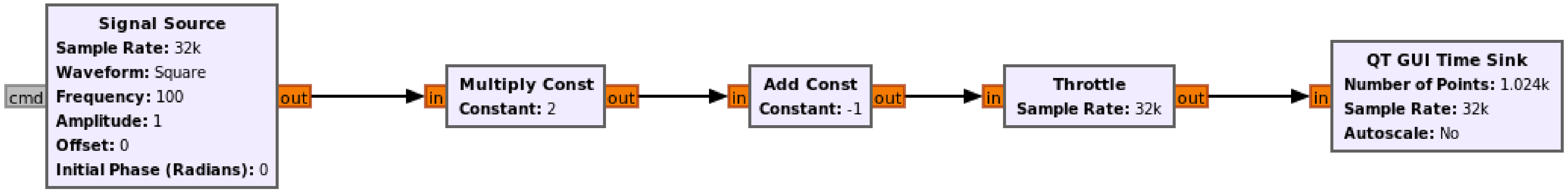
Analisi di segnali periodici nel dominio della frequenza

Liceo G.B. Brocchi – Bassano del Grappa (VI)
Liceo Scientifico – opzione scienze applicate
Giovanni Mazzocchin

Le sinusoidi come mattoncini dei segnali

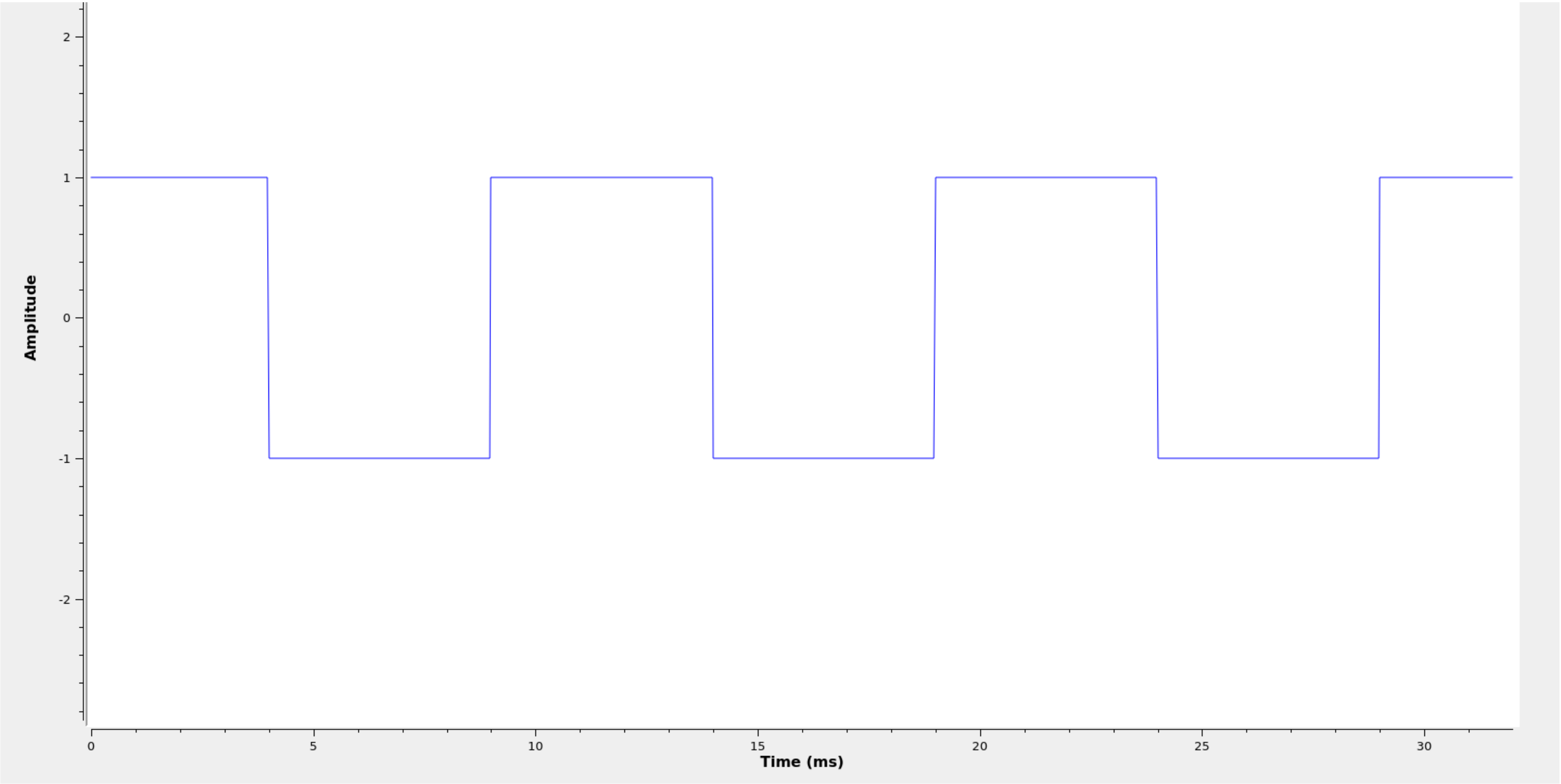
- **Una serie di Fourier è l'espansione di una funzione periodica sotto forma di somma di funzioni trigonometriche (seni e coseni)**
- Esprimere un segnale periodico come somma di seni e coseni risulta molto comodo per effettuare operazioni di elaborazione dei segnali
- La matematica che sta dietro tutto questo è piuttosto avanzata, per cui cercheremo una comprensione intuitiva dell'argomento
- Partiamo da un segnale «famoso»: l'**onda quadra** (*square wave*)

Cosa c'entrano seni e coseni con un'onda quadra?



