Mémoire

Cyprien Ciotta

dernière mise à jour : 24 juillet 2024

1 Préambule

On regroupe ici les différents éléments nécessaires à l'élaboration du mémoire. De ce bric-à-brac naitra un document bien ordonné. Dans tout ce document, n et k désigne par défaut chacun un entier naturel non nul.

2 Formes différentielles

Le but de cette section est de se familiariser avec les formes différentielles, qui sont une notion de calcul différentiel extérieur. La cadre formel donné est minimal car on souhaite parvenir à une manipulation effective rapidement.

2.1 Un peu de géométrie différentielle

2.1.1 Champs de vecteurs et espaces tangents

Définition 1 (Espace tangent en un point)**.** Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On appelle espace tangent l'ensemble suivant

$$T_p\mathbb{R}^n = \{X_p \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 \mid \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n \text{ lisse} \mid \gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = X_p\}$$

Définition 2 (Espace tangent)**.**

Propriété 1. L'espace tangent en un point de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ lui-même.

Remarque 1. La définition précédente est donc très adaptée au cas de $\mathbb{R}^n$. Mais il est d'usage courant de traiter de champs de vecteurs sur une sphère par exemple. La définition de l'espace tangent est en fait indépendante du système de coordonnées comme le montre ce qui suit. Culture : Ce sont les cartes qui donnent les coordonnées.

Notation 1. On note $\mathscr{V}(a)$ un des voisinages du point a, choisi arbitrairement.

Définition 3 (chemins équivalents)**.** Soit $\gamma_1 : \mathscr{V}(0) \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : \mathscr{V}(0) \to \mathbb{R}^n$ deux chemins. On dit que γ_1 et γ_2 sont équivalents lorsque

$$||\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|| = o(t) \text{ quand } t \to 0$$

Définition 4 (Définition alternative de l'espace tangent)**.** L'espace tangent peut être vu comme le quotient des chemins par la relation d'équivalence introduite dans la définition précédente.

Définition 5 (fibré tangent)**.** C'est :

$$T\mathbb{R}^n = \{(p, X_p)\}_{p \in \mathbb{R}^n, X_p \in T_p\mathbb{R}^n}$$

Définition 6 (Champ de vecteurs)**.** Un champ de vecteurs X est une application :

$$X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$$

Pour simplifier les énoncés qui sont identiques en dimension supérieure, nous nous plaçons, comme cela se fait souvent pour éviter le recours aux indices, dans $\mathbb{R}^3$, de manière à noter les variables x, y et z comme usuellement.

Notation 2. On note $(\frac{\partial}{\partial x})_p$ la courbe lisse $x(t) = p + t(1, 0, 0)$, $(\frac{\partial}{\partial y})_p$ la courbe lisse $x(t) = p + t(0, 1, 0)$, $(\frac{\partial}{\partial z})_p$ la courbe lisse $z(t) = p + t(0, 0, 1)$.

Exemple 1 (Champ de vecteurs remarquables)**.**

$$\frac{\partial}{\partial x} : p \mapsto (p, (\frac{\partial}{\partial x})_p) \ , \ \frac{\partial}{\partial y} : p \mapsto (p, (\frac{\partial}{\partial y})_p) \ , \ \frac{\partial}{\partial z} : p \mapsto (p, (\frac{\partial}{\partial y})_p)$$

sont d'importance fondamentale puisqu'ils forment une base comme l'indique la proposition suivante.

La proposition suivante indique que ces opérateurs différentiels permettent essentiellement de décrire les champs de vecteurs au sens où ils en forment une base.

Proposition 1. Soit X un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe pour i allant de 1 à 3 des fonctions des coordonnées $a_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que

$$X = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

c'est-à-dire

$$\forall p \in \mathbb{R}^3, X(p) = a_1(p) \frac{\partial}{\partial x}(p) + a_2(p) \frac{\partial}{\partial y}(p) + a_3(p) \frac{\partial}{\partial z}(p)$$

NB parfois c'est cette proposition qui est donnée comme définition, tellement c'est cela qui sert en pratique.

Démonstration 1.

Rappel 1 (Dérivée directionnelle)**.** Avec les notations usuelles, on rappele que la dérivée de f le long du vecteur v prise en a est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)}{t}$$

Définition 7 (Définition alternative)**.**

$$\gamma : f \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t))|_{t=0}$$

Définition 8 (Espace cotangent)**.** On le note $(T\mathbb{R}^3)^*$: c'est tout simplement le dual de l'espace tangent.

Notation 3. cf page 21 par exemple du document pour les notations qui suivent.

Propriété 2 (base)**.** $(dx)_p, (dy)_p, (dz)_p$ forment une base de l'espace cotangent.

Définition 9 (fibré cotangent)**.**

2.1.2 Variété différentielle

Cette notion de variété, assez incontournable, mérite qu'on s'y attarde un petit peu, car dans la suite on l'utilise, même si ce sera de façon plutôt intuitive. La notion de base est la suivante :

Définition 10 (Variété topologique)**.** Une variété topologique est un espace topologique localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2. On exige tellement souvent que l'espace topologique soit séparé que la terminologie variété topologique séparé est presque sous-entendue par celle de variété topologique, ce qu'on se permet de faire dans la suite. D'autre part, la littérature montre que cette définition, assez faible même avec l'ajout de l'aspect séparé, donne lieu à des exemples pathologiques. Cela vaut en particulier pour la définition suivante.

On peut donner plus de structure pour pouvoir faire du calcul différentiel. Cela donne naissance à la notion de variété différentielle.

Définition 11 (Variété différentielle)**.** C'est une variété topologique à laquelle la structure suivante est ajoutée :

1.
2.
3.

Ceci fait de $\mathbb{R}^n$ une variété différentielle. L'intérêt pour nous est que la sphère S^n, le tore T^n sont des variétés différentielles. Enfin, si on exige les fonctions lisses en lieu et place de fonctions différentiables, on parle tout simplement de variétés lisses. Toutes les variétés de la suite sont supposées lisses.

2.2 Formes extérieures

Notation 4 (sur les formes linéaires)**.** On note $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ en vue d'une généralisation. En fait, les formes linéaires sont aussi appelées les 1-formes extérieures.

Notation 5 (formes linéaires coordonnées)**.** On note, pour i compris entre 1 et n, dx_i la 1-forme extérieure qui envoie un vecteur *tangent* de $\mathbb{R}^n$ sur sa i-ième coordonnée.

Remarque 3 (nuance vecteur/vecteur tangent et action des formes différentielles)**.**

Définition 12 (Produit extérieur)**.** On appelle produit extérieur de deux 1-formes extérieures ω_1 et ω_2 l'application suivante :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (u,v) \mapsto \begin{vmatrix} \omega_1(u) & \omega_2(u) \\ \omega_1(v) & \omega_2(v) \end{vmatrix}$$

Remarque 4. Cette application est bilinéaire et antisymétrique.

Définition 13 (2-forme extérieure)**.** On appelle 2-forme extérieure un élément de l'ensemble suivant

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) := \{\omega_1 \wedge \omega_2\}_{\omega_1,\omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)}$$

Remarque 5. Les définitions ont été données pour le cas n=2 mais elle se généralise sans difficulté supplémentaire comme on le pense en dimension supérieure.

Définition 14 (Application $\wedge$)**.** On peut définir plus généralement une application $\wedge$:

$$\wedge : \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n), (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

Propriété 3. Cette application est bilinéaire alternée.

Propriété 4. En particulier,

$$\forall \omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n), \omega \wedge \omega = 0_{\Lambda^2(\mathbb{R}^n)}$$

ce qui simplifie grandement les calculs

Exemple 2. Supposons n=3. On souhaite calculer le produit extérieur de $\omega_1 = 3dx_1 + 5dx_2 + 8dx_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ et $\omega_2 = 7dx_1 \wedge dx_2 + 3dx_2 \wedge dx_3 + 2dx_1 \wedge dx_3 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ On obtient un élément de $\Lambda^3(\mathbb{R}^n)$ qui a donc pour base $(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$. LA coordonnée s'obtient alors avec le calcul suivant $3 \times 3 + 5 \times 2 + 8 \times 7 = 75$. On voit que l'associativité du produit extérieur (couplée à la propriété d'antisymétrie) est cruciale.

Propriété 5 (base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$)**.** Dans l'exemple précédent, les calculs sont faits dans la base

$$(dx_{i_1}, dx_{i_2}, ..., dx_{i_k})_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n}$$

Propriété 6 (dimension)**.**

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$$

Définition 15 (Algèbre extérieure)**.** On appelle algèbre extérieure la somme directe :

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

Propriété 7 (Dimension)**.**

$$\dim \Lambda(\mathbb{R}^n) = 2^n$$

Démonstration 2. Conséquence immédiate du binôme de Newton.

