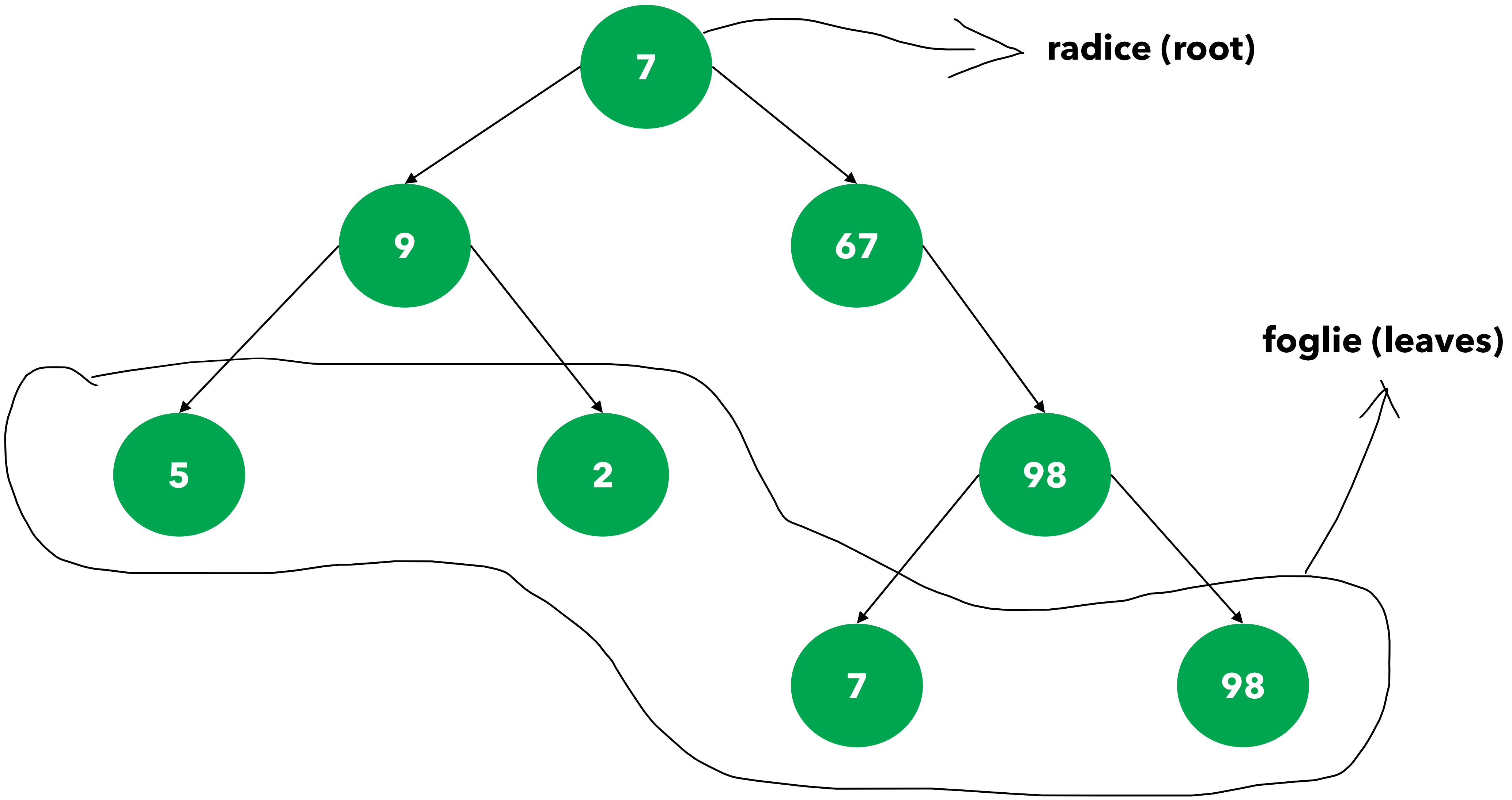
Java: alberi binari (*binary trees*)

Liceo G.B. Brocchi
Classi quarte Scientifico – opzione scienze applicate
Bassano del Grappa, Dicembre 2022
Prof. Giovanni Mazzocchin

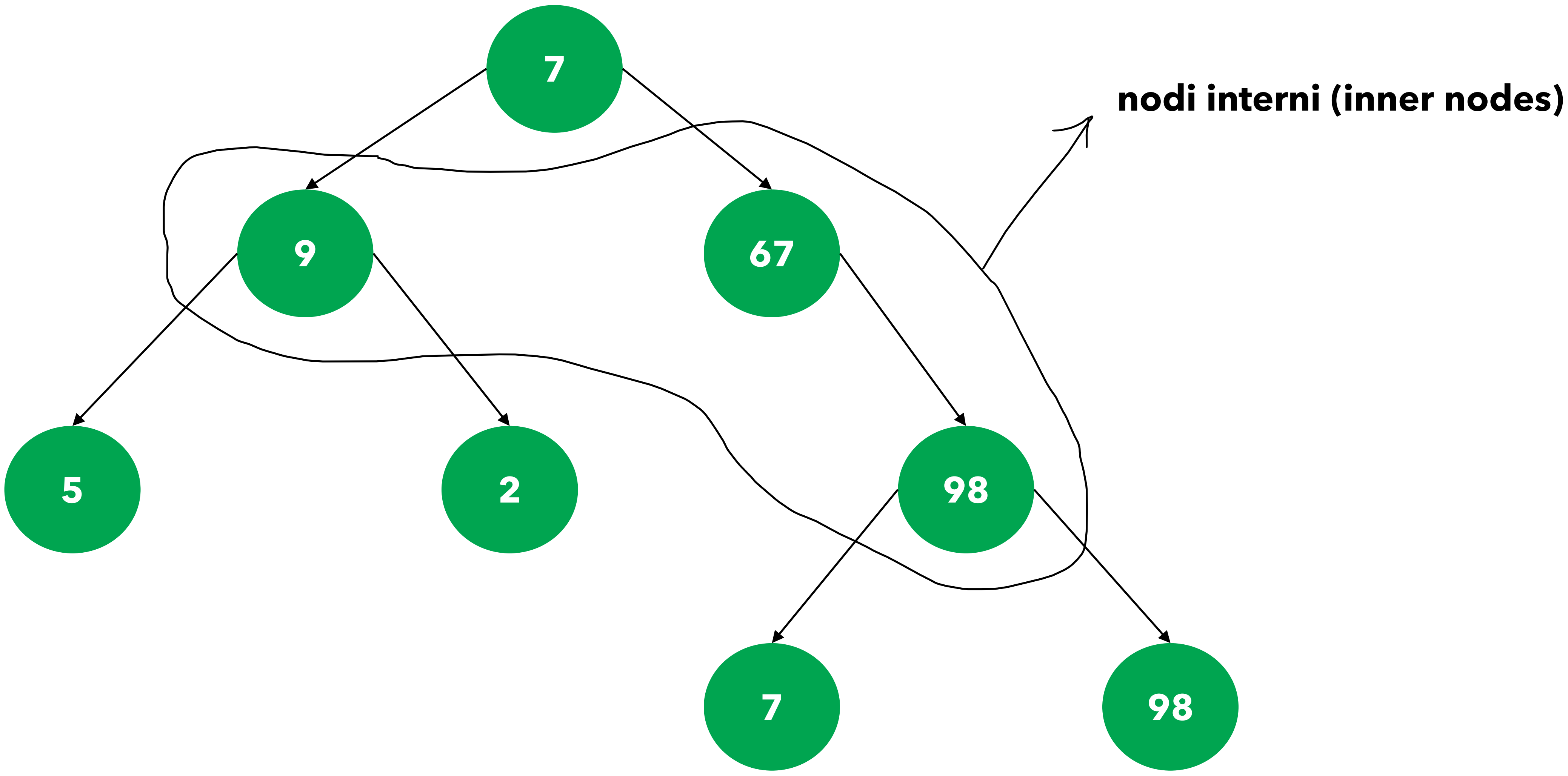
La struttura che vogliamo realizzare (*rooted tree*)



La struttura che vogliamo realizzare (*rooted tree*)



La struttura che vogliamo realizzare (*rooted tree*)



Definizione ricorsiva

Un **albero binario** è:

- un albero senza alcun nodo

oppure

- un nodo che punta a due **alberi binari**

Recuperare la definizione ricorsiva di lista concatenata.
Il caso «vuoto» servirà come caso base per le funzioni ricorsive, come per le liste.
Gli alberi vengono utilizzati per ricercare informazioni in modo efficiente, recuperare l'algoritmo detto «ricerca binaria», che opera su un albero «logico» derivato dalla suddivisione ricorsiva di un array.

Ricorsione e autosomiglianza

- https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal
- *Recuperare la definizione ricorsiva di fattoriale e dei numeri di Fibonacci*

Implementazione tramite puntatori ai figli

```
class TreeNode{
        int key;
        TreeNode leftChild;
        TreeNode rightChild;

        TreeNode(int key, TreeNode left, TreeNode right){
                this.key = key;
                this.left = left;
                this.right = right;
        }
}
```

per semplicità, non specifichiamo private per i campi dati

Per rappresentare alberi n-ari (in cui ogni nodo ha fino a n figli) il principio è lo stesso. Chi studierà informatica vedrà anche altre rappresentazioni più efficienti in termini di memoria occupata

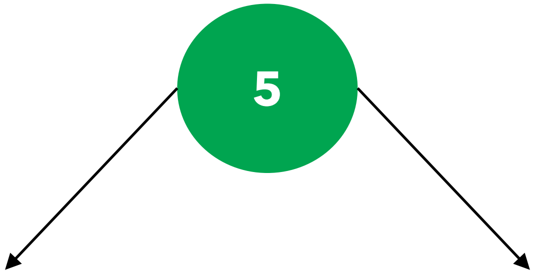
Implementazione tramite puntatori ai figli

```
class TreeNode{
        int key;
        TreeNode leftChild;
        TreeNode rightChild;

        TreeNode(int key, TreeNode left, TreeNode right){
                this.key = key;
                this.left = left;
                this.right = right;
        }
}
```

Allocazione in memoria di un albero

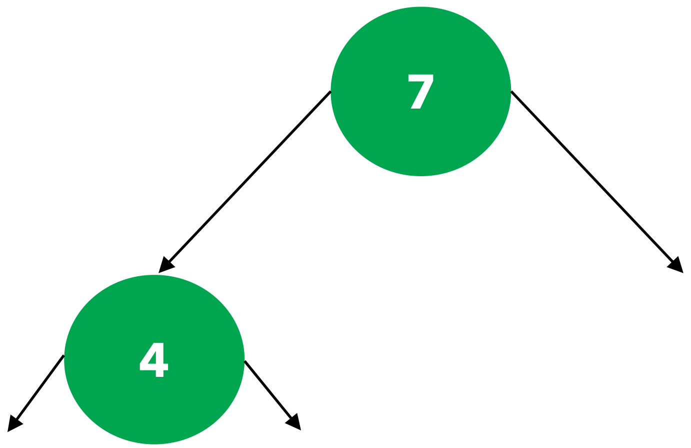
```
TreeNode tree_0 = new TreeNode(5, null, null);
```



leftChild e *rightChild* sono riferimenti con valore *null*. Significa che non puntano ad alcun oggetto in memoria

Allocazione in memoria di un albero

```
TreeNode tree_1 = new TreeNode(7, new TreeNode(4, null, null), null);
```



leftChild e *rightChild* sono riferimenti con valore *null*. Significa che non puntano ad alcun oggetto in memoria

Alberi binari di ricerca (*binary search trees*)

- **Binary-search-tree property**

  se **n** è un nodo di un albero binario di ricerca, **n.key** è la chiave di n, **n.left** è la radice del sottoalbero sinistro di n, e **n.right** è la radice del sottoalbero destro di **n**, allora:

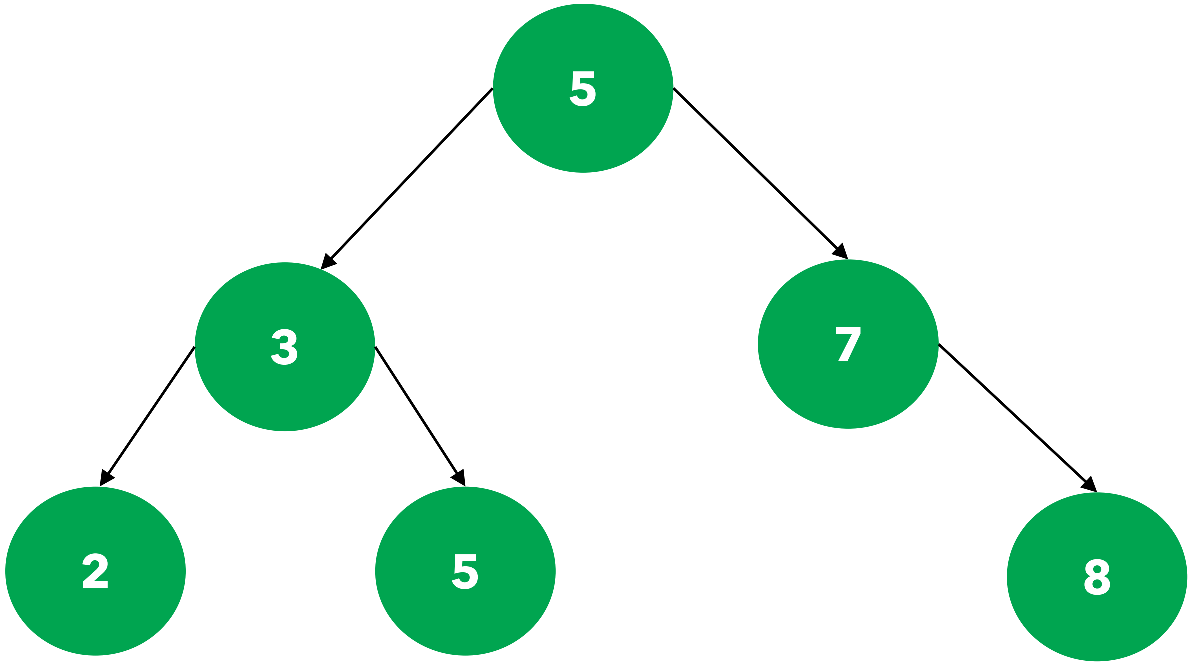
  *per ogni nodo **nl** del sottoalbero radicato in **n.left** è vero che **nl.key <= n.key**;*

  *per ogni nodo **nr** del sottoalbero radicato in **n.right** è vero che **n.key <= nr.key***

  Evidentemente una struttura del genere è molto utile per ricercare informazioni.

