

摘 要

本文针对 CT 系统的标定参数过程、未知介质几何信息的反推以及标定模型的优化问题，基于简化的几何模型、Radon 变换、傅里叶变换、滤波反投影图像重建算法等知识，实现了标定参数的几何求解与未知介质密度函数二维分布的反推，并对标定模型进行了改进。

针对问题一，为了使得探测器在旋转时接收信息的范围最大，旋转中心应当位于发射器平面和探测器平面中点的连线上。首先，为了描述旋转中心的位置，以椭圆长轴为 y 轴，短轴为 x 轴建立坐标系。我们根据附件二给出的接收信息数据绘制它的二维分布图，并特别分析了两种特殊的情况：一是当射线与长轴垂直的情形，其探测器的接收信息范围应为最大；二是当射线与长轴平行的情形，当射线方向与长轴重合时出现接收信息的最大值。第一种情况中，探测器连线上有信号范围的部分中心垂线与探测器板中线的距离即为旋转中心相对椭圆中心的竖直距离，为 **5.6744**；第二种情况中，探测器板上的信号最大值点与中线的距离为旋转中心相对椭圆中心的横向距离，为 **-9.1344**。在确定 X 射线的初始角度时，根据初始角度测量时光束分别与椭圆和圆的两条切线之间的距离、椭圆的长半轴短半轴长度以及圆的半径和圆心位置，利用几何分析得到初始的角度为 119.9646° 。理论上，上述两种特殊情形相差的角度应当为 90° ，查阅附件得到两次旋转间隔次数为 93 次，即平均每次转动 0.97° ，容易得到 180 个测量角度： $\beta_k = 119.9646^\circ + 0.97^\circ * k$ (β_k 代表第 k 个测量角度)

针对问题二，在已知旋转过程中的接收信息数据情况下，我们利用滤波反投影图像重建算法模型反推出了该未知介质的吸收率二维分布图。根据图像我们得到了该介质的几何信息：介质的形状为一椭圆，且整体上大致分布于正方形托盘的中心处，但在椭圆的右侧存在两个空洞，且椭圆的介质密度按照黄色的深浅分布。在两个小椭圆的交界处介质密度最大且均匀，在大椭圆除两个空洞及小椭圆外的介质密度最小且均匀，在两个小椭圆的未交界处介质密度中等且均匀。由 X 射线衰减的比尔定律，我们得到了吸收率（影像中各个像素所对应的物质对 X 射线的线性平均衰减量）与灰度值（线衰减系数）之间的关系： $a = I_0(1 - e^{-\int_L u(x) dl})$ 并根据附件三提取的灰度值分布得到了各点处的吸收率。

针对问题三，同样地，通过滤波反投影图像重建算法模型，我们由已知的接收信息数据反推出了该介质的吸收率二维分布图，并得到了它的几何信息：介质大致呈正方形（但其右下角存在一定的缺失），分布于正方形托盘的中心，且在该介质中存在着大量空洞，介质整体的密度呈不均匀分布。对附件五数据的图像灰度值进行提取，由 X 射线衰减的比尔定律我们同样得到了所求各点的吸收率。

针对问题四，本文首先针对问题一中标定参数的过程，对其可能产生的误差进行分析；然后根据此模板衍生出两个有着更高精确性和稳定性的模板，进一步分析得到了一个由菱形和小圆形构成的模板，而该模板在正方形底座可靠的情况下，有着极高的精确性和稳定性。

关键词：几何分析，radon 变换，傅里叶变换，滤波反投影重建算法

1 问题重述

在不破坏样品的情况下, 计算机层析成像 (Computed Tomography, 简称 *CT*) 技术可以利用不同物质对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像, 由此获取样品内部结构信息。第一代典型的 *CT* 系统工作原理如下: 一束平行入射的 *X* 射线垂直于探测器平面, 忽略探测器的形状大小等因素, 可将每个探测器单元看成一个等距排列的接收点。在一次扫描过程中, *X* 射线的发射器和探测器相对位置固定, 且整个发射-接收系统绕一固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个发射方向, 存在 512 个等距的探测器来测量 *X* 射线经位置固定的二维待检测样品吸收衰减后的能量, 并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

