

第四章 随机变量的数字特征

- § 1 随机变量的期望
- § 2 方差和标准差
- § 3 协方差和相关系数
- § 4 条件期望和预测
- § 5 矩生成函数
- § 6 近似方法



第四章 随机变量的数字特征

随机变量的概率特性 { 分布函数 CDF
密度函数 PDF
频率函数 PMF

特点全面、详细、完整

不足复杂、重点不突出



怎样粗线条地描述随机变量的特性?

简单明了、特征鲜明、直观实用

● 问题 怎样粗线条地描述随机变量的特性?

数字特征

例 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

怎样评估两人的射击水平？

分析 两人的总环数分别为

$$\text{甲： } 8 \times 15 + 9 \times 40 + 10 \times 45 = 930 \quad (\text{环})$$

$$\text{乙： } 8 \times 35 + 9 \times 10 + 10 \times 55 = 920 \quad (\text{环})$$

每枪平均环数为

$$\text{甲： } 8 \times \frac{15}{100} + 9 \times \frac{40}{100} + 10 \times \frac{45}{100} = 9.3 \quad (\text{环})$$

$$\text{乙： } 8 \times \frac{35}{100} + 9 \times \frac{10}{100} + 10 \times \frac{55}{100} = 9.2 \quad (\text{环})$$

◆ 平均值的概念广泛存在

例如 某班级某课程考试的平均成绩
电子产品的平均无故障时间
某地区的日平均气温和日平均降水量
某地区水稻的平均亩产量
某地区的家庭平均年收入
某国家国民的平均寿命



怎样定义随机变量的平均值概念？

例 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

怎样评估两人的射击水平？

进一步分析 记甲每枪击中的环数为 X ，因为射击次数较多，故可认为 X 的频率函数为

X	8	9	10
p_k	0.15	0.40	0.45

则甲射手每枪平均环数为

$$8 \times 0.15 + 9 \times 0.40 + 10 \times 0.45 = 9.3$$

即平均环数为

$$E(X) \triangleq \sum_{k=1}^3 x_k p_k$$

(一) 离散型 r.v 的数学期望

定义 设 r.v X 的频率函数为

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
$P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < +\infty$, 则称

$$E(X) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P\{X = x_k\}$$

为 r.v X 的**数学期望**(期望、均值).

“**数学期望**”(Expectation, Expected value)的由来

“数学期望”是历史上沿用下来的一个名词，可理解为在数学上对 r.v 进行计算期望得到的值，即平均值

例 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 付款额根据使用寿命 X 来确定:

寿命(年)	$X \leq 1$	$1 < X \leq 2$	$2 < X \leq 3$	$X > 3$
付款(元)	1500	2000	2500	3000

假设 $X \sim EXP(0.1)$, 试求该商店出售一台电器的平均收费额.

解 设出售一台电器的收费额为 Y , 频率函数为

$$P\{Y = 1500\} = P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0.0952$$

$$P\{Y = 2000\} = P\{1 < X \leq 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0.0861$$

$$P\{Y = 2500\} = P\{2 < X \leq 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0.0779$$

$$P\{Y = 3000\} = P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0.7408$$

即

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

例 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 付款额根据使用寿命 X 来确定:

寿命(年)	$X \leq 1$	$1 < X \leq 2$	$2 < X \leq 3$	$X > 3$
付款(元)	1500	2000	2500	3000

假设 $X \sim EXP(0.1)$, 试求该商店出售一台电器的平均收费额.

解 设出售一台电器的收费额为 Y , 频率函数为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$$\begin{aligned}
 \therefore E(Y) &= \sum_{k=1}^4 y_k P\{Y = y_k\} \\
 &= 1500 \times 0.0952 + 2000 \times 0.0861 + 2500 \times 0.0779 + 3000 \times 0.7408 \\
 &= 2732.17
 \end{aligned}$$

即商店出售一台电器平均收费额为 2732.17 元.

例 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解 X 的频率函数为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$\therefore X$ 的均值为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{X = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{令 } k-1=i \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

例 设 $X \sim b(n, p)$, 求 $E(X)$.

解
$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$\forall p, q \in (0, 1)$, 令

$$\varphi(p, q) \triangleq \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \equiv (p + q)^n$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^{k-1} q^{n-k} \equiv n(p + q)^{n-1}$$

特别令 $q = 1 - p$, 则有

$$\begin{aligned} E(X) &= p \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^{k-1} q^{n-k} \\ &= p \cdot n(p + q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

常见分布的数学期望

分布	概率分布	期望
0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\dots$	λ

**问题**

在数学期望的定义中，为什么要求

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < +\infty \quad ?$$

分析 由高等数学知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \text{ 收敛}$$

且 $E(X)$ 与 $x_k p_k$ 出现的先后位置无关！若 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k = +\infty$, 则称 $E(X)$ 不存在.