  L'albero che salta fuori quando si analizza la ricerca binaria è un albero binario di ricerca, ma è solo logico, non viene veramente allocato in memoria

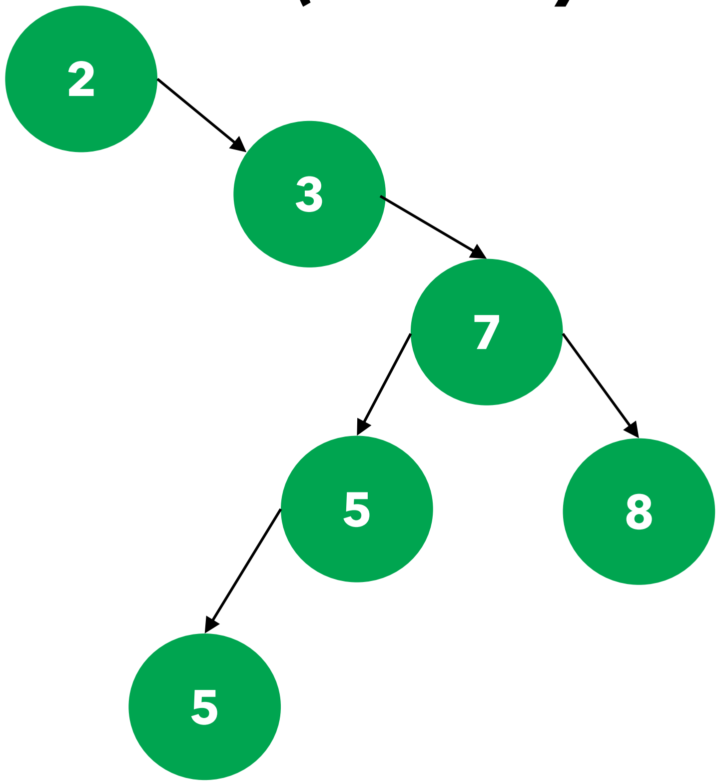
Alberi binari di ricerca (*binary search trees*)



Questo albero ha **altezza 2**: l'altezza di un albero binario è la distanza del percorso più lungo dalla radice ad una foglia. In questo caso abbiamo 3 percorsi radice foglia di lunghezza 2:

- *5 -> 3 -> 2 (lunghezza 2: la lunghezza del percorso è il numero delle frecce)*
- *5 -> 3 -> 5 (lunghezza 2: la lunghezza del percorso è il numero delle frecce)*
- *5 -> 7 -> 8 (lunghezza 2: la lunghezza del percorso è il numero delle frecce)*

Alberi binari di ricerca (*binary search trees*)

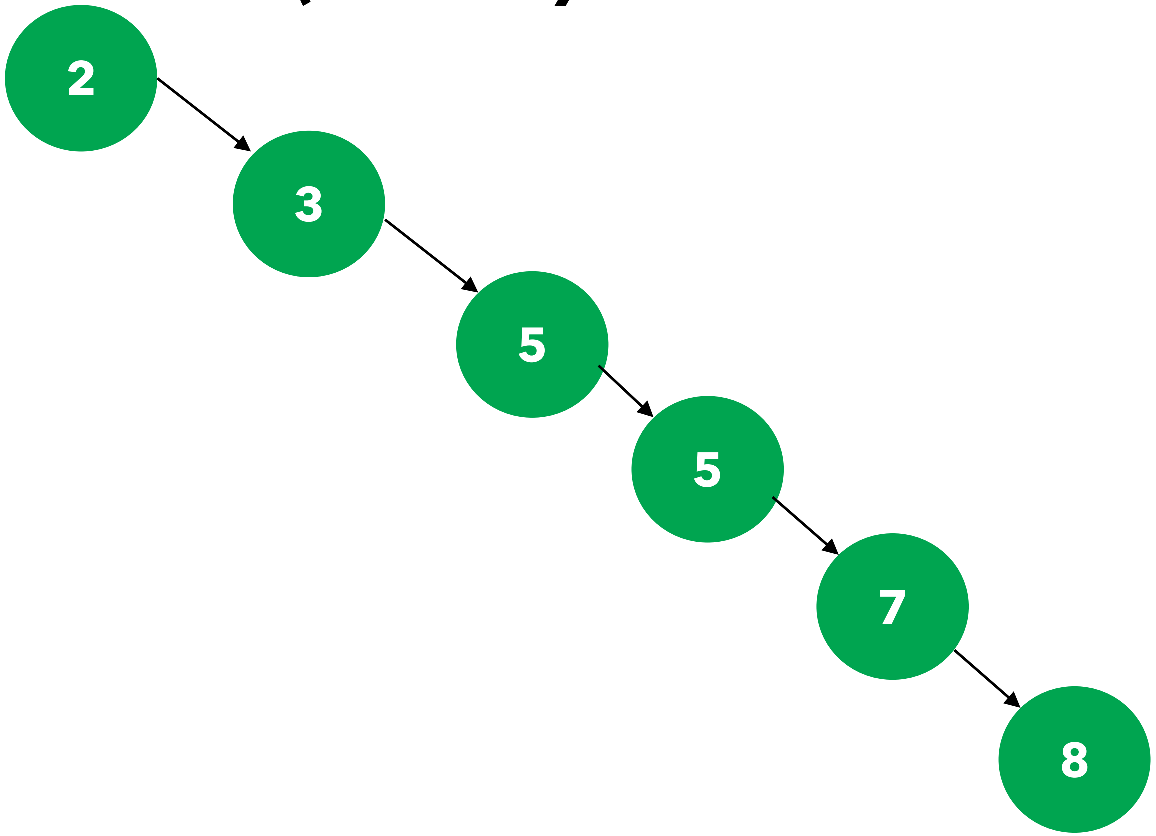


Questo albero ha le stesse chiavi del precedente, ma ha **altezza 4**:

- *2 -> 3 -> 7 -> 8: percorso di lunghezza 3*
- *2 -> 3 -> 7 -> 5 -> 5: percorso di lunghezza 4*

L'altezza è max(3, 4), ossia 4

Alberi binari di ricerca (*binary search trees*)



Questo albero ha le stesse chiavi del precedente, ma ha **altezza 5**:

- *2 -> 3 -> 5 -> 5 -> 7 -> 8: percorso di lunghezza 5*

In pratica siamo di fronte ad una lista concatenata semplice e ordinata.
Dovete cercare la chiave 8: è più veloce la ricerca sull'albero di altezza 2 o su quello di altezza 5?

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – caso base e passo induttivo

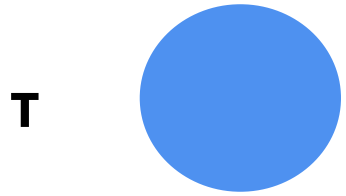
T **nil**

Chiamiamo l'albero **T**.

Se T è un albero vuoto, ossia un puntatore **null**, allora:

height(T) = 0

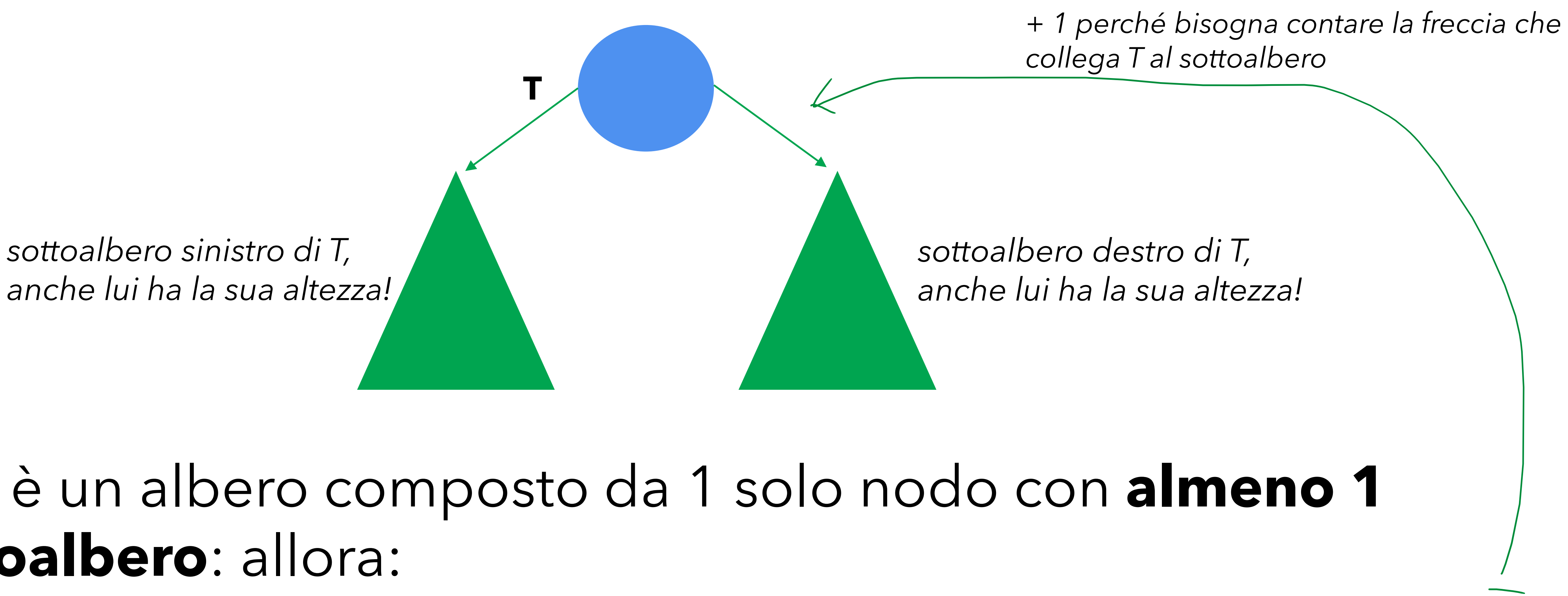
Calcolare ricorsivamente l’altezza di un albero binario – caso base e passo induttivo



Se T è un albero composto da 1 solo nodo **senza sottoalberi**: allora:

height(T) = 0

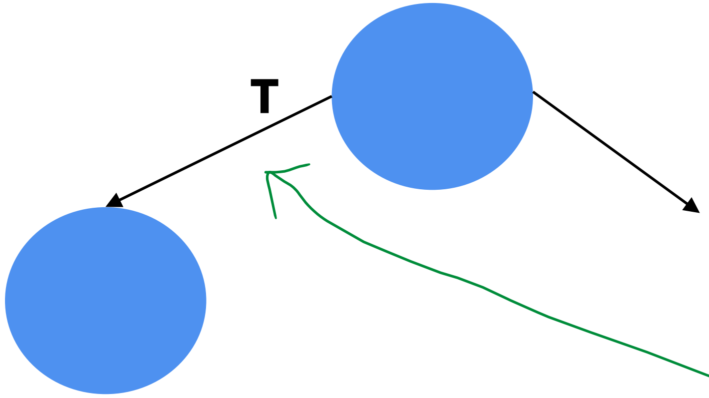
Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – caso base e passo induttivo



Se T è un albero composto da 1 solo nodo con **almeno 1 sottoalbero**: allora:

height(T) = max(height(T.left), height(T.right)) + 1

Calcolare ricorsivamente l’altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera

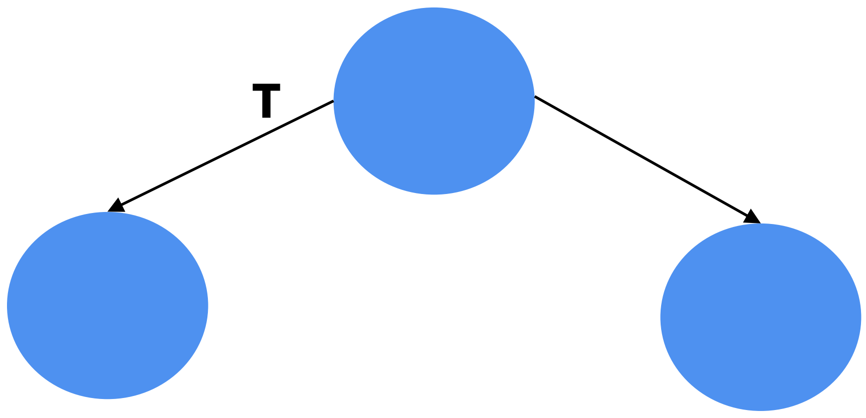


bisogna aggiungere 1:
sicuramente un albero composto da 1 nodo con almeno un sottoalbero ha altezza almeno 1.
Come in questo esempio.
È proprio questo +1 che permette di effettuare il calcolo completo.

height(T) = *max(height(T.left), height(T.right)) + 1 = max(0, 0) + 1 =*
0 + 1 = 1

casi base, albero di 1 nodo e albero vuoto

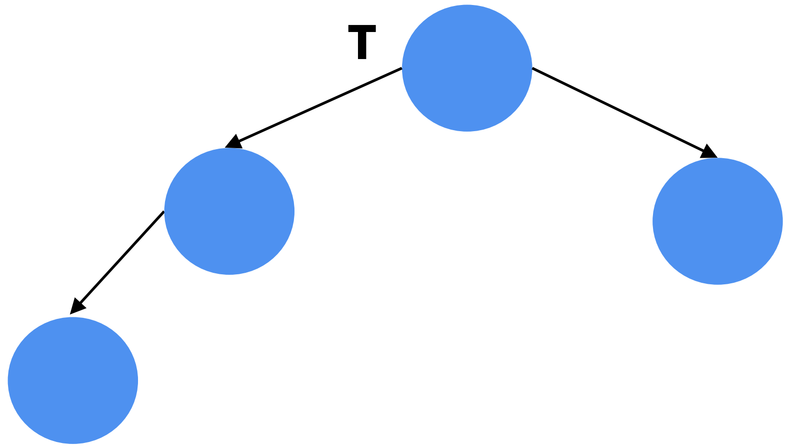
Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



height(T) = *max(height(T.left), height(T.right)) + 1 = max(0, 0) + 1 = 0 + 1* = 1

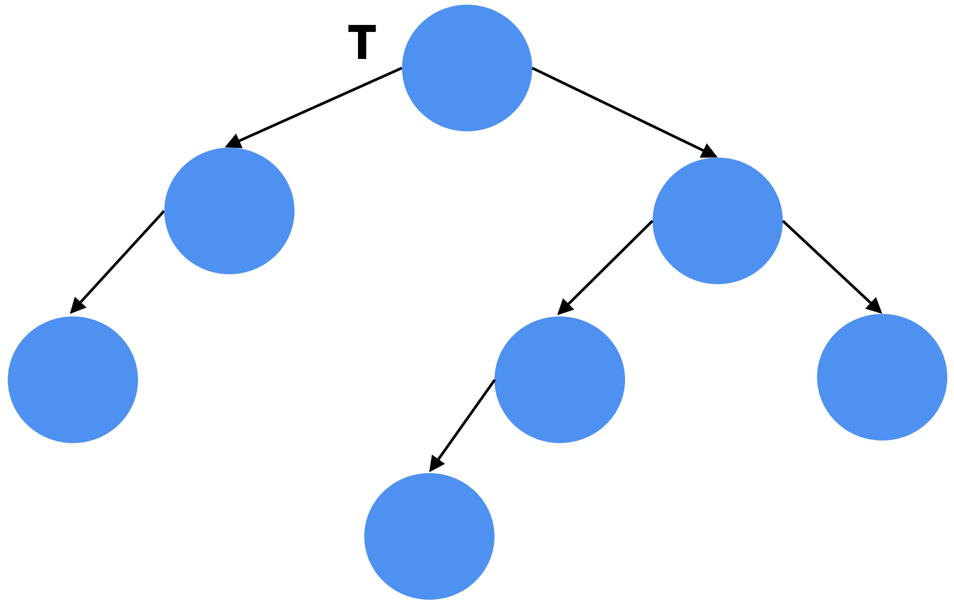
casi base, albero di 1 nodo e albero vuoto

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



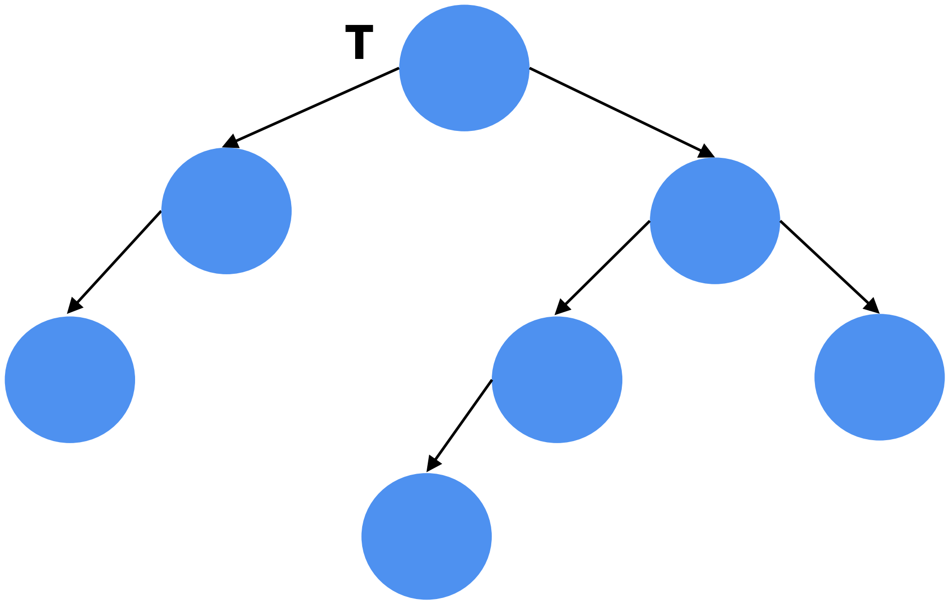
Bisogna espandere la funzione height ricorsivamente fino ai casi base, così:
height(T) = max(height(T.left), height(T.right)) + 1 =
max(max(height(T.left.left), height(T.left.right)) + 1, 0) + 1 =
max(max(0, 0) + 1, 0) + 1 = max(1, 0) + 1 = 2

