概率统计
总复习

各章要点

第一章

1. 概率性质　古典概率
2. 条件概率
   - 乘法公式
   - 全、贝公式
3. 事件独立性

第二章

1. 分布律分布函数定义性质
2. 七个常用分布
3. 随机变量的函数的分布

第三章

1.联合分布律 分布函数定义性质

2. 边缘分布 条件分布

3. 随机变量的独立性

4. 随机变量的函数的分布

第四章

1. 期望 方差定义 性质

2. 相关系数 相关性

3. 期望的应用

4.大数定律 中心极限定理

切贝雪夫不等式

第一章

- 古典概率及概率的基本性质
- 条件概率
- 乘法公式 全概率公式 贝叶斯公式
- 事件的独立性

概率的定义

Ω 是随机试验 E 的样本空间，如果对每个随机事件 A 定义一个实数 $\mathrm{P}(A)$，满足：

(1) (非负性) 对任意事件 A，有 $\mathrm{P}(A) \geq 0$；

(2) (规范性) 对必然事件 Ω，有 $\mathrm{P}(\Omega) = 1$；

(3) (无穷可加性) 对任意两两不相容的随机事件 A_1，A_2，$\cdots$，都有：

$$\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \cdots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots$$

这个函数 $\mathrm{P}(A)$ 就称为随机事件 A 的**概率**。

概率的基本性质

(1) $P(\phi) = 0$；

(2) 若A_1，$\cdots$，A_n两两互斥，则有：

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n);$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ （加法公式）

推论

(5) 若$A \subset B$，则有$P(A) \leq P(B)$

(6) $P(A) \leq 1$

三个随机事件的加法公式

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(AC) + \mathrm{P}(ABC)$$

n个随机事件的加法公式

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\boldsymbol{A}_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{P}(\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{P}(\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{A}_k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_n)$$

古典概率的计算公式

$$P(A) = \frac{\text{随机事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间} \Omega \text{ 包含的样本点总数}}$$

几何概率的计算公式

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

其中m(.) 表示集合的度量(长度、面积或体积)

若某批产品中有a件次品，b件好品. 在以下条件下分别抽取n件产品，求恰有k件次品(k≤a)的概率.

(1)不放回抽取；(2)有放回抽取.

(1) 不放回抽取, 取到k件次品的概率是 $P_1 = \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$

此式也叫作超几何分布的概率公式

(2) 有放回抽取，取到k件次品的概率是

$$P_2 = \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}$$

此式也叫作二项分布的概率公式

条件概率的定义

A、B 是两个随机事件，如果 $\mathrm{P}(A) > 0$，则定义：

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$$

是随机事件 A 发生的条件下随机事件 B 发生的条件概率.

条件概率的性质

(1) 非负性: $\mathrm{P}(B|A) \geq 0$;

(2) 规范性: $\mathrm{P}(\Omega|A)=1$;

(3) 可列可加性: 对于无穷个两两互斥的事件 $B_1, B_2, \ldots$

$$\mathrm{P}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots|A)=\mathrm{P}(B_1|A)+\mathrm{P}(B_2|A)+\ldots$$

乘法公式

如果 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

如果 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$

一般的乘法公式

A_1， A_2， …， A_n 是任意 n 个随机事件，并且 $P(A_1A_2\ldots A_n)>0$，则有：

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=$$
$$P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1A_2)\times\ldots\times$$
$$P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2})\times P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

设试验E的样本空间为Ω, A为E的事件, P(A)>0.

B_1，B_2…，B_n 是Ω的一个划分，且$P(B_i)>0$, i=1,2,…n.

全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

贝叶斯(Bayes)公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)}$$

A、B 是两个随机事件，如果满足：

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称随机事件 A 与 B 相互独立。

事件独立的另一种理解：

$$P(B|A) = P(B)$$

若事件A, B相互独立，则

$$A与\overline{B},\quad \overline{A}与B,\quad \overline{A}与\overline{B},$$

也相互独立.