2.3 Manipulation des formes différentielles

Le produit extérieur permet de définir les formes différentielles.

Définition 16 (formes différentielles)**.** On dit que ω est une k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ si

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} f_{i_1 i_2 ... i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

où tous les $f_{i_1 i_2 ... i_k}$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ lisses c'est-à-dire de classe $\mathbb{C}^\infty$.

Notation 6 (Espace des formes différentielles)**.** Un tel ω est dit élément de $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$

Remarque 6. Une k-forme différentielle $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ évaluée en un point $p \in \mathbb{R}^n$ est une k-forme extérieure $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$ sur l'espace tangent.

Remarque 7 (cas k=0)**.** Les 0-formes différentielles sont en fait les fonctions lisses.

Remarque 8 (cas k=1)**.** Les 1-formes différentielles ont une expression maniable :

$$\omega = f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n$$

où là aussi les f_i sont lisses.

Remarque 9 (cas k=2)**.** Nous donnons enfin le cas k=2 car les k supérieurs ne nous occuperont que peu dans la suite, et que c'est à partir de 2 que la notion de produit extérieur devient cruciale. Supposons de plus $n = 3$ pour que l'écriture soit complète mais concise. Alors il existe des fonctions lisses $f_{i,j}$ telles que

$$\omega = f_{1,2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + f_{1,3}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + f_{2,1}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 + f_{2,3}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + f_{3,1}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + f_{3,2}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2$$

Nous avons déjà utilisé la propriété 4 ce qui dispense d'ajouter les $\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i$. Mais on a mieux, la propriété d'antisymétrie raccourcit encore l'expression. Quitte à renommer les fonctions, il reste simplement

$$\omega = f_{1,2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + f_{1,3}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + f_{2,3}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2$$

et on retrouve bien une somme à $\binom{3}{2} = 3$ termes.

Proposition 2. Les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles sont isomorphes de manière non canonique. Voir pour cela la section suivante.

Propriété 8 (Calcul pratique)**.** Si $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ et $\beta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$, alors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha$

Propriété 9.

$$\alpha \in \Omega^{2k+1}(\mathbb{R}^n) \implies \alpha \wedge \alpha = 0$$

Définition 17 (Espace des formes différentielles de degré quelconque)**.** Comme pour la définition 8

$$\Omega(V) = \bigoplus_{k=1}^{n} \Omega^k(V)$$

où V désigne un ouvert d'un certain espace vectoriel.

Définition 18 (dérivée extérieure)**.** On appelle dérivée extérieure l'application **linéaire** $d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $d^2 = 0$
- d coïncide avec la différentielle sur $\Omega^0(\mathbb{R}^n)$
- d vérifie la propriété de **Leibniz généralisée**:

$$\forall \alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \forall \beta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n), \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

Définition 19 (fermée)**.** Une forme différentielle α est dite fermée lorsque

$$\mathrm{d}\alpha = 0$$

Définition 20 (exacte)**.** Une forme différentielle $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est dite exacte lorsque

$$\exists \eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n) \mid \alpha = \mathrm{d}\eta$$

Remarque 10 (Terminologie)**.** On dit que η est une primitive de α. La question de savoir si une forme différentielle admet une primitive est absolument naturelle. C'est à ce titre que le lemme qui va suivre est tout à fait intéressant.

Propriété 10 (Conséquence immédiate)**.** Toute forme différentielle exacte est fermée.

On peut bien sûr se demander si on dispose d'une réciproque. La réponse est comme souvent : oui sous certaines hypothèses. Il suffit de supposer le domaine ouvert et étoilé.

Théorème 1 (Lemme de Poincaré)**.** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, alors toute forme différentielle fermée sur U est exacte.

Démonstration 3.

La propriété fondamentale de commutation permet d'étendre ce résultat à tout ouvert difféomorphe à une partie étoilée.
La notion suivante décrit quelque chose de très intuitif. Cette notion a plus ou moins été appréhendée en analyse complexe.

Définition 21 (homotopie)**.** Deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont *homotope* lorsqu'il existe une application continue $F : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $F|_{X\times\{0\}} = f$ et $F|_{X\times\{1\}} = g$.

Définition 22 (Cohomologie de De Rham)**.** C'est le quotient des formes fermées par les formes exactes.

Proposition 3 (Généralisation du lacet de l'analyse complexe)**.**

Définition 23 (Indice d'un champ de vecteurs)**.**

Théorème

$$\sum_{xptfixechampdevecteur} Ind(x) = \chi(\mathcal{M})$$

et ce quel que soit le champ de vecteur choisi sur la variété ! Attention : point fixe est ici au compris au sens du flot.

2.4 Isomorphisme musical

On suppose que $(E, (\cdot, \cdot))$ est un espace euclidien. Dans ce cas, à tout vecteur $v \in E$ on peut associer une fonction linéaire $v^* \in E^*$ définie par $v^*(x) = (x, v)$.
En fait, l'isomorphisme musical est entre l'espace tangent et l'espace cotangent.
Il est défini si on a un produit scalaire dans chaque espace tangent.
Moralement, les changements de coordonnées se font avec la règle de la chaine pour les champs de vecteurs tandis qu'il s'agit de la différentiation pour ce qui est des formes différentielles.
confusion Lv avec v (operateur differentiel)
On se réfère à la page 187 de Lafontaine

Exemple 3 (Calcul des coordonnées polaires)**.**

$$dx = d(r\cos\theta) = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \arctan(y/x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Rappel 2 (forme quadratique)**.** Le mantra est le suivant : une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2.

Théorème 2. Toute forme quadratique réelle est diagonalisable avec des $1, -1ou0$ sur la diagonale. on note k_+ le nombre de 1, k_- le nombre de -1. Convenant que $k_+ + k_- = n$, le rang et k_+ qu'on appelle la signature, caractérisent la forme quadratique.

Définition 24 (forme quadratique sur $\mathbb{C}$)**.**

Théorème 3. Le même théorème vaut pour les formes quadratiques complexes avec $k_- = 0$.

Définition 25 (métrique)**.**

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

2.5 Métrique Riemannienne

2.6 Quelques autres faits sur les formes différentielles

2.6.1 Généralités

Définition 26 (tiré en arrière)**.** On se donne U et V deux ouverts d'un ev et $f : U \to V$ lisse. Le tiré en arrière de f (pull back) ou image réciproque (terminologie beaucoup trop ambiguë) par f de $\alpha \in \Lambda(V)$ la forme différentielle $f * \alpha$ sur U définie par

$$(f^* a)_x = (T_x f)^\intercal \alpha_{f(x)}$$

$$(f^*\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(f_*(v_1), \ldots, f_*(v_k))$$

Notation 7. Dans toute la suite et sauf mention explicite du contraire, on se munira toujours de U et V deux ouverts d'un ev.

Propriété 11. On se donne f et g lisse de U dans V ainsi que α et β des formes différentielles de degré quelconque.

1. $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$
2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Propriété 12 (Propriété fondamentale)**.** La différentielle et le tiré en arrière (l'image réciproque) commutent. Si $\phi : U \to V$ est une fonction lisse entre ouverts d'un ev,

$$\forall \alpha \in \Omega(V), \phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha)$$

Propriété 13 (Image réciproque en pratique)**.** Soit $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_p}$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$ avec U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$(f^*\alpha).x = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(f(x)) \mathrm{d}f_{i_1} \ldots \mathrm{d}f_{i_p}$$

Exemple 4 (en dimension 1)**.** $(\exp^* \frac{\mathrm{d}x}{x}).t = \mathrm{d}t$. En effet, la formule donne $(\exp^* \frac{\mathrm{d}x}{x}).t = \frac{1}{x}(\exp t)\mathrm{d}\exp$. Or, $\mathrm{d}\exp t = \exp t dt$ donc $(\exp^* \frac{\mathrm{d}x}{x}).t = \exp(-t)\exp t dt = \mathrm{d}t$

Exemple 5 (en dimension 2)**.** On pose $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $f^*\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ Notons que $\mathrm{d}\cos\theta = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\sin\theta = \cos\theta\mathrm{d}\theta$ ce qui permet d'avoir $\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\sin\theta = 0$. En effet, d'après la définition, $f^*\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(r\cos\theta)\mathrm{d}(r\sin\theta) = (\mathrm{d}r\cos\theta + r\mathrm{d}\cos\theta)(\mathrm{d}r\sin\theta + r\mathrm{d}\sin\theta)$ En remarquant en outre que $\mathrm{d}r\mathrm{d}r = 0$, il ne reste que deux termes : $f^*\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}r\cos\theta r\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\sin\theta$ Il était important de bien ordonner l'apparition des facteurs dans les termes du développement, puisqu'au prix de l'anticommutation des formes différentielles de degré 1, il vient, $f^*\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\cos^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + r\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. La fameuse identité trigonométrique donne la formule escomptée.