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



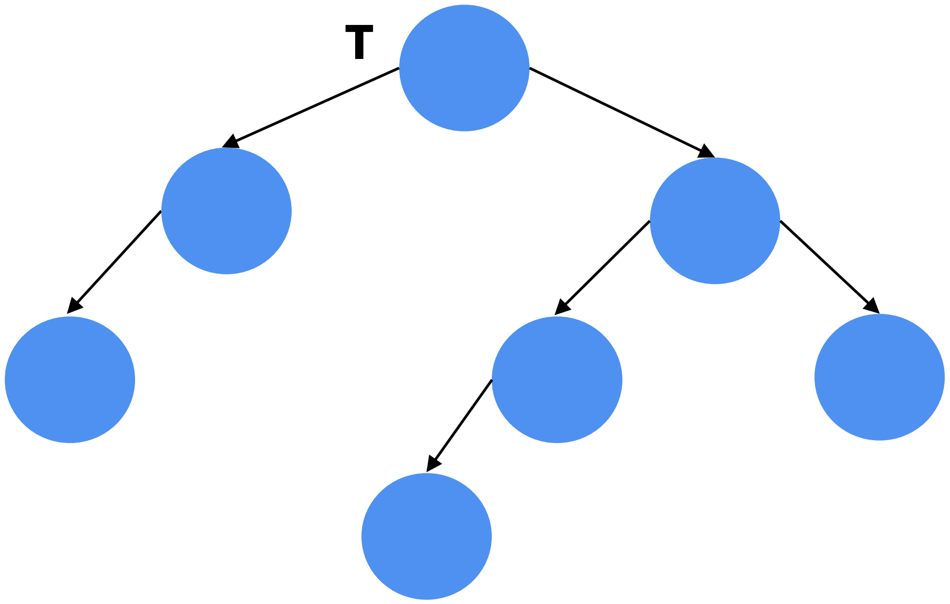
height(T) = max(height(T.left),height(T.right))+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



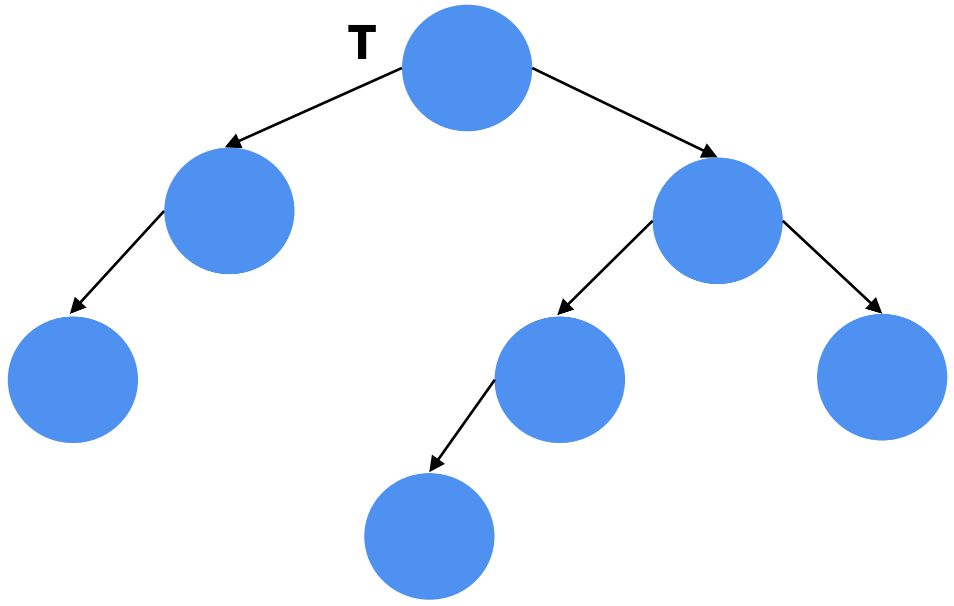
=
max(max(height(T.left.left),height(T.left.right))+1,max(height(T.right.left),height(T.right.right))+1)+1
=

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



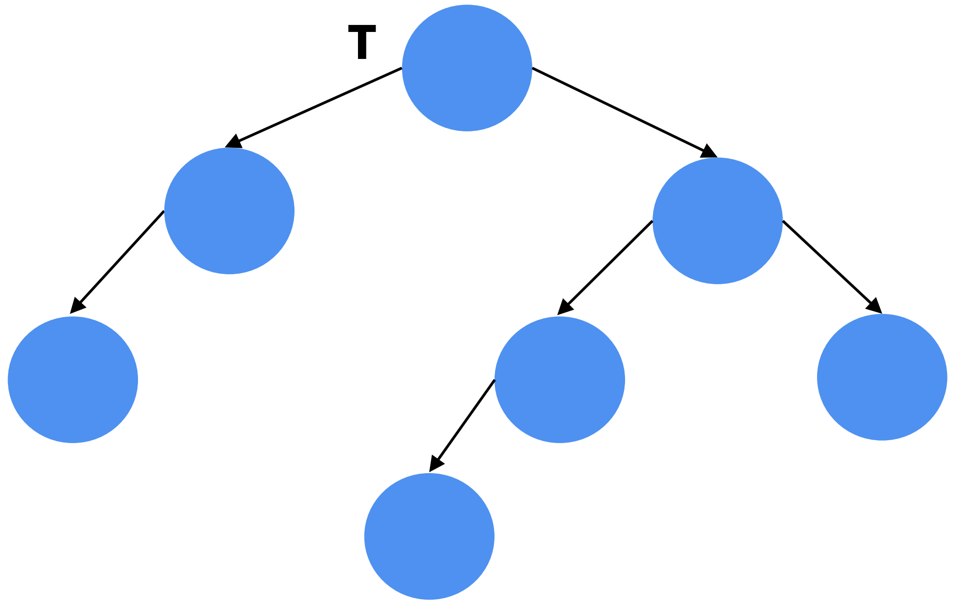
= max(max(0,0)+1,max(height(T.right.left),0)+1)+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



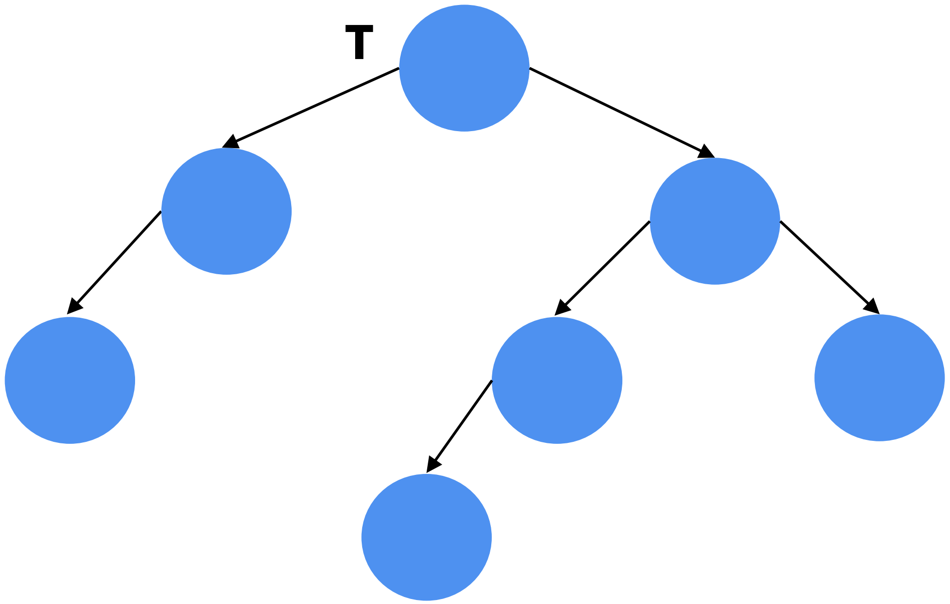
= max(max(0,0)+1,max(max(height(T.right.left.left),height(T.right.left.right))+1,0)+1)+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



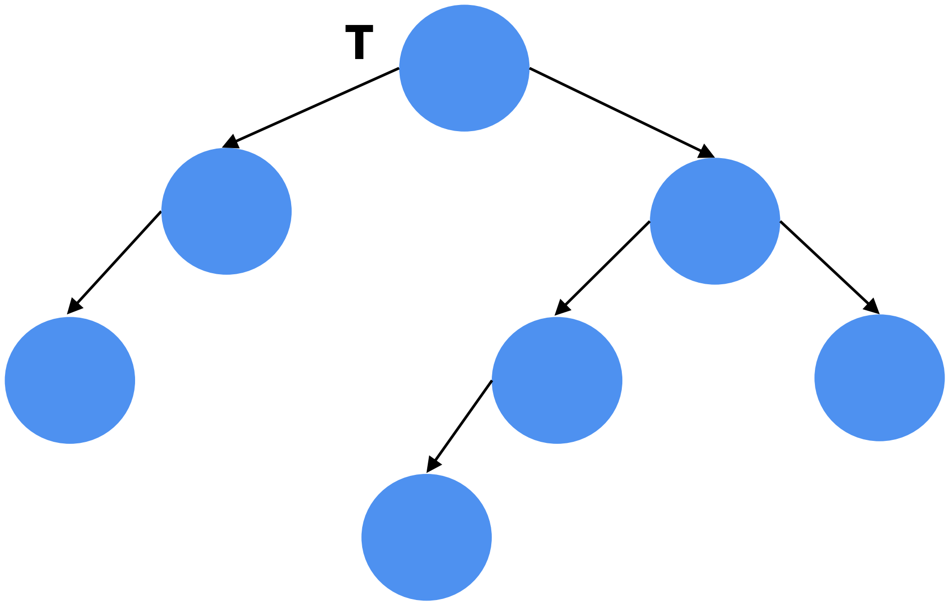
= max(max(0,0)+1,max(max(height(T.right.left.left),height(T.right.left.right))+1,0)+1)+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



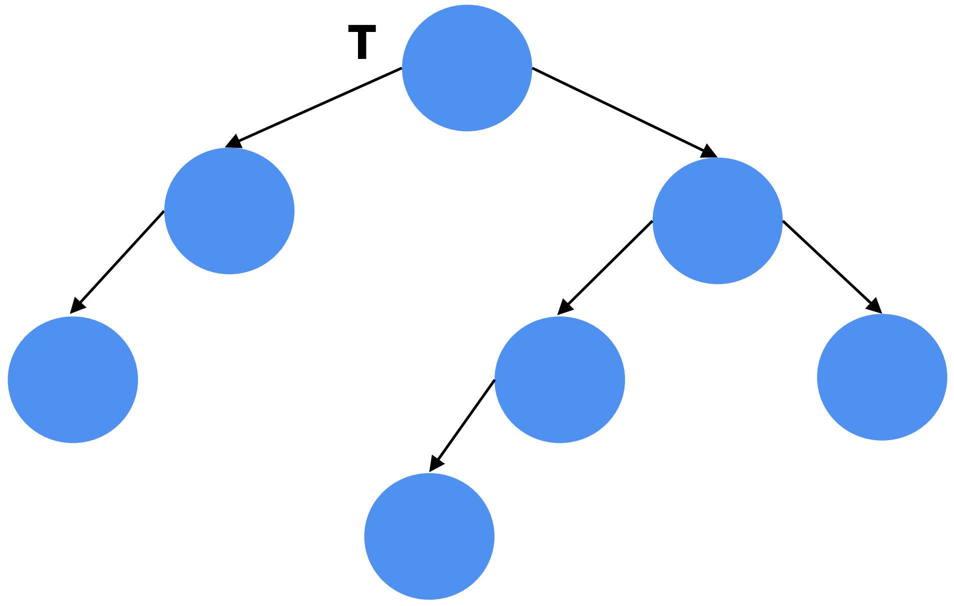
= max(max(0,0)+1,max(max(0,0)+1,0)+1)+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



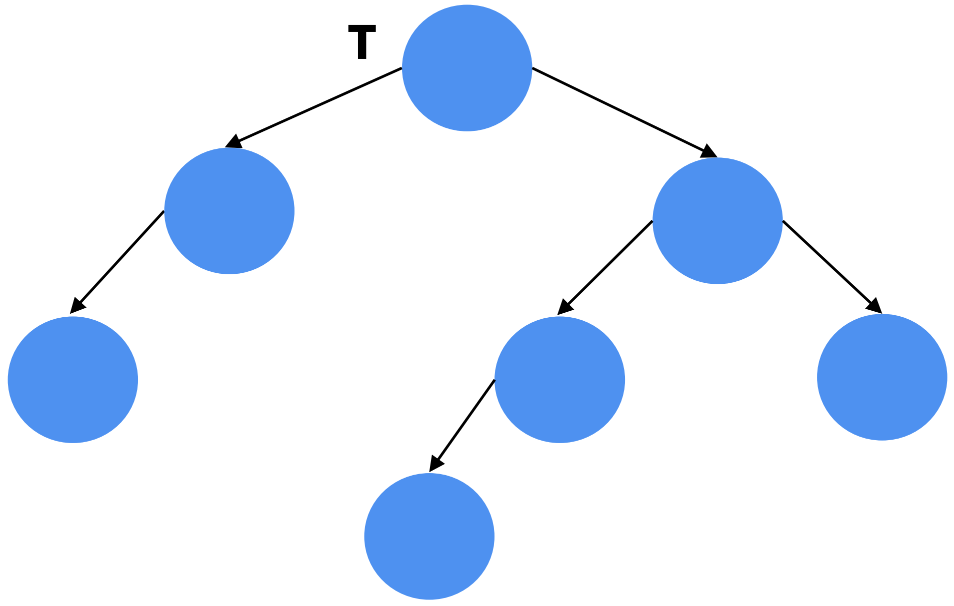
= max(0+1,max(0+1,0)+1)+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



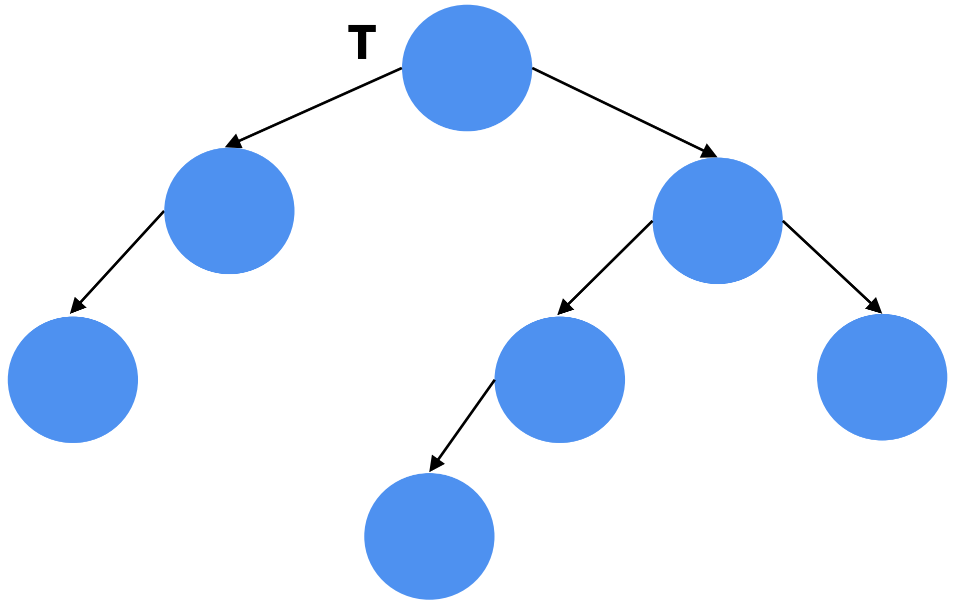
$= \max(1,\max(1,0)+1)+1 =$

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



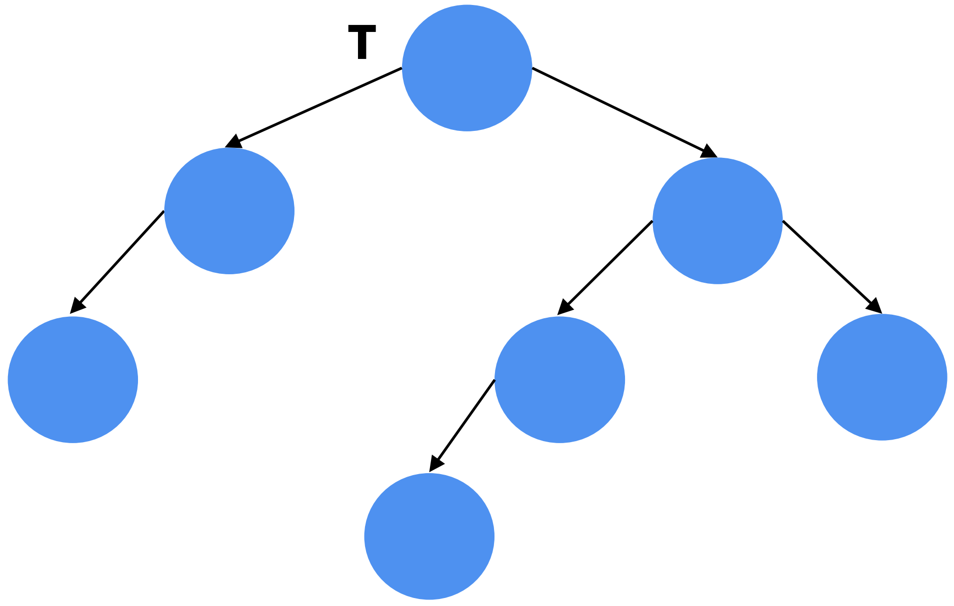
= max(1,1+1)+1 =

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



$= \max(1,2)+1 =$

Calcolare ricorsivamente l'altezza di un albero binario – esempi, niente magia nera



