Probability and Statistics

Southern University of Science and Technology

吴梦轩

12212006

Section 3.4

吴梦轩

P77 Q19

由于 T_1 和 T_2 是独立的且服从参数分别为 α 和 β 的指数分布，则其联合密度 $f(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2) = \alpha\beta e^{-\alpha t_1}e^{-\beta t_2}$。

(a)

$$
\begin{aligned}
P\{T_1 > T_2\} &= \int_0^\infty \int_0^{t_1} \alpha\beta e^{-\alpha t_1}e^{-\beta t_2}\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1} \int_0^{t_1} \beta e^{-\beta t_2}\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1}(-e^{-\beta t_2})\Big|_0^{t_1}\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1}(1 - e^{-\beta t_1})\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1}dt_1 - \int_0^\infty \alpha e^{-(\alpha+\beta)t_1}\mathrm{d}t_1 \\
&= \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\beta}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P\{T_1 > 2T_2\} &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{t_1}{2}} \alpha\beta e^{-\alpha t_1} e^{-\beta t_2} \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1} \int_0^{\frac{t_1}{2}} \beta e^{-\beta t_2} \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1} (-e^{-\beta t_2}) \Big|_0^{\frac{t_1}{2}} \mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1} (1 - e^{-\frac{\beta t_1}{2}}) \mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t_1} dt_1 - \int_0^\infty \alpha e^{-(\alpha + \frac{\beta}{2}) t_1} \mathrm{d}t_1 \\
&= \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha + \frac{\beta}{2}} \\
&= 1 - \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta} \\
&= \frac{\beta}{2\alpha + \beta}
\end{aligned}
$$

补充 1

(1)

当先后有放回地取两球时，X 表示第一次取到白球的数量，Y 表示第二次取到白球的数量。则易知 $P\{X=0\}=\frac{3}{5}$，$P\{X=1\}=\frac{2}{5}$，$P\{Y=0\}=\frac{3}{5}$，$P\{Y=1\}=\frac{2}{5}$。其联合频率函数及边缘频率函数如下：

X \ Y	0	1	$f_X(x)$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

易知 X 和 Y 独立。

(2)

当先后无放回地取两球时，X 表示第一次取到白球的数量，Y 表示第二次取到白球的数量。则有 $P\{X=0,Y=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$，$P\{X=0,Y=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$，$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$，$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$。其联合频率函数及边缘频率函数如下：

$X \backslash Y$	0	1	$f_X(x)$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

易知 X 和 Y 不独立，因为 $P\{X=0,Y=0\}=\frac{3}{10}\neq\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$。

补充 2

(1)

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} c\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= c\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= c\pi R^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

所以 $c=\frac{1}{\pi R^2}$。

(2)

其边缘密度函数为：

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2} \\ f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\end{aligned}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2} & -R\leqslant x\leqslant R \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2} & -R\leqslant y\leqslant R \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

(3)

变量 X 与 Y 不独立，因为 $f_X(x)f_Y(y) = \frac{4}{\pi^2 R^4}(R^2 - x^2)(R^2 - y^2) \neq \frac{1}{\pi R^2} = f(x, y)$。