第一章 概率

§1 引言

§2 **样本空间** (sample space)

§3 概率测度

§4 概率计算：计数方法

§5 条件概率

§6 独立性

§2 样本空间

随机试验与样本空间

试验 科学实验
或者对某一事物的某一特征进行观察

例 E_1: 抛一枚硬币,观察正面H,反面T 出现的情况

E_2: 将一枚硬币连抛三次,观察正面 H 出现的次数

E_3: 掷一颗骰子，观察出现的点数

E_4: 从一批产品中抽取n件, 观察次品出现的数量

E_5: 对某厂生产的电子产品进行寿命测试

E_6: 观察某地区的日平均气温和日平均降水量

问 这些试验有什么特点?

试验前无法预知结果

§2 样本空间

随机试验与样本空间

试验 科学实验

或者对某一事物的某一特征进行观察

试验的特征

1. 试验可以在相同的条件下重复进行
2. 试验的结果可能不止一个，但试验前知道所有可能的全部结果
3. 在每次试验前无法确定会出现哪个结果

具有上述特征的试验称为 **随机试验**，简称 **试验**.

例 E：掷一颗骰子，观察出现的点数.

分析 E的结果

- “1点”、“2点”、…、“6点”
- 出现的点数不超过3
- 至少出现4点

简单结果(不可分)
也称“基本结果”

复合结果(可分解)

§2 样本空间

随机试验与样本空间

试验 $\begin{cases} \text{基本结果（不可分）} \\ \text{复合结果（可分解）} \end{cases}$ 称为 样本点、基本事件

定义 称试验的全部样本点构成的集合为**样本空间**.

例 掷一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

离散样本空间

例 抛两枚硬币，观察正、反两面出现的情况，其样本空间为

$$\Omega = \{(\text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{正})\}$$

具体元素的非抽象集合

例 记录深圳地区的日平均气温，其样本空间为

抽象的点集

$$\Omega = (-60, 60)$$

连续样本空间

例 飞机对位置为 (x_0, y_0) 的目标投掷一枚炸弹，观察其弹着点 (x, y)，其样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < +\infty\}$$

§2 样本空间

随机试验与样本空间

试验 { 基本结果（不可分） —— 称为 样本点、基本事件
　　 { 复合结果（可分解） —— 称为 随机事件 简称 事件

事件

从集合看
事件是样本空间的子集

从试验看
事件是基本事件的复合

随机事件

定义 满足一定条件的样本点的集合称为**随机事件**，简称为**事件**. 事件用大写字母 A、B、C、… 表示.

例 掷一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

事件 A:“至少出现3点”，则 $A = \{3, 4, 5, 6\} \subset \Omega$

B:“出现最小或最大的点”，则 $B = \{1, 6\}$

C:“出现较大的点”，则 $C = ?$

模糊数学研究的内容

§2 样本空间

几个特殊事件

基本事件 一个样本点构成的单点集 $\{\omega\}$

必然事件 每次试验都总发生的事件 $\Omega \subset \Omega$

不可能事件 每次试验都不会发生的事件 Φ (空集 $\Phi \subset \Omega$)

小结:随机试验的数学描述

试验	基本结果	全体基本事件	事件 A
	↕	↕	↕
	样本点 ω	样本空间 Ω	子集 A

事件 A 发生

试验时 A 中样本点出现

记

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \Omega, A\text{是事件}\}$$

称 $\mathcal{A}$ 为试验的事件域,即试验产生的所有事件为元素构成的集合.