= 2+1 = 3

La funzione **height(T)** in pseudocodice

```
height(T): returns int
        if T is nil:
                return 0
        if T.left is nil and T.right is nil:
                return 0
        int heightLeftSubTree = height(T.left)
        int heightRightSubTree = height(T.right)

        return max(heightLeftSubTree, heightRightSubTree) + 1
```

Il metodo **getHeight()** in Java

```
int getHeight(){
    if (this == null){
        return 0;
    }
    if (this.leftChild == null && this.rightChild == null){
        return 0;
    }
    int heightLeftSubTree = 0;
    int heightRightSubTree = 0;
    if (this.leftChild != null){
        heightLeftSubTree = this.leftChild.getHeight();
    }
    if (this.rightChild != null){
        heightRightSubTree = this.rightChild.getHeight();
    }

    if (heightLeftSubTree >= heightRightSubTree){
        return heightLeftSubTree + 1;
    }
    return heightRightSubTree + 1;
}
```

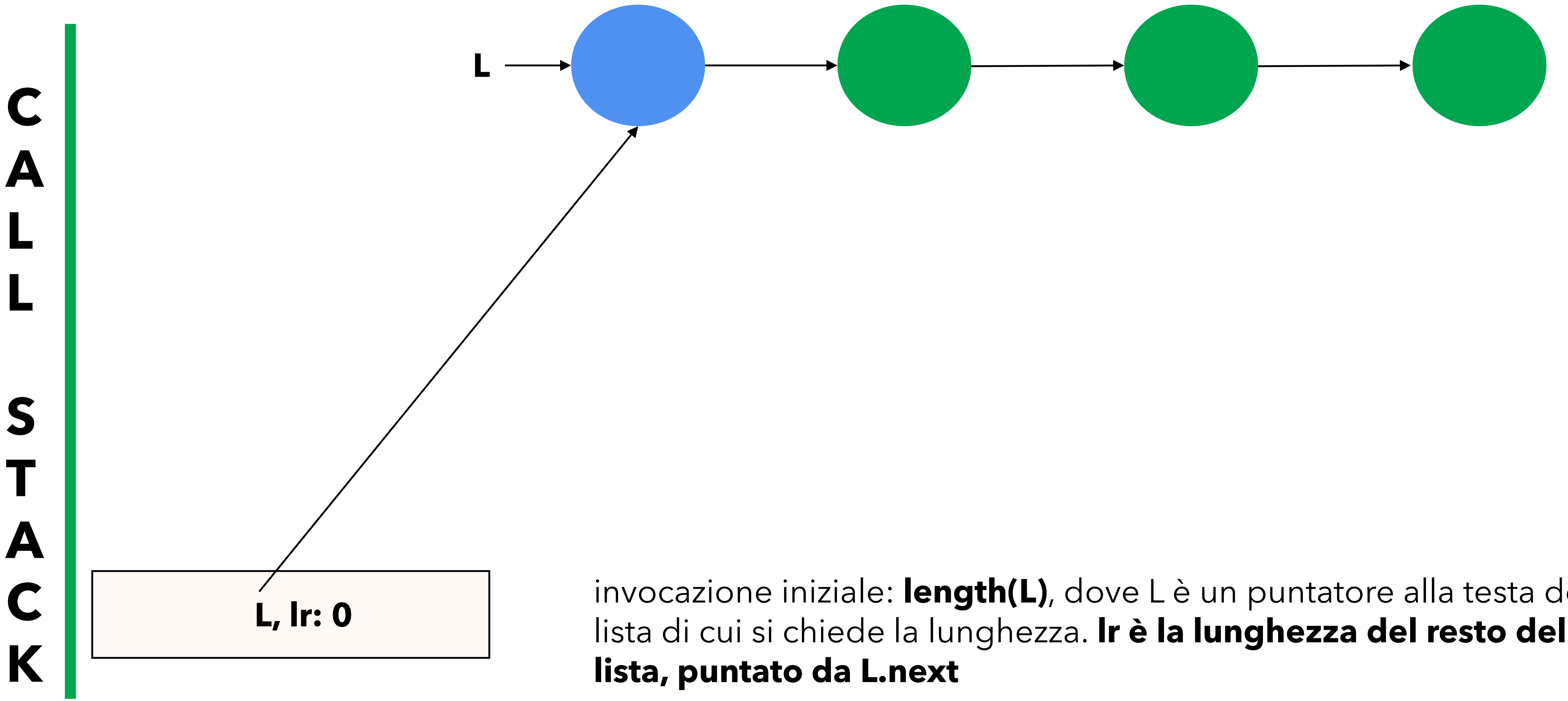
Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list

```
length(L): returns an integer
          if L is nil:
               return 0
          int length_remainder = length(L.next)
          return length_remainder + 1
```

Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list

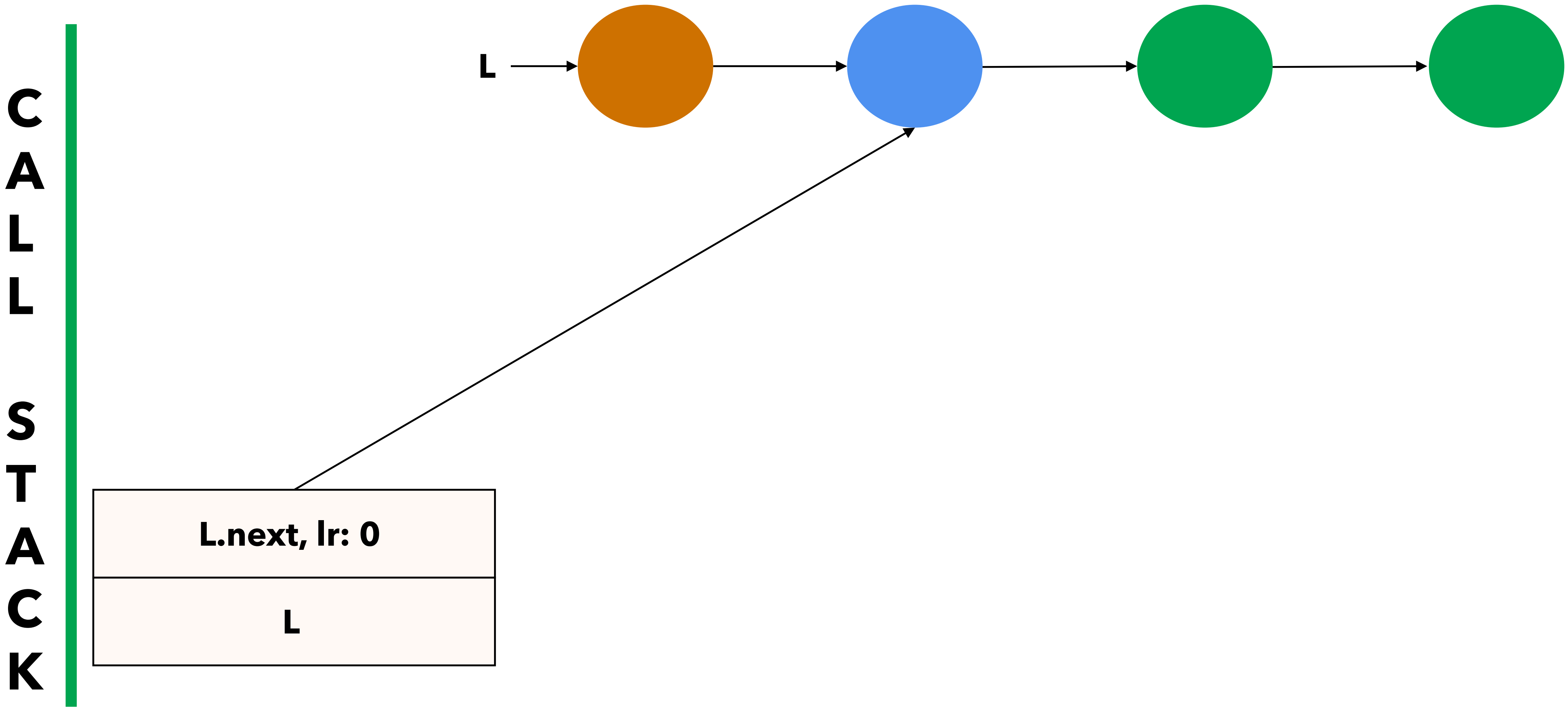
```java
int getLength(){
            if (this.next == null){
                  return 1;
            }
            int length_remainder = this.next.getLength();
            return length_remainder + 1;
}
```

Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list

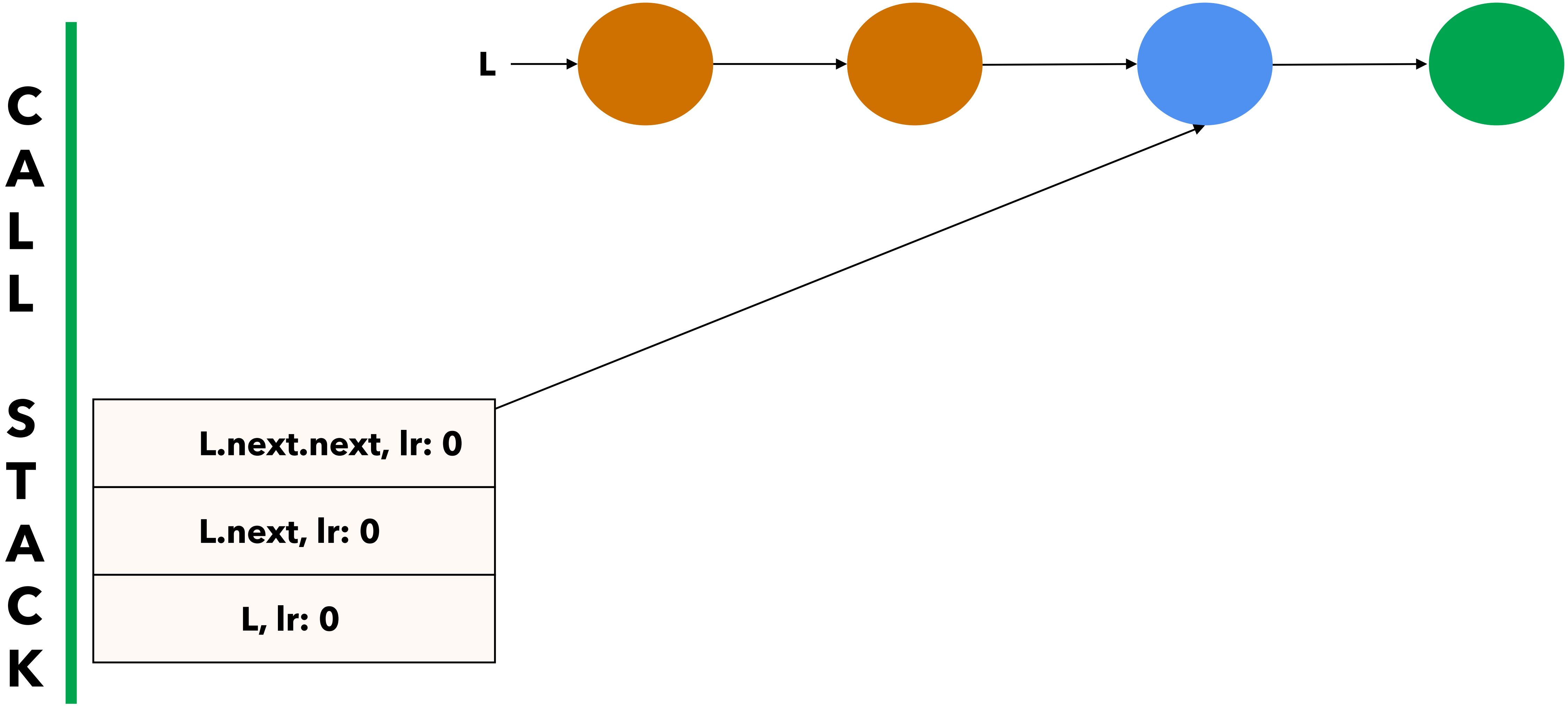


invocazione iniziale: **length(L)**, dove L è un puntatore alla testa della lista di cui si chiede la lunghezza. **lr è la lunghezza del resto della lista, puntato da L.next**

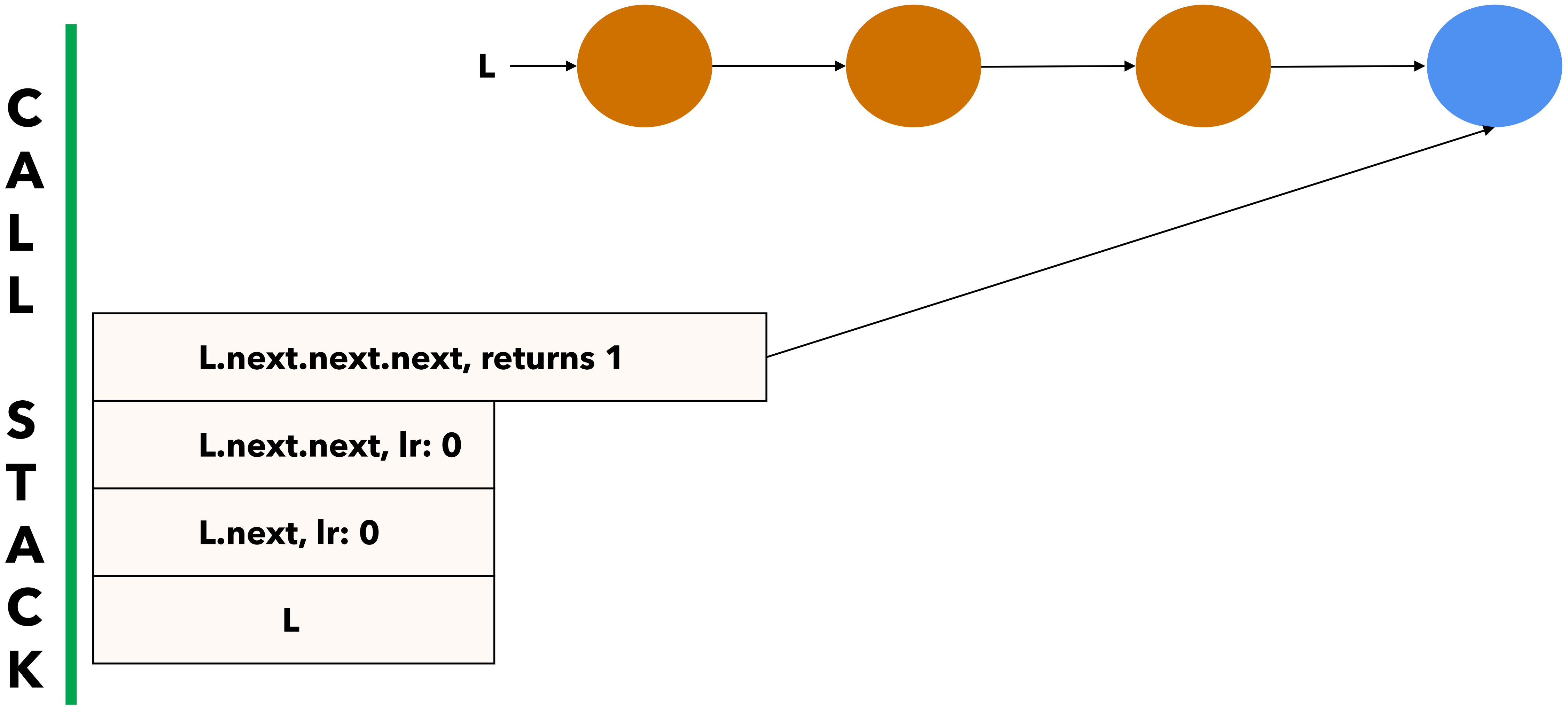
Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list