Onda quadra
Frequenza: 100 Hz
Ampiezza: 1

Cosa c'entrano seni e coseni con un'onda quadra?



Cosa c'entrano seni e coseni con un'onda quadra?

$$s_1(t) = \cos(2\pi 1 t)$$

$$s_2(t) = -\frac{1}{3}\cos(2\pi 3 t)$$

$$s_3(t) = \frac{1}{5}\cos(2\pi 5 t)$$

$$s_4(t) = -\frac{1}{7}\cos(2\pi 7 t)$$

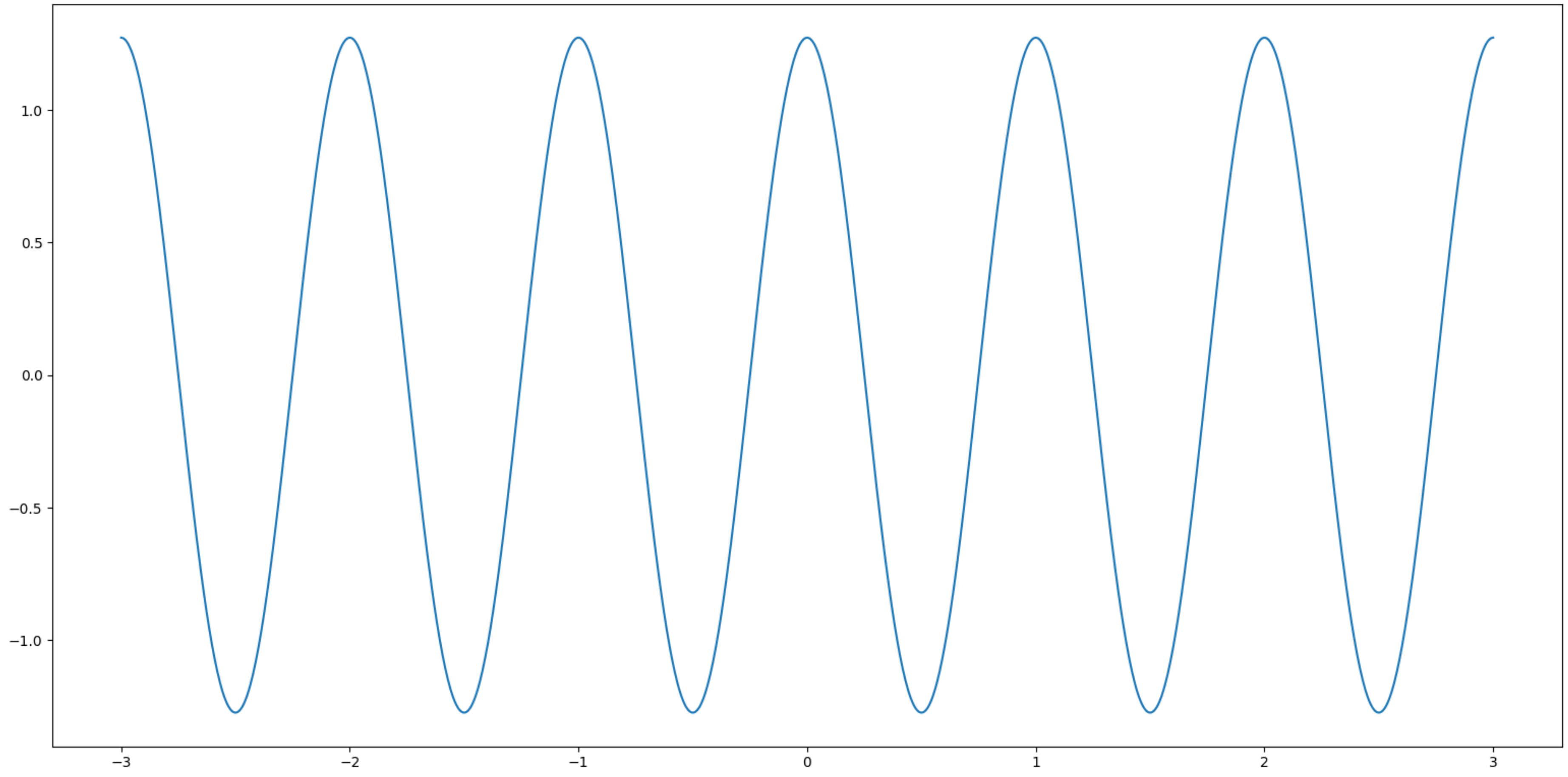
la frequenza di s_1 è 1 Hz (frequenza fondamentale)

queste funzioni sono date senza spiegazione, vogliamo solo capire intuitivamente cosa succede quando le sommiamo

come saranno fatte s_5, s_6 etc…?

