第一章　概率

§6 独立性

问题的背景

抛甲、乙两枚硬币，观察正反面出现的情况，则样本空间是 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$

记事件 $A=\{$甲出现正面$\}$，$B=\{$乙出现正面$\}$

从直观上看

A,B 之间是没有任何关系的,它们具有“独立性”

从数学上看

A,B“独立” $\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A),\ P(B\mid A)=P(B)$

$$\Leftrightarrow P(AB)=P(A\mid B)P(B)$$

$$=P(B\mid A)P(A)=P(A)P(B)$$

定义 设 A,B 是两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A,B **相互独立**,简称 A,B **独立**.

问 A,B独立与A,B不相容有什么关系?

分析 A,B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

A,B不相容 $\Leftrightarrow AB=\Phi$

故当 $P(A)>0$, $P(B)>0$ 时

$\left.\begin{array}{r} A,B \text{ 独立} \\ A,B \text{不相容} \end{array}\right\}$ 不能同时成立

问 若A,B独立，问 $\bar{A},\bar{B}$是否独立?

分析 若$P(AB)=P(A)P(B)$,则

$$P(AB)=P(A)(1-P(\bar{B}))=P(A)-P(A)P(\bar{B})$$

$$\therefore\quad P(A)P(\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A-AB)=P(A\bar{B})$$

故 $A,\bar{B}$独立,从而 $\bar{A},B$独立 ,$\bar{A},\bar{B}$独立.

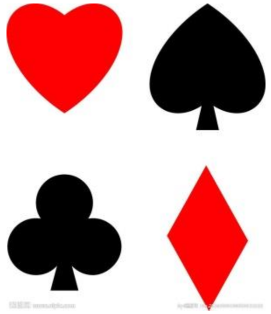
例 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A = { 抽到K }，B = { 抽到的牌是黑色的 }，问事件A、B是否独立?

解 由于 $P(A)=4/52=1/13$, $P(B)=26/52=1/2$,

$P(AB)=2/52=1/26$.

可见, $P(AB)=P(A)P(B)$,

故 事件A、B独立.



再一次说明：独立与不相容没有关系

小练习：独立与不相容的区别和联系

I. 设A、B为不相容事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$, 下面四个结论中，正确的是：

1. $P(B|A)>0$
2. $P(A|B)=P(A)$
3. $P(A|B)=0$
4. $P(AB)=P(A)P(B)$

II. 设A、B为独立事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$, 下面四个结论中，正确的是：

1. $P(B|A)>0$
2. $P(A|B)=P(A)$
3. $P(A|B)=0$
4. $P(AB)=P(A)P(B)$

三个事件的独立性

定义 设 A,B,C 是三个事件，若

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(CA) &= P(C)P(A) \end{aligned}\right\}$$

两两独立

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A,B,C **相互独立(独立)**.

n 个事件的独立性

定义 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ 满足

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

$$(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k = 2, \cdots, n)$$

两两独立

三三独立

……

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立(独立)**.

思考几个问题

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(CA) &= P(C)P(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A, B, C$$ **相互独立**?

否!

反例：两两独立与相互独立的关系

例如 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ ，$A=\{\omega_1,\omega_2\},B=\{\omega_1,\omega_3\}$,

$C=\{\omega_1,\omega_4\}$,则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$, 并且,

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C).$$

即事件 A、B、C 两两独立.

但是 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C).$

思考几个问题

1. $$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(CA) &= P(C)P(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A,B,C \text{ 相互独立}$$

否!

2. 必然事件 Ω 与任何事件 A 是否独立？

不可能事件 Φ 与任何事件 A 是否独立？

3. 事件{甲患感冒}与{乙患感冒}能否认为是独立的？

注意:

条件概率与事件独立性通常是根据实际意义来确定的

例 设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，求混合100个人的血清中含有肝炎病毒的概率.

解 记

$$A_i=\{\text{第 }i\text{个人血清含肝炎病毒}\},\ i=1,2,\cdots,100$$

则所求概率为

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} B_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{B}_k\ ,\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} B_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{B}_k$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{100}A_i\right)=P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{100}\overline{A}_i}\right)$$

$$=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{100}\overline{A}_i\right)$$

根据实际问题判断事件独立性

$$=1-0.996^{100}$$

$$\approx 0.33$$

问题：设计试验次数（分组方法）

例 一支步枪击中目标的概率为 $p=0.001$，试求 n 支枪齐射能击中目标的概率.

