

Il sistema binario

Liceo G.B. Brocchi

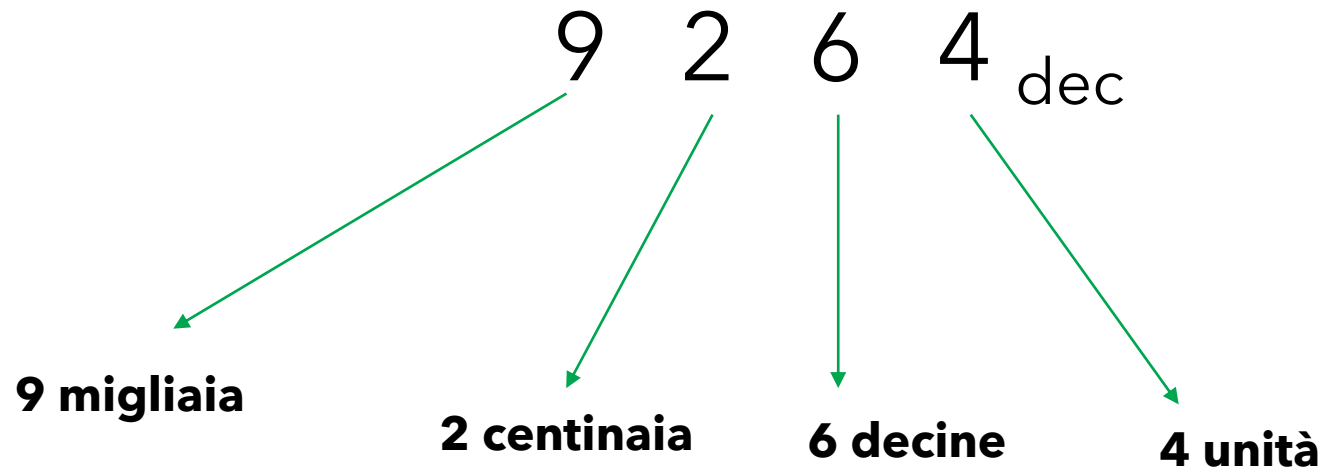
Classi prime Scientifico - opzione scienze applicate

Bassano del Grappa, Ottobre 2022

Prof. Giovanni Mazzocchin

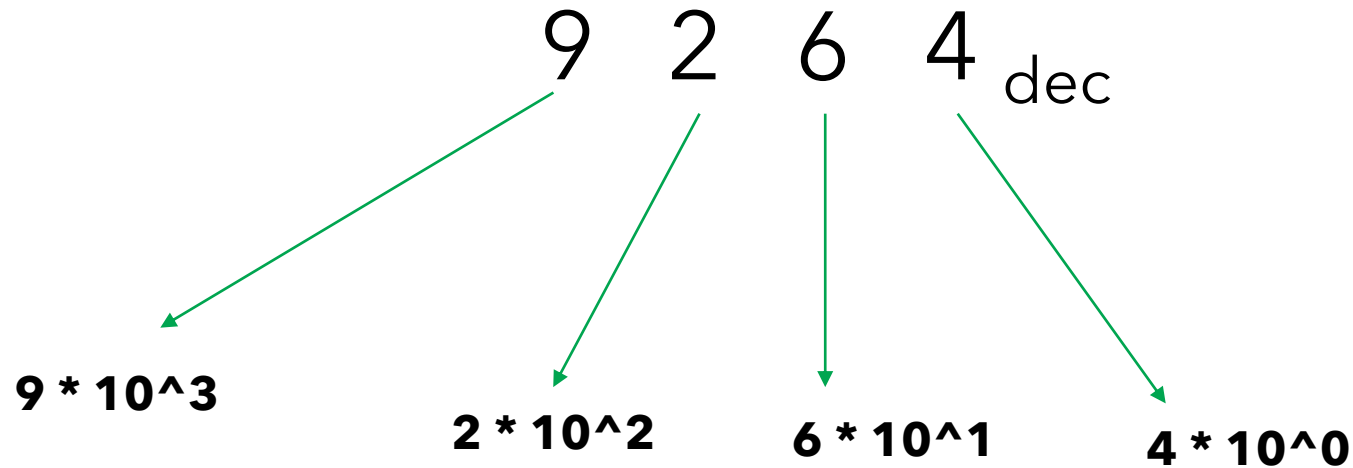
Il sistema decimale

- Il sistema che utilizziamo tutti i giorni si chiama **decimale**
- Utilizza 10 *cifre* (o *simboli*): {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
 - NB: da 0 a $10-1 = 9$
- È un sistema **posizionale** perché il valore di una cifra dipende dalla sua posizione all'interno del numero (si dice anche dal suo **peso**)



Il sistema decimale

- Unità, decine, centinaia, migliaia etc... sono i **pesi** (weights) delle cifre
- Possiamo usare le potenze di 10 al posto dei termini «unità», «decina» etc...