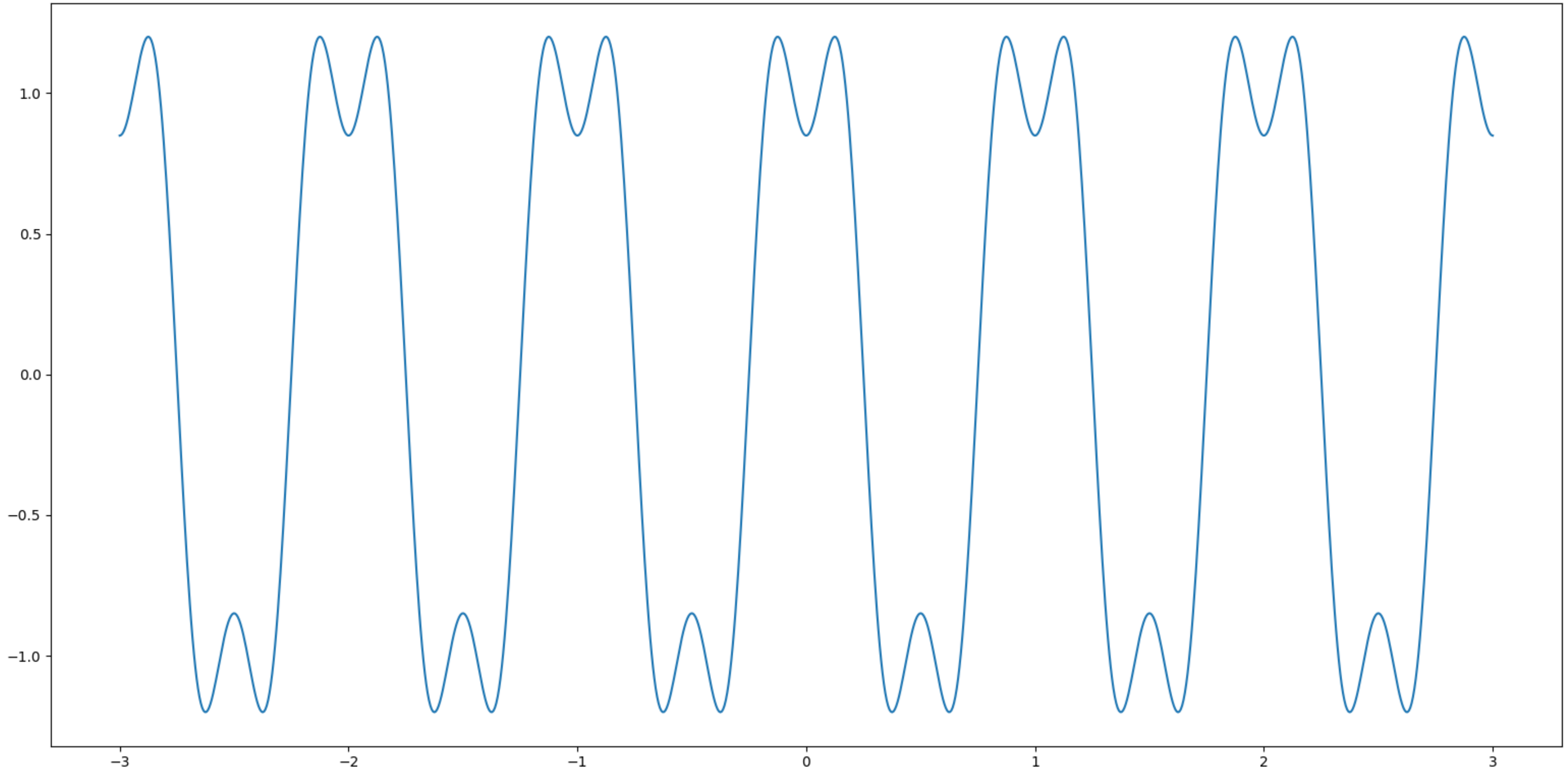
Cosa c'entrano seni e coseni con un'onda quadra?