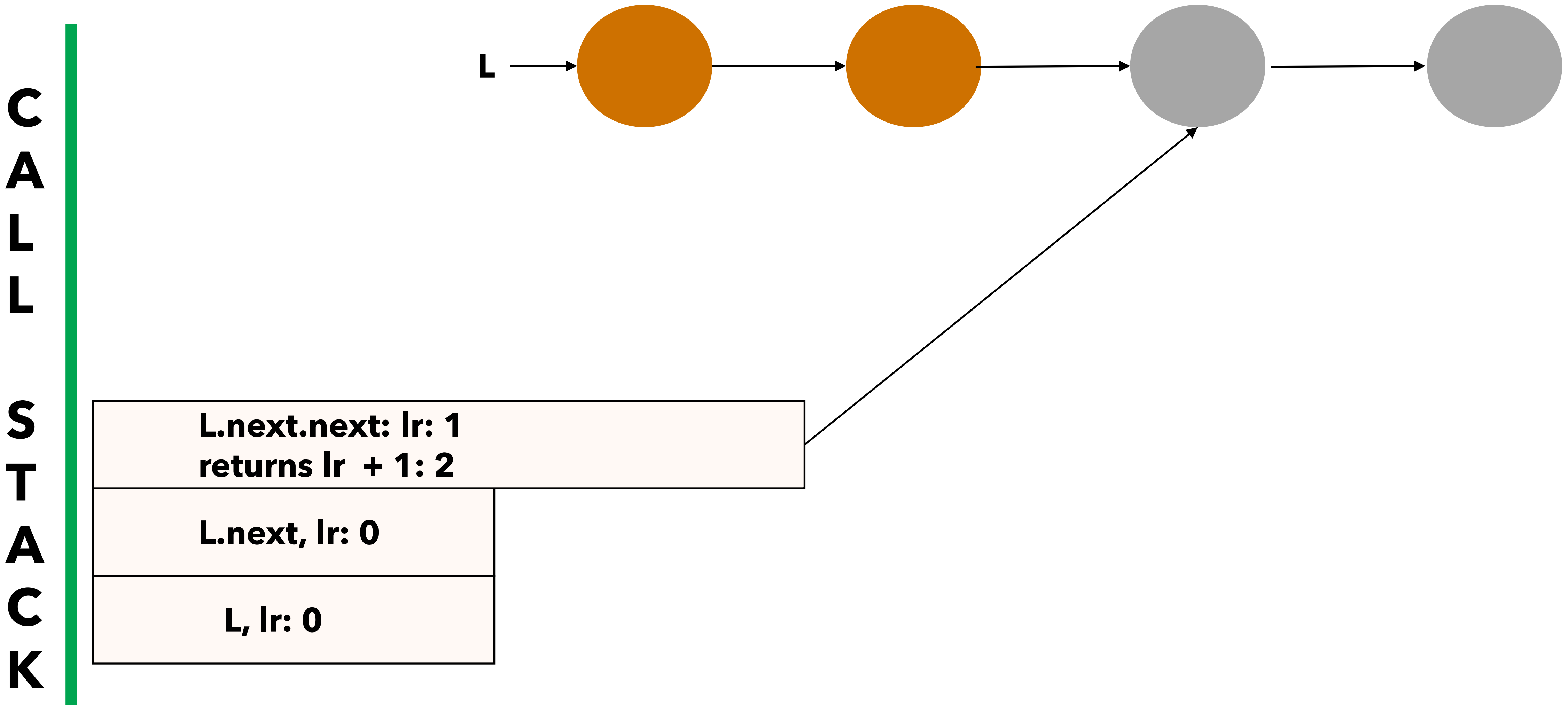
Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list



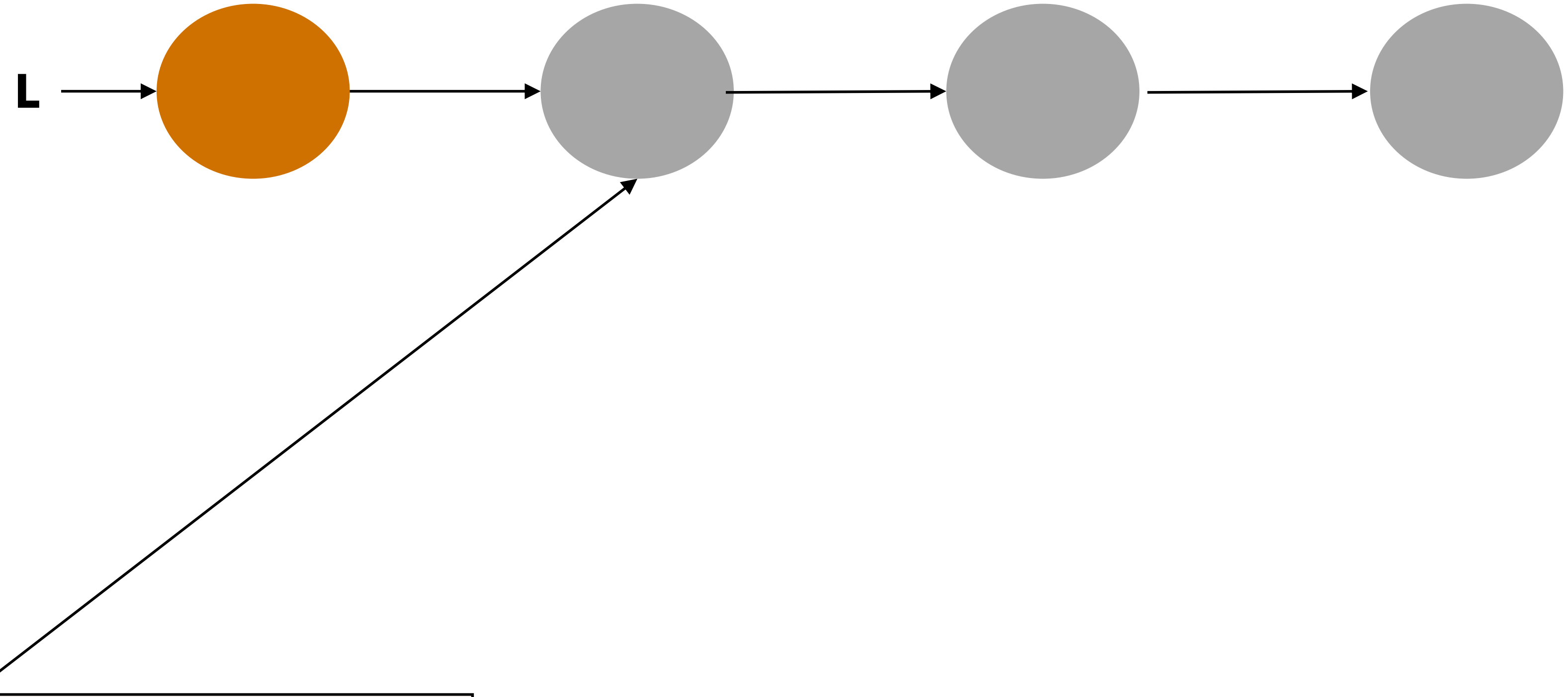
Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list



Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list



Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list

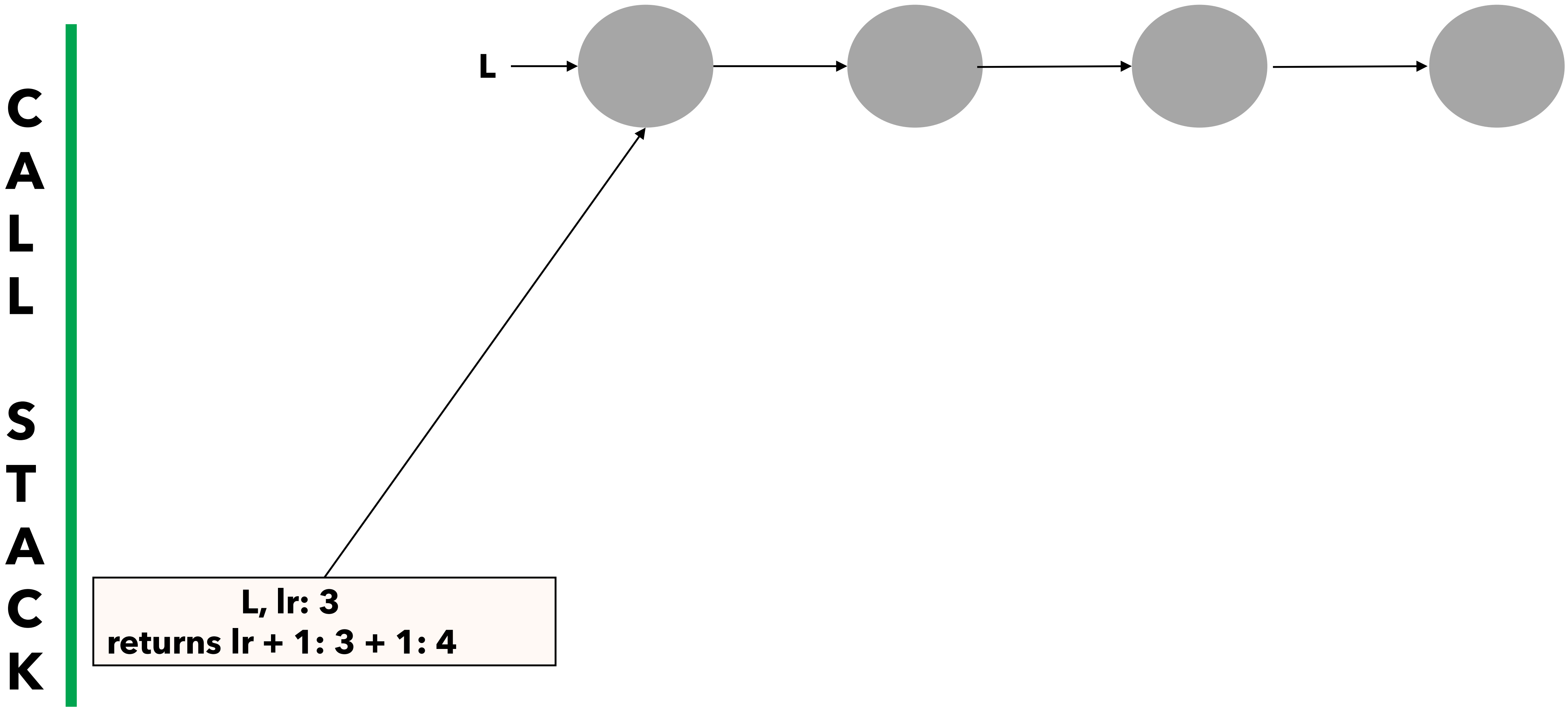


CALL STACK

L.next, lr: 2, returns lr + 1: 2 + 1: 3

L, lr: 0

Analogia: calcolo ricorsivo della lunghezza di una linked list

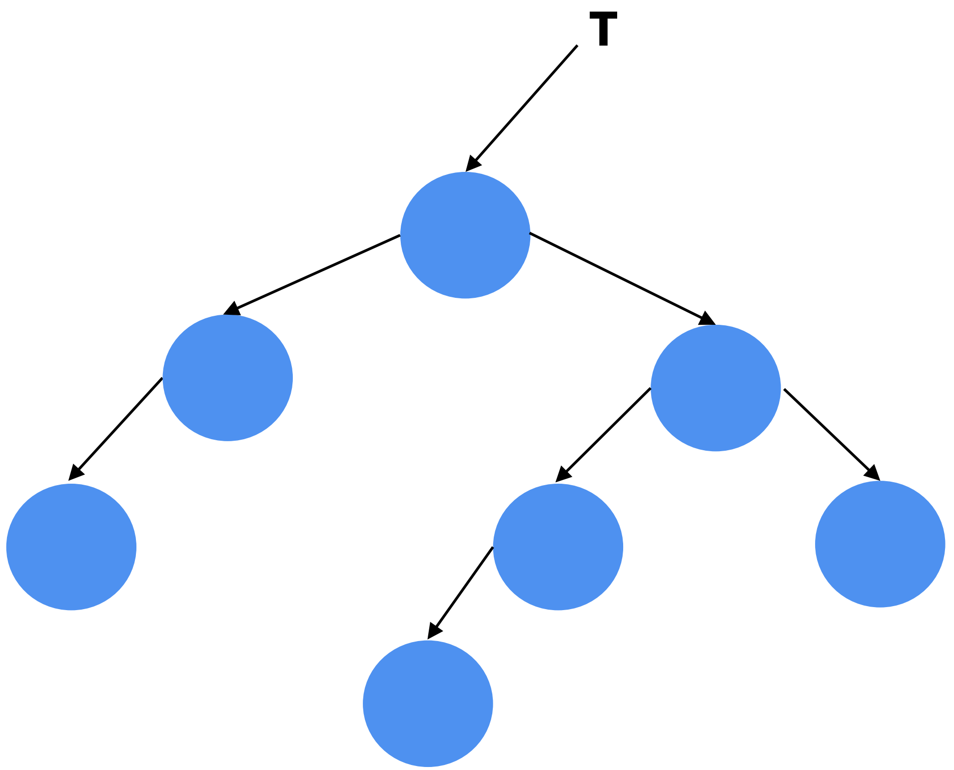


Niente magia: srotoliamo la ricorsione

Nodo radice dell’invocazione corrente

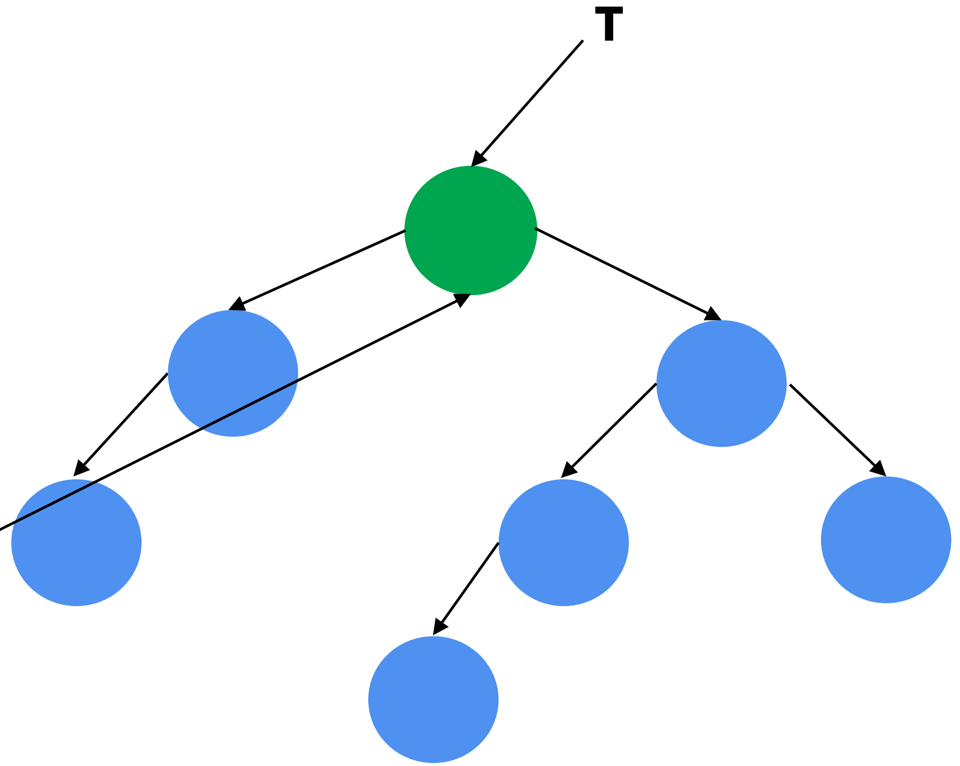
Nodo per cui l ’altezza è stata calcolata completamente