- 如果三个事件**A, B, C**满足

$$P(AB)=P(A)P(B);$$

$$P(AC)=P(A)P(C);$$

$$P(BC)=P(B)P(C),$$

则称**A, B, C**两两独立.

又若满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称**A,B,C**相互独立.

- 一般地，设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为n个事件, 如果对任意的$1<k\le n$, 以及任意的

$$1\le i_1 \le i_2 \le\ldots \le i_k \le n,$$

都有

$$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik}),$$

则称$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立.

当P (A发生) = p， P (A不发生) = $q = 1 - p$ ，
每次试验的结果要么 A发生，要么 A不发生。
独立重复进行 n 次试验，其中 A恰好发生 k 次
的概率是：

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

此概率称为二项概率.

第二章

- 离散型随机变量及分布律
- 连续型随机变量及密度函数
- 分布函数
- **随机变量函数的分布**

随机变量的基本分类

1. **离散型随机变量**：所有可能的取值是有限、或可数无穷多个；

例如古典概率问题所涉及的随机变量。

2. **非离散型随机变量**：所有可能的取值是不可数无穷多个。

连续型随机变量：即在某个连续区间或整个实数轴上取值。

例如几何概率问题所涉及的随机变量。

常见的离散型随机变量

1. 0-1变量及其分布 (也称两点分布或Bernoulli 分布)

分布律为： $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=q=1-p$

2. 二项变量及其分布

X 全部可能取值是有限整数 $0, 1, \dots, n$；
分布律为：

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

这里参数 $0 < p < 1$, $q = 1-p$.

称为参数为n,p的二项分布,记作： $X \sim B(n,p)$

两点分布就是 $n=1$ 时的二项分布

3. Poisson (泊松) 变量及其分布

可能取值是所有非负整数 0，1，2，…；分布律为：

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k\geq 0$$

这里泊松分布的参数 $\lambda>0$。

记为: $X \sim P(\lambda)$

4. 超几何变量及其分布

有N件产品, 其中M件次品, 从中抽取n件, 则抽取出的次品数X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \qquad k=l_1,l_1+1,\cdots,l_2.$$

其中l_1=max{0, n-(N-M)}, l_2=min{n, M}.

5. 几何变量及其分布

独立重复进行Bernoulli试验，直到事件A(这里假设 $P(A)=p$)首次发生为止所进行的试验次数X的分布率为：

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\dots$$

称为参数为p的几何分布，记X~G(p).

X称为几何变量.

几何分布具有无记忆性

$$P\{\text{m次后的第k次A发生} \mid \text{前m次A未发生}\}$$

$$=\frac{(1-p)^{m+k-1}p}{(1-p)^{m}}=(1-p)^{k-1}p$$

引申

(1) 关于二项分布的一个性质：

P{X=x}在x=[(n+1)p]处达到最大值.

其中[y]表示不超过y的最大整数.

使P{X=x}达到最大值的二项变量的取值x*称为最可能数.

注：当(n+1)p为整数时，P{X=x} 在x=(n+1)p-1与x=(n+1)p两处同时达到最大值.

(2) 几个分布之间的关系：

超几何分布 $\xrightarrow{\text{总量很大，抽取量很小}}$ 二项分布 $\xrightarrow{np \to \lambda}$ 泊松分布

常见连续型随机变量

1 .均匀变量及其分布， $X \sim U(a,b)$

概率密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2. 指数变量及其分布, $X \sim E(\lambda)$

概率密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

指数分布的无记忆性

$$P\{X>m+t\mid X>m\}=\frac{P\{X>m+t,X>m\}}{P\{X>m\}}$$

$$=\frac{P\{X>m+t\}}{P\{X>m\}}=\frac{e^{-\lambda(m+t)}}{e^{-\lambda m}}=e^{-\lambda t}=P\{X>t\}$$

服从指数分布的元件对已使用过的m小时没有记忆。

3. 正态变量及其分布，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

概率密度函数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

标准正态变量，$X \sim N(0,1)$

参数 $\mu = 0$，$\sigma = 1$ 的正态分布

标准正态变量的密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$\Phi(x)$的函数值可查表得到。有关性质：

(1) $\Phi(0)=0.5$

(2) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

(3) $\Phi(x)$是x的单调增函数

(4) $\Phi(-\infty)=0$， $\Phi(+\infty)=1$

正态分布的“3σ”原则

对任意参数的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，正态变量X的取值几乎都落在区间$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 内.