事件间的关系与运算

设 $A, B, A_k (k=1,2,\cdots)$ 为事件

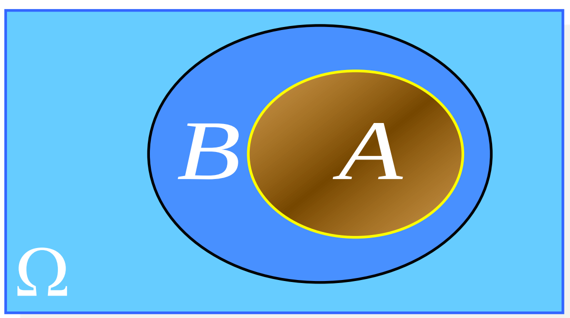
① $A \subset B$ ⟺ A 发生必导致 B 发生

特别有 $A=B$ ⟺ $A \subset B, B \subset A$

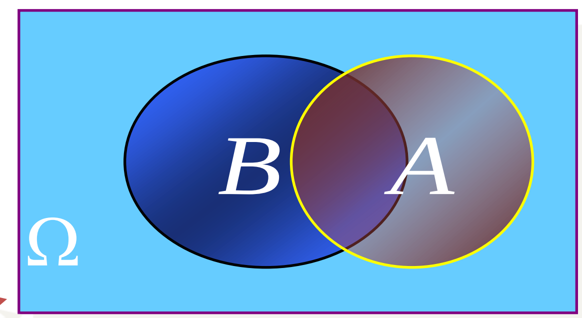
② $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A .or. \omega \in B\}$ ⟺ A 发生或 B 发生

即 A, B 至少有一个发生，称为事件 A, B 的**和**.

$A \subset B$



$A \cup B$



从集合和事件两方面来理解

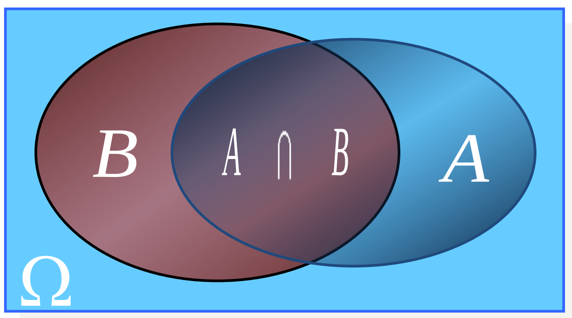
③ $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A,\omega\in B\}\longleftrightarrow A,B$ 同时发生

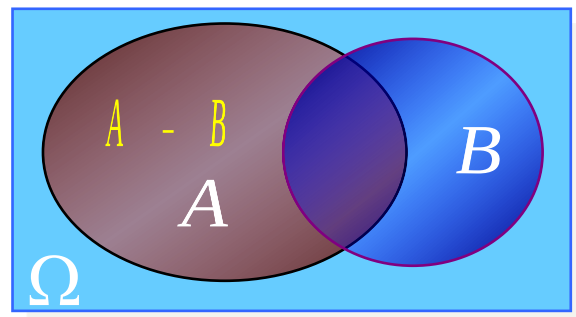
称为事件 A,B 的**积**.

类似地可定义 n 个事件及可列个事件的积

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\omega\mid\omega\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\mid\omega\in A_i,i=1,2,\cdots\}$$

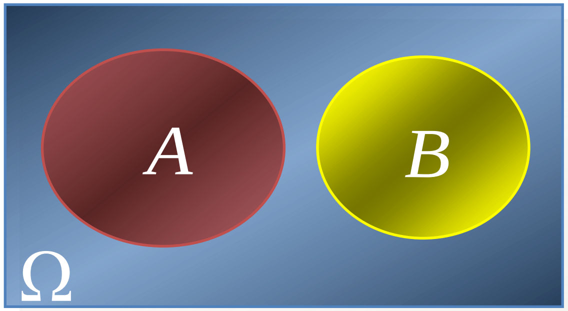




④ $A-B=\{\omega\mid\omega\in A,\omega\notin B\}\longleftrightarrow A$ 发生 B 不发生

称为事件 A,B 的**差**. 若 $A\supset B$, 则称 $A-B$ 为**真差**.

⑤ 若$A \cap B = \Phi$，则称A, B**互不相容(互斥)**.



A, B不能同时发生

⑥ 若$A \cup B = \Omega$且$A \cap B = \Phi$，则称A, B互为**逆事件**

或称为**对立事件**，记为

$$A = \Omega - B = \overline{B} = B^c$$

$$B = \Omega - A = \overline{A} = A^c$$

§2 样本空间

符号	集合含义	事件含义
Ω	全集	样本空间，必然事件
Φ	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	集合的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	一个集合	一个事件
$A \subset B$	A的元素在B中	A发生导致B发生
$A=B$	集合A与B相等	事件A与B相等
$A \cup B$	A与B的所有元素	A与B至少有一个发生
$A \cap B$	A与B的共同元素	A与B同时发生
$\bar{A}$ (或A^c)	A的补集	A的对立事件
$A-B$	在A中而不在B中的元素	A发生而B不发生
$A \cap B=\phi$	A与B无公共元素	A与B互斥