$$s(t) = \frac{4}{\pi} s_1(t)$$



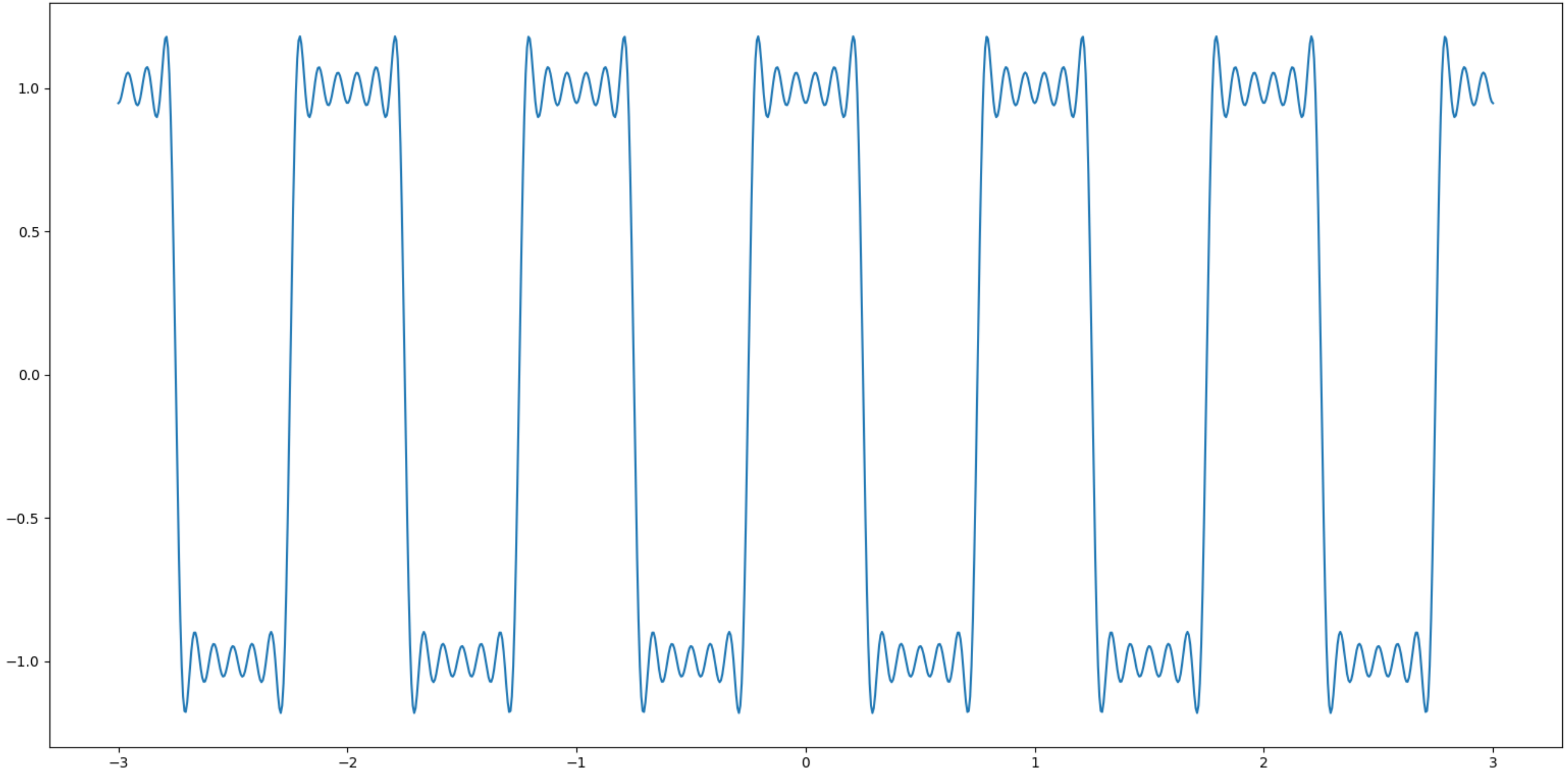
Cosa c'entrano seni e coseni con un'onda quadra?

$$s(t) = \frac{4}{\pi}(s_1(t) + s_2(t))$$



Cosa c'entrano seni e coseni con un'onda quadra?

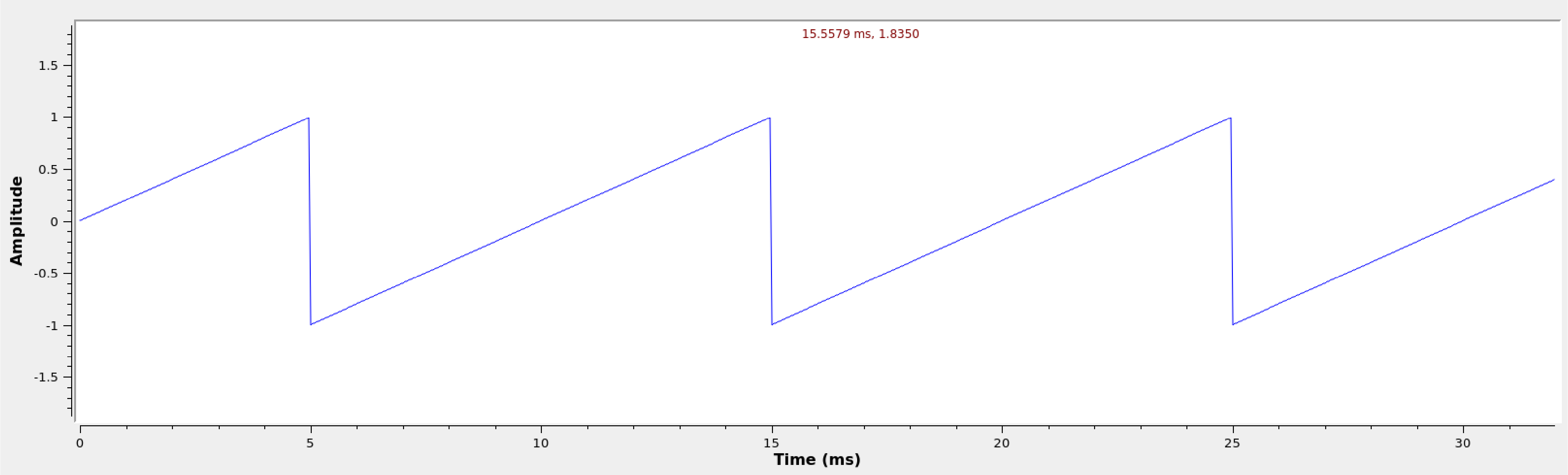
$$s(t) = \frac{4}{\pi}(s_1(t) + s_2(t) \ + s_3(t) + s_4(t) + s_5(t) + s_6(t))$$



cosa sta succedendo?