Nodo per cui l’altezza non è stata calcolata completamente



Il chiamante (ad esempio il metodo *main*) invoca **height(T)**. Vediamo cosa succede sullo stack delle chiamate di funzione. Indicheremo in *verde la radice dell’invocazione corrente*, in ***grigio quelli per cui l’altezza è stata calcolata***, *<u>in marrone i nodi visitati la cui altezza non è stata calcolata</u>*

Niente magia: srotoliamo la ricorsione

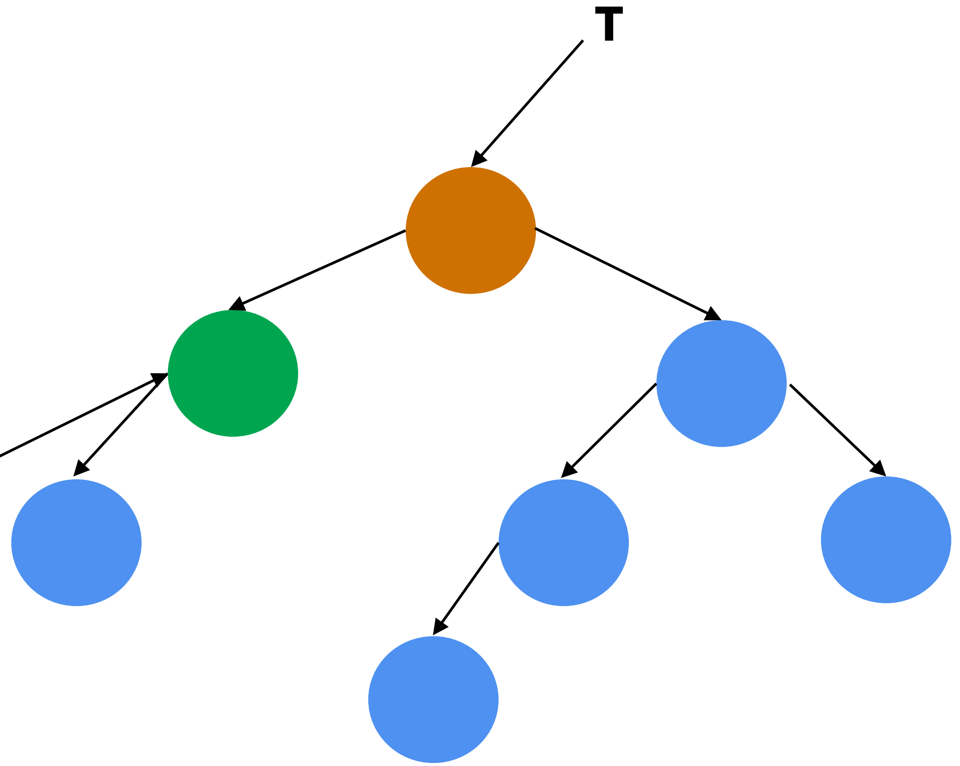


CALL STACK

T, hl:0, hr: 0

invocazione corrente: **height(T)**, **hl**: altezza del sottoalbero sinistro, **hr**: altezza del sottoalbero destro. Sono variabili locali diverse ad ogni invocazione ricorsiva

Niente magia: srotoliamo la ricorsione



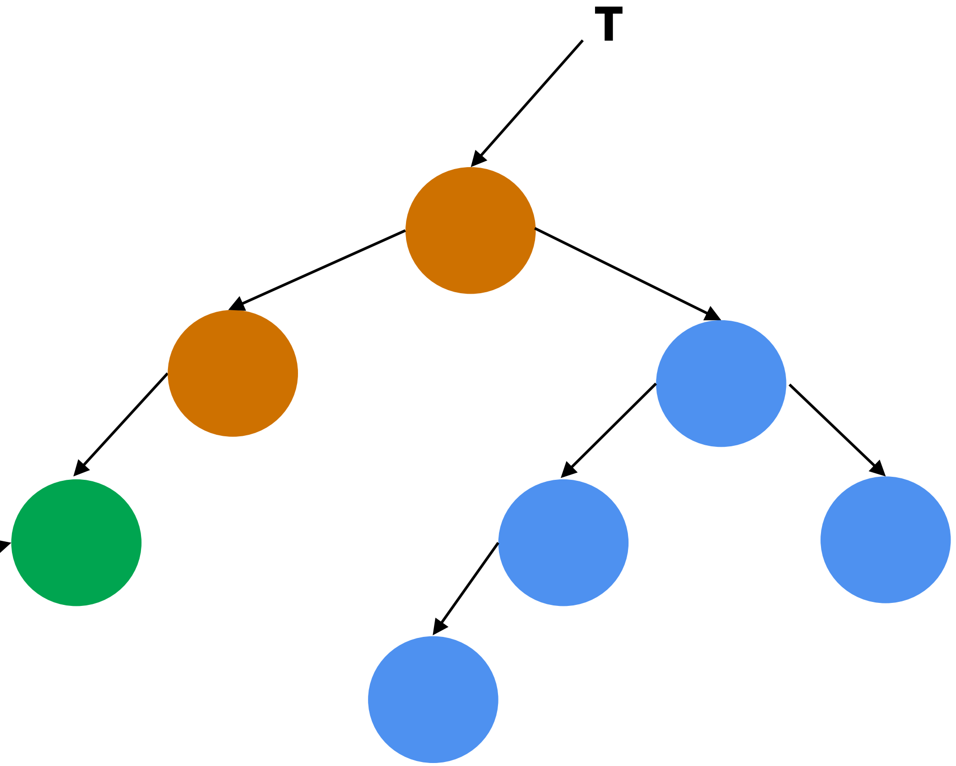
CALL STACK

T.left, hl: 0, hr: 0

T, hl: 0, hr: 0

NB: *per come abbiamo scritto il codice, visitiamo prima il sottoalbero sinistro, e poi quello destro. Chiaramente li visitiamo solo se esistono.*

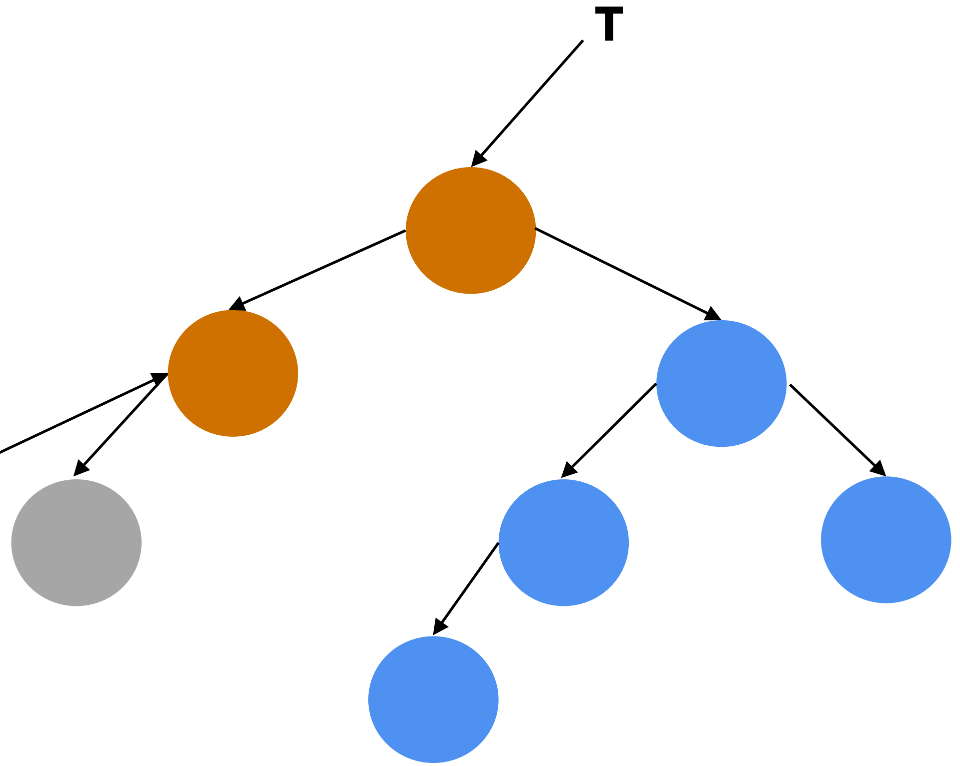
Niente magia: srotoliamo la ricorsione



CALL STACK

T.left.left: returns 0
T.left, hl: 0, hr: 0
T, hl: 0, hr: 0

Niente magia: srotoliamo la ricorsione

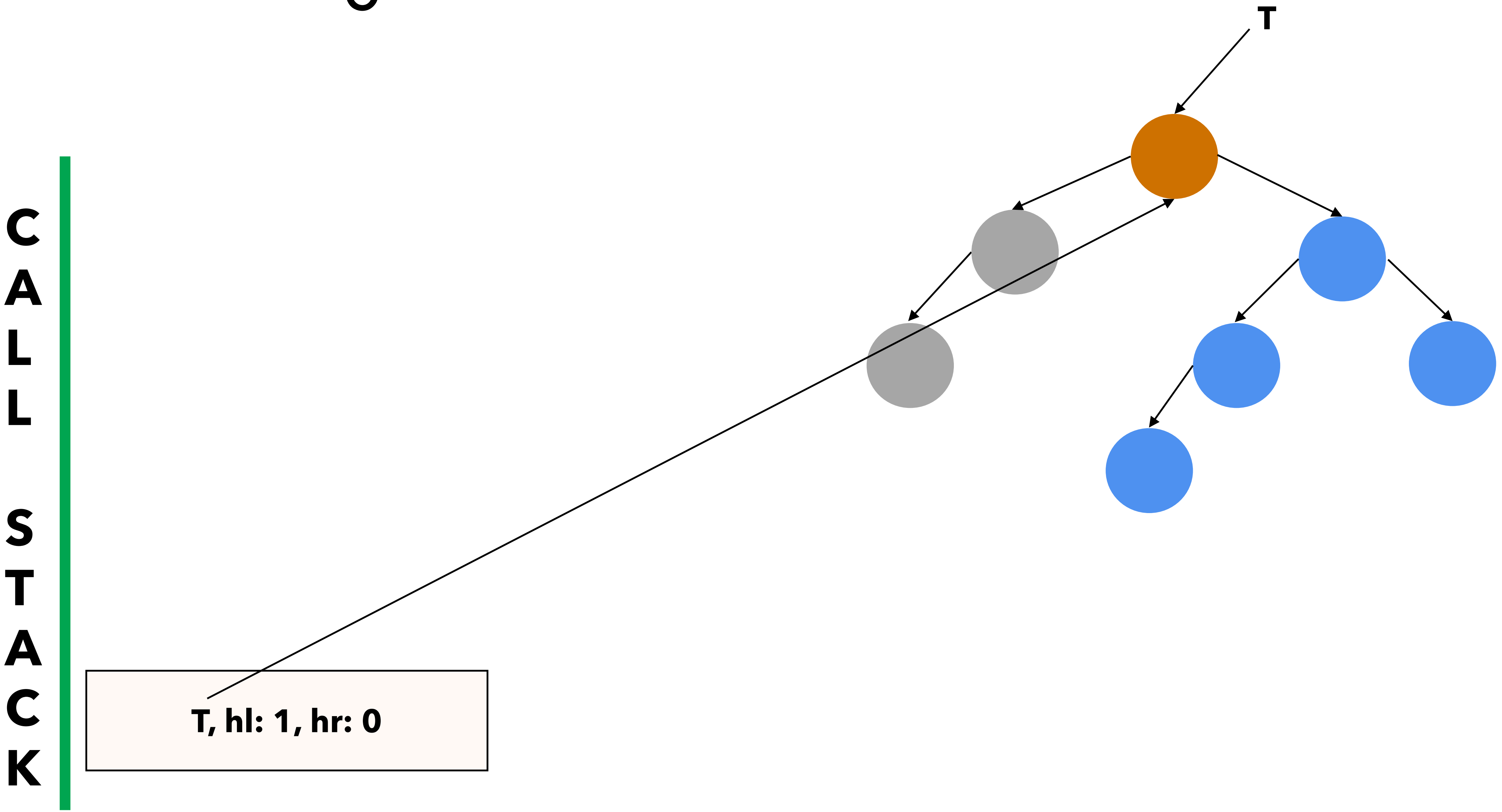


CALL STACK

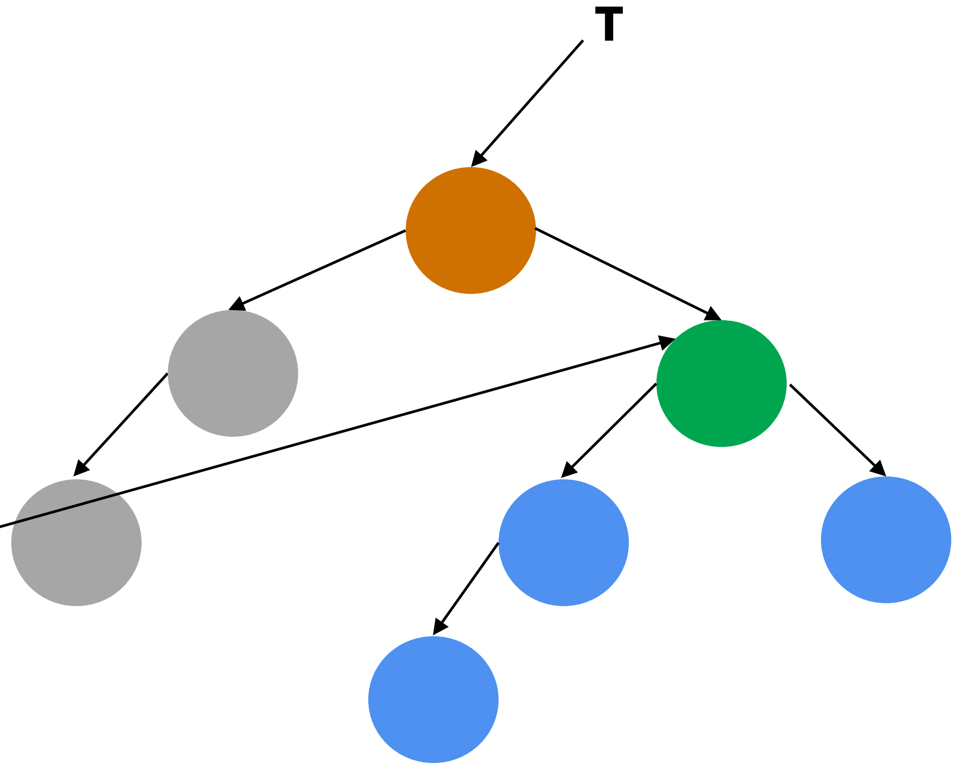
T.left: returns max(hl: 0, hr: 0) + 1: 0 + 1: 1