设$X \sim N(0,1)$，对任意给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 称使

$$P\{X>z_\alpha\}=\alpha$$

成立的z_α为标准正态分布N(0,1)的**上α分位数**.

易见$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$，故可查表求得z_α

分布函数

对任意实数 x，根据概率生成的函数

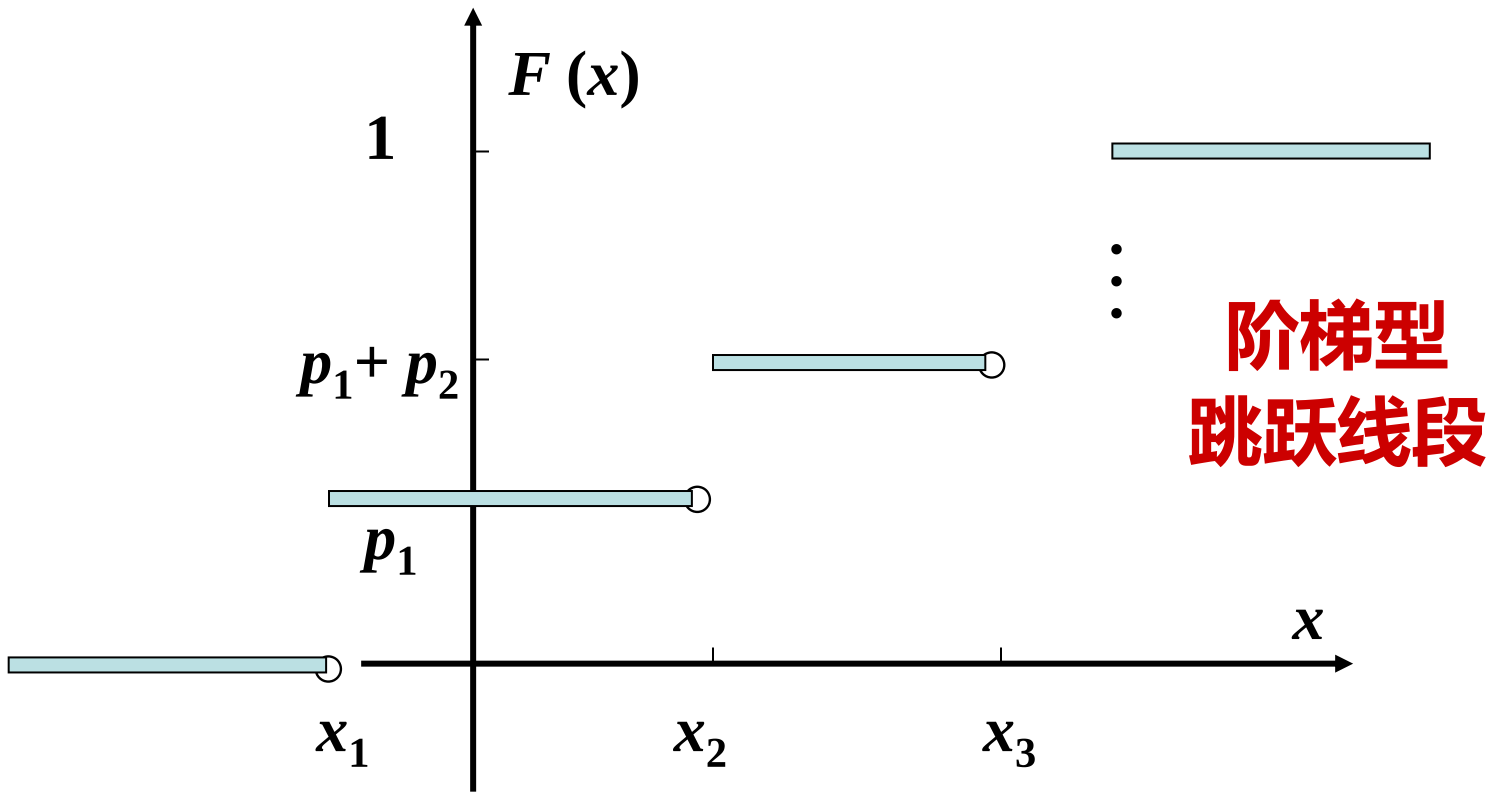
$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为是 X 的分布函数。