Il simbolo ^ sta per
«elevamento a potenza»

Il sistema decimale

- Immaginate di avere a disposizione una macchina elettronica che memorizza i numeri in formato decimale
- Dato un numero x , la macchina riserva lo spazio per **1** cifra decimale
- Quanti e quali numeri può rappresentare la macchina?

Valori possibili in memoria per x :

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Se $x = 9$, la calcolatrice riesce a rappresentare $x + 1$?

Il sistema decimale

- Se $x = 9$, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare $x + 1$
- Si dice che il calcolo $x + 1$ ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- **Serve un altro spazio**, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

Valori possibili in memoria per x:

00
01
02
03
04
05
06
07
08
09
10
11
20
20
99

Se $x = 99$, la calcolatrice riesce a rappresentare $x + 1$?

Il sistema decimale

- Se $x = 99$, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare $x + 1$
- Si dice che il calcolo $x + 1$ ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- **Serve un altro spazio**, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

Valori possibili in memoria per x:

000
001
002
090
099
100
200
300
999

and so on...

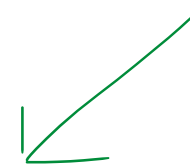
Il sistema decimale

- Ipotizziamo di avere 3 spazi, ciascuno dei quali rappresentante una cifra decimale

Valori possibili in memoria per x:

000, 001, 002, 003, ... 009
10, 11, 12...19
20, 22... 29
30, 31... 39
...
90, 91... 99
100, 101, 102... 109
110, 111... 119
990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999

*la nostra macchina non
può più andare avanti*



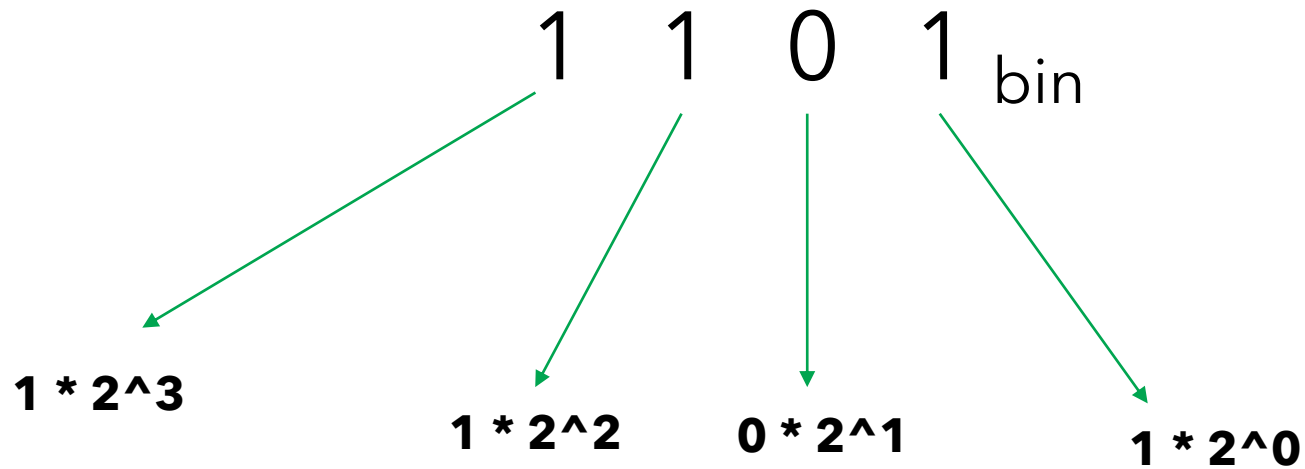
Procedura automatica («algoritmo») per scrivere i numeri in ordine:

Ripetere le seguenti istruzioni fintantoché ci sono ancora spazi non traboccati:

1. si fa traboccare lo spazio più a destra che non è ancora traboccato
2. al traboccamento, si porta a 0 lo spazio traboccato e si inserisce 1 nello spazio a sinistra di quello traboccato

Il sistema binario

- Uno dei sistemi più utilizzati in informatica ed elettronica è il sistema **binario**
- Utilizza 2 cifre (o simboli): {0, 1}
 - NB: da 0 a $2-1 = 1$
- È un sistema **posizionale** perché il valore di una cifra dipende dalla sua posizione all'interno del numero (si dice anche dal suo **peso**)



Il sistema binario

- Immaginate di avere a disposizione una macchina elettronica che memorizza i numeri in formato binario
- Dato un numero x , la macchina riserva lo spazio per **1** cifra binaria
- Quanti e quali numeri può rappresentare la macchina?