(二) 连续型 r.v 的数学期望

定义 设 r.v X 的概率密度函数为 $f(x)$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < +\infty$$

则称

$$E(X) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

为 r.v X 的数学期望(期望、均值).

注意离散型和连续型
情形的形式一致性

注

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = +\infty$, 则称 $E(X)$ 不存在.

例 设 $X \sim U(a, b)$, 求 $E(X)$.

解 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

例 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu + \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} + 0 \\ &= \mu \end{aligned}$$

例 设某元器件的寿命 X 服从指数分布, 其密度为

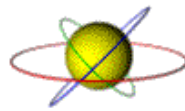
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 X 的数学期望 $E(X)$.

解

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= \theta \cdot \int_0^{\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right) \\ &= \theta \cdot \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \\ &= \theta \end{aligned}$$

即该元器件的平均寿命为 θ .



工程背景

如果某产品的平均寿命为

$$\theta = 10^k \quad (\text{小时})$$

则称该产品为“ k 级”产品 ($k = 1, 2, \dots$). k 越大(级别越高), 失效率 10^{-k} 越低, 则产品的平均寿命越长, 可靠性越高.

在航空、航天、军事、医疗等领域, 通常要求元器件达9级以上, 这意味着该元器件的平均寿命至少为

$$\frac{10^9}{365 \times 24} \approx 114160 \quad (\text{年})$$

分布	概率密度	期望
区间 (a,b) 上的均匀分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

例. 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

求 $E(X)$.

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-|x|} dx = 0$$

例 设 r.v X 服从标准 Cauchy 分布, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

计算 $E(X)$.

解

因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx^2}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

故 $E(X)$ 不存在.

定理 (马尔可夫Markov不等式)

设 r.v. X 满足 $P\{X \geq 0\} = 1$, 且 $E(X)$ 存在, 则

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}.$$

证 只证离散型情形, 连续情形完全类似.

$$E(X) = \sum_x xp(x) = \sum_{x < t} xp(x) + \sum_{x \geq t} xp(x)$$

因 X 只取非负值, 故和式中每一项都是非负的.


因此,

$$E(X) \geq \sum_{x \geq t} xp(x) \geq \sum_{x \geq t} tp(x) = tP\{X \geq t\}.$$

即

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}.$$

对于一般的非负 r.v.,
无论其概率分布, 该结论都成立



2. 随机变量函数的数学期望

设已知随机变量 X 的分布，我们需要计算的不是 X 的期望，而是 X 的某个函数的期望，比如说 $g(X)$ 的期望. 那么应该如何计算呢？

(三) r.v 的函数的数学期望

实际背景

飞机机翼受到的压力为

$$W = kV^2$$

其中 V 是风速, $k(>0)$ 是常数, 问机翼受到的平均压力多大?

一般地 设已知

$$X \sim f(x) \quad (\text{概率函数})$$

$$y = g(x) \quad (\text{普通函数})$$

则要求

$$E(Y) = E[g(X)]$$

一般的思路



① $X \sim f(x), Y = g(X) \Rightarrow Y \sim f_Y(y)$

② $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$



是否可以不求 $g(X)$ 的分布而只根据 X 的分布求得 $E[g(X)]$ 呢？

下面的基本公式指出，答案是肯定的.

公式的重要性在于：当我们求 $E[g(X)]$ 时，不必知道 $g(X)$ 的分布，而只需知道 X 的分布就可以了. 这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

定理 设 $y = g(x)$ 为普通函数, 则

① 设 X 为离散型r.v, 其频率函数为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| \cdot p_k < +\infty$, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

② 设 X 为连续型r.v, 其概率密度为 $f(x)$,

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

注意二者的
形式一致性

例 设风速 $V \sim U(0, a)$, 设飞机机翼受到的正压力 W 与风速的关系是 $W = kV^2$ ($k > 0$ 常数). 求 $E(W)$.

解 V 的密度函数为

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < v < a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v) dv \\ &= \frac{k}{a} \int_0^a v^2 dv \\ &= \frac{1}{3} ka^2 \end{aligned}$$

即飞机机翼受到的平均正压力为 $\frac{1}{3} ka^2$.