T, hl: 0, hr: 0

Niente magia: srotoliamo la ricorsione



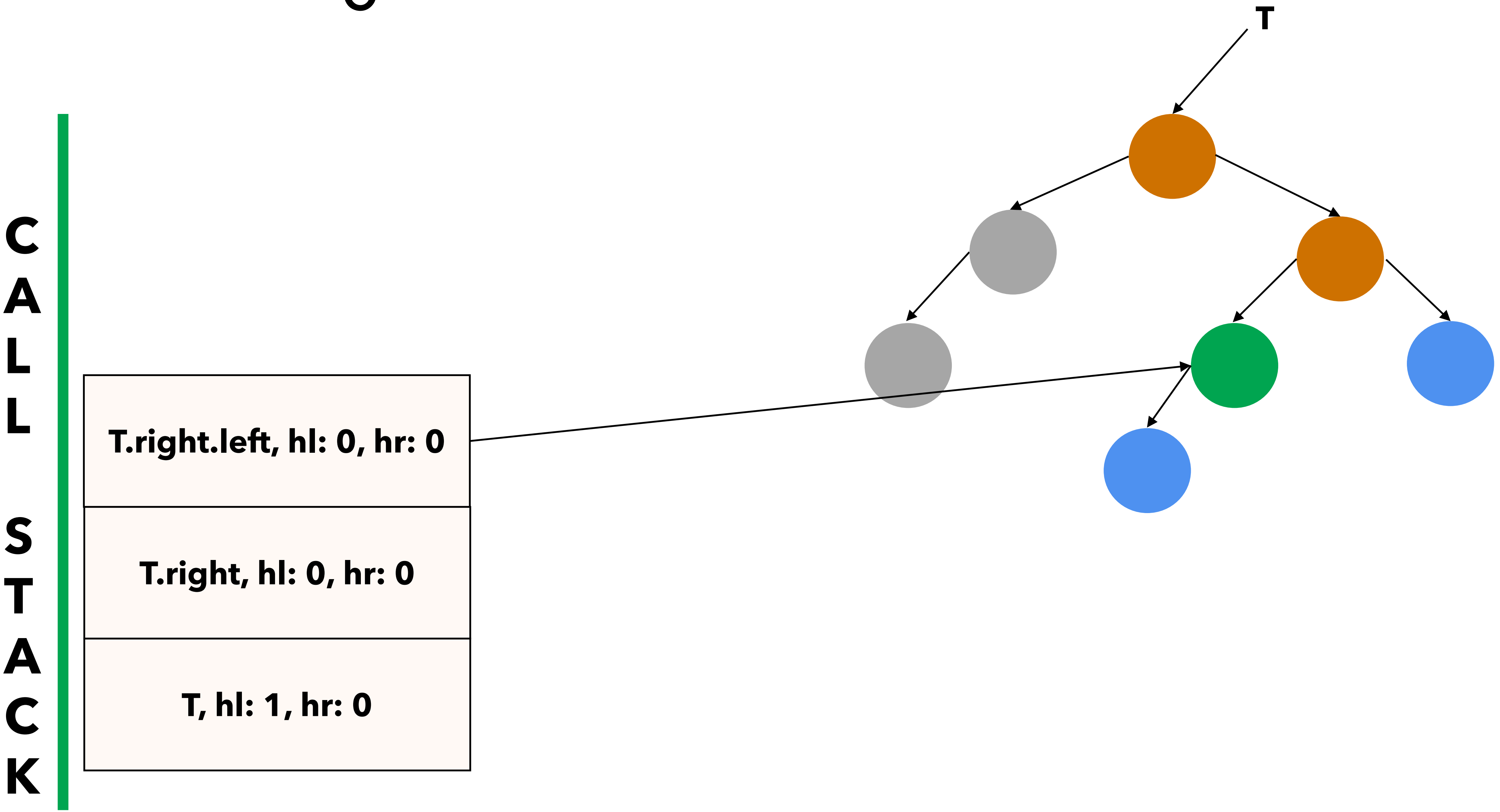
Niente magia: srotoliamo la ricorsione



CALL STACK

T.right, hl: 0, hr: 0
T, hl: 1, hr: 0

Niente magia: srotoliamo la ricorsione



Niente magia: srotoliamo la ricorsione

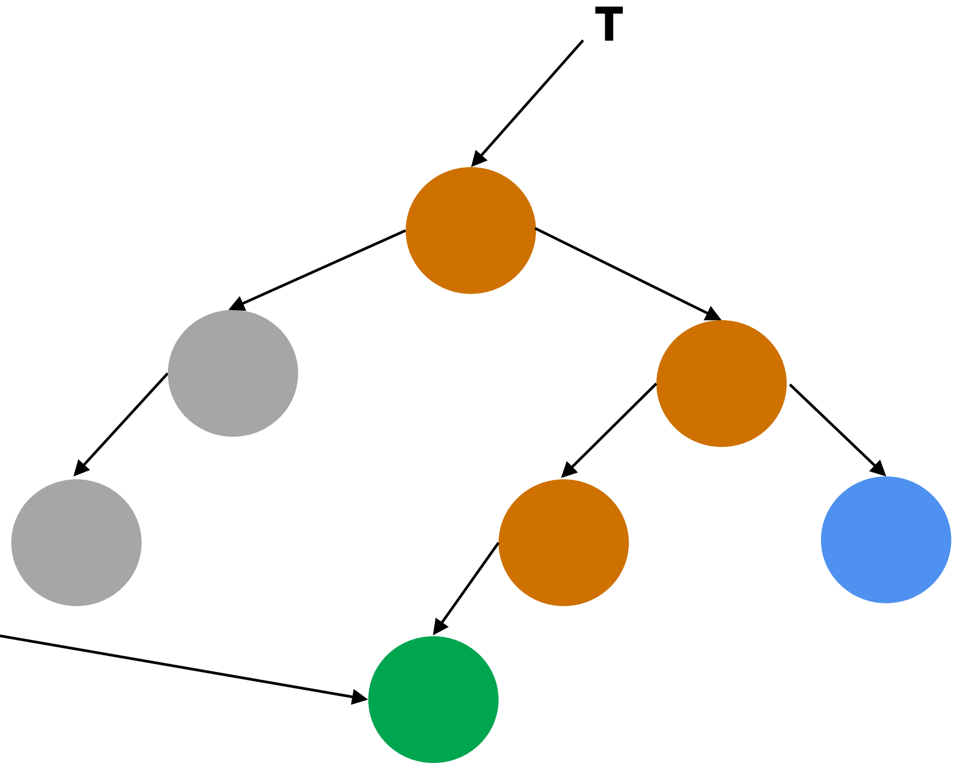
CALL STACK

T.right.left.left: returns 0

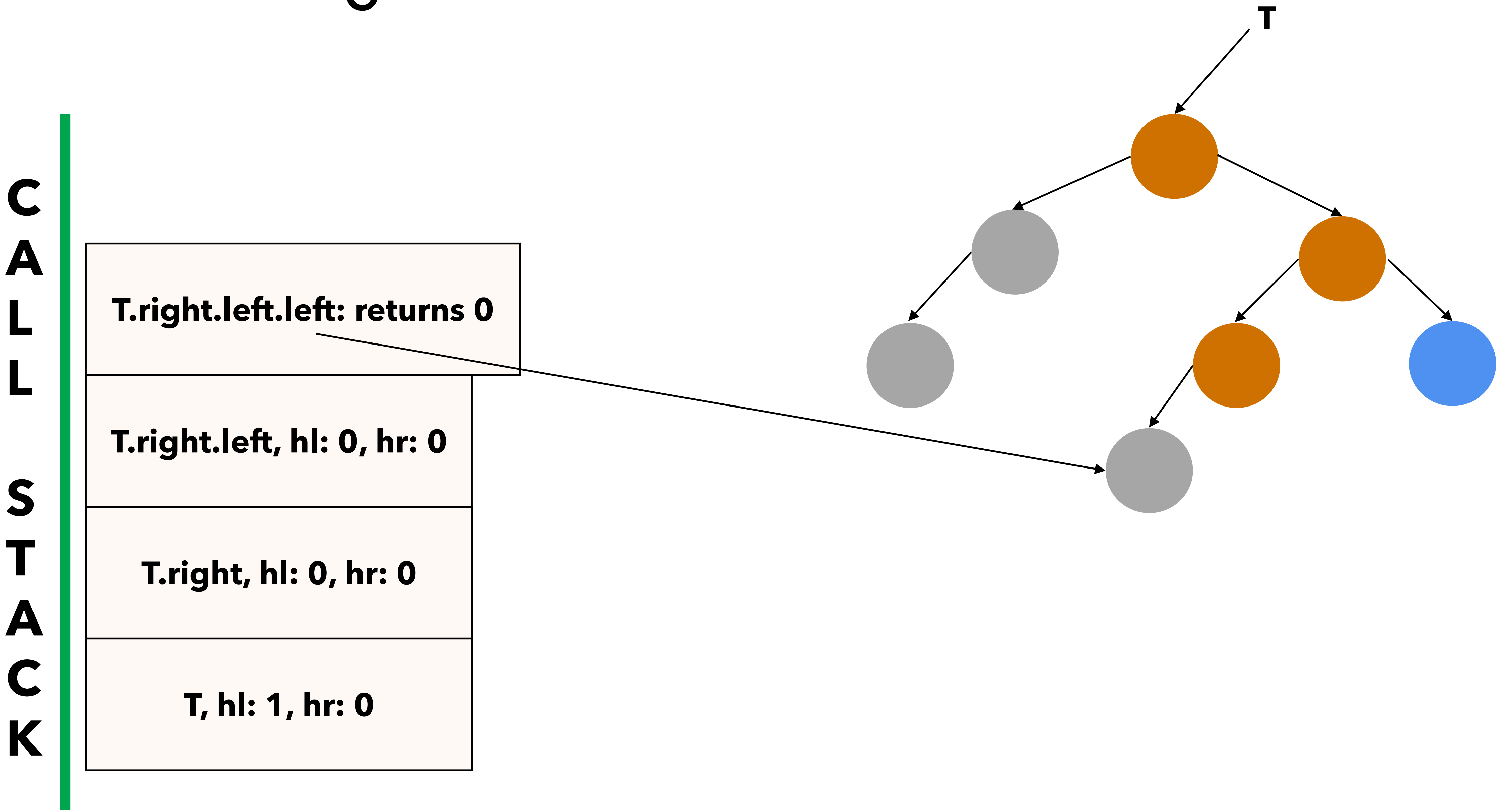
T.right.left, hl: 0, hr: 0

T.right, hl: 0, hr: 0

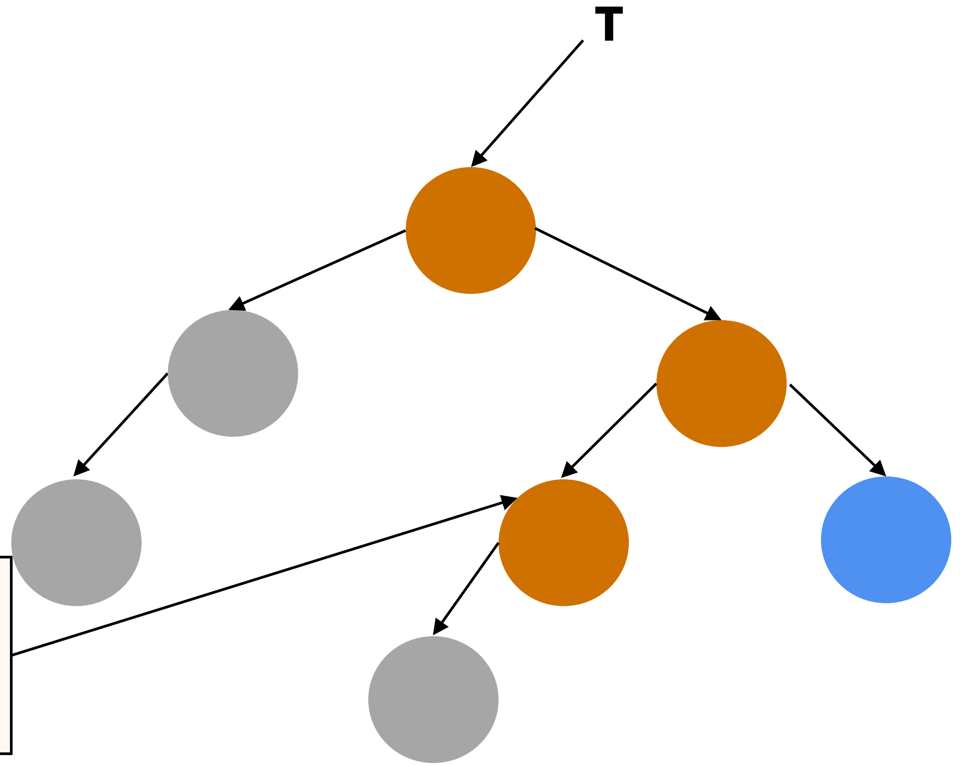
T, hl: 1, hr: 0



Niente magia: srotoliamo la ricorsione



Niente magia: srotoliamo la ricorsione



C
A
L
L

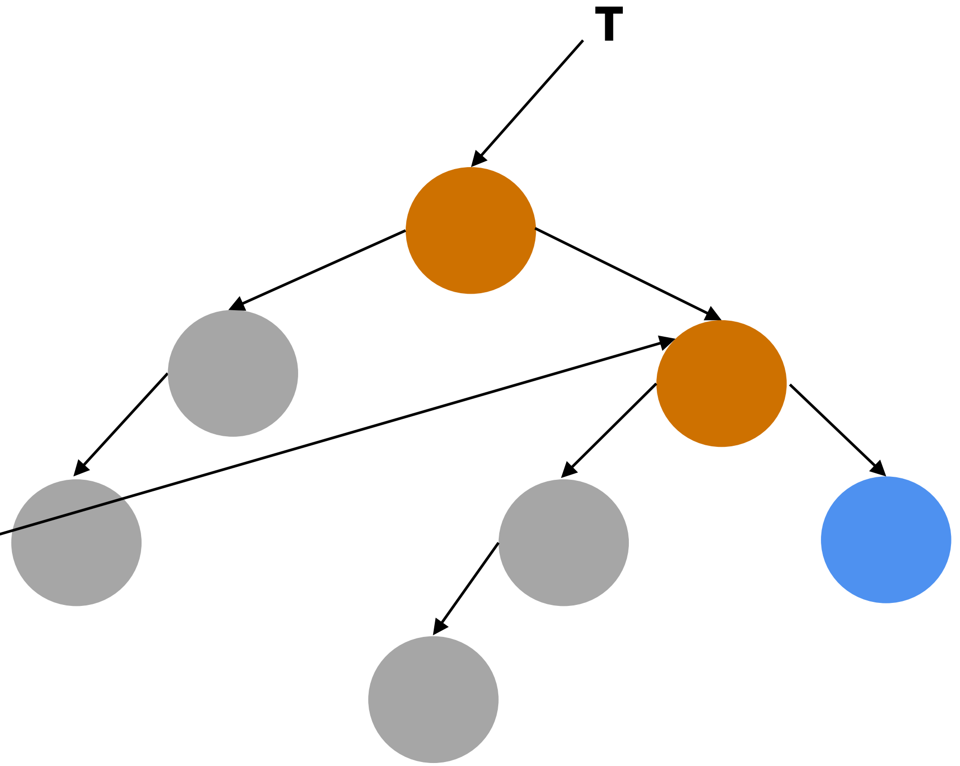
S
T
A
C
K

T.right.left, returns max(hl: 0, hr: 0) + 1: 0 + 1: 1

T.right, hl: 0, hr: 0

T, hl: 1, hr: 0

Niente magia: srotoliamo la ricorsione



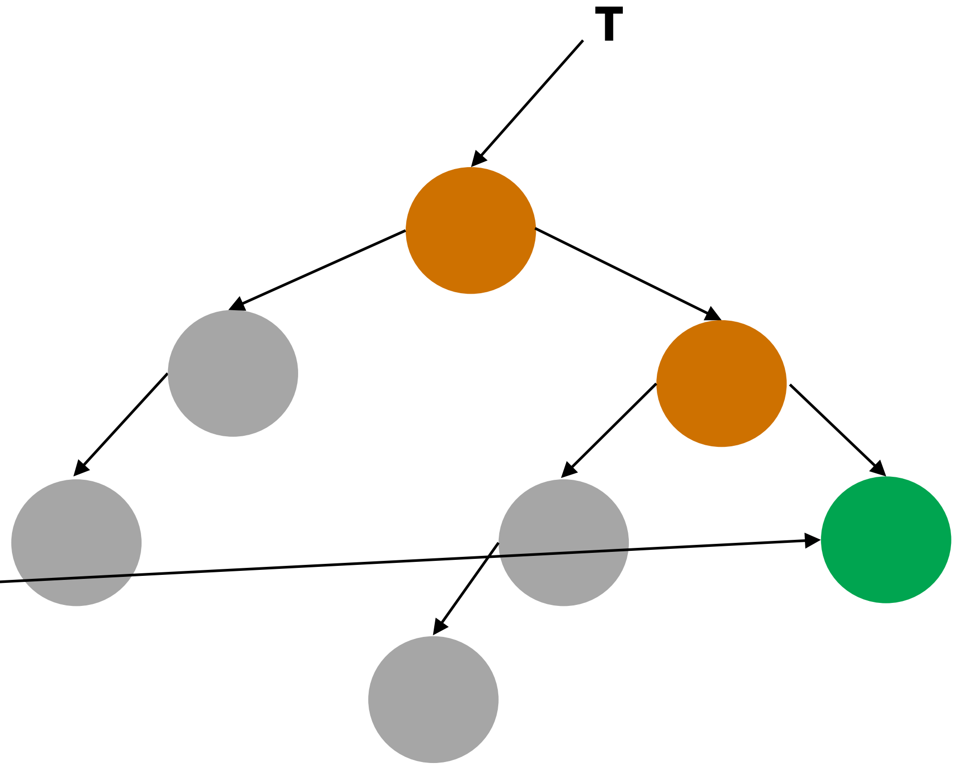
CALL STACK

T.right, hl: 1, hr: 0
T, hl: 1, hr: 0

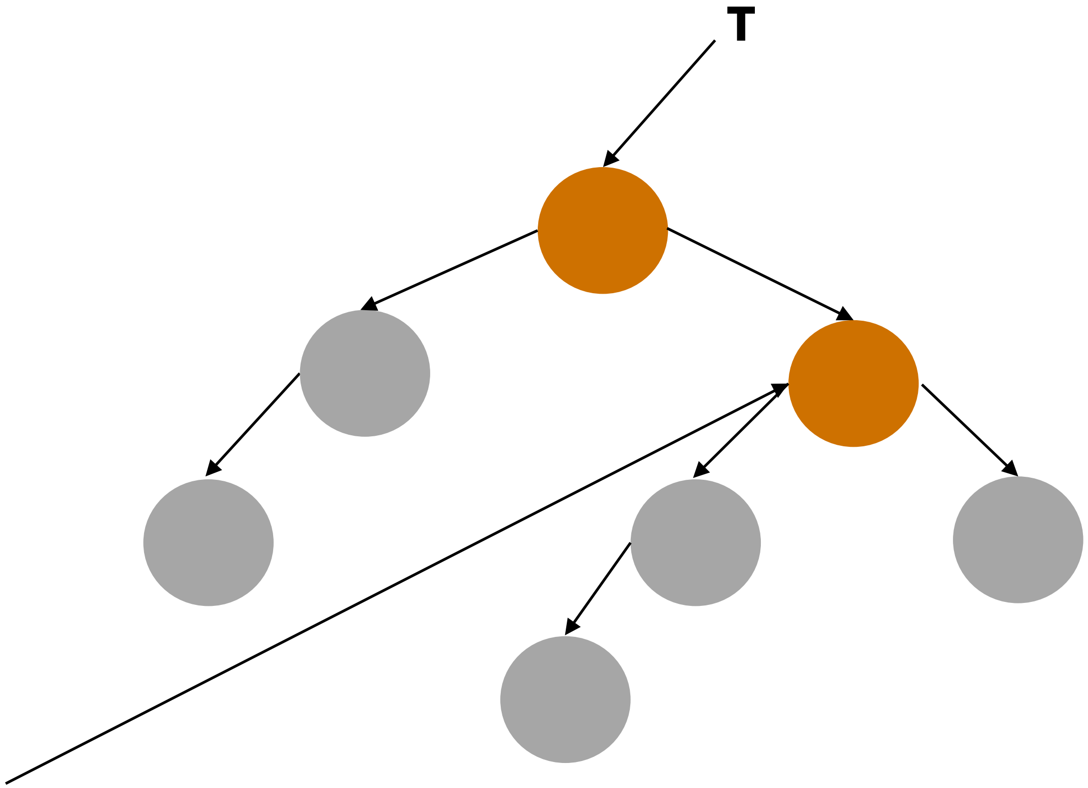
Niente magia: srotoliamo la ricorsione

CALL STACK

T.right.right, returns 0
T.right, hl: 1, hr: 0
T, hl: 1, hr: 0



Niente magia: srotoliamo la ricorsione



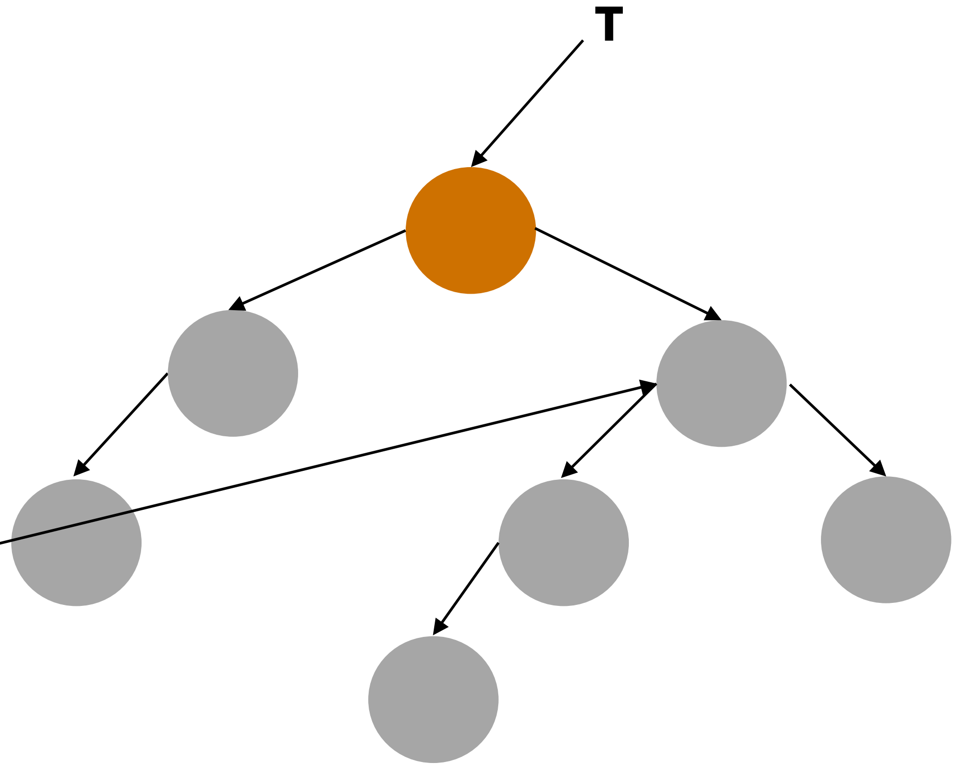
C
A
L
L

S
T
A
C
K

T.right, returns max(hl: 0, hr: 1) + 1:
1 + 1: 2

T, hl: 1, hr: 0

