

# Probability and Statistics

Southern University of Science and Technology

吴梦轩

12212006

---

## Final Review

吴梦轩

### 1 随机变量

#### 1.1 重要分布

##### 1.1.1 二项分布

二项分布的符号表示为  $X \sim b(n, p)$ , 其频率函数为:

$$P\{X = x\} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

意为:  $n$  次独立重复试验中, 事件  $A$  发生  $x$  次的概率。

**多项分布:**

多项分布的符号表示为  $X \sim m(n, p_1, p_2, \dots, p_k)$ , 其频率函数为:

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k\} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \left( \sum_{i=1}^k p_i = 1, \sum_{i=1}^k x_i = n \right)$$

意为:  $n$  次独立重复试验中, 事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  分别发生  $x_1, x_2, \dots, x_k$  次的概率。

##### 1.1.2 泊松分布

泊松分布的符号表示为  $X \sim P(\lambda)$  或  $X \sim \pi(\lambda)$ , 其频率函数为:

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

意为: 单位时间 (或单位面积) 内随机事件发生  $x$  次的概率。

**泊松定理:**

设  $X \sim b(n, p)$ , 当  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ , 使得  $np = \lambda$  不变, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X = x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

**泊松流:**

记在时间  $(0, t]$  内随机事件发生的次数为  $N(t)$ , 则  $N(t) \sim P(\lambda t)$ , 称  $N(t)$  为泊松流。

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

### 1.1.3 均匀分布

均匀分布的符号表示为  $X \sim U(a, b)$ , 其频率函数为:

$$P\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

### 1.1.4 正态分布

正态分布的符号表示为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其频率函数为:

$$P\{X = x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

特别的, 当  $\mu = 0, \sigma = 1$  时, 称为标准正态分布, 记为  $X \sim N(0, 1)$ 。标准正态分布的分布函数记为  $\Phi(x)$ , 其频率函数记为  $\varphi(x)$ 。

**分布函数的积分过程:**

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

此时令  $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , 则有:

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**规范化：**证明若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\
 &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right\} \\
 &= P\{X \leq \sigma z + \mu\} \\
 &= F_X(\sigma z + \mu) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma z + \mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx
 \end{aligned}$$

此时令  $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ，则有：

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma z + \mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
 &= \Phi(z)
 \end{aligned}$$

### 1.1.5 指数分布

指数分布的符号表示为  $X \sim EXP(\lambda)$ ，其频率函数为：

$$P\{X = x\} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

**指数分布与泊松流：**

设  $N(t)$  为泊松流， $N(t) \sim P(\lambda t)$ 。记  $X$  为第一个事件发生的时间，则  $P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$ 。因此  $X \sim EXP(\lambda)$ 。

**指数分布的无记忆性：**

设  $X \sim EXP(\lambda)$ ，则对任意  $s, t > 0$ ，有：

$$\begin{aligned}
 P\{X > s+t | X > s\} &= \frac{P\{X > s+t, X > s\}}{P\{X > s\}} \\
 &= \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > s\}} \\
 &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\
 &= e^{-\lambda t} \\
 &= P\{X > t\}
 \end{aligned}$$

## 1.2 频率（密度）函数与分布函数

**频率函数**的基本性质（本质特征）：

- $P\{X = x\} \geq 0$
- $\sum_{x \in X} P\{X = x\} = 1$

满足以上两个性质的数列必定是一个离散型随机变量的频率函数。

**密度函数**的基本性质（本质特征）：

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

满足以上两个性质的函数必定是一个连续型随机变量的密度函数。

**分布函数**的基本性质（本质特征）：

- $F(x)$  是一个单调不减函数
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $F(x)$  是右连续的，即  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

满足以上三个性质的函数必定是一个随机变量的分布函数。

## 1.3 分位数

**分位数**：设  $X$  是一个连续型随机变量， $F(x)$  是其分布函数，对于  $0 < p < 1$ ，若实数  $x_p$  使得  $F(x_p) = p$ ，则称  $x_p$  为  $X$  的  $p$  分位数。特殊的，当  $p = 0.5$  时，称为中位数。当  $p = 0.25$  时，称为下四分之一位数。当  $p = 0.75$  时，称为上四分之一位数。