主要性质

1. **非负有界**　$0 \le F(x) \le 1$；
2. **单调性**　当 $x_1 < x_2$，则 $F(x_1) \le F(x_2)$；
3. **极限性质**　$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$，
   $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$；
4. **右连续性**　$F(a) = F(a+0)$

离散随机变量分布函数的图形



离散随机变量分布函数与分布率的关系

$$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$$

连续型随机变量分布函数与密度函数的关系

密度函数是分布函数的一阶导数，

分布函数是密度函数的一个特殊原函数。

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \iff f(x) = \partial F(x) / \partial x$$

连续型随机变量的函数分布的求法

若已知变量X的密度函数$f_X(x)$, Y=g(X), 则

第一步: 求Y的分布函数 $F_Y(y)$;

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \int_{g(x) \le y} f_X(x)dx$$

第二步: 由$F_Y(y)$关于y求导，得到变量Y的密度函数$f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

第三章

- 二维离散型随机变量及分布律
- 二维连续型随机变量及密度函数
- 分布函数
- 随机变量的独立性
- 随机变量函数的分布

二维离散型随机变量的边缘分布律

(1) X 的边缘分布律 $\{p_{i\cdot},\ i \geq 1\}$

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j\geq 1} p_{ij}$$

(2) Y 的边缘分布律 $\{p_{\cdot j},\ j \geq 1\}$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i\geq 1} p_{ij}$$

只需把联合分布律表格中的每一行、每一列分别相加就得到边缘分布律。

二维离散型随机变量的条件分布律

如果$p_{\bullet j} > 0$，则定义

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

为在$Y=y_j$条件下X的条件分布律

同理, 如果$p_{i\cdot}>0$, 则定义

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

为在$X=x_i$条件下Y的条件分布律

二维连续随机向量的边缘密度

(1) X 的边缘密度函数 $f_X(x)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$

(2) Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

二维连续随机向量的条件密度函数

如果对某个固定实数 x 有 $f_X(x)>0$，则定义

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$，（对于所有实数 y）

是 Y 关于随机事件($X = x$) 的条件密度函数

独立性的判断

1. 离散随机变量的独立

联合分布律等于边缘分布律的乘积：

$p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$ 对全部 i、j 成立

2. 连续随机变量的独立

联合密度函数等于边缘密度函数的乘积：

$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ 对全部 x、y 成立

特例　　对于二维正态分布

$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

X、Y **相互独立的充分必要条件是** $\rho = 0$。

连续随机变量和Z=X+Y的密度公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy$$

第四章

- 期望
- 方差
- 协方差，相关系数
- 矩
- 中心极限定理与大数定律

1. 离散型随机变量的数学期望

如果X 的分布律 P{ $X=x_i$ }= p_i ,$i=1,2,\ldots$, 满足

$$\sum_i |x_i p_i| < \infty$$

则 X 的**数学期望**定义为：$$E(X)=\sum_i x_i p_i$$

2. 连续型随机变量的数学期望

如果X 的密度函数 $f(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,dx < +\infty$$

则连续随机变量 X 的**数学期望**是积分：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

随机变量的函数的期望 (一维离散型)

如果X 的分布律 P { $X=x_i$ }= p_i ,i=1,2,…,

$Y=g(X)$, g为连续函数，若 $\sum_i |g(x_i)p_i| < \infty$

则有

$$E(Y) = \sum_i g(x_i)p_i$$

随机变量的函数的期望 (一维连续型)

如果X 的密度函数为 $f(x)$， Y=g(X), g为连续函数，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)f(x)|dx < \infty$$