2.6.2 exponentielle d'une 2-forme différentielle

Donnons enfin une notion qui semble un peu plus exotique : celle d'exponentielle de formes différentielles. Cette notion est définie exclusivement pour les 2-formes différentielles. Soit donc ω une telle forme. Dans ce cas précis, les matrices deviennent un objet pertinent pour encoder une 2-forme différentielle. Pour simplifier, on commence par les matrices $(2,2)$. On note alors

$$\omega = a_{11}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 + a_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_2 + a_{21}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_1 + a_{22}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2$$

Définition 27 (2-forme différentielle associée à une matrice)**.** On appelle $A = (a_{i,j})$ la matrice associée à $\alpha = \sum a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_j$.

Pour notre ω, nous avons comme nous voudrions l'attendre $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Lemme 1.

$$\omega^3 = 0$$

Démonstration 4. En fait, ω^3 est une 6-forme. Mais les briques de base sont au nombre de 4 : $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}y_1$,$\mathrm{d}y_2$. Dans un produit de 5 facteurs, il y aura donc deux facteurs identiques. D'après la propriété 4, un tel produit est nul. C'est a fortiori vrai pour 6 facteurs et cela donne le résultat.

Remarque 11. De manière évidente, $\forall n \geq 3, \omega^n = 0$. Ceci motive la définition qui va suivre.

Définition 28 (exponentielle d'une forme différentielle)**.**

$$e^\omega = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2}$$

Lemme 2.

$$\omega^2 = 2\det(A)$$

Pour étoffer notre compréhension des formes différentielles, nous préférons donner une preuve très textuelle plutôt que calculatoire. On peut aussi mener le calcul de but en blanc, mais au fond la preuve réside véritablement dans la compréhension des simplifications qui s'opèrent dans un calcul a priori fastidieux.

Démonstration 5. En toute généralité, $(\sum_i \mathrm{d}x_i)^2 = 2\sum_{i<j}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$ car $\sum_i \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = 0$ avec la fameuse propriété 4. Cette observation, adaptée à ω, permet de se contenter d'examiner les produits dits croisés.
Mais une seconde observation simplifie la tâche : ω^2 est une 4-forme. Ainsi, $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2$ est le seul terme "croisé" qui reste puisque tout autre facteur ferait intervenir deux fois la même différentielle, ce qui rendrait ce facteur nul. Il ne nous reste plus qu'à "compter" combien de fois ce facteur intervient.
En scrutant ω puis en utilisant la commutativité des fonctions lisses, on trouve $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = 2\det(A)$ pour reliquat de la première formule mentionnée dans la démonstration. Ceci achève la preuve une fois comprise la subtilité concernant les signes.
En effet, le produit $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2$ a été choisi dans cet ordre. Le premier terme correspond exactement à cet ordre. Le deuxième terme correspond cependant à l'ordre $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_1$. En tant que forme de degré 1, il y a simplement anticommutativité. Or, pour parvenir à la forme voulue, nous commuton successivement $\mathrm{d}y_1$ avec $\mathrm{d}x_2$ puis $\mathrm{d}y_2$ pour enfin opérer à la troisième et dernière commutation entre $\mathrm{d}x_2$ et $\mathrm{d}y_2$. C'est ce $(-1)^3$ que porte le deuxième terme. Pour le troisième terme, $-a_{21}a_{12}$ et pour le quatrième, $+a_{22}a_{11}$. Le travail est lidentique avec $\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_2$ et $\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1$ respectivement. Cette fois 3 et 4 commutations respectivement réalisent le produit.

Théorème 4 (génération des mineurs)**.**

$$\exp\left(\sum_{i,j} M^i_j \xi_i \eta^j\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_k}} M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}\eta^{j_k}\cdots\eta^{j_1}$$

2.7 Dérivée de Lie

On se donne pour objectif d'arriver dans cette sous-section à la formule de Cartan. Cette dernière lie la différentielle, le produit intérieur et la dérivée de Lie, deux nouvelles notions définies ci-après. On choisit pour simplifier de perdre la généralité : nous nous intéressons ici à une forme volume $\omega = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 ... \mathrm{d}x_n$ On se munit d'un champ de vecteurs $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Définition 29 (Dérivée de Lie)**.** C'est l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X : & \Omega^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega^p(\mathbb{R}^n) \\ & \alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_t^* \alpha \mid_{t=0} \end{aligned}$$

Exemple 6. Constatons ce que cela donne sur le champ vectoriel le plus simple qu'on puisse imaginer : $X = \partial_i$

On rappelle à toute fin utile la notion au programme de l'UE équation différentielle qu'est le flot d'un champ de vecteurs.

Définition 30 (flot)**.** groupe local à un paramètre associé à X

Remarque 12. La notation reflète la dépendance en X : la terminologie complète est "dérivée de Lie d'un champ de vecteur".

Théorème 5 (Caractérisation de $\mathcal{L}_X$)**.** Les propriétés suivantes caractérisent $\mathcal{L}_X$:

1. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}), \mathcal{L}_X f = \mathrm{d}f(X) = X \centerdot f$
2. $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$
3. $\forall \alpha, \beta \in \Omega \mathcal{U}, \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta)$

Proposition 4 (Divergence via la dérivée de Lie)**.**

$$\mathcal{L}_X(\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n) = \mathrm{div}(X) \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$$

Démonstration 6.

$$\iota_X \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^n (-1)^n X_i \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$\mathcal{L}_X = \mathrm{d}(\iota_X \mathrm{d}x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

Définition 31 (Produit intérieur)**.** Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{U})$. Son produit intérieur est donné par

$$(\iota_X \alpha)_x(v_1, ..., v_{p-1}) = \alpha_x(X_x, v_1, ..., v_{p-1})$$

On convient que le produit intérieur d'une fonction lisse est nulle.

Propriété 14 (Approche alternative du produit intérieur)**.**

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \mathrm{d}x_j = \delta_{i,j}$$

Propriété 15 (antidérivation)**.** On se donne deux formes α, β. en notant l le degré de α,

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge \iota_X(\beta)$$

Il est important de comprendre que l'opérateur d augmente le degré d'une forme alors que ι_X le diminue.

Théorème 6 (Formule de Cartan)**.**

$$\mathcal{L}_X = \mathrm{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathrm{d}$$

3 Intégration des formes différentielles

Le théorème qui suit a un intérêt historique particulier : il porte de nombreux noms. Plus que cela, il est d'usage permanent dans le calcul intégral. Il a aussi des conséquences théoriques (pour l'homologie) que nous n'étudions pas ici. Apprécions déjà l'élégance de la formule qui va suivre.

Théorème de Stokes

Soit X. Soit ω une forme différentielle.

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega$$

Remarque 13. Il y a une distinction entre la mesure $dxdy$ et la forme différentielle $dxdy$ via la valeur absolue.

Exemple 7 (Calcul de $\int_{D(0,1)} x^2ydxdy$)**.**

$$\int_{D(0,1)} x^2y^2dxdy = \int_{D(0,1)} \frac{1}{3}d(x^3y^2dy) = \int_{C(0,1)} \frac{1}{3}x^3y^2dy =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos^3 t\sin^2 td(\sin t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos^4 t\sin^2 tdt = -\frac{1}{192}\int_0^{2\pi}(e^{it}+e^{-it})^4(e^{it}-e^{-it})^2dt =$$
$$= -\frac{1}{192}\int_0^{2\pi}(e^{-6it}+2e^{-4it}-e^{-2it}-4-e^{2it}+2e^{4it}+e^{-6it})dt = \frac{1}{48}.$$

4 Surface de Riemann

Le but de cette section est d'arriver le plus rapidement possible à comprendre les surfaces de Riemann.

Définition 32 (Définition rigoureuse)**.** Une surface de Riemann est une variété différentiable de dimension 1 complexe (ou 2 réelle) munie d'un atlas dont les changements de cartes sont holomorphes.

On s'intéresse aux surfaces de Riemann compacte.

Théorème

Toute surface de Riemann compacte est isomorphe à une courbe algébrique projective lisse.

Définition 33 (sous-variété de $\mathbb{R}^n$)**.** Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ lorsque

$$\forall x \in M, \exists f : \mathscr{V}(x) \to \mathscr{V}(0_{\mathbb{R}^n}) \mid f(\mathscr{V}(x) \cap M) = \mathscr{V}(0) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

L'entier $n-p$ qui apparaît naturellement dans la définition est la codimension de M.

