Probability and Statistics
Southern University of Science and Technology
吴梦轩
12212006

Section 2.3

吴梦轩

P49 Q54

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P\{Y \leqslant y\} \\ =& P\{|X| \leqslant y\} \\ =& P\{-y \leqslant X \leqslant y\} \\ =& F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

已知 $x \sim N(0,\sigma^2)$，则 $F_X(x) = \Phi(\frac{x}{\sigma})$ 且 $F_X(-x) = \Phi(\frac{-x}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{x}{\sigma})$，所以 $F_Y(y) = 2\Phi(\frac{y}{\sigma}) - 1$。

故 Y 的密度函数为:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma}\phi(\frac{y}{\sigma}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} & y \geqslant 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

P49 Q59

U 是 $[-1,1]$ 上的均匀分布，则 U 的分布函数为:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ \frac{1}{2}(u+1) & -1 \leqslant u \leqslant 1 \\ 1 & u < 1 \end{cases}$$

对于 U^2，则有:

$$\begin{aligned} F_{U^2}(u) =& P\{U^2 \leqslant u\} \\ =& P\{-\sqrt{u} \leqslant U \leqslant \sqrt{u}\} \\ =& F_U(\sqrt{u}) - F_U(-\sqrt{u}) \end{aligned}$$

所以 U^2 的分布函数为:

$$F_{U^2}(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \sqrt{u} & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 1 & u < 1 \end{cases}$$

故 U^2 的密度函数为:

$$f_{U^2}(u) = \frac{d}{du} F_{U^2}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

P49 Q64

当 $a \geqslant 0$ 时，有:

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& \frac{d}{du} F_Y(y) \\ =& \frac{d}{dy} P\{Y \leqslant y\} \\ =& \frac{d}{dy} P\{aX + b \leqslant y\} \\ =& \frac{d}{dy} P\{X \leqslant \frac{y-b}{a}\} \\ =& \frac{d}{dy} F_X(\frac{y-b}{a}) \\ =& \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) \end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时，有:

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& \frac{d}{du} F_Y(y) \\ =& \frac{d}{dy} P\{Y \leqslant y\} \\ =& \frac{d}{dy} P\{aX + b \leqslant y\} \\ =& \frac{d}{dy} P\{X \geqslant \frac{y-b}{a}\} \\ =& \frac{d}{dy} (1 - P\{X \leqslant \frac{y-b}{a}\}) \\ =& -\frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) \end{aligned}$$

综上可知:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a})$$

补充 1

可知 $P\{Y=0\}=P\{X=0\}$，$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=-1\}$，$P\{Y=4\}=P\{X=2\}+P\{X=-2\}$。

故 $Y=X^2$ 的频率函数为：

$$P\{Y=y\}=\begin{cases}\frac{1}{5} & y=0\\ \frac{7}{30} & y=1\\ \frac{17}{30} & y=4\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

补充 2

已知随机变量 $Y=\sin X$，可知：

$$\begin{aligned}F_Y(y)=&P\{Y\leqslant y\}\\ =&P\{\sin X\leqslant y\}\\ =&P\{X\leqslant \arcsin y\}+P\{X\geqslant \pi-\arcsin y\}\\ =&F_X(\arcsin y)+1-F_X(\pi-\arcsin y)\end{aligned}$$

又已知 X 的密度函数为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\int_0^x \frac{2x}{\pi^2}dx=\frac{x^2}{\pi^2}$，所以 X 的分布函数为：

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \frac{x^2}{\pi^2} & 0<x<\pi\\ 1 & x\geqslant \pi\end{cases}$$

故 Y 的分布函数为：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\leqslant 0\\ \frac{2\arcsin y}{\pi} & 0<y\leqslant 1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

故 Y 的密度函数为：

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & 0<y\leqslant 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

补充 3

可知:

$$\begin{aligned}
P\{Y=1\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=2k\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{k} \\
&= \frac{1}{3} \\
P\{Y=-1\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=2k-1\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2k-1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

故 Y 的分布律为:

Y	1	-1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

补充 4

已知 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，随机变量 $Y=e^{2X}$，可知:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\
&= P\{e^{2X} \leqslant y\} \\
&= P\{2X \leqslant \ln y\} \\
&= P\{X \leqslant \frac{\ln y}{2}\}
\end{aligned}$$

所以 Y 的分布函数为:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leqslant e^2 \\ \frac{\ln y - 2}{2} & e^2 < y < e^4 \\ 1 & y \geqslant e^4 \end{cases}$$

故 Y 的密度函数为:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & e^2 < y < e^4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$