Valori possibili in memoria per x :

0

1

Se $x = 1$, la calcolatrice riesce a rappresentare $x + 1$?

Il sistema binario

- Se $x = 1$, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare $x + 1$
- Si dice che il calcolo $x + 1$ ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- **Serve un altro spazio**, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

Valori possibili in memoria per x :

00

01

10

11

Se $x = 11$, la calcolatrice riesce a rappresentare $x + 1$?

Il sistema binario

- Se $x = 11$, una calcolatrice che riserva solo uno spazio per i numeri non può calcolare $x + 1$
- Si dice che il calcolo $x + 1$ ha causato un **overflow** («traboccamento»)
- **Serve un altro spazio**, che qui visualizziamo a sinistra del precedente

Possibili valori in memoria per x

00
01
10
11
100
101
110
111

Il sistema binario

Procedura automatica («algoritmo») per scrivere i numeri in ordine:

Ripetere le seguenti istruzioni fintantoché ci sono ancora spazi non traboccati:

1. si fa traboccare lo spazio più a destra che non è ancora traboccato
2. al traboccamento, si porta a 0 lo spazio traboccato e si inserisce 1 nello spazio a sinistra di quello traboccato

Esempio con 4 spazi, 1 cifra binaria per ogni spazio

00
01
10
11
100
101
110
111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111

Abbiamo rappresentato
 $16 = 2^4$ numeri.
Da 0_{dec} a 15_{dec}

Il sistema binario

- Vogliamo rappresentare il numero 90_{dec} in binario
- Come fare? **NB**: tutti i numeri in questa slide sono scritti con il sistema decimale
- Proviamo a rappresentare 90 come somma di potenze di 2 (base del sistema binario)

$90_{\text{dec}} =$

$$64 + 26 =$$

$$2^6 + 26 =$$

$$2^6 + 16 + 10 =$$

$$2^6 + 2^4 + 10 =$$

$$2^6 + 2^4 + 8 + 2 =$$

$$2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1$$

1 0 1 1 0 1 0 bin

Le cifre in posizione 0, 2, 5 sono a zero perché non sono presenti nello sviluppo di 90_{dec} come somma di potenze di 2

Il sistema binario

- Il calcolo della slide precedente è stato effettuato a colpi di «buon senso»
- In informatica abbiamo bisogno di procedure completamente automatizzabili, dato che le macchine elettroniche non conoscono il *buon senso*
- Dato un numero naturale n , questo può essere:
 1. una potenza di 2. In questo caso la divisione intera di n per la potenza di 2 a lui più vicina ha. Esempio: $n = 64$, quindi $n = 2^6$. $64 / 64 = 1$, con resto 0;
 2. diverso da una potenza di 2. In questo caso dobbiamo trovare una somma di potenze di 2 che uguagli il n .

Il sistema binario

- **n = 64**

- Dobbiamo capire in modo automatico qual è la potenza di 2 più vicina a n
- Vogliamo cioè scrivere 64 come 2^x , senza sapere a priori quanto vale x
- Lo dividiamo per 2 finché non otteniamo 1