Définition 34 (Variété topologique de dimension n)**.** C'est un espace topologique séparé X tel que

$$\forall x \in X, \exists U \text{ ouvert de X}, \exists V \text{ ouvert de } R^n, \exists \phi : U \to V \text{ homéomorphisme} \mid x \in U$$

Définition 35 (Carte)**.** Une carte sur une variété topologique X est la donnée d'un couple (U, φ) dans lequel U est un ouvert de X et $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme avec V un certain ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 36 (atlas de X)**.** C'est une famille de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ telle que les U_i recouvrent tout X.

Définition 37 (changement de carte)**.**

Définition 38 (variété analytique complexe)**.**

5 Géométrie algébrique ou approche des surfaces de Riemann via les courbes

5.1 Généralités

Définition 39 (Polynômes de Laurent)**.** On appelle polynôme de Laurent, un polynôme pour lequel les puissances négatives de l'indéterminée seraient autorisées. Si $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif, on note $\mathbb{A}[X, X^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent, les opérations sur les polynômes s'étendant naturellement aux polynômes de Laurent. Un polynôme de Laurent s'écrit donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_kX^k$$

pour $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une certaine suite indexée par $\mathbb{Z}$ presque toute nulle.

Remarque 14. Dit beaucoup plus simplement, les polynômes de Laurent sont aux séries de Laurent (bien connues de l'analyse complexe), ce que les polynômes sont aux séries entières.

Proposition 5. Culturellemnt, l'anneau des polynômes de Laurent est obtenu par localisation de l'anneau des polynômes.

Définition 40 (genre)**.** Le genre est une notion topologique qui possède un grand nombre de définitions alternatives. On se permet de s'en donner une définition intuitive pour pouvoir travailler ici. Il s'agit du nombre de "trous" (ou plutôt de hanses) que possède un objet. La sphère ne possède aucun trou, et toute surface sans trou est homéomorphe à la sphère. La sphère suffit donc pour comprendre topologiquement les objets de genre 0. Le tore possède un trou, et là aussi tous les objets topologiques à un trou lui sont homéomorphes. On poursuit ainsi de suite.

Remarque 15 (Ne pas confondre les trous et les hanses)**.**

POur nos courbes algébriques, une question centrale est la recherche de points à l'infini.

Définition 41 (Points à l'infini)**.**

Théorème 7. Le polygone de Newton donne la topologie des surfaces.

Définition 42 (Polygones de Newton)**.** Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ associé à une courbe algébrique définie par $P(\lambda, \mu) = \sum \alpha_{ij} \lambda^i \mu^j = 0$ où α_{ij} est une double suite à support fini et à valeurs entières. Le polygône de Newton est alors $P_N = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha_{ij} \neq 0\}$

Définition 43 (Courbe algébrique affine plane)**.** C'est l'ensemble

$$X = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 \mid F(w,z) = 0\}$$

où F est un polynôme à deux indéterminées irréductible.

Définition 44 (Courbes singulières et courbes lisses)**.** Une telle courbe est dite singulière si

$$grad(F) = (\frac{\partial F}{\partial w}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

n'est pas nul. Elle est dite lisse sinon. Dans ce dernier cas, la courbe algébrique est donc "irréductible".

Une courbe réductible si elle est réunion de plusieurs courbes.

Proposition 6. Une courbe algébrique réductible est nécessairement singulière.

Démonstration 7. Notons F la fonction définissant la courbe. L'hypothèse permet d'écrire $F = F_1 F_2$ où F_1 et F_2 définissent deux autres courbes. Alors $grad(F_1 F_2) = F_1 grad F_2 + F_2 grad F_1$. Donc en un point d'annulation de F_1 et F_2, le gradient est automatiquement nul et cela conclut.

Théorème 8. X est un espace topologique séparé, connexe et homéomorphe à un tore à g anses où g désigne le genre de X.

Définition 45 (courbe hyperelliptique)**.** C'est le cas

$$X = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 - P_n(z) = 0\}$$

où P_n est un polynôme à racines simples de degré n=2g+1 ou n=2g+2

Remarque 16 (légitimité de la définition)**.** Pourquoi ce choix de n dans la définition ?

Définition 46 (courbe elliptique)**.** C'est le cas g=1 dans la définition précédente.

5.2 Orientabilité des surfaces

Définition 47 (Approche intuitive des surfaces orientées)**.** Une surface est orientée si on peut définir avec cohérence en tout point un vecteur normal. La sphère est orientable. Culturellement, ce n'est pas le cas du ruban de Möbius ou de la bouteille de Klein.

Propriété 16 (caractérisation de l'orientabilité)**.** Une surface de dimension n est orientable ssi il y existe une n-forme différentielle non nulle.

Proposition 7. Une surface complexe est orientable.

Nous abordons ensuite le résultant, qui est une notion philosophiquement utile en ce qu'elle ramène le problème à la dimension 1. Sa limitation est qu'en pratique, rares sont les cas où un calcul *alla mano* est possible. Nous détaillons cependant un exemple classique réalisable qu'est celui de la forme réduite des polynômes de degré 3.

5.3 Résultant

Définition 48 (matrice de sylvester)**.** Soit $P(X) = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + ... + a_m = a_0 \prod_{k=1} m(X - \alpha_k)$ un polynôme de degré m (ce qui sous-entend a_0 non nul) dont les racines sont les α_k. Notons f la fonction polynômiale associée.

Soit $Q(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + ... + b_n = b_0 \prod_{k=1} n(X - \beta_k)$ un polynôme de degré n (ce qui sous-entend b_0 non nul) dont les racines sont les β_k. Notons g la fonction polynômiale associée. Alors la matrice de Sylvester est

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque 17 (Convention)**.** On choisit quelquefois la transposée de la matrice pour définition, ce qui n'a pas d'incidence pour la définition suivante.

Définition 49 (résultant)**.** Le résultant $Res(P, Q) = Res(f, g)$ de deux polynômes (resp. fonctions polynômiales) est le déterminant de leur matrice de Sylvester.

Proposition 8 (facteur commun)**.** f et g ont un facteur commmun non nul ssi Res(f,g)=0

En écrivant le polynôme, sa dérivée en λ multiplié par λ idem avec μ, et on obtient un système de trois équations à trois inconnues. Cela donne naissance au discriminant du polynôme.

Définition 50 (discriminant)**.** On définit le discriminant du polynôme, ou de la fonction polynômiale associée f, par

$$Disc(f) = a_0^{2m-2}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i \neq j}(\alpha_i - \alpha_j) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

Propriété 17 (Résultant avec la dérivée)**.** On dispose de la formule

$$Res(f, f') = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 Disc(f)$$

Corollaire 1 (racine multiple)**.** $Disc(f) = 0$ ssi f admet une racine multiple.

Exemple 8 (Résultant du polynôme $X^3 + pX + q$ avec sa dérivée)**.**

Remarque 18. A REVOIR Il y a une méthode en lien avec le résidu? Et celle-ci justifie cette sous-section !!!

5.4 Application aux courbes algébriques

Définition 51 (discriminant d'une courbe algébrique)**.**

Théorème 9. Pour les courbes hyperelliptiques, le discriminant est exactement le discriminant du polynôme qui intervient dans la définition.

Proposition 9. Le discriminant d'une courbe algébrique est nul ssi elle est singulière.

On regarde PQ=0 qu'on perturbe avec un epsilon, cela preserve le polygone de Newton!

Théorème de Koushirenko-Bernstein

Soit x le nombre de points d'intersection au système de polynômes à deux indéterminées $\begin{cases} P(\lambda, \mu) = 0 \\ Q(\lambda, \mu) = 0 \end{cases}$ Alors $x = S - S_1 - S_2$ avec le théorème de Pick où s est le nombre de points à l'infini et g le genre.

Définition 52 (Somme de Minkowski)**.** On note S_1 et S_2 deux polygones. Leur somme de Minkowski est le nouveau polygône S obtenu en sommant un point de S_1 et un point de S_2 pour toutes les coordonnées possibles :

$$S = \{x_1 + x_2\}_{(x_1, x_2) \in S_1 \times S_2}$$

Définition 53 (Transformation complexe)**.** Soit A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ On considère

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}^*)^2 &\to (\mathbb{C}^*)^2, \\ (\lambda, \mu) &\mapsto (\lambda^a \mu^b, \lambda^c \mu^d) \end{aligned}$$

Remarque 19. Dans la définition précédente, on n'est pas à translation ou rotation près. idé : matrice qui préserve $GL_2(\mathbb{Z})$ ou $SL_2(\mathbb{Z})$.

Définition 54 (ordre ou degré)**.** On définit l'ordre de f en x comme $ord_x f = Res\frac{\mathrm{d}f}{f}$

Théorème 10. La somme des ordres pour une variable donnée fait zéro.

Définition 55 (espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$)**.** Ce sont les droites de $\mathbb{C}^3$. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \{[x:y:z]\}_{x,y,z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Proposition 10. Il y a équivalence entre disposer d'une somme de vecteurs nulle et construire un polygone fermé convexe. La preuve s'obtient avec la construction. Réciproque claire.