解 记 $A_i=\{$第 i 支枪击中目标$\}$, $(i=1,2,\cdots,n)$

易知 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，所求概率为

$$p_n=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$$

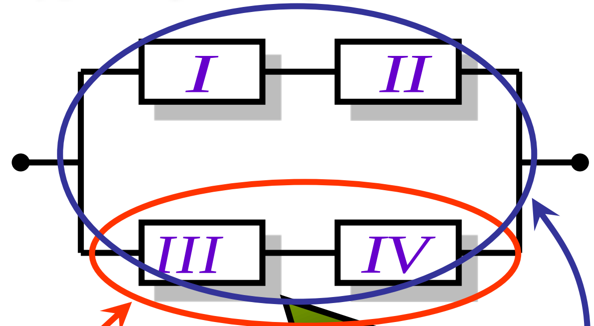
$$=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)$$

$$=1-(1-p)^n=1-0.999^n$$

n	1000	2000	3000	4000	5000
p_n	0.632	0.865	0.950	0.982	0.993

可见即使 p 很小，但只要试验不断进行下去，小概率事件几乎必然要发生

系统可靠性概念：系统可靠性 $= P\{$系统正常工作$\}$



例 某系统由四个部件 I, II, III, IV 构成(见图). 设每个部件的可靠性均为 p, 且四个部件是相互独立的. 求整个系统的可靠性.

解 记 $A = \{$整个系统正常工

$A_i = \{$第 i 个部件正常

I、II 串联 \
III、IV 串联 } 并联

则

$$A = A_1A_2 \cup A_3A_4$$

相互独立

于是整个系统的可靠性为

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2 \cap A_3A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1A_2)P(A_3A_4) \\
&= p^2 + p^2 - p^2p^2 = p^2(2 - p^2)
\end{aligned}$$

例 1、2、3号高炮同时对飞机进行射击,三门炮击中飞机的概率分别为0.4、0.5、0.7. 飞机被一门炮击中而被击落的概率为0.2,被两门炮击中而被击落的概率为0.6,若被三门炮击中,飞机必定被击落. 求飞机被击落的概率.

解 记 $A=\{$飞机被击落$\}$

$A_i=\{$飞机被 i门炮击中$\}$, $i=0,1,2,3$

$B_j=\{$第j门炮击中飞机$\}$, $j=1,2,3$

则 $A_1=B_1\bar{B}_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1\bar{B}_2B_3$, $P(A_1)=0.36$

$A_2=B_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2B_3\cup B_1\bar{B}_2B_3$, $P(A_2)=0.41$

$A_3=B_1B_2B_3$, $P(A_3)=0.14$

由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid A_i)P(A_i)$$

$$=0+0.2\times0.36+0.6\times0.41+1\times0.14=0.458$$

- 例：甲、乙两人同时向一目标射击，甲击中率为0.8，乙击中率为0.7，求目标被击中的概率。

解：

设 A={甲击中}, B={乙击中}

C={目标被击中}

则：$C=A\cup B,\ P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)$

∵ 甲、乙同时射击，其结果互不影响，

∴ A，B相互独立

$$\Rightarrow P(C)=0.7+0.8-0.56=0.94$$

小结

独立性

定义 设 A,B 是两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立，简称 A,B 独立.

条件概率与事件独立性通常是根据实际意义来确定的

独立性的应用:

分组试验设计

系统可靠性

不相容与独立的关系

两两独立与相互独立的关系

总结：

1. 样本空间 $S=\{e\}$　　随机事件 $A\subset S$

2. 事件的关系：$A\subset B; A=B$

   事件的运算：$A\cup B; A\cap B; \bar{A}$

3. 频率：$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$

   概率的定义：满足 $\begin{cases} 0\le P(A)\le 1; P(S)=1 \\ \text{当}AB=\varnothing\text{时，}\ P(A\cup B)=P(A)+P(B) \end{cases}$

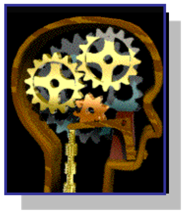
   概率的性质：
   (1) $P(A)=1-P(\bar{A})$
   (2) 当 $A\supset B$ 时 $\Rightarrow P(A)\ge P(B)$
   (3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

4. 条件概率：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)} \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B|A)$

   当 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一划分时，

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j),\quad P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

5. 事件独立性



课后作业

P24：68, 71, 74, 77, 79

补充题：

1. 设两个独立事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相同，求事件 A 发生的概率.

2. 设两两相互独立的三事件 A, B, C 满足条件: $ABC=\phi, P(A)=P(B)=P(C)$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=9/16$,求 $P(A)$.