## 1.4 随机变量的函数的分布

令  $Y = g(X)$ ，当  $Y$  是严格单调函数时，有：

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

正态分布的线性组合以及线性函数的分布仍然是正态分布。假设有  $n$  个随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，且  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ，则有：

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i + b \sim N \left( \sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

## 1.5 二维随机变量

### 1.5.1 联合分布函数与边缘分布函数

根据 Farlie-Morgenstern 定理, 对于给定的两个一维随机变量  $X, Y$ , 可以证明只要  $|a| \leq 1$ , 就有:

$$H(x, y) = F(x)G(y)\{1 + a[1 - F(x)][1 - G(y)]\}$$

是二元连续型分布函数。

换言之, 给定边际分布, 可以构造出无限多个联合分布。

### 1.5.2 连接函数

将使得边缘分布为均匀分布的联合分布函数称为连接函数。定义联合分布为:

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

定义密度函数为:

$$f_{XY}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y)$$

### 1.5.3 二维正态分布

二维正态分布记为  $X \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 其联合密度函数为:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

对于其边际分布, 有:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

证明如下:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2 \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right] \right\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2 \right\} dy \end{aligned}$$

令  $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)$ , 则有:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\ &= N(\mu_1, \sigma_1^2) \end{aligned}$$

注意: 边际分布为正态分布时, 联合分布不一定为二维正态分布。

#### 1.5.4 二维独立性

设  $X, Y$  为二维随机变量, 若对于任意  $x, y$ , 有:

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称  $X, Y$  相互独立。

对于离散型随机变量, 有:

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\}$$

对于连续型随机变量, 有:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

特别的, 二维正态分布的独立性等价于  $\rho = 0$ 。

两组独立的数据  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ , 其函数  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  相互独立。

#### 1.5.5 条件分布

设  $X, Y$  为二维随机变量,  $f(x, y)$  为其联合密度函数,  $f_X(x)$  为  $X$  的边际密度函数, 若  $f_X(x) > 0$ , 则称:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

为  $Y$  在  $X = x$  的条件密度函数。

二维随机变量的全概率公式:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

特别的, 对于二维正态分布, 指定  $X$  的条件下  $Y$  的条件分布仍然是正态分布。准确的说, 若  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则有:

$$f_{Y|X}(y|x) \sim N\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right)$$

### 1.5.6 联合分布随机变量的函数

设  $X, Y$  为二维随机变量,  $Z = f(X, Y)$ , 则有:

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{f(X, Y) \leq z\} = \iint_{f(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

$Z = X + Y$  的分布:

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z\} &= P\{X + Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z - Y\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

令  $x = u - y$ , 则有:

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z f(u - y, y) du dy \\ f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx \end{aligned}$$

特别的, 当  $X, Y$  相互独立时, 有:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

特别的, 当  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$  时,  $Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

$Z = \frac{X}{Y}$  的分布:

同理, 通过换元法, 有:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(zy, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x, xz) dx$$

**两个随机变量变换的分布:**

如果两个随机变量的联合分布为二维正态分布, 则他们的非奇异线性变换的分布仍然是二维正态分布。

## 1.6 极值

$$\begin{aligned}
 F_{\max}(z) &= P\{X \leq z, Y \leq z\} \\
 &= P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} \\
 &= F_X(z)F_Y(z) \\
 F_{\min}(z) &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\
 &= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\
 &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]
 \end{aligned}$$

特别的, 如果  $X \sim EXP(\lambda), Y \sim EXP(\mu)$ , 则  $Z = \min\{X, Y\} \sim EXP(\lambda + \mu)$ 。

## 1.7 顺序统计量

$X_{(k)}$  的密度函数为:

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k} f(x)$$

$(X_{(1)}, X_{(n)})$  的联合密度函数为:

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(x)f(y)$$

# 2 古典概型

## 2.1 集合

试验的样本点记为  $\omega$ , 样本空间记为  $\Omega$ , 样本空间的子集称为事件。

当事件  $A$  与事件  $B$  不可能同时发生时, 称事件  $A$  与事件  $B$  互不相容, 或互斥, 或互不相交, 记为  $A \cap B = \emptyset$ 。

加法公式:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

### 2.1.1 计数方法

选排列: 从  $n$  个不同元素中任取  $m$  个元素, 按照一定的顺序排成一列, 称为从  $n$  个不同元素中选取  $m$  个元素的排列, 记为  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 。特别的, 当  $m = n$  时, 称为全排列, 记为  $A_n^n = n!$ 。

组合: 从  $n$  个不同元素中任取  $m$  个元素, 不考虑顺序, 称为从  $n$  个不同元素中选取  $m$  个元素的组合, 记为  $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 。特别的, 将  $n$  个不同元素分成  $r$  组,



使得第  $i$  组有  $n_i$  个元素, 且  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ , 则称为将  $n$  个不同元素分成  $r$  组的组合, 记为  $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ 。

将  $n$  个相同的球放入  $m$  个不同的盒子中, 每个盒子中至少有一个球的方法数为  $C_{n-1}^{m-1}$ 。(相当于在  $n-1$  个间隔中选取  $m-1$  个间隔放入隔板) 将  $n$  个相同的球放入  $m$  个不同的盒子中, 盒子可以为空的方法数为  $C_{n+m-1}^{m-1}$ 。(相当于将  $n+m$  个相同的球放入  $m$  个不同的盒子中, 每个盒子中至少有一个球)

## 2.2 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式: 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分, 即  $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$ ,  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , 则对任一事件  $A$ , 有:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

贝叶斯公式: 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分, 即  $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$ ,  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , 则对任一事件  $A$ , 有:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

## 2.3 独立性

设  $A, B$  为两事件, 若  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  相互独立。

独立不同于互不相容, 独立是指两事件发生的概率互不影响, 互不相容是指两事件不能同时发生。

两两独立不能推出多个事件相互独立。独立也没有传递性, 即  $A, B$  独立,  $B, C$  独立, 不能推出  $A, C$  独立。

# 3 期望、方差、标准差与相关系数

## 3.1 常见分布的期望与方差

分布	期望	方差
$X \sim b(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
$X \sim P(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
$X \sim U(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$
$X \sim EXP(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

### 3.2 期望存在的条件

对于连续型随机变量, 当  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty$  时, 称随机变量  $X$  的期望存在。

对于离散型随机变量, 当  $\sum_{x \in X} |x|P\{X = x\} < +\infty$  时, 称随机变量  $X$  的期望存在。

### 3.3 马尔可夫不等式

设  $X$  是一个非负随机变量, 且  $E(X)$  存在, 则对于任意的  $t > 0$ , 有:

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}$$

证明:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_t^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_t^{+\infty} tf(x)dx \\ &= t \int_t^{+\infty} f(x)dx \\ &= tP\{X \geq t\} \end{aligned}$$

### 3.4 随机变量函数的期望

设  $X$  是一个随机变量,  $Y = g(X)$ , 则有:

$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in X} g(x)P\{X = x\}, & X \text{ 为离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx, & X \text{ 为连续型} \end{cases}$$

### 3.5 二维随机变量的期望

设  $(X, Y)$  是一个二维随机变量, 若要求  $E(X), E(Y)$ , 除了先求边缘分布, 再求期望外, 还可以通过以下公式求得:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dx dy, \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dx dy$$

### 3.6 期望的性质

1. 设  $a < X < b$ , 则  $a < E(X) < b$
2.  $E(cX) = cE(X)$

3.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. 当  $X, Y$  相互独立时,  $E(XY) = E(X)E(Y)$

相关推论:

1. 当  $X = c$  时,  $E(X) = c$
2.  $E(\sum_{i=1}^n c_i X_i) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i)$
3. 当  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立时,  $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$

### 3.7 方差的定义

$$Var(X) = D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

### 3.8 方差的计算公式

$$Var(X) = D(X) = \begin{cases} \sum_{x \in X} [x - E(X)]^2 P\{X = x\}, & X \text{ 为离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx, & X \text{ 为连续型} \end{cases}$$