Définition 56 (feuillet)**.**

Exemple 9 (de courbe elliptique)**.** On considère $y^2-(x+1)(x-1)(x-2)$. Après une translation correspondant à une division par $\mathbf{y^2}$, on utilise le changement de coordonnées $x^3y^{-2} = u$ et $xy^{-1} = v$. On obtient une nouvelle équation qui permet de gérer le point à l'infini. (TFI et u coordonnée raisonnable de v). x est en v^{-2} y en v^{-3} On vérifie sur l'exemple les propriétés supra!

Exemple 10 (de manipulation)**.** On regarde le triangle $\lambda+\mu+\lambda^{-1}+\mu^{-1} = 0$.

On essaye de se ramener à l'axe des abscisses et aux racines d'un polynome $P_0(\lambda)$ dans $P_0(\lambda)+\mu P_1+\mu^2P_2(\lambda)$ etc =¿ effacement du degré

5.5 Quelques études concrètes

Pour rappel, 0 joue le rôle d'un infini.

5.5.1 droites

On peut montrer qu'il y a 3 points à l'infini. Il y a l'infini auquel on pense, mais il y a aussi les deux points d'intersection avec les axes. Le polynôme associé est $P(\lambda,\mu) = \lambda+\mu+1$. On trouve d'abord $(0,-1)$ et $(-1,0)$ dans ces coordonnées. Il ne reste qu'à trouver le troisième point

Remarque 20. Il faut que l'une des deux coordonnées du couple soit nulle. Sinon, on est dans l'ensemble de définition du polynôme et l'on est juste un point de la courbe. C'est pour cette raison que 0 joue le rôle d'un infini.

Il est donc nécessaire de changer de coordonnées. On pose $\eta = \frac{\lambda}{\mu}$ et $\rho = \frac{1}{\mu}$ (dans cet ordre) de sorte que

$$P(\lambda,\mu) = P(\frac{\eta}{\rho},\frac{1}{\rho}) = \frac{\eta}{\rho}+\frac{1}{\rho}+1 = 0$$

. Ainsi, $1+\eta = \rho$ et dans ces coordonnées $(-1,0)$ correspond au dernier point à l'infini. Notons que c'est bien un nouveau point puisqu'il correspond à un μ et à un λ infini dans l'ancien système de coordonnées. Ceci conclut l'étude des points à l'infini.

Remarque 21. Il n'y a aucun point à coordonnées entières dans l'intérieur du polygone, donc le genre est 0 et il n'est pas possible d'envisager une approche par les résidus.

5.5.2 coniques

Les coniques sont plus proches des droites qu'on ne le pense. En fait, il y a un isomorphisme via

$$t \mapsto \left(\frac{at^2+bt+c}{kt^2+t+m}, \frac{dt^2+et+f}{gt^2+ht+k}\right)$$

En particulier pour le cercle, on retrouve les formules bien connues (de l'intégration) :

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

5.5.3 Un autre exemple

Intéressons nous au polygone de Newton $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$.
En fait, il y a un lien avec le résidu.

5.5.4 Un dernier exemple

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

La forme $\frac{dx}{y}$ est holomorphe. En fait, le produit

$$\frac{dx}{y}\frac{d\bar{x}}{\bar{y}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{dxd\bar{x}}{|x|}$$

et alors c'est une singularité intégrable. De mÃªme les singularités sont intégrables lorsque $x \to 1$ et $x \to \lambda$. Lorsque $\xi \to \infty$ on a

$$\frac{dx}{y}\frac{d\bar{x}}{\bar{y}} \underset{x\to \infty}{\sim} \frac{dxd\bar{x}}{|x|^3}$$

et c'est aussi une singularité intégrable.
Il s'agit de la seule forme différentielle holomorphe. Si $y^2 = P_5(x)$, on a une deuxième (multipliant par x).

Proposition 11. Sur un tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$, il n'y a qu'une seule forme différentielle holomorphe tout au plus.

Démonstration 8. Notons z la coordonnée de sorte que la différentielle holomorphe standard soit $f(z)\mathrm{d}z$. Vu la structure du tore, $f(z+1)\mathrm{d}z = f(z)\mathrm{d}z = f(z+\tau)\mathrm{d}z$. f est en particulier bornée. Le théorème de Liouville assure que f est constante. La seule forme différentielle est don $\mathrm{d}z$ à une constante près.

5.6 Approche alternative des précédents exemples avec la géométrie projective

5.7 Un exercice concret

Nous proposons d'étoffer notre discours avec la résolution de ce qu'on pourrait appeler un exercice.

Exercice 1. Pour quelles valeurs complexes de c et d la courbe définie par $\lambda+\lambda^{-1}+c\mu+\mu^{-1}+d = 0$ est-elle singulière ?

Analyse : on suppose la courbe singulière. L'idée est qu'on a affaire à un système de trois équations, les deux autres étant obtenu en appliquant $\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}$ et $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ à l'égalité. On se retrouve donc avec

$$\begin{cases} \lambda+\lambda^{-1}+c\mu+\mu^{-1}+d = 0 \\ \lambda-\lambda^{-1} = 0 \\ c\mu-\mu^{-1} = 0 \end{cases}$$

D'une part, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. D'autre part, $\mu = \frac{1}{\sqrt{c}}$ ou $\mu = \frac{-1}{\sqrt{c}}$. Ceci permet d'obtenir
$2 + c\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} + d = 0$
ou $2 - c\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c} + d = 0$
ou $-2 + c\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} + d = 0$
ou $-2 - c\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c} + d = 0$

5.8 vers une interprétation graphique

Définition 57 (application naturellement liée à une courbe algébrique)**.** On se donne $\Sigma = \{\lambda, \mu \mid P(\lambda,\mu) = 0\}$ une courbe algébrique.

$$\begin{aligned} \Phi : & E \to \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda,\mu) \mapsto (\ln|\lambda|, \ln|\mu|) \end{aligned}$$

Définition 58 (amoeba)**.** C'est la courbe $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Qualitativement, l'amoeba ressemble au polygone de Newton sur lequel on aurait posé un poulpe, dont les tentacules seraient les points à l'infini.

Exemple 11 (pour les droites)**.** Rappelons l'allure du polygône de Newton des droites.
On écrit

$$\lambda = e^{x+i\phi} \quad \mu = e^{y+i\psi}$$

. Alors

$$y = \ln|1 - e^x e^{i\phi}|$$

5.9 Théorème de décomposition de l'unité

6 différentielles et fonctions holomorphes

On étudie l'interaction entre fonction holomorphe et différentielle. On va vers la demonstration d'un theoreme d'holomorphie des residus de Poincaré. On traite une courbe elliptique armé de ces outils.

6.1 Encore un mot sur l'espace tangent

On se refere par exemple à la page 46 et suivante de []

Définition 59 (Opérateur I)**.**

Définition 60 (complexification)**.**

Notation 8. T10 T01

6.2 vers le résidu de Poincaré

Nous sommes guidés dans cette section par l'exemple de la courbe $y^2 = x(x-1)(x-2)$ notée (E).

Définition 61 (différentielle holomorphe)**.**

Exemple 12. Sur (E), nous savons que dx/y est holomorphe et

$$Res \frac{dxdy}{y^2 - x(x-1)(x-\lambda))} = dx \underset{z=y}{Res} \frac{dz}{z^2 - x(x-1)(x-\lambda))} = dx \underset{z=y}{Res} \frac{1}{2y}\left(\frac{dz}{z-y} - \frac{dz}{z+y}\right) = \frac{dx}{2y}$$

Définition 62.

$$dz = dx + idy \text{ et } d\bar{z} = dx - idy$$

Exemple 13.

$$dzd\bar{z} = -2idxdy$$

Unicité de la différentielle holomorphe

Soit ω une forme différentielle holomorphe de la variable complexe z. Alors $\omega = f(z)\mathrm{d}z$

Exemple 14 (Nullité de la différentielle d'une différentielle holomorphe)**.**

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

via Cauchy-Riemann et donc

$$d(f(z)dz) = (df(z))dz = \frac{\partial f}{\partial z}dzdz = 0$$

Exemple 15.

Propriété 18. Une forme différentielle holomorphe est nulle si et seulement si sa partie réelle l'est.

Démonstration 9. On écrit $z = x+iy$ et $f(z) = a+ib$. En tant qu'application linéaire, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ ce qui donne $\omega = (a+ib)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = a\mathrm{d}x + ia\mathrm{d}y + ib\mathrm{d}x - b\mathrm{d}y = (a+ib)\mathrm{d}x + (ia-b)\mathrm{d}y = (a\mathrm{d}x - b\mathrm{d}y) + i(b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y)$. Supposons que $\Re\omega = 0$. Ceci signifie exactement $a\mathrm{d}x = b\mathrm{d}y$

Remarque 22. Leur dual est utilisé pour traduire simplement les équations de Cauchy-Riemann. Au passage, nous remarquons que cette définition, les différentielles semble plus naturelle que les champs de vecteurs.

