Probability and Statistics
Southern University of Science and Technology
吴梦轩
12212006

Section 1.3

吴梦轩

P20 Q4

要证明 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ 可以使用数学归纳法。
当 $n=1$ 时，有

$$P(A_1) = P(A_1)$$

显然成立。
假设当 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)
\end{aligned}$$

由数学归纳法可知，不等式对任意 n 成立。

P20 Q7

由加法原理可知

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

又因为 $A \cup B \subseteq \Omega$，所以 $P(A \cup B) \leqslant P(\Omega) = 1$，带入上式可得

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leqslant 1 \\ P(A \cap B) &\geqslant P(A) + P(B) - 1 \end{aligned}$$

得证。

补充 1

由加法原理可知

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

已知 $ABC \subseteq AB$ 且 $P(AB) = 0$, 所以 $P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$，则 $P(ABC) = 0$，带入上式可得

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

补充 2

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(\bar{A}\bar{B}) \\ &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

由加法原理可知

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

综合上述两式可得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) - P(A) + P(AB) \\ &= P(A \cup B) - P(A) + 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) \\ &= 1 - p \end{aligned}$$