[esempio in Python]

Componenti sinusoidali di una *sawtooth wave*



Onda a dente di sega
Frequenza: 100 Hz
Ampiezza: 1

Componenti sinusoidali di una *sawtooth wave*

$$s_1(t) = \sin(2\pi 1 t)$$

$$s_2(t) = -\frac{1}{2}\sin(2\pi 2 t)$$

$$s_3(t) = \frac{1}{3}\sin(2\pi 3 t)$$

$$s_4(t) = -\frac{1}{4}\sin(2\pi 4 t)$$

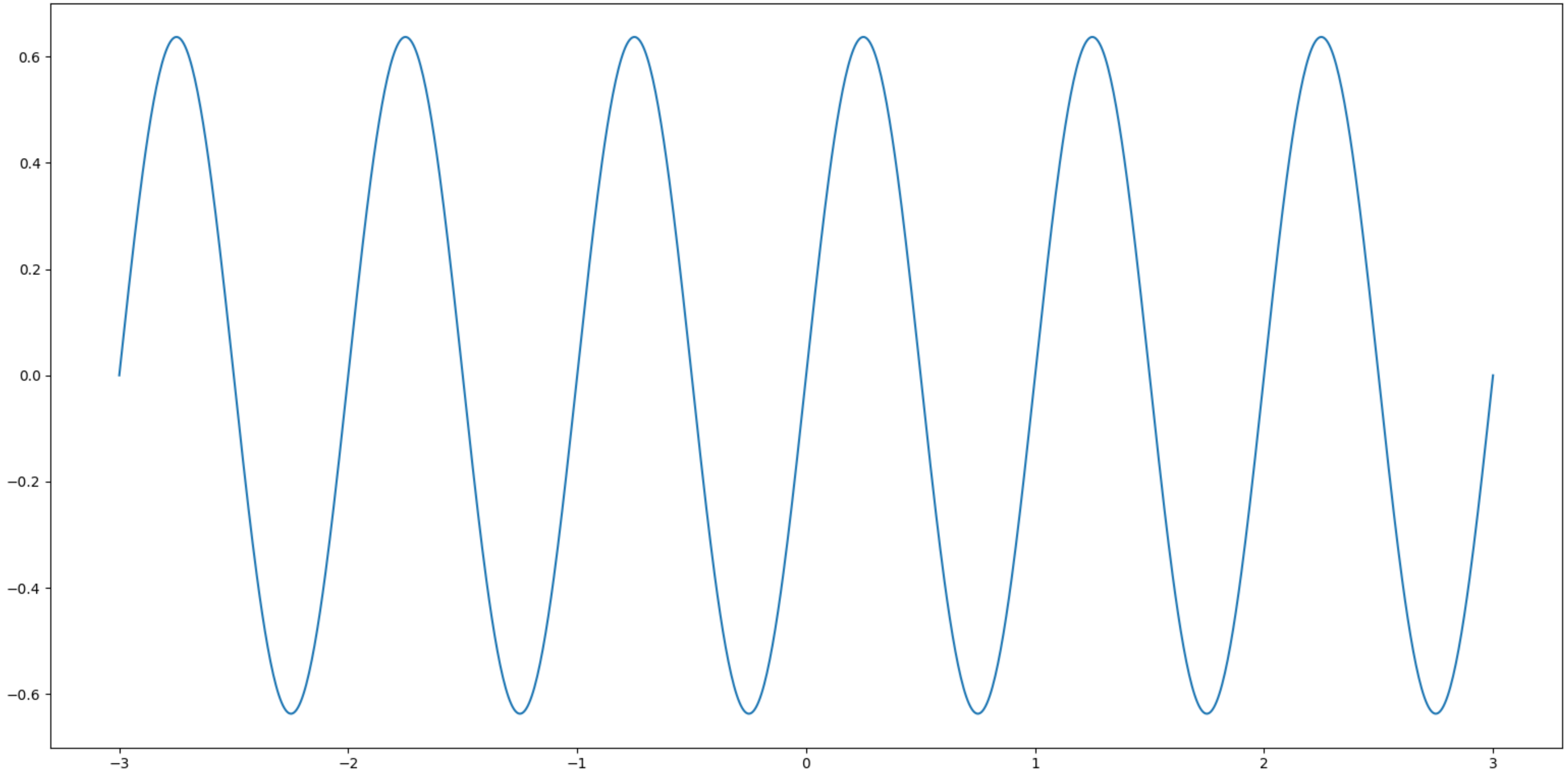
la frequenza di s_1 è 1 Hz (frequenza fondamentale)

queste funzioni sono date senza spiegazione, vogliamo solo capire intuitivamente cosa succede quando le sommiamo

come saranno fatte s_5, s_6 etc…?