Théorème 11 (Caractérisation du genre)**.** Soit g le genre d'une surface. Alors la dimension des formes holomorphe sur la surface est de dimension g. En particulier, sur le tore, toutes les formes holomorphes sont identiques à multiplication par une constante près.

Définition 63 (Résidu)**.**

Remarque 23 (Combat sur les conventions)**.** Le résidu peut prendre en argument une fonction, une forme différentielle, un champ de vecteurs. Il donne un vecteur tangent, un scalaire et un carré d'un vecteur tangent, respectivement.
Définition intrinsèque VS définition avec multiplication par JAc changement de coordonnées.
Le résidu vit dans l'espace tangent.

Définition 64 (Résidu en plusieurs variables)**.** + théorème parenthésage (paramétrisation en qq sorte)

Théorème 12 (lemme de Hartogs)**.** Les singularités des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes sont au moins des surfaces.

Rewert?

Exemple 16 (Calcul explicite de résidu)**.**

Théorème 13. A propos du résidu de Poincaré. pour les i et j dans le polygone de Newton, la différentielle obtenue est holomorphe.

Définition 65 (voisinage tubulaire)**.**

Théorème 14. chemin VS Vtub

Proposition 12 (Convergence d'intégrales holomorphes)**.**

Sur (E), holomorphie en 0 On utilis ele fait que x s'écrit en série formelle de y. On peut trouver les coefficients en regardant degré par degré. Il existe une formule générale (d'inversion de Lagrange), mais elle est difficilement utilisable sinon que pour les petites dimensions. On trouve une raltion linéaire pour chaque coeff. cette méthode efface la singularité issu de y=0.
holomorphie en l'infini. On regarde les intégrales "conjugués". Le changement de variable polaire donne la convergence via Riemann. C'est une méthode alternative au changement de coordonnées.

Définition 66 (forme quadratique sur $\mathbb{C}$)**.** C'est une forme quadratique pour laquelle les scalaires sont choisis dans $\mathbb{C}$.

Théorème 15. Sur $\mathbb{C}$, toutes les formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes. Elles se ramènent donc à :

Définition 67 (Champ de vecteur holomorphe)**.** $X = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Exemple 17 (sur la sphère)**.** Changement de variable pour des champs de vecteurs holomorphes z=1/w.

$$f(z)\frac{\partial}{\partial z} = f(1/w)\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} = f(1/w)\left(-\frac{1}{z^2}\right)\frac{\partial}{\partial w} = -w^2 f(1/w)\frac{\partial}{\partial w}$$

Alors $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ est holomorphe sur la sphère entière si $f(z)$ est holomorphe dans le plan et $-w^2 f(1/w)$ l'est aussi. Alors $f(z)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$.

6.3 Inégalité de Riemann ou relation bilinéaire de Riemann

Sur une surface de genre g, sur un lacet (utre qu'un a-cycle ou un b-cycle), compte tenu de la formule de Stokes,

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega = 0$$

6.3.1 cas du tore

O introduit sur le tore des lacets fondamentaux : les a-cycles et b-cycles. Soit ω un unique vecteur de base des formes holomorphes sur le tore. On pose

$$p_a = \int_a \omega \quad p_b = \int_b \omega \quad \tau = \frac{p_b}{p_a}$$

On a

$$\frac{1}{-2i}\int \omega\overline{\omega} > 0$$

On remarque que $\int \omega\omega = \int \overline{\omega\omega} = 0$ donne une tautologie, à savoir $p_a p_b - p_b p_a = 0$, alors qu'en dimension supérieure on obtiendra plus d'informations.
ω étant une forme holomorphe, elle est fermée, donc exacte en vertu du lemme de Poincaré sur un carré après dépliage du tore. On écrit $df = \omega$

$$\int_{carreplein} \omega\overline{\omega} = \int_{carreplein} df\overline{\omega} = \int_{carreplein} d(f\overline{\omega}) = \int_{\partial carre} f\overline{\omega} = \int_{a_+} f\overline{\omega} + \int_{b_-} f\overline{\omega} - \int_{a_-} f\overline{\omega} - \int_{b_+} f\overline{\omega}$$

Par proriété de f sur le tore, et en reconnaissant les quantités qui apparaissent, et ayant la positivité stricte de l'intégrale calculée, il vient

$$\frac{-p_b\overline{p_a} + p_a\overline{p_b}}{-2i} > 0$$

En remplaçant p_b en fonction de p_a et τ, on en déduit finalement la relation bilinéaire de Riemann :

Inégalité de Riemann

$$Im(\tau) > 0$$

6.3.2 généralisation

Pour $g = 2$, on est cette fois confronté à un octogone.

6.4 différentielles holomorphes sur des surfaces

Principe

La sphère constitue une exception notable puisque sur celle-ci, on dispose de trois champs de vecteurs holomorphes et d'aucune différentielle holomorphe (il faut user de cartes). En fait, pour les surfaces de genre supérieur, l'inverse se produit : il y a plus de différentielles que de champs de vecteurs. Ceci est lié à la caractéristique d'Euler qui change de signe.

Proposition 13 (Changement de coordonnées)**.** Soit z_α et z_β des variables complexes sur deux cartes respectivement. On pose ω_α la forme $\mathrm{d}_\alpha \mathrm{d}\overline{z_\alpha}$ à une constante complexe près. Alors

$$\omega_\alpha = |\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}|^2 \mathrm{d}z_\beta \mathrm{d}\overline{z_\beta}$$

Démonstration 10. Le changement de coordonnées pour les formes différentielles indique que

$$\mathrm{d}z_\alpha = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\mathrm{d}z_\beta + \frac{\partial z_\alpha}{\partial \overline{z_\beta}}\mathrm{d}\overline{z_\beta} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\mathrm{d}z_\beta$$

via la condition de Cauchy-Riemann puisque z_α est une fonction holomorphe en les variables $z_\beta et \overline{z_\beta}$. De même, $\mathrm{d}\overline{z_\alpha} = \frac{\partial \overline{z_\alpha}}{\partial \overline{z_\beta}}\mathrm{d}\overline{z_\beta}$. Enfin, la relation $\omega = \mathrm{d}z_\alpha \mathrm{d}\overline{z_\alpha}$ combiné à l'égalité $\frac{\partial \overline{z_\alpha}}{\partial \overline{z_\beta}} = \overline{\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}}$ donne le résultat.

7 fonction $\wp$ de Weiertsras

7.1 étude classique de la fonction

Voici une petite section concernant cette fonction à l'élégant symbole. On commence par un bref rappel sur les séries d'Eisenstein.
Soit $\tau \in \mathbb{C}$.

Définition 68 (Séries d'Eisenstein)**.**

Lemme 3. $\forall z \in \mathbb{C}, \left(\frac{1}{(z+m+n\tau)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}} = +\infty$

Démonstration 11.

Lemme 4. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \left(\frac{1}{(z+m+n\tau)^{2k}}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}} < +\infty$

Démonstration 12. On peut se contenter du cas $k = 2$.

Définition 69 (fonction $\wp$ de Weiertsras)**.** Elle est définie via la formule :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^*)^2} \frac{1}{(z+m+n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2}$$

Démonstration 13 (La fonction $\wp$ de Weierstras est bien définie)**.**

Remarque 24. En changeant les indices en leur opposé, on a aussi

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^*)^2} \frac{1}{(z-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2}$$

En fait, les fonctions holomorphes peuvent avoir deux périodes que je qualifierais d'incommensurables, tandis que les fonctions réelles ont de manière évidente au plus une période dans l'acception où 2π est la "seule" période de cos.

Propriété 19 (Périodicité)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \wp(z) = \wp(z + a + b\tau)$$

Propriété 20. La propriété précédente est équivalente à

$$\begin{cases} \wp(z) = \wp(z+1) \\ \wp(z) = \wp(z+\tau) \end{cases}$$

Démonstration 14. On choisit $a=1$ et $b=1$ pour particulariser et une récurrence sans difficulté donne la réciproque.

Pour montrer la périodicité de $\wp$, on se sert du lemme suivant.

Lemme 5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $\mathcal{Q}(z) = \sum_{m,n \in Z^*} \frac{1}{(z-m-n\tau)^4}$ Alors $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(z) = \mathcal{Q}(z+a+b\tau)$

Démonstration 15. Soit a et b deux entiers. On regarde $\mathcal{Q}(z+a+b\tau) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(z+a+b\tau-m-n\tau)^4} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(z+a-m+(b-n)\tau)^4}$ $\sum_{m',n' \in Z^*} \frac{1}{(z-m'-n'\tau)^4}$ grâce au changement d'indice $m' = a-m$ et $n' = b-n$.