则有

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

方差的定义

如果 $(X-E(X))^2$ 的数学期望存在，

即 $E(X-E(X))^2 < +\infty$ ，

则称

$$D(X)=E(X-E(X))^2$$

为X的方差，有时也记为Var(X)。

常用计算公式： $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

常用变量的数学期望与方差

1. X服从0-1分布，$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
2. $X\sim B(n,p)$，$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$
3. $X\sim P(\lambda)$，$E(X)=\lambda$	$D(X)=\lambda$

4. $X\sim U(a,b)$，$E(X)=(a+b)/2$	$D(X)=(b-a)^2/12$
5. $X\sim E(\lambda)$，$E(X)=1/\lambda$	$D(X)=1/\lambda^2$
6. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X)=\mu$	$D(X)=\sigma^2$

X、Y之间的协方差定义

$$Cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

协方差的计算公式

$$Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY)$$

设(X,Y)是二维随机变量，当D(X)>0, D(Y)>0时，称

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为X与Y的相关系数.

协方差矩阵

设$(X_1, X_2,\dots, X_n)$是n维随机变量, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=c_{ij}$, $i,j=1,2,\dots n$,则矩阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

称为$(X_1, X_2,\dots, X_n)$的协方差矩阵.

协方差矩阵为对称矩阵

对于n元正态变量($X_1, X_2, \dots X_n$)，

若令

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

其中C为协方差矩阵

则n元正态变量($X_1, X_2, \dots X_n$)的概率密度函数可写为

$$f(x_1, x_2 \cdots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(|C|)^{1/2}} e^{\frac{-1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

相关系数的性质

(1) $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$;

(2) $|\rho(X,Y)|\le 1$;

(3) $|\rho(X,Y)|=1$的充分必要条件是:

存在常数a,b, 使 $P\{Y=aX+b\}=1$, 且

当$a>0$时 $\rho(X,Y)=1$;

当$a<0$时$\rho(X,Y)=-1$.

相关系数的意义

相关系数$\rho(X,Y)$用来度量随机变量X, Y之间的线性关系紧密程度

$\|\rho(X,Y)\|=1$,	X与Y(以概率1）成立线性关系
$\rho(X,Y)=1$,	X与Y 正线性相关
$\rho(X,Y)=-1$,	X与Y 负线性相关
$\rho(X,Y)=0$,	X与Y不(线性)相关
$0<\rho(X,Y)<1$,	
$\|\rho(X,Y)\|$接近1	X与Y的线性关系比较紧密
$\|\rho(X,Y)\|$接近0	X与Y的线性关系比较弱

$E(X^k)$：称为X的k阶原点矩

$E[(X-E(X))^k]$：称为X的k阶中心矩

$E(X^kY^l)$：称为(X,Y)的(k, l)阶混合原点矩

$E[(X-E(X))^k (Y-E(Y))^l]$：称为(X,Y)的(k, l)阶混合中心矩

契比雪夫(Chebyshev)不等式

假设 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，则对于任意正实数 ε， 有:

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2};$$

契比雪夫(Chybeshev)大数定理

设随机变量X_1, X_2,…,X_n, 相互独立，且具有相同的数学期望($E(X_i)=\mu$, i=1,2,…n)和方差($D(X_i)=\sigma$, i=1,2,…n)，若令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

契比雪夫大数定理的推论: 伯努利大数定理

设n_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率，则对任意正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

契比雪夫大数定理的推论: 辛钦大数定理

设随机变量$X_1, X_2,\ldots,X_n$, 相互独立，服从同一分布，且具有相同的数学期望($E(X_i)=\mu$, $i=1,2,\ldots n$)，则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

列维-林德伯格(Levy-Lindberg)定理
(独立同分布的中心极限定理)

设随机变量$X_1, X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，服从同一分布, 具有相同的数学期望和方差: $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2>0$, $i=1,2,\ldots n$，则对于任意x, 总有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

中心极限定理的推论

棣莫佛-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量η_n~B(n,p), i=1,2,…,n. 则对任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$