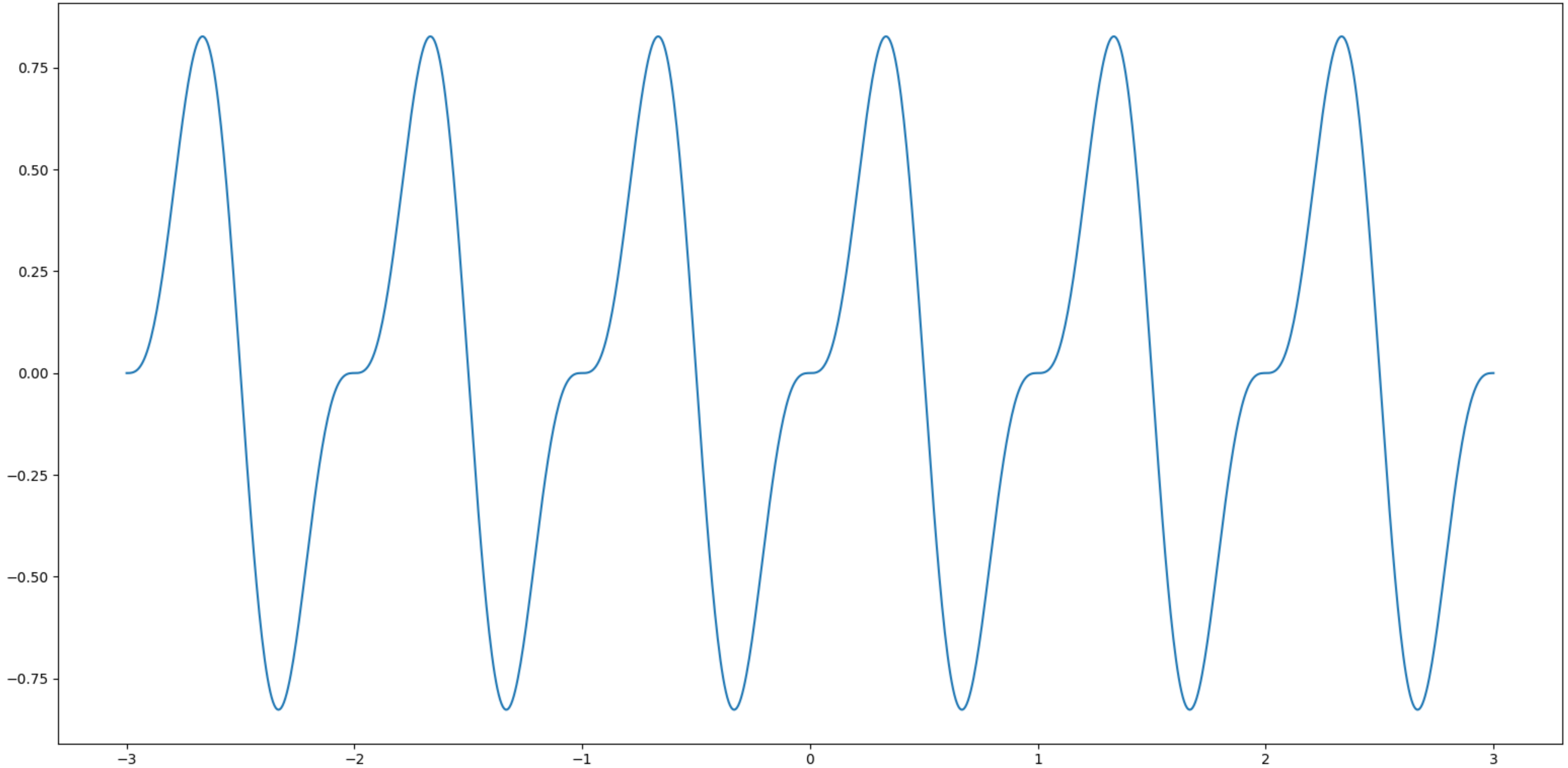
Componenti sinusoidali di una *sawtooth wave*

$$s(t) = \frac{2}{\pi} s_1(t)$$



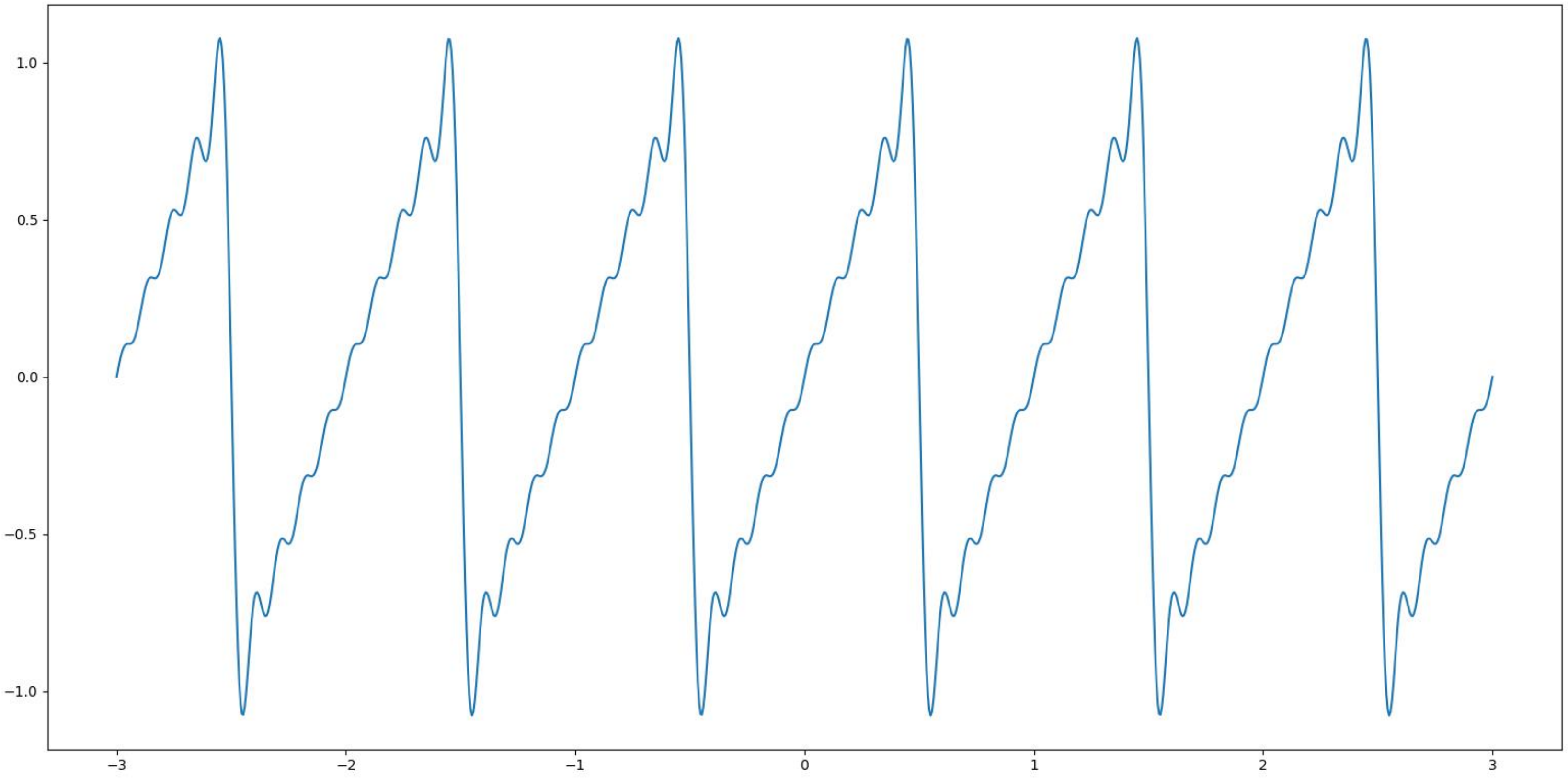
Componenti sinusoidali di una *sawtooth wave*