Corollaire 2. $\wp$ est bornée car périodique.

Jusqu'ici, nous avons donc simplement montré qu'en fin de compte, $\wp$ vit sur $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$.

Propriété 21 (Développement en série de Laurent)**.**

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3E_4 z^2 + 5E_6 z^4 + ...$$

Démonstration 16. On procède au développement suivant :

$$\frac{1}{(z+m+n\tau)^2} = \frac{1}{(m+n\tau)^2(1+\frac{z}{m+n\tau})^2} = \frac{1}{(m+n\tau)^2}\big(1-2\frac{z}{n+m\tau}+3\frac{z^2}{(n+m\tau)^2}-4\frac{z^3}{(n+m\tau)^3}+5\frac{z^4}{(n+m\tau)^4}-...\big)$$

Ceci est justifié par l'identité $(1-z+z^2-z^3+...)^2 = 1-2z+3z^2-4z^3+5z^4...$ qui intervient dans le développement en série géométrique. Avec la même technique que celle utilisée pour trouver cette identité, nous trouverons plus tard l'expression de $\wp^3$, $\wp'^2$ etc. Utilisant les notations standards des séries d'Eisenstein, on trouve le DSL suivant

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3E_4 z^2 + 5E_6 z^4 + ...$$

Pour cela, il faut remarquer que les séries "impaires" (en tant que coefficient du DSL) sont nulles car les termes négatifs et positifs sont en correspondance pour se simplifier lorsque la puissance au dénominateur est impaire. La définition de $\wp$ elle-même est la cause de la simplification qui s'opére avec le terme en z.

Propriété 22 (Equation différentielle vérifiée par $\wp$)**.**

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60E_4\wp(z) - 140E_6$$

Démonstration 17. En dérivant le DSL de $\wp$,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6E_4 z + 20E_6 z^3 + ...$$

D'où

$$\wp'(z)^2 = -\frac{4}{z^6} - 24E_4\frac{1}{z^2}640E_6 + 36{E_4}^2 z^2 + ...$$

De plus, en continuant calmement de regarder les premiers termes du produit des DSL, on trouve

$$\wp(z)^2 = \frac{1}{z^4} + 5E_6\frac{1}{z^2} + 6E_4 + 5E_6 z^2 + 9{E_4}^2 z^4$$

qui permet en multipliant encore par $\wp$ de trouver

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + 5E_6\frac{1}{z^4} + 9E_4\frac{1}{z^2} + (10+15E_4)E_6 + (27{E_4}^2 + 25{E_6}^2)z^2 + 45E_4E_6z^4 + ...$$

. On constate donc que

$$4\wp(z)^3 - 60E_4\wp(z) - 140E_6 = 4(\frac{1}{z^6}+5E_6\frac{1}{z^4}+9E_4\frac{1}{z^2}+(10+15E_4)E_6+(27{E_4}^2+25{E_6}^2)z^2+45E_4E_6z^4+...)-60E_4(\frac{1}{z^2}+3E_4z^2+5E_6z$$

$$= \frac{4}{z^6}+20E_6\frac{1}{z^4}+36E_4\frac{1}{z^2}+(40+60E_4)E_6+4(27{E_4}^2+25{E_6}^2)z^2+180E_4E_6z^4+...+\frac{-60E_4}{z^2}-180(E_4)^2z^2-300E_6E_4z^4+...-140E_6$$

$$= \frac{4}{z^6}+20E_6\frac{1}{z^4}+36E_4\frac{1}{z^2}-60E_4\frac{1}{z^2}+(40+60E_4)E_6-140E_6+(4(27{E_4}^2+25{E_6}^2)-180(E_4)^2)z^2+(180E_4E_6-300E_6E_4)z^4+...+...$$

Ceci permet de trouver une équation différentielle vérifiée par $\wp$.
A COMPLETER
En effet, on voit au développement en série de Laurent que $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60E_4\wp(z) + 140E_6$ est une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. Ensuite, $\wp^3$ et $\wp'$ sont aussi périodiques donc la fonction entière précédente est aussi périodique donc bornée. Enfin, $\wp'(1)^2 - 4\wp(1)^3 + 60E_4\wp(1) + 140E_6 = 0$ D'après le théorème de Liouville, l'équation différentielle annoncée est vérifiée puisque la valeur de la constante est donnée par 0.

7.2 fonctions issues de $\wp$

La fonction $\wp$ est en fait paramétrisé par τ ce qu'on reflète désormais dans la notation $\wp_\tau$. On s'autorise néanmoins de noter toujours $\wp$ pour $\wp_\tau$. PAr exemple, avec une simple réindexation

Propriété 23.

$$\wp_{\frac{1}{\tau}}(\frac{z}{\tau}) = \wp(z)$$

7.3 Vers les fonctions Θ

Il existe 4 fonctions Θ.

8 Divers

Dans cette section sont regroupés des résultats hétéroclites qui peuvent servir.

8.1 Caractéristique d'Euler

Définition 70 (Caractéristique d'Euler)**.** Soit X un espace topologique.

Propriété 24 (Opérations sur la caractéristique d'Euler)**.**

1. Soient A et B deux ensembles disjoints. $\chi(A \cup B) = \chi(A) \cup \chi(B)$
2. Soient A et B deux ensembles $\chi(A \times B) = \chi(A)\chi(B)$
3. Soit h un homéomorphisme. $\chi(h(X)) = \chi(X)$

Propriété 25 (Caractéristiques d'Euler usuelles)**.**

- Si X est réduit à un point $\chi(X) = 1$
- Soit C un convexe fermé $\chi(C) = 1$
- Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ $\chi(S^1) = 0$
- Soit S^2 le sphère unité de $\mathbb{R}^3$ $\chi(S^2) = 2$
- On note g le genre d'un polyèdre P et $\chi(P) = 2 - 2g$ est éminemment négative

Remarque 25. La dernière propriété peut être vue comme une définition alternative du genre.

Corollaire 3. $\chi(tore) = 0$ par produit de cercles. Soit I un intervalle ouvert. $\chi(I) = -1$

8.2

Théorème 16 (Théorème de Pick)**.** On se place sur une "grille" du plan euclidien. Autrement dit, tous les points considérés sont à coordonnées entières. On note A l'aire d'un polygône d'ordre $n > 2$. On note s le nombre de points sur le bord du polygône (il y en a au moins n), g le nombre de points à l'intérieur du polygône. On dispose alors de la formule suivante :

$$A = g + \frac{s}{2} - 1$$

Démonstration 18 (Esquisse)**.** par récurrence sur n. L'initialisation est la partie délicate. Elle repose sur le fait qu'on connait l'aire des triangles rectangles grâce aux rectangles eux-mêmes et qu'on peut d'un triangle former un rectangle en complétant convenablement le triangle à l'aide de triangles rectangles. On se convainc que cela achève l'initialisation si toutefois on utilise dès à présent l'hérédité, ou plutôt un calcul similaire qu'on omettra ici. Pour l'hérédité, étant donné un polygone à n+1 côtés, on choisit un sommet arbitraire qui donne naissance à un polygone à n sommets et à un triangle de sorte que l'union de ces deux figures redonnent le polygone original. Le théorème est vrai pour les deux sous-figures, et en comptant convenablement les points du plan intervenant dans les deux à la fois, on arrive au résultat.

Résidu de Poincaré

Il étend le résidu usuel de l'analyse complexe. En fait, à chaque trou (qui indexe le genre) est naturellement associée une forme différentielle.

Pour plus tard peut-être :
On dispose de la formule générale suivante utile pour gérer par exemple les points à l'infini :

$$\omega_{i,j} = Res \frac{d\lambda d\mu \lambda^i \mu^j}{\lambda\mu P(\lambda\mu)}$$

8.3 objet géométrique complexe

Proposition 14 (Cylindre)**.** Soit $\varepsilon > 0$. $\{(x, y) \in \mathbb{C} \mid xy = \varepsilon$ peut être vu comme un cylindre.

Démonstration 19. Nous entendons par là l'idée suivante : un cylindre est le produit d'un cercle et d'une droite. Or, en tant que nombres complexes, $x = r_1 e^{it_1}$ et $y = r_2 e^{it_2}$. Donc le lieu géométrique se résume à $\{(r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi] \mid re^{it} = \varepsilon\}$. Ceci prouve l'énoncé en vertu du sens que nous avons donné à "cylindre".

1. En fait, $xy = 1$ se réécrit $x^2 + y^2 = 1$ dans $\mathbb{C}$. On effectue le changement de variable linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ qui est bien sûr inversible. On écrit donc $\begin{cases} x = a + ib \\ y = a - ib \end{cases}$

2.