事件的运算定律

交换律 $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

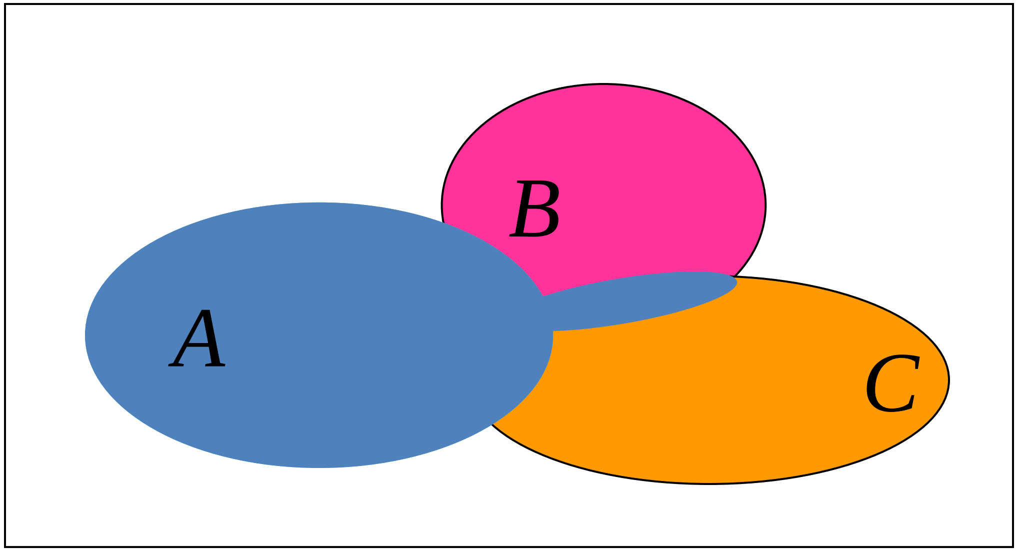
分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根（De Morgan）律

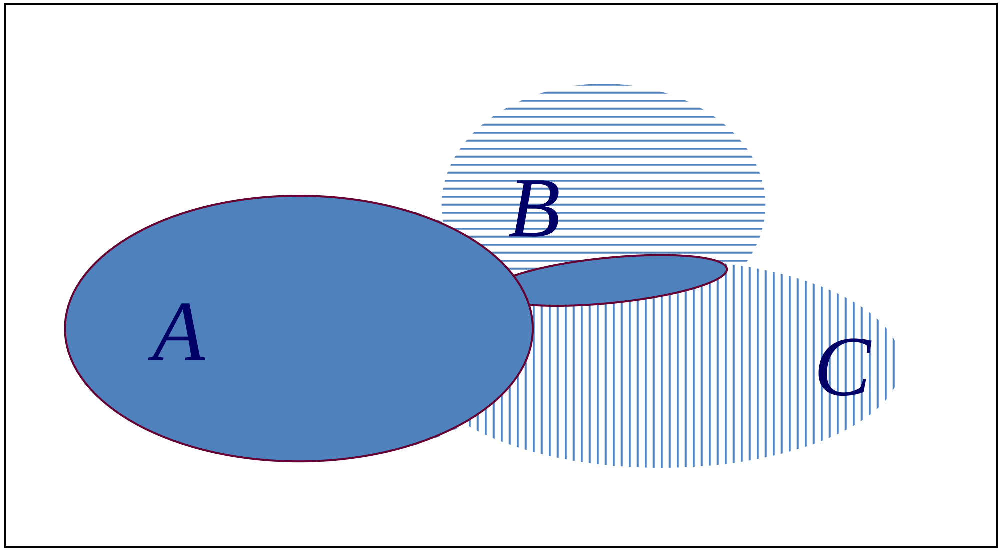
$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}B_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\bar{B}_k,\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n}B_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\bar{B}_k$$



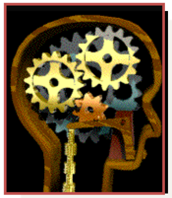
分配律
图 示

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$



注：可列（countable）

- **可列集：**
  - **是指一个无穷集S，其元素可与自然数形成一一对应，因此可表为$S=\{s_1,s_2,\ldots\}$**
- **至多可列：**
  - **指可列或有限**
- **可以证明：**
  - **可列是“最小的”无穷，即任何一个无穷集合均含有可列子集**



课后作业

P20： 5， 6

补充题：

1. 设随机事件A,B满足条件$AB=\bar{A}\bar{B}$. 试求$A\cup B$.

2. 试把事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件之并.

END