但一般使用以下公式计算方差:

$$Var(X) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

### 3.9 方差的基本性质

1.  $D(c) = 0$
2.  $D(cX) = c^2 D(X)$
3.  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ , 当  $X, Y$  相互独立时,  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ 。可以推广到  $n$  个随机变量的情况: 当  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立时,  $D(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$ 。

### 3.10 切比雪夫不等式

设  $X$  是一个随机变量, 设  $E(X)$  和  $D(X)$  存在, 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有:

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
 P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x - E(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx \\
 &\leq \int_{|x - E(X)| \geq \varepsilon} \frac{(x - E(X))^2}{\varepsilon^2} f(x) dx \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\
 &= \frac{D(X)}{\varepsilon^2}
 \end{aligned}$$

### 3.11 协方差的定义

$$Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

但一般使用以下公式计算协方差：

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

### 3.12 协方差的性质

1.  $Cov(X, X) = D(X)$
2.  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
3. 当  $X, Y$  相互独立时,  $Cov(X, Y) = 0$
4. 协方差的双线性性质:  $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$ 。进一步有, 当  $U = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i, V = c + \sum_{j=1}^m d_j Y_j$  时, 有  $Cov(U, V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i d_j Cov(X_i, Y_j)$ 。

### 3.13 相关系数的定义

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

### 3.14 相关系数的性质

1.  $|\rho_{XY}| \leq 1$
2.  $|\rho_{XY}| = 1$  当且仅当存在常数  $a, b$ , 使得  $P\{Y = aX + b\} = 1$
3. 当  $X, Y$  相互独立时,  $\rho_{XY} = 0$
4.  $\rho_{XY} = \rho_{YX}$

$$5. D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

需要**强调**的是，相互独立的两个随机变量一定不相关，但不相关的两个随机变量不一定相互独立。但特别的有，当  $X, Y$  服从二维正态分布时， $X, Y$  相互独立等价于  $\rho_{XY} = 0$ ，即  $X, Y$  不相关等价于  $X, Y$  相互独立。

### 3.15 条件期望

设  $X, Y$  是二维随机变量， $E(X)$  存在， $E(Y)$  存在， $E(Y|X)$  存在，则称  $E(Y|X)$  为  $Y$  关于  $X$  的条件期望。

其计算公式为：

$$E(Y|X) = \begin{cases} \sum_{y \in Y} y P\{Y = y|X\}, & Y \text{ 为离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|X) dy, & Y \text{ 为连续型} \end{cases}$$

关于  $Y$  的函数的条件期望的计算公式为：

$$E[g(Y)|X] = \begin{cases} \sum_{y \in Y} g(y) P\{Y = y|X\}, & Y \text{ 为离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y|X) dy, & Y \text{ 为连续型} \end{cases}$$

### 3.16 条件期望的性质

1.  $E(c|X) = c$
2.  $E(aY_1 + bY_2|X) = aE(Y_1|X) + bE(Y_2|X)$
3. 若  $X$  与  $Y$  相互独立，则  $E(Y|X) = E(Y)$
4.  $E(E(Y|X)) = E(Y)$
5.  $E(D(Y|X)) + D(E(Y|X)) = D(Y)$

关于性质 4 的证明如下：

$$\begin{aligned} E(E(Y|X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x) dy \right] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x) f_X(x) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E(Y) \end{aligned}$$

## 4 大数定律与中心极限定理

### 4.1 大数定律

#### 4.1.1 伯努利大数定律

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的随机变量, 且  $P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1-p (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

#### 4.1.2 切比雪夫大数定律

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的随机变量, 且  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

注意, 此处并不要求  $X_i$  服从同一分布。

### 4.2 中心极限定理

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是独立同分布的随机变量, 且  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则对于任意的  $x$ , 有:

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

则  $E(Z_n) = 0, D(Z_n) = 1$ 。若  $F_n(x)$  为  $Z_n$  的分布函数, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

### 4.3 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的随机变量, 且  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则对于任意的  $x$ , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