Définition 71 (hyperboloïde de révolution à une nappe)**.**

Définition 72 (hyperboloïde de révolution à deux nappes)**.**

9 Géométrie tropicale

On peut retrouver le squelette (amibe) des courbes algébriques avec une approche un peu plus exotique.

9.1 Avertissement

Cette section n'a pas forcément pour vocation de figurer dans le texte final. Mais il est utile d'agglomérer ici les informations concernant le sujet au cas ouù cela peut servir.

Remarque 26. La terminologie tropicale est très inadaptée au sens où elle ne reflète pas le contenu mathématique de la théorie mais plutôt une aire géographique de son prétendu inventeur de manière stéréotypée.

9.2 $\mathbb{R}$ vu comme semi-corps

Lemme 6 (Approche analytique du maximum)**.** Supposons $x \neq y \in \mathbb{R}$

$$\max(x, y) = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e^{\lambda x} + e^{\lambda y})}{\lambda} \right)$$

Démonstration 20 (par disjonction de cas)**.** Soit $\lambda > 0$.

1. Cas $x > y$. D'une part, $\max(x, y) = x$. D'autre part,

$$e^{\lambda x} + e^{\lambda y} = e^{\lambda x}(1 + e^{\lambda(y-x)})$$

   Avec la propriété de morphisme du logarithme, $\frac{\ln(e^{\lambda x}+e^{\lambda y})}{\lambda} = x + \frac{\ln(1+e^{\lambda(y-x)})}{\lambda}$ Mais $e^{\lambda(y-x)} \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ permet d'obtenir $\frac{\ln(1+e^{\lambda(y-x)})}{\lambda} \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\lambda(y-x)}}{\lambda} \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ avec les croissances comparées. D'où l'égalité recherchée.

2. Cas $x < y$. D'une part, $\max(x, y) = y$. D'autre part, en procédant à une factorisation par $e^{\lambda y}$ cette fois, on trouve $\left(\frac{\ln(e^{\lambda x}+e^{\lambda y})}{\lambda}\right) = y + \frac{\ln(e^{\lambda(x-y)}+1)}{\lambda}$ et tout comme avant $e^{\lambda(x-y)} \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ permet de conclure *mutatis mutandis*.

Définition 73 (addition tropicale)**.**

Définition 74 (produit tropical)**.**

Théorème 17 (Obtention de nouvelles identités)**.**

Exemple 18 (à revérifier...)**.** 1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ permet de déduire l'identité

$$2\max(x, y) = \max(2x, 2 + x + y, 2y)$$

Proposition 15. La fonction de Weierstras fait le lien entre la courbe elliptique $y = P_3(x)$ et le quotient de $\mathbb{C}$ par $m + n\tau$. Le lien "réciproque" s'obtient avec l'intégrale de la différentielle associée (chemin sur le tore).

10 Brouillon

10.1 piste éventuelle pour plus tard

Dérivée de Lie?
différentielle commute avec f* : propriété encore non digérée. cf Lafontaine (mini énoncé avec exp.)
La proposition 5 non plus.
théorie de Hodge? Opérateur de Hodge ?
pas de fonction holomorphe sur CP1 car divergence
antisymétrisée d'une forme k-linéaire?
Le théorème de Green-Riemann est un cas particulier du théorème de Stokes Calcul explicite.
produit symétrique A ne surtout pas confondre avec le produit extérieur. Beaucoup d'ambiguité.
Algèbre définie par générateurs et relations variable paire et impaire. x et y VS dx et dy plutôt notées avec des lettres grecques.

10.2 à faire

géométrie différentielle Définition espace cotangent, etc. espace en un point VS espace entier. definition alternative de la derivee directionnelle. Le quotient par la relation est au bon endroit ?
Cylindre et hyperboloïdes
lemme de Poincaré pour un carré de R². Attention. Ce n'est pas vrai pour les 0-formes ! notation du 28 mars : faux pour df avec f lisse puisque sinon η est une -1-forme... En revanche, c'est simple pour f=adx + bdy puisque le theoreme de Schwarz montre qu'il suffit de trouver g telle que b= et a=.
exerciceS IMPORTANT courbe elliptique point à l'infini à chercher (comme sur le doc NEWTON) 4 exemples à traiter cf plus haut sous section dédiée.
sur le feu
Résidu : une variable gelée. Interet à l'ordinateur (les calculs sont lourds meme pour un résidu "simple"). Le discriminant provient d'un résidu successif en gelant au fur et à mesure les variables. Il y a une projection sur un axe.
isomorphisme champs de vecteurs/formes différentielles dérivée directionnelle : définition avec les courbes
produit symétrique dxdy !!! attention (quasi exclusivement pour la métrique)
dualité def fibré cotangent : révision dualité
dualité chp de vecteurs. Une référence ? V dans V etoile transpose les vecteurs. JAC transposee etc!
forme bilineaire pour passer de l'un a l'autre alpha(v)[v] forme bilineaire mais un argument fixé... métrique : forme quadratique telle que ...
intégration des formes différentielles formule du changement de variable, généralisé avec f*.
métrique lien gradient differentielle (coordonnées ... via metrique) metrique inverse : changement de langage (dx VS d/dx) bijection reciproque billineaire dualise $y(Ax)etx'(A^{-1}y')$

10.3 Suite au rdv du 23 mai

intégrale Fourier en lien avec étoile de Hodge!! Trnaformation de Legendre
Utiliser la géométrie projective pour trouver les points singuliers (droites et coniques) copie de C* union pt (pour passer à l'adhérence et obtenir un compact) par côté. Ou copie de CP2 mais attention aux doublons. Surface de Hirzebruch Surface torique
dérivée intérieur dérivée de Lie flot
tiré en arrière

10.4 suite au rdv du 3 juin

périodicité de $\wp$. produit intérieur et différentielle .... matrice antisymetrique =¿ dy Pfafien fonction theta

10.5 suite au rdv du 14 juin

genre via polygone de Newton grace a formule somme indice chp de vecteur egal carac Euler de variété. lacet de l'analyse complexe généralisé avec application de S1 dans S1 (en ft Sk dans Sk) qui a un degré. somme sign df. On retrv chi de tore et sphere. omega forme diff holo nulle ssi sa partie relle l'est demo simple à faire. metrique rho donne formule qui traduite avec le th donne 2-2g=2-2x ou x est la surface hachuree du polygone de newton. fonction de Morse : on retrouve la caracteristique d'euler du tore caricatural et du tore moins quelconque. indice d'une forme quadratique et formule somme alternee à cette puissance pr carac d'euler. forme diff tensorisés (forme bili) VS forme quadra. metrique usuelle VS polaire. théorème de décomposition de l'unité. donne naissance à omega alpha tq ... courbe algebrique avec c et d à trouver.

10.6 à évoquer

1. exponentielle d'une 2-forme différentielle : pourquoi des x_i et des y_j ? + généralisation : idée de preuve ?
2. exercices du TD de calculs différentielle L2 COURS associé Transformation de Legendre ?
3. intégrale de forme diff : à faire sur des exemples comme en TD (formule de Stokes etc)
4. calcul explicite pour les 4 exemples.
5. calcul de résidu en lien avec le polygone de Newton. Demander un exemple concret. Pour le résidu de Poincaré : https://analysis-situs.math.cnrs.fr/Poincare-et-les-residus-des-integrales-doubles.html
6. demo forme diff holo nulle ssi Re l'est.

1. différentielle holomorphe (livre de Claire Voisin très dur) approche intuitive car beaucoup trop élaboré à expliquer.
2. cartes : les définir pour tout le monde

10.7 Pour la relecture

1. vérifier si toutes les variables ont fixées. Quelles sont les "sauf mention explicite du contraire?"
2. filtrer les abréviations et la syntaxe (point, majuscule...)
3. remarque sur le programme de L3 ? rappel de TD ?

- choisir si $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ ou idem avec U un ouvert.
- différentielle : d ou d ?
- Doit-on sous-entendre le produit extérieur ? $dxdy$ ou $dx \wedge dy$?

11 BIBILOGRAPHIE

Sommaire
WIKIPEDIA : renvois pour la courbe elliptique, caractéristique d'Euler
Lafontaine
Lesfari (2 livres)
article Newton V.V. Fock
pdf formes différentielles (2 pdf)
p.46 et suivantes de Théorie de Hodge, Claire Voisin.
p.90 Surfaces de Riemann (relation bilineaire de Riemann)
Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces Marcel Berger Bernard Gostiaux
pour les fonctions de morse et variété et partition de l'unité : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ patrick.massot/enseigne
à voir : https://perso.eleves.ens-rennes.fr/ tpier758/cours/cdho.pdf https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ bouche/pdfTeX/geodif.