

第一章 概率

§ 1 引言

§ 2 样本空间 (sample space)

§ 3 概率测度

§ 4 概率计算: 计数方法

§ 5 条件概率

§ 6 独立性

随机试验与样本空间

试验 科学实验

或者对某一事物的某一特征进行观察

例 E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面 H , 反面 T 出现的情况

E_2 : 将一枚硬币连抛三次, 观察正面 H 出现的次数

E_3 : 掷一颗骰子, 观察出现的点数

E_4 : 从一批产品中抽取 n 件, 观察次品出现的数量

E_5 : 对某厂生产的电子产品进行寿命测试

E_6 : 观察某地区的日平均气温和日平均降水量



这些试验有什么**特点**?

试验前无法预知结果

随机试验与样本空间

试验 科学实验

或者对某一事物的某一特征进行观察

试验的特征

① 试验可以在相同的条件下重复进行

② 试验的结果可能不止一个，但试验前知道所有可能的全部结果

③ 在每次试验前无法确定会出现哪个结果

具有上述特征的试验称为 **随机试验**，简称 **试验**。

例 E ：掷一颗骰子，观察出现的点数。

分析 E 的结果

“1点”、“2点”、...、“6点”

出现的点数不超过3

至少出现4点

复合结果(可分解)

简单结果(不可分)
也称“基本结果”



§ 2 样本空间

4

随机试验与样本空间

试验 $\left\{ \begin{array}{l} \text{基本结果 (不可分)} \\ \text{复合结果 (可分解)} \end{array} \right.$ 称为 **样本点、基本事件**

定义 称试验的全部样本点构成的集合为 **样本空间**.

例 掷一颗骰子, 观察出现的点数, 其样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

离散样本空间

例 抛两枚硬币, 观察正、反两面出现的情况, 其样本空间为

$$\Omega = \{(\text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{正})\}$$

具体元素的非抽象集合

例 记录深圳地区的日平均气温, 其样本空间为

抽象的点集

$$\Omega = (-60, 60)$$

连续样本空间

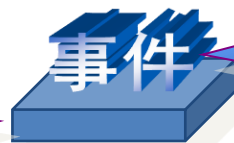
例 播种飞机对位置为 (x_0, y_0) 的目标进行播种, 观察其所覆盖的范围 (x, y) , 其样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < +\infty\}$$

随机试验与样本空间

试验 { 基本结果 (不可分) — 称为 **样本点、基本事件**
 复合结果 (可分解) — 称为 **随机事件 简称 事件**

从集合看
事件是样本空间的子集



从试验看
事件是基本事件的复合

随机事件

定义 满足一定条件的样本点的集合称为 **随机事件**, 简称为 **事件**. 事件用大写字母 A 、 B 、 C 、... 表示.