## 5 数理统计的基本概念

### 5.1 总体与样本

一个样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  作为一个多维随机变量, 其联合分布函数为:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \cdots F(x_n)$$

其联合密度函数为：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$$

## 5.2 样本均值与样本方差

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

设总体的均值为  $\mu$ ，方差为  $\sigma^2$ ，则有：

$$E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \sigma^2$$

## 5.3 辛钦大数定律

设  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本， $E(X)$  存在，则对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - E(X) \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

## 5.4 抽样分布

### 5.4.1 $\chi^2$ 分布

设  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  是来自总体  $N(0, 1)$  的样本，则有：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

其中  $n$  称为自由度。

$\chi^2$  分布具有可加性，即若  $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$ ，且  $\chi_1^2$  与  $\chi_2^2$  相互独立，则  $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ 。

$\chi^2$  分布的期望和方差为：

$$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$$

特殊的，当  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  是来自参数为  $\lambda$  的指数分布的样本，则有：

$$2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2(2n)$$

### 5.4.2 $t$ 分布

设  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ ，且  $X, Y$  相互独立，则有：

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

其中  $n$  称为自由度。

$t$  分布的期望和方差为：

$$E(t) = 0, D(t) = \frac{n}{n-2} (n > 2)$$

当自由度  $n$  充分大时,  $t$  分布近似于标准正态分布。

### 5.4.3 $F$ 分布

设  $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 则有：

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

其中  $n_1, n_2$  称为自由度。

$F$  分布的重要性质为：

$$F(n_1, n_2) = \frac{1}{F(n_2, n_1)}$$

由此性质可以推出关于  $F$  分布的  $\alpha$  分位点的性质：

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$$

## 5.5 $\alpha$ 分位点

设  $X$  为连续型随机变量, 其分布函数为  $F(x)$ , 则称  $x_\alpha$  为  $X$  的  $\alpha$  分位点, 当且仅当：

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

## 5.6 抽样分布定理

### 5.6.1 定理一

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则有：

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

### 5.6.2 定理二

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方差, 则有：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

且  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立。



### 5.6.3 定理三

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方差, 则有:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

### 5.6.4 定理四

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  是来自总体  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本, 且  $X_1, X_2, \dots, X_n$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  相互独立, 则有:

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

### 5.6.5 定理五

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  的样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  是来自总体  $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$  的样本, 且  $X_1, X_2, \dots, X_n$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  相互独立, 则有:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

其中  $S_\omega^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ 。

**注意**, 此处不同于定理四, 定理四中的两个总体方差可以不相等, 而定理五中的两个总体方差相等。

## 6 参数估计

### 6.1 点估计

#### 6.1.1 矩估计

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本,  $k$  阶原点矩为:

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

一般来说, 只要求出前两阶原点矩, 可以由以下公式计算:

$$\mu_1 = E(X)$$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

特别的，对于总体为正态分布的情况，有：

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

其中  $\tilde{S}^2$  被称为修正样本方差。

通过矩估计法估计参数的步骤为：

1. 写出总体的前  $k$  阶原点矩  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 。
2. 将未知参数用  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  表示，得到方程组。
3. 用样本的前  $k$  阶原点矩  $\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$  代替总体的前  $k$  阶原点矩  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ ，解方程组，得到未知参数的估计量。
4. 将估计量代入总体的分布函数，得到参数的估计值。

### 6.1.2 极大似然估计

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本， $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合概率密度函数为  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ ，其中  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  为待估参数， $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  为样本的似然函数，定义为：

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

即似然函数代表了该样本出现的概率。

一般要求出似然函数的对数，即对数似然函数：

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

由于极大值点与对数似然函数的极大值点相同，因此可以通过求对数似然函数的极大值点来求得参数的估计值。一般通过以下步骤求得参数的极大似然估计值：

1. 写出样本的似然函数  $L(\theta)$ 。
2. 求出对数似然函数  $\ln L(\theta)$ 。
3. 求出  $\ln L(\theta)$  的极大值点，即  $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0 (i = 1, 2, \dots, k)$ 。
4. 解方程组，得到未知参数的估计量。
5. 将估计量代入总体的分布函数，得到参数的估计值。