$$64 / 2 \rightarrow 32$$

$$32 / 2 \rightarrow 16$$

$$16 / 2 \rightarrow 8$$

$$8 / 2 \rightarrow 4$$

$$4 / 2 \rightarrow 2$$

$$2 / 2 \rightarrow 1$$

6 divisioni

$$64 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$$

$$64 / 2 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2$$

$$64 / (2*2) = 2 * 2 * 2 * 2$$

$$64 / (2*2*2) = 2 * 2 * 2$$

$$64 / (2*2*2*2) = 2 * 2$$

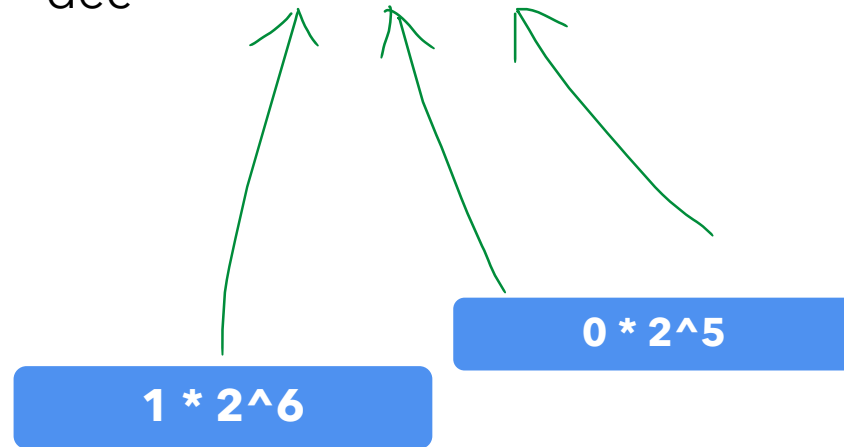
$$64 / (2*2*2*2*2) = 2$$

$$64 / (2*2*2*2*2*2) = 1$$

$$64 / (2^6) = 1 \text{ significa } 64 = 2^6$$

Il sistema binario

- Abbiamo scoperto in modo *algoritmico* (come farebbe una macchina non pensante) che $64 = 2^6$
- Ora, sappiamo che la cifra binaria in posizione 6 (partendo da 0) ha peso 2^6 :
 - Quindi $64_{\text{dec}} = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_{\text{bin}}$



Il sistema binario

- **n = 91**

- Dobbiamo capire in modo automatico qual è la potenza di 2 più vicina a n, che in questo caso non è una potenza di 2
- Vogliamo cioè scrivere 91 come **$2^x + y$** , senza sapere a priori quanto valgono x e y
- Lo dividiamo per 2 finché non otteniamo 1

91 / 2 -> 45, resto 1

45 / 2 -> 22, resto 1

22 / 2 -> 11, resto 0

11 / 2 -> 5, resto 1

5 / 2 -> 2, resto 1

2 / 2 -> 1, resto 0

6 divisioni. Quindi la potenza di 2 più vicina a 91 è 2^6

Il sistema binario

- **$n = 91$**
- $91 = 2^6 + y = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_{\text{bin}} + y$
- quindi $y = 91 - 2^6 = 27$
- Ora dobbiamo esprimere anche 27 come somma di potenze di 2!
 - $27 / 2 \rightarrow 13, \text{ resto } 1$
 - $13 / 2 \rightarrow 6, \text{ resto } 1$
 - $6 / 2 \rightarrow 3, \text{ resto } 0$
 - $3 / 2 \rightarrow 1, \text{ resto } 1$

4 divisioni. Quindi la potenza di 2 più vicina a 27 è 2^4

Il sistema binario

- $n = 91$

- $91 = 2^6 + 2^4 + y = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_{\text{bin}} + 1\ 0\ 0\ 0\ 0_{\text{bin}} + y$

- Quindi $y = 91 - 2^6 - 2^4 = 11$

- Ora dobbiamo esprimere anche 11 come somma di potenze di 2

$$11 / 2 \rightarrow 5, \text{ resto } 1$$

$$5 / 2 \rightarrow 2, \text{ resto } 1$$

$$2 / 2 \rightarrow 1, \text{ resto } 0$$

3 divisioni. Quindi la potenza di 2 più vicina a 11 è 2^3

Il sistema binario

- **n = 91**
- $91 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + y = 1\,000\,000_{\text{bin}} + 1\,0000_{\text{bin}} + 1\,000_{\text{bin}} + y$
- Quindi $y = 91 - 2^6 - 2^4 - 2^3 = 3$
- Ora dobbiamo esprimere anche 3 come somma di potenze di 2
3 / 2 -> 1, resto 1
1 divisione. Quindi la potenza di 2 più vicina a 1 è 2^1

Il sistema binario

- **n = 91**
- $91 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + y = 1\,000\,000_{\text{bin}} + 1\,0000_{\text{bin}} + 1000_{\text{bin}} + 10_{\text{bin}} + y$
- Quindi $y = 91 - 2^6 - 2^4 - 2^3 - 2^1 = 1$
- 1 è già una potenza di 2 (2^0)

$$91 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1\,000\,000_{\text{bin}} + 1\,0000_{\text{bin}} + 1\,000_{\text{bin}} + 10_{\text{bin}} + 1_{\text{bin}}$$

Il sistema binario

1	0	0	0	0	0	0	+
		1	0	0	0	0	+
			1	0	0	0	+
					1	0	+
						1	=
1	0	1	1	0	1	1	

Il sistema binario

91 / 2 -> 45, resto 1

45 / 2 -> 22, resto 1

22 / 2 -> 11, resto 0

11 / 2 -> 5, resto 1

5 / 2 -> 2, resto 1

2 / 2 -> 1, resto 0

1 / 2 -> 0, resto 1



Leggendo i resti al contrario viene fuori il numero che abbiamo calcolato prima in modo più macchinoso.