例 掷一颗骰子, 观察出现的点数, 其样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

事件 A : “至少出现3点”, 则 $A = \{3, 4, 5, 6\} \subset \Omega$

B : “出现最小或最大的点”, 则 $B = \{1, 6\}$

C : “出现 较大的点”, 则 $C = ?$

模糊数学研究的内容

§ 2 样本空间

6

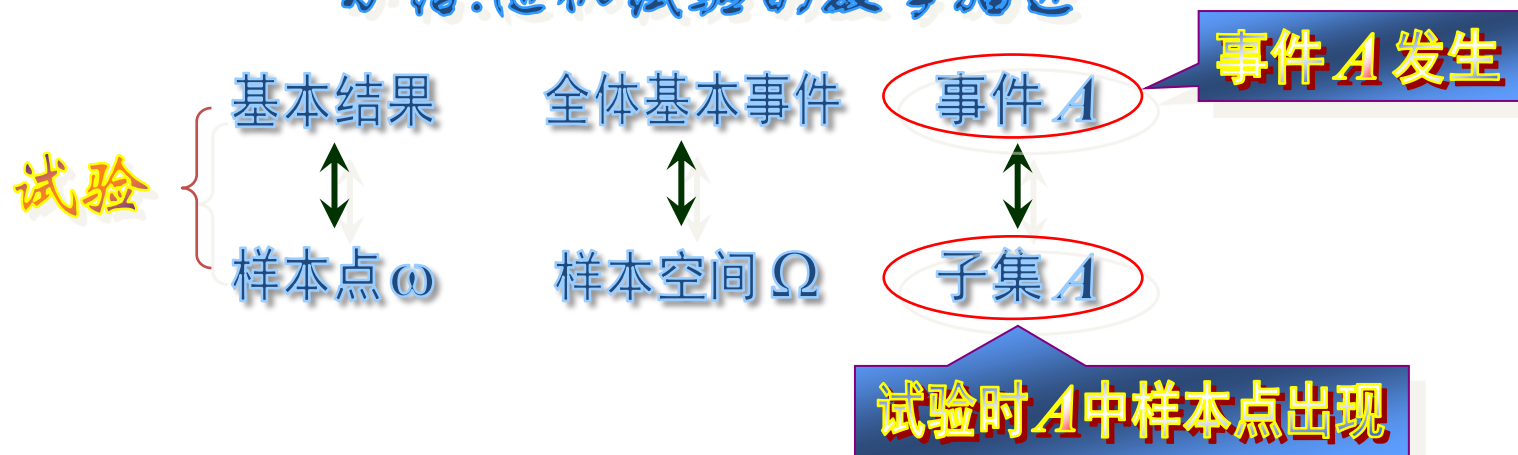
几个特殊事件

基本事件 一个样本点构成的单点集 $\{\omega\}$

必然事件 每次试验都总发生的事件 $\Omega \subset \Omega$

不可能事件 每次试验都不会发生的事件 Φ (空集 $\Phi \subset \Omega$)

小结:随机试验的数学描述



记

$$\mathcal{A} = \{ A \mid A \subset \Omega, A \text{ 是事件} \}$$

称 \mathcal{A} 为试验的事件域, 即试验产生的所有事件为元素构成的集合.

事件间的关系与运算

设 $A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 为事件

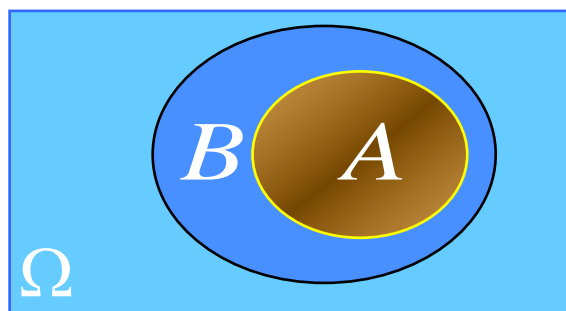
① $A \subset B \iff A \text{ 发生必导致 } B \text{ 发生}$

特别有 $A = B \iff A \subset B, B \subset A$

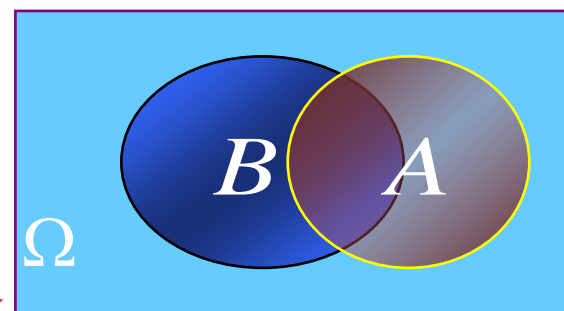
② $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ or } \omega \in B\} \iff A \text{ 发生或 } B \text{ 发生}$

即 A, B 至少有一个发生, 称为事件 A, B 的**和**.