特别的，对于均匀分布  $U(a, b)$ ，其最大似然估计为：

$$\hat{a} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \hat{b} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

## 6.2 估计量的评选标准

### 6.2.1 无偏性

设  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的估计量, 若  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计量。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的渐近无偏估计量。若两者都不满足, 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的有偏估计量。

无论总体服从什么分布, 样本均值  $\bar{X}$  都是总体均值  $\mu$  的无偏估计量, 样本方差  $S^2$  都是总体方差  $\sigma^2$  的无偏估计量。而修正后的样本方差  $\tilde{S}^2$  是总体方差  $\sigma^2$  的渐进无偏估计量。如果总体的  $k$  阶原点矩  $\mu_k$  存在, 则样本的  $k$  阶原点矩  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$  都是总体的  $k$  阶原点矩  $\mu_k$  的无偏估计量。

**重点:** 当最大似然估计为  $\max$  或  $\min$  时, 应这样计算其期望:

$$f_{\max}(z) = n f(z) [F(z)]^{n-1}$$

$$E(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} z F_{\max}(z) dz$$

特别的, 当整体服从指数分布时,  $n * \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $\theta$  的无偏估计量。

### 6.2.2 有效性

设  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  都是  $\theta$  的无偏估计量, 若  $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$ , 则称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效。

### 6.2.3 相合性

设  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$  都是  $\theta$  的无偏估计量, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$ , 则称  $\hat{\theta}_n$  为  $\theta$  的相合估计量。

1. 无论总体服从什么分布, 样本均值  $\bar{X}$  都是总体均值  $\mu$  的相合估计量, 样本方差  $S^2$  都是总体方差  $\sigma^2$  的相合估计量。
2. 矩估计一定是相合估计, 最大似然估计一般是相合估计。
3. 相合估计不一定时无偏估计。
4. 一个无偏估计, 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}_n) = 0$  时, 一定是相合估计。(切比雪夫不等式)

## 6.3 区间估计

### 6.3.1 置信区间

设总体服从  $F(x; \theta)$ , 若存在两个统计量  $\bar{\theta}, \underline{\theta}$ , 使得:

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  为  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间。

以下为各种情况的总结：

1. 当方差已知时，总体均值的置信区间为： $\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$ 。
2. 当均值和方差都未知时，总体均值的置信区间为： $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 。
3. 当均值未知时，总体方差的置信区间为： $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$ 。
4. 当双正态总体的方差都已知时，总体均值之差的置信区间为： $\bar{X} - \bar{Y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ 。
5. 当双正态总体的方差未知但相等时，总体均值之差的置信区间为： $\bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ 。
6. 当双正态总体的方差未知时，方差之比的置信区间为： $\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}$ 。

单侧置信区间与双侧置信区间类似，以下为各种情况的总结：

1. 当方差和均值都未知时，均值的单侧置信下限为： $\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)$ ，均值的单侧置信上限为： $\mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)$ 。
2. 当方差和均值都未知时，方差的单侧置信下限为： $\sigma^2 > \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ ，方差的单侧置信上限为： $\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$ 。

## 7 假设检验

### 建立假设

1. 保护原假设  $H_0$ ：如果错误的拒绝原假设，将会产生严重的后果。例如，原假设为新药有毒副作用，备择假设为新药无毒副作用，如果错误的拒绝原假设，将会导致新药上市，从而导致严重的后果。
2. 原假设为维持现状：例如，原假设为新药物有减肥效果，备择假设为新药物无减肥效果。
3. 原假设为简单假设，即原假设中参数的值已知。

## 7.1 拒绝域

第一类错误：拒绝了正确的原假设，即  $H_0$  为真，但是拒绝了  $H_0$ 。（弃真）  
 第二类错误：接受了错误的原假设，即  $H_0$  为假，但是接受了  $H_0$ 。（取伪）

Neyman-Pearson 准则：在保证第一类错误概率不超过  $\alpha$  的条件下，使得第二类错误概率最小。其中， $\alpha$  被称为显著性水平。