推广的定理 设 $z = g(x, y)$ 为二元函数, 则

① 设 X, Y 的联合频率函数为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

若 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |g(x_i, y_j)| p_{ij} < +\infty$, 则

$$E(Z) = E[g(X, Y)]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

② 设 X, Y 的联合密度为 $f(x, y)$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| f(x, y) dx dy < \infty,$$

则

$$E(Z) = E[g(X, Y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

注: 公式可推广到一般的高维随机变量

例 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 15xy^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$
试求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

一般的思路

$$f(x, y)$$



$$f_X(x), f_Y(y)$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

另一种方法

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy$$

$$g(x, y) = x$$

例 设 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 15xy^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$
试求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

解
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy = \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} x \cdot 15xy^2 dx dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^x 15x^2 y^2 dy = \frac{15}{3} \int_0^1 x^5 dx = \frac{5}{6}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \frac{5}{8}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy$$
$$= \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} xy \cdot 15xy^2 dx dy = \frac{15}{28}$$

例 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求 $E(3X^2 + 5)$

$$E(3X^2 + 5)$$

$$= [3 \cdot (-2)^2 + 5] \cdot 0.4 + [3 \cdot 0^2 + 5] \cdot 0.3 + [3 \cdot 2^2 + 5] \cdot 0.3$$

$$= 13.4$$

例 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

求 $Y = e^{-2X}$ 的数学期望.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx$$

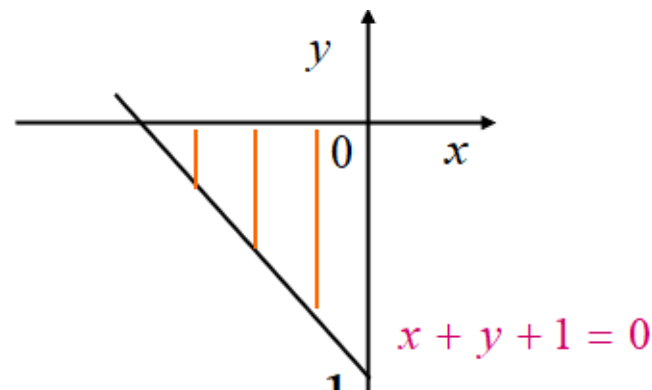
$$= -\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}$$

例 设 (X, Y) 在区域 A 上服从均匀分布, 其中 A 为 x 轴, y 轴和直线 $x+y+1=0$ 所围成的区域.

求 EX , $E(-3X+2Y)$, EXY .

解

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in A \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$



$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^0 x \cdot 2 dy = -\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y) = \int_{-1}^0 dx \int_{-x-1}^0 2(-3x+2y) dy = \frac{1}{3}$$

$$EXY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^0 x \cdot 2y dy = \frac{1}{12}$$

(四) 数学期望的基本性质

- ① 设 $a \leq X \leq b$ ($a.e$), 则 $a \leq E(X) \leq b$
- ② 设 c 为常数, 则 $E(cX) = cE(X)$
- ③ 设 X, Y 为r.v, 则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- ④ 设 X, Y 相互独立, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

几个推论

- ❶ 若 $X = c$ ($a.e$), 则 $E(X) = c$
- ❷ 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为常数, X_1, X_2, \dots, X_n 为r.v, 则

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

- ❸ 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 则

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$$


例 已知随机变量 X 服从参数为2的泊松分布，
则随机变量 $Z = 3X - 2$ 的数学期望 $EZ = \underline{\hspace{2cm}}$.

本题要求熟悉泊松分布的有关特征，并会利用数学期望的性质求随机变量线性函数的期望.

由于 X 服从参数为 2 的泊松分布，

则 $EX = 2$,


所以 $EZ = E(3X - 2) = 3EX - 2 = 4$



例 设二维 r.v. (X, Y) 的 d.f. 为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(X + Y)$, $E(XY)$.




例 设二维 r.v. (X, Y) 的 d.f. 为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $E(XY)$.

解
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy \\ &= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4} x dx \int_0^1 (1+3y^2) dy = \frac{4}{3} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4} x dx \int_0^1 y(1+3y^2) dy = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

由数学期望性质

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{4}{3} + \frac{5}{8} = \frac{47}{24}$$

X, Y 独立

$$E(XY) \stackrel{\uparrow}{=} E(X) \cdot E(Y) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{6}$$

课后作业

P116: 6、15、20、21、31

1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求 (1) $Y = 2X$; (2) $Y = e^{-2X}$ 的数学期望.

2. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X^2 + Y^2)$.