$$s(t) = \frac{2}{\pi}(s_1(t) + s_2(t))$$



Componenti sinusoidali di una *sawtooth* wave

$$s(t) = \frac{2}{\pi}(s_1(t) + s_2(t) \ + s_3(t) + s_4(t) + s_5(t) + s_6(t) \ + \ \dots + s_9(t)\ )$$



cosa sta succedendo?

Analisi nel dominio del tempo

- Qual era il dominio dei segnali che abbiamo visto finora? Il **tempo**!
- L'analisi di un segnale **nel dominio del tempo** permette di ricavare dei parametri legati alla forma del segnale: ampiezza, frequenza, durata
- Spesso però questa rappresentazione non è sufficiente per effettuare operazioni di *signal processing*. Se vogliamo tagliare alcune frequenze del segnale (operazione effettuata da molti algoritmi di compressione, ma anche all'interno delle linee telefoniche), come potremmo farlo analizzandolo solo nel dominio del tempo?
- Abbiamo visto che le sinusoidi sono i «mattoncini» dei segnali periodici: questo fatto ci permette di passare al **dominio della frequenza**

Armoniche

- Le componenti sinusoidali che abbiamo visto sopra sono dette **armoniche**
- I suoni emessi dagli strumenti musicali non sono toni puri, cioè composti solo dalla frequenza fondamentale, ma sono il risultato di una somma di sinusoidi di diverse frequenze
- La «ricchezza» del suono emesso da uno strumento musicale o dalla voce umana dipende proprio dalle sue componenti sinusoidali

