Probability and Statistics
Southern University of Science and Technology
吴梦轩
12212006

Section 1.5

吴梦轩

P22 Q46

a.

设硬币正面向上为事件 A,抽到红球为事件 B,则有 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B|A)=\frac{3}{5}$,$P(B|\bar{A})=\frac{2}{7}$。则由全概率公式，有

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{31}{70}$$

b.

抽到红球时，硬币正面向上的概率可以写为 $P(A|B)$。由贝叶斯公式，有

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{31}{70}}=\frac{21}{31}$$

P23 Q53

由贝叶斯公式，有

$$P=\frac{0.02\times 0.10}{0.02\times 0.10+0.01\times 0.20+0.0025\times 0.70}=\frac{8}{23}$$

P23 Q54

a.

设今天下雨的事件为 R_1。由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(R_2)&=P(R_2|R_1)P(R_1)+P(R_2|\bar{R}_1)P(\bar{R}_1)\\&=\alpha p+(1-\beta)(1-p)\\&=1-\beta+(\alpha+\beta-1)p\end{aligned}$$

b.

易知

$$P(R_3) = 1 - \beta + (\alpha + \beta - 1)P(R_2)$$

带入 $P(R_2)$ 的表达式，有

$$\begin{aligned} P(R_3) &= 1 - \beta + (\alpha + \beta - 1)(1 - \beta + (\alpha + \beta - 1)p) \\ &= 1 - \beta + (\alpha + \beta - 1) - (\alpha + \beta - 1)\beta + (\alpha + \beta - 1)^2 p \\ &= (\alpha + \beta)(1 - \beta) + (\alpha + \beta - 1)^2 p \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} P(R_4) &= 1 - \beta + (\alpha + \beta - 1)P(R_3) \\ &= 1 - \beta + (\alpha + \beta - 1)[(\alpha + \beta)(1 - \beta) + (\alpha + \beta - 1)^2 p] \\ &= 1 - \beta + (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta)(1 - \beta) + (\alpha + \beta - 1)^3 p \\ &= \sum_{i=0}^{2}(\alpha + \beta - 1)^i + (\alpha + \beta - 1)^3 p \end{aligned}$$

则当 n 趋于无穷时，有

$$P(R_n) = \sum_{i=0}^{n-2}(\alpha + \beta - 1)^i + (\alpha + \beta - 1)^{n-1} p$$

P24 Q63

设人活到 70 岁为事件 A，人活到 80 岁为事件 B，则有 $P(A) = 0.6$,$P(B) = 0.2$，则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$。

补充 1

设第一次选中汽车为事件 A，改变选择后选中汽车为事件 B。已知 $P(A) = \frac{1}{3}$，$P(B|A) = 0$，$P(B|\bar{A}) = 1$。则由全概率公式，有

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

故应该改变选择。

补充 2

$$P(\text{母亲及孩子得病}) = P(\text{孩子得病})P(\text{母亲得病}|\text{孩子得病}) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

又有

$$P(\text{父亲不得病}|\text{母亲及孩子得病}) = 1 - P(\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}) = 0.6$$

故

$$\begin{aligned}P(\text{母亲及孩子得病但父亲未得病}) &= P(\text{母亲及孩子得病})P(\text{父亲不得病}|\text{母亲及孩子得病}) \\ &= 0.3 \times 0.6 \\ &= 0.18\end{aligned}$$

补充 3

设机器调整良好为事件 A，生产出的第一件产品为合格品为事件 B。已知 $P(A) = 0.95$，$P(B|A) = 0.98$，$P(B|\bar{A}) = 0.55$。由贝叶斯公式可知，当生产出的第一件产品为合格品时，机器调整良好的概率为

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} \\ &= \frac{1862}{1917} \\ &\approx 0.971\end{aligned}$$