$A \subset B$



$A \cup B$



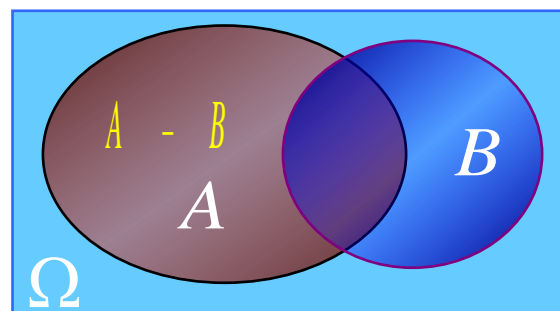
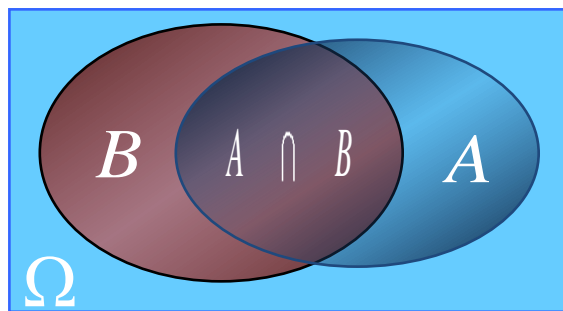
从集合和事件两方面来理解

③ $A \cap B = \{ \omega \mid \omega \in A, \omega \in B \} \longleftrightarrow A, B \text{ 同时发生}$
称为事件 A, B 的 **积**.

类似地可定义 n 个事件及可列个事件的积

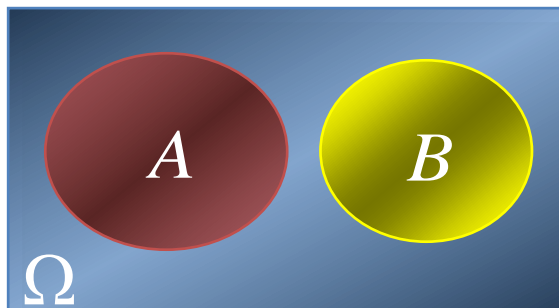
$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{ \omega \mid \omega \in A_i, i = 1, 2, \dots, n \}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{ \omega \mid \omega \in A_i, i = 1, 2, \dots \}$$



④ $A - B = \{ \omega \mid \omega \in A, \omega \notin B \} \longleftrightarrow A \text{ 发生 } B \text{ 不发生}$
称为事件 A, B 的 **差**. 若 $A \supset B$, 则称 $A - B$ 为 **真差**.

⑤ 若 $A \cap B = \Phi$, 则称 A, B 互不相容(互斥).



A, B 不能同时发生

⑥ 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \Phi$, 则称 A, B 互为逆事件或称为对立事件, 记为

$$A = \Omega - B = \overline{B} = B^c$$
$$B = \Omega - A = \overline{A} = A^c$$



符号	集合含义	事件含义
Ω	全集	样本空间, 必然事件
Φ	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	集合的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	一个集合	一个事件
$A \subset B$	A 的元素在 B 中	A 发生导致 B 发生
$A=B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	A 与 B 的所有元素	A 与 B 至少有一个发生
$A \cap B$	A 与 B 的共同元素	A 与 B 同时发生
\bar{A} (或 A^c)	A 的补集	A 的对立事件
$A-B$	在 A 中而不在 B 中的元素	A 发生而 B 不发生
$A \cap B = \Phi$	A 与 B 无公共元素	A 与 B 互斥