Niente magia: srotoliamo la ricorsione

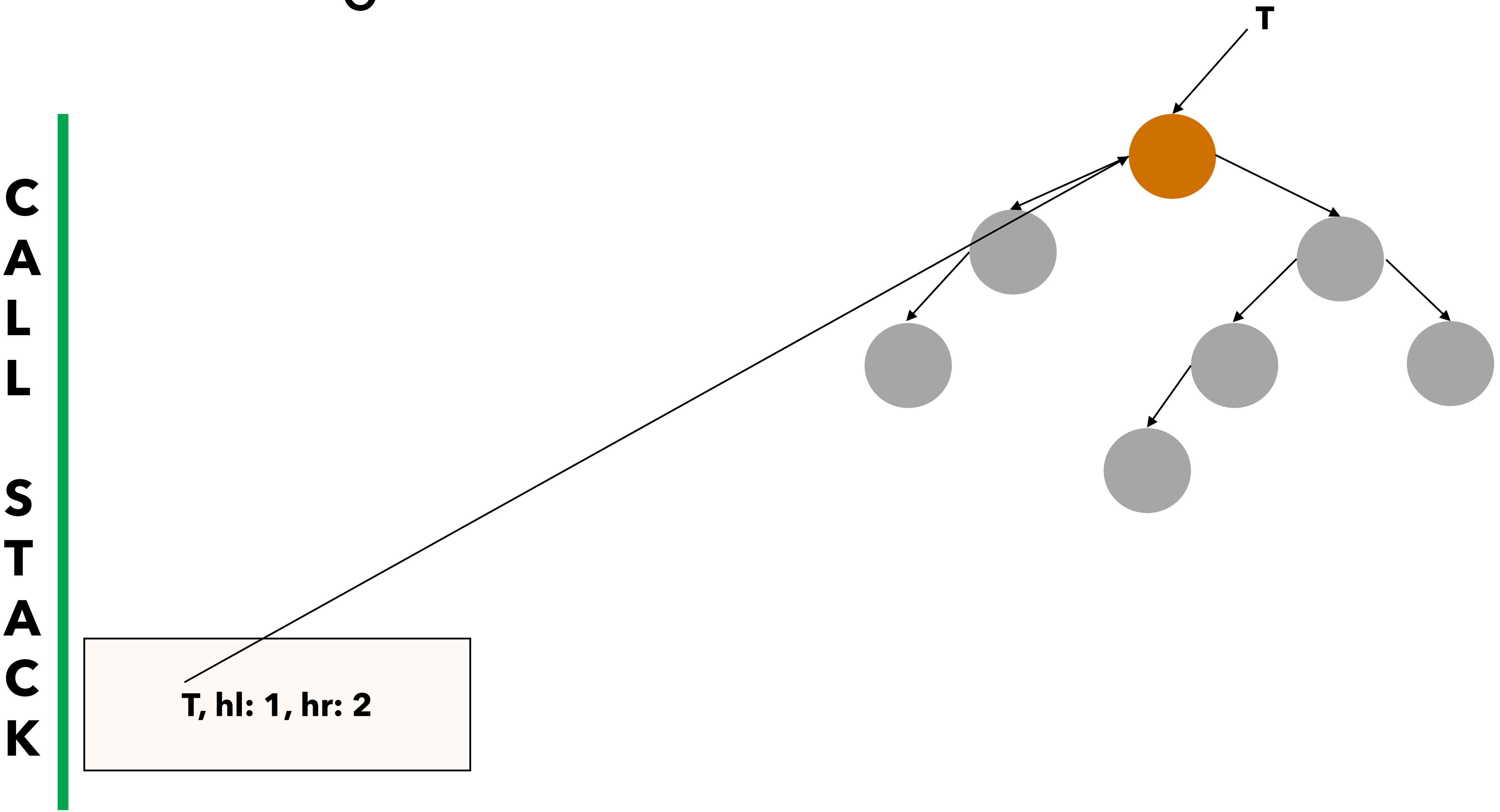


CALL STACK

T.right, returns max(0, 1) + 1: 2

T, hl: 1, hr: 0

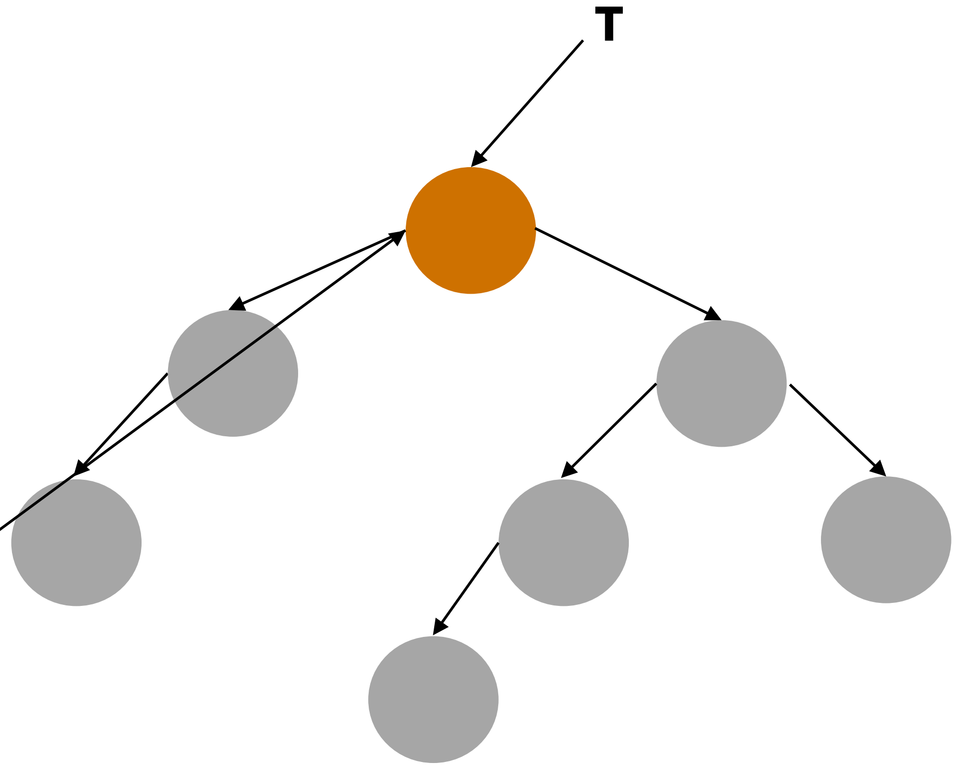
Niente magia: srotoliamo la ricorsione



Niente magia: srotoliamo la ricorsione

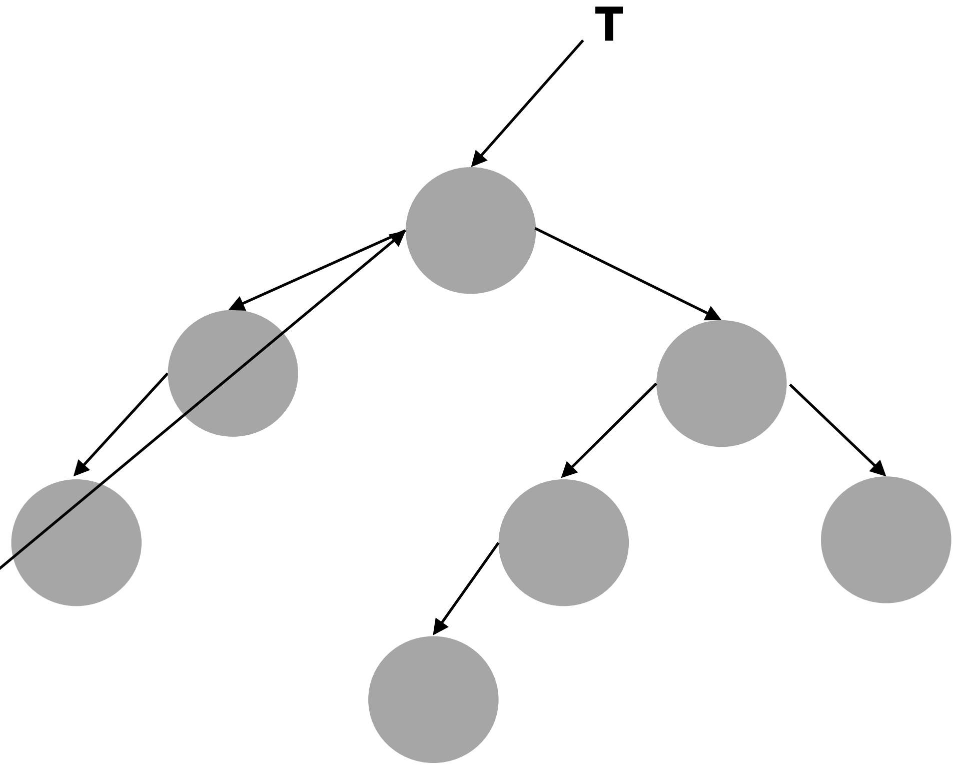
C
A
L
L

S
T
A
C
K



T, returns max(hl: 1, hr: 2) + 1: 2 + 1: 3

Niente magia: srotoliamo la ricorsione



C
A
L
L

S
T
A
C
K

empty the stack and return 3

La funzione **preOrderWalkAndPrint(T)**

- Scriviamo un metodo utile per stampare su standard output un albero, in modo chiaro

- Per ora potrebbe risultare misteriosa e magica, più avanti la spieghiamo meglio

- Vogliamo stampare un albero in questa forma:

```
T.key(T.leftSubtree, T.rightSubTree)
```

Chiaramente, T.leftSubTree vanno stampati ricorsivamente nello stesso modo
Se T.leftSubTree o T.rightSubTree sono alberi vuoti, stamperemo:

```
T.key(nil, nil)
```

La funzione **preOrderWalkAndPrint(T)**

```
preOrderWalkAndPrint(T)
          if T is nil:
               print 'nil'
               return
          print T.key
          print '('
          preOrderWalkAndPrint(T.left)
          print ', '
          preOrderWalkAndPrint(T.right)
          print ')'
```