NB: sicuramente il resto di una divisione intera per 2 può essere solo 0 oppure 1

Addizione in colonna decimale

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 8 \\ \hline 27 \end{array}$$

Descrivere in modo *algoritmico* la procedura detta addizione decimale in colonna

Addizione in colonna decimale

$$\begin{array}{r} 99 \\ + 99 \\ \hline 198 \end{array}$$

1. $9 + 9 = 18$. Traboccamento e riporto;
2. $9 + 9 = 18$, $18 + \mathbf{1} = 19$. Traboccamento e riporto;
3. $1 + 0 = 1$;
4. Fine della procedura.

Addizione in colonna decimale

$$\begin{array}{r} 9 \quad 9 \quad 9 \quad + \\ 9 \quad 9 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 9 \quad 9 \quad 8 \end{array}$$

1. $9 + 9 = 18$. Traboccamento e riporto.
2. $9 + 9 = 18$, $18 + \mathbf{1} = 19$. Traboccamento e riporto;
3. $9 + 9 = 18$, $18 + \mathbf{1} = 19$. Traboccamento e riporto
4. $0 + 1 = 1$;
5. Fine della procedura.

NB: qualsiasi sia il sistema di numerazione, la cifra da riportare a sinistra in caso di traboccamento è sempre 1.

Addizione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

1. $0 + 1 = 1$;
2. Secondo spazio $1 + 0 = 1$;
3. Fine della procedura.

Addizione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$3_{\text{dec}} + 3_{\text{dec}} = 6_{\text{dec}}$$

1. $1 + 1 = 10$. Traboccamento e riporto;
2. $1 + 1 = 10$. $10 + \mathbf{1} = 11$. Traboccamento e riporto;
3. $0 + 1 = 1$;
4. Fine della procedura.

Addizione in colonna tra numeri in sistema binario

$$\begin{array}{r} 111 + \\ 111 \\ \hline 1110 \end{array}$$

$$7_{\text{dec}} + 7_{\text{dec}} = 14_{\text{dec}}$$

1. $1 + 1 = 10$. Traboccamento e riporto;
2. $1 + 1 = 10$, $10 + \mathbf{1} = 11$. Traboccamento e riporto;
3. $1 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$. Traboccamento e riporto;
4. $0 + 1 = 1$;
5. Fine della procedura.

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

$$\begin{array}{r} 2 \quad 5 \quad - \\ \quad 9 \\ \hline 1 \quad 6 \end{array}$$

prima, seconda, terza,
quarta etc.. colonna:
si conta a partire da
destra

1. $5 - 9 < 0$. Necessità di un **prestito** dalla seconda colonna (**borrow**);
2. Il 2 della seconda colonna del sottraendo diventa 1, il 5 della prima colonna diventa 15;
3. $15 - 9 = 6$. Prima colonna completata;
4. $1 - 0 = 1$. Seconda colonna completata;
5. Fine della procedura.

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 5 \quad - \\ \quad 8 \quad 9 \\ \hline \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

1. $5 - 9 < 0$. Necessità di un **prestito** da sinistra (**borrow**);
2. La seconda colonna del sottraendo non può prestare niente;
3. La terza colonna presta 1 alla seconda e diventa 0;
4. La seconda colonna diventa 10;
5. La seconda colonna presta 1 alla prima e diventa 9;
6. Il 5 della prima colonna del sottraendo diventa 15;
7. $15 - 9 = 6$. Prima colonna completata;
8. $9 - 8 = 1$. Seconda colonna completata;
9. Fine della procedura.

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{\quad} \\ 0 \quad ^1 0 \quad 5 \quad - \\ \quad \quad 8 \quad 9 \\ \hline \quad \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

1. $5 - 9 < 0$. Necessità di un **prestito** da sinistra (**borrow**);
2. La seconda colonna del sottraendo non può prestare niente;
3. La terza colonna presta 1 alla seconda e diventa 0;
4. La seconda colonna diventa 10;
5. La seconda colonna presta 1 alla prima e diventa 9
6. Il 5 della prima colonna del sottraendo diventa 15;
7. $15 - 9 = 6$. Prima colonna completata;
8. $9 - 8 = 1$. Seconda colonna completata;
9. Fine della procedura.

