Section 5.2

吴梦轩

P130 Q1

$$
\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \cdot n\mu \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(\overline{X}) &= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2
\end{aligned}
$$

由切比雪夫不等式有

$$
0 \leqslant \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{D(\overline{X})}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 0 = 0
$$

因此 $\overline{X}$ 依概率收敛于 μ。

P130 Q2

令随机变量 $Y_i = X_i - \mu_i$，则 $E(Y_i) = 0$，$D(Y_i) = \sigma_i^2$。此时有

$$\begin{aligned} E(\overline{Y}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} \overline{X} - E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\ &= \overline{Y} \end{aligned}$$

因此，由切比雪夫不等式有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - E(\overline{X})| \geqslant \epsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(|\overline{Y}| \geqslant \epsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(|\overline{Y} - E(\overline{Y})| \geqslant \epsilon) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{D(\overline{Y})}{\epsilon^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\overline{X}$ 依概率收敛于 μ。

补充 1

由指数分布期望值为 100 可知 $\lambda = \frac{1}{100}$。故每只元件的寿命为 $X_i \sim EXP(\frac{1}{100})$，$E(X_i) = 100$，$D(X_i) = 10000$。由中心极限定理有

$$\sum_{i=1}^{16} X_i \sim N(1600, 160000)$$

因此有

$$
\begin{aligned}
P\{\sum_{i=1}^{16} X_i \geqslant 1920\} &= 1-\Phi\left(\frac{1920-1600}{400}\right) \\
&= 1-\Phi(0.8) \\
&\approx 1-0.7881 \\
&= 0.2119
\end{aligned}
$$

补充 2

可知每位老人是否死亡服从二项分布，$X_i \sim B(1,p)$，$E(X_i)=p$，$D(X_i)=p(1-p)$，其中 $p=0.017$。

则由中心极限定理有

$$
\sum_{i=1}^{10000} X_i \sim N(10000p, 10000p(1-p))
$$

则该保险公司亏本的概率为

$$
\begin{aligned}
P\{10000\cdot\sum_{i=1}^{10000} X_i \geqslant 2000000\} =&P\{\sum_{i=1}^{10000} X_i \geqslant 200\} \\
=&1-\Phi\left(\frac{200-10000\cdot 0.017}{\sqrt{10000\cdot 0.017\cdot 0.983}}\right) \\
\approx&1-\Phi(2.321) \\
=&1-0.9899 \\
=&0.0101
\end{aligned}
$$