- Per capirlo, proviamo ad ascoltare dei toni puri

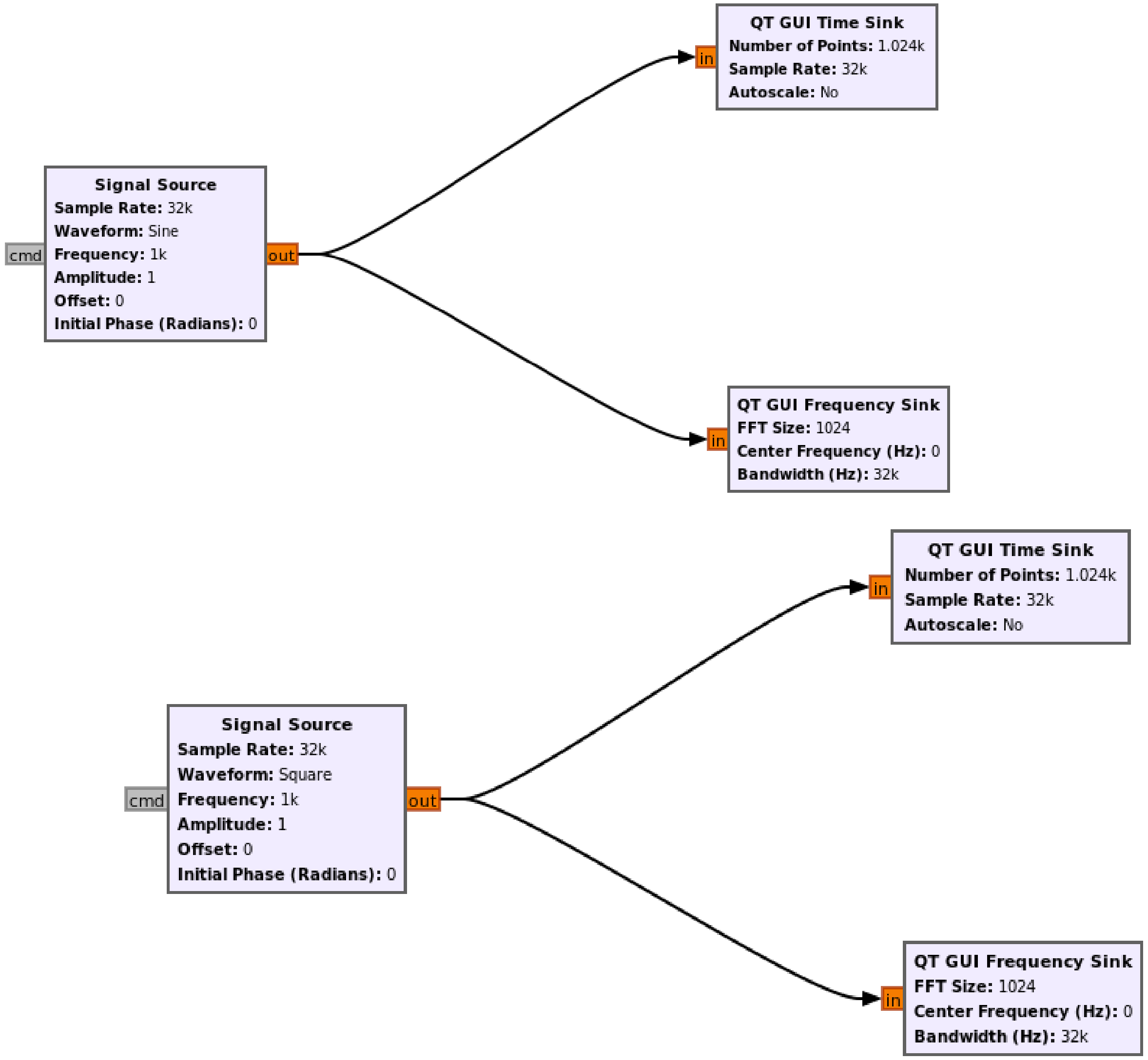
Banda di un segnale

- La **banda di un segnale** è l'intervallo di frequenze nel quale sono contenute le armoniche di ampiezza non trascurabile. Si misura in Hz

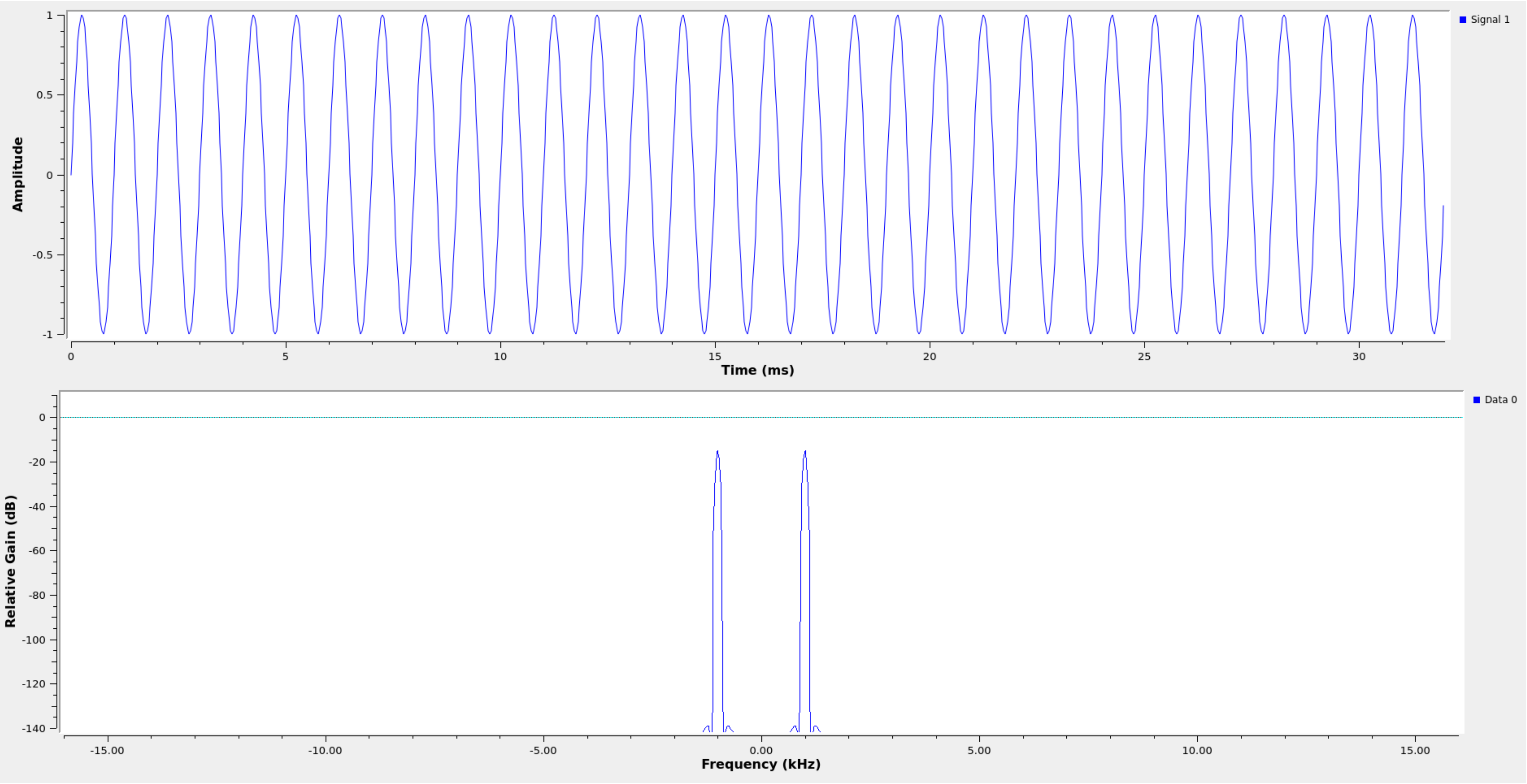
- Teoricamente le armoniche sono infinite, ma man mano che cresce la loro frequenza, la loro ampiezza diventa trascurabile

- Utilizziamo GNU Radio per farci un'idea dello spettro di alcuni segnali:
  - segnale sinusoidale di frequenza 1 kHz
  - onda quadra di frequenza 1 kHz

Banda di un segnale



Banda di un segnale



Banda di un segnale