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

$$\begin{array}{r} 0 \quad 9 \quad \overset{1}{\overbrace{5}^{\rightarrow}} - \\ \quad 8 \quad 9 \\ \hline \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

1. $5 - 9 < 0$. Necessità di un **prestito** da sinistra (**borrow**);
2. La seconda colonna del sottraendo non può prestare niente;
3. La terza colonna presta 1 alla seconda e diventa 0;
4. La seconda colonna diventa 10;
5. La seconda colonna presta 1 alla prima e diventa 9
6. Il 5 della prima colonna del sottraendo diventa 15;
7. $15 - 9 = 6$. Prima colonna completata;
8. $9 - 8 = 1$. Seconda colonna completata;
9. Fine della procedura.

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

9 0 0 5 -

9 9 9

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{1} \\ 8 0 5 - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 9 9 \end{array}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

8 9 ¹0 5 -

9 9 9

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema decimale

$$\begin{array}{r} 899 \overset{\text{---}\rightarrow}{\underset{1}{5}} - \\ 999 \\ \hline 8006 \end{array}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \\ - \quad \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$6_{\text{dec}} - 1_{\text{dec}} = 5_{\text{dec}}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 1 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$6_{\text{dec}} - 1_{\text{dec}} = 5_{\text{dec}}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad - \\ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$16_{\text{dec}} - 15_{\text{dec}} = 1_{\text{dec}}$$

**L'occhio esperto vede subito che il risultato è 1.
E' la differenza tra 2^n e $(2^n - 1)$**

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} \overline{0} \quad \overset{1}{\rightarrow} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad - \\ \quad \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 0 \quad 1 \quad \overset{\rightarrow}{0} \quad 0 \quad 0 \quad - \\ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 0 \quad 1 \quad 1 \quad \overset{\text{1}}{\overrightarrow{0}} \quad 0 \quad - \\ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad - \\ \quad \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$16_{\text{dec}} - 15_{\text{dec}} = 1_{\text{dec}}$$

Sottrazione in colonna tra numeri nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad - \\ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

2^4

Un numero binario composto da n 1 è uguale a $2^n - 1$

$$2^4 - (2^4 - 1) = 1$$

Moltiplicazione nel sistema binario

$$\begin{array}{r} 11000 \times \\ \hline 11000 + \\ 11000 \\ \hline 1001000 \end{array}$$

The diagram illustrates the binary multiplication of 11000 (24 in decimal) by 100 (4 in decimal). The first row shows the multiplicand 11000 and the multiplier 100. The second row shows the first partial product, 11000, shifted one position to the left. The third row shows the second partial product, 11000, shifted two positions to the left. The final result, 1001000, is shown at the bottom.

$$24_{\text{dec}} * 3_{\text{dec}} = 72_{\text{dec}}$$

Divisione nel sistema decimale

- Vediamo la divisione come **sottrazione ripetuta**:

$$20 / 6 = 3, \text{ resto } 2$$

$$20 - 6 \rightarrow 14$$

$$14 - 6 \rightarrow 8$$

$$8 - 6 \rightarrow 2$$

$$2 - 6 \rightarrow \text{HALT}$$

**Il quoziente è il numero di volte
che siamo riusciti a sottrarre
senza oltrepassare lo zero**

**Il resto è il sottraendo della
sottrazione che non siamo
riusciti a fare**

Divisione nel sistema decimale

- Vediamo la divisione come **sottrazione ripetuta**:

$$28 / 7 = 4, \text{ resto } 0$$

$$28 - 7 \rightarrow 21$$

$$21 - 7 \rightarrow 14$$

$$14 - 7 \rightarrow 7$$

$$7 - 7 \rightarrow 0, \text{ HALT}$$

**Il quoziente è il numero di volte
che siamo riusciti a sottrarre
senza andare sotto lo zero**

Divisione nel sistema binario

- Vediamo la divisione come **sottrazione ripetuta**:

10100 / 110

1	0	1	0	0	-	
		1	1	0		
<hr/>						
	1	1	1	0	-	
		1	1	0		
<hr/>						
	1	0	0	0	-	
		1	1	0		
<hr/>						
			1	0	-	
		1	0	0		
<hr/>						

→ STOP