## 7.2 双边 $u$ 检验法

已知  $\sigma_0^2$ ，检验  $H_0 : \mu = \mu_0$ ， $H_1 : \mu \neq \mu_0$ 。拒绝域为：

$$P\left\{\frac{|X - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha/2}\right\} = \alpha$$

## 7.3 单边 $u$ 检验法

1. 已知  $\sigma_0^2$ ，检验  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ， $H_1 : \mu > \mu_0$ 。拒绝域为： $P\left\{\frac{X - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}\right\} = \alpha$
2. 已知  $\sigma_0^2$ ，检验  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ， $H_1 : \mu < \mu_0$ 。拒绝域为： $P\left\{\frac{X - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < u_\alpha\right\} = \alpha$

## 7.4 双边 $t$ 检验法

未知  $\sigma_0^2$  和  $\mu_0$ ，检验  $H_0 : \mu = \mu_0$ ， $H_1 : \mu \neq \mu_0$ 。拒绝域为：

$$P\left\{\frac{|X - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\} = \alpha$$

## 7.5 单边 $t$ 检验法

1. 未知  $\sigma_0^2$  和  $\mu_0$ ，检验  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ， $H_1 : \mu > \mu_0$ 。拒绝域为： $P\left\{\frac{X - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1)\right\} = \alpha$
2. 未知  $\sigma_0^2$  和  $\mu_0$ ，检验  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ， $H_1 : \mu < \mu_0$ 。拒绝域为： $P\left\{\frac{X - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = \alpha$

## 7.6 双边 $\chi^2$ 检验法

1. 未知  $\sigma_0^2$  和  $\mu_0$ ，检验  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ， $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 。拒绝域为： $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} + P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\right\} = \alpha$
2. 已知  $\sigma_0^2$ ，检验  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ， $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ 。拒绝域为： $P\left\{\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 < \chi_{\alpha/2}^2(n)\right\} + P\left\{\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 > \chi_{1-\alpha/2}^2(n)\right\} = \alpha$

## 7.7 单边 $\chi^2$ 检验法

1. 未知  $\sigma_0^2$  和  $\mu_0$ , 检验  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\} = \alpha$
2. 未知  $\sigma_0^2$  和  $\mu_0$ , 检验  $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha}^2(n-1)\} = \alpha$
3. 已知  $\mu_0$ , 未知  $\sigma_0^2$ , 检验  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 > \chi_{1-\alpha}^2(n)\} = \alpha$
4. 已知  $\mu_0$ , 未知  $\sigma_0^2$ , 检验  $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 < \chi_{\alpha}^2(n)\} = \alpha$

## 7.8 双总体均值差的检验

已知  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  时

1. 检验  $H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{1-\alpha/2}\} + P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{\alpha/2}\} = \alpha$
2. 检验  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{1-\alpha}\} = \alpha$
3. 检验  $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2, H_1 : \mu_1 < \mu_2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{\alpha}\} = \alpha$

未知  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$ , 但是保证  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  时

1. 检验  $H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\} + P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\} = \alpha$
2. 检验  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\} = \alpha$
3. 检验  $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2, H_1 : \mu_1 < \mu_2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\} = \alpha$

## 7.9 双总体方差比的检验

未知  $\mu_1$  和  $\mu_2$  时

1. 检验  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} + P\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = \alpha$

2. 检验  $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ,  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)\} = \alpha$
3. 检验  $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ ,  $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ 。拒绝域为:  $P\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)\} = \alpha$

## 8 重要的分布及其特征

分布	分布函数	密度函数	期望	方差
$N(\mu, \sigma^2)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu$	$\sigma^2$
$U(a, b)$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$
$B(n, p)$	$\sum_{i=0}^x C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$	$C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$	$np$	$np(1-p)$
$\chi^2(n)$	不需记忆	不需记忆	$n$	$2n$
$t(n)$	不需记忆	不需记忆	$0(n > 2)$	$\frac{n}{n-2}(n > 2)$
$F(n_1, n_2)$	不需记忆	不需记忆	不需记忆	不需记忆