事件的运算定律

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

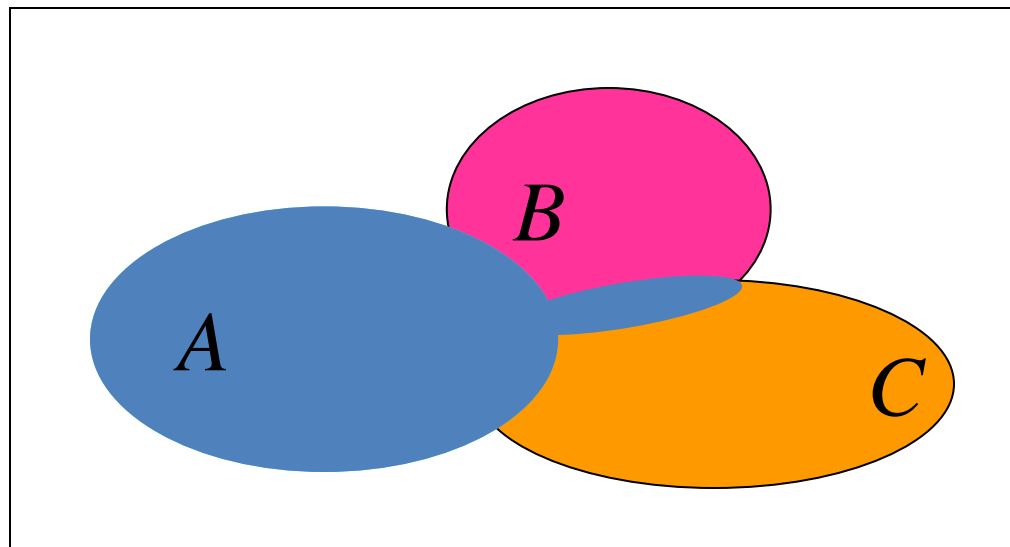
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

德·摩根 (De Morgan) 律

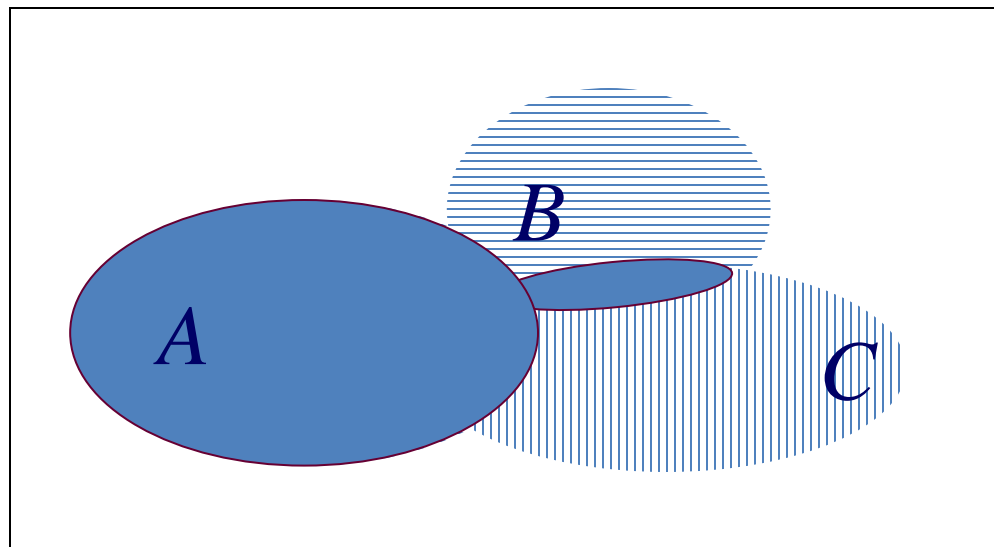
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcap_{k=1}^n \bar{B}_k, \quad \bigcap_{k=1}^n B_k = \bigcup_{k=1}^n \bar{B}_k$$



分配律
图 示

$$A \cup (BC) =$$

$$(A \cup B)(A \cup C)$$



注：可列（countable）

- **可列集：**

- 是指一个无穷集 S ，其元素可与自然数形成一一对应，因此可表为 $S=\{s_1, s_2, \dots\}$

- **至多可列：**

- 指可列或有限

- **可以证明：**

- 可列是“最小的”无穷，即任何一个无穷集合均含有可列子集



课后作业

P20: 5, 6

补充题: ↵

1. 设随机事件 A, B 满足条件 $AB = \bar{A}\bar{B}$. 试求 $A \cup B$. ↵
2. 试把事件 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件之并. ↵

END