由于 *CT* 系统安装时往往存在误差, 会影响成像质量, 因此需要借助于模板 (已知结构的样品) 对安装好的 *CT* 系统进行相应系统参数的标定, 由此再通过已知参数来对未知结构的样品进行成像。

通过建立数学模型, 求解下列问题:

(1) 在正方形托盘上放两个密度均匀的标定模板, 相应的数据文件见附件 1, 其中每一点的数值代表了该点的吸收强度 (即 “吸收率”)。对应于该模板的接收信息见附件 2。请根据以上信息, 确定 *CT* 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元的间距以及扫描旋转时 *X* 射线的 180 个方向。

(2) 利用上一问中的参数, 确定样品在托盘中的位置、形状和吸收率。并且给出附件中十个位置的吸收率。

(3) 根据已知的参数信息, 求出附加五的物体的相关数据, 并给出图三中位置的吸收率。

(4) 分析第一问方法的稳定性以及准确度, 并设计一种提高稳定性和精度的新模板。

2 模型假设

假设 1 旋转中心始终在发射板和接受板中点的连线上

假设 2 每个探测器单元视为质点

假设 3 每个探测器发出的 *x* 射线性质、强度相同

假设 4 正方形托盘水平放置

假设 5 *x* 射线在经过空气介质时, 其强度不会减弱

3 符号说明

符号	含义
r	相邻两探测器的间距
I_0	X 射线发出时的初始能量强度
$I(L)$	与发射源相聚 L 时的 X 射线能量强度
N_t	X 射线方向与椭圆短轴平行时长轴范围内的探测器个数
μ	介质的衰减系数
E	误差率
L	椭圆模板的长轴长度
β_k	旋转过程中的第 k 个方向角
m_1	总误差的网格数
m_2	模板包围的所有网格数

4 问题分析

问题一的分析：题目要求根据正方形托盘中各点的吸收率以及模板的相应接收信息推导出 CT 系统的旋转中心、探测器间距、旋转角度三个参数。

首先忽略探测器的大小、形状等因素，512 个探测器应当连接成了一条直线。而为了保证探测器在对样品成像采集接收信息时的完整性与准确性，旋转中心应位于探测器连的中垂线上。因此，对射线与椭圆长轴和短轴平行时的两种特殊情况分析，找出每种情况下的探测器连线的中垂线，其交点即为旋转中心。另当 XX 射线的发射方向与椭圆短轴平行时，探测器能接收到信息的范围即为椭圆长轴范围，将长轴长度及此区间内的探测器个数相比，即得探测器的间距。在扫描过程中的初始位置，椭圆切线方向上的 X 射线与圆切线方向上的 X 射线间的射线所对应的探测器会出现“断层”现象（即这些探测器无法接收到信息，而它们之前与之后的部分探测器均可接收到信息）。根据出现这一现象的探测器长度范围，我们可求得发射方向的初始方向角以及每次旋转的平均角度。

问题二的分析：题目要求根据 CT 系统得到的样品接收信息反推出样品的位置、形状、吸收率等信息，并得到 10 个具体位置的吸收率。

在已知 CT 系统接收信息的情况下，我们可以利用滤波反投影法逆推样品的大致形状。首先我们应对接收信息的灰度值进行提取，之后应当进行一维傅里叶变换，再对经滤波函数滤波后的数据进行傅里叶逆变换，最终我们可以得到图像密度的二维空间分布（即重建图像），这样也就得到了样品的位置、形状和吸收率信息。

问题三的分析：题目要求根据 CT 系统得到的另一样品的接收信息反推出该样品的位置、形状、吸收率等信息，并得到 10 个具体位置的吸收率。

类比问题二的模型，我们同样地利用了滤波反投影图像重建算法。以附件五所给的接收信息以及问题一求得的 CT 系统标定参数进行了图像重建并同样地由灰度值推导出了各点处的吸

收率。

问题四的分析：题目要求我们分析问题一模板的准确性和稳定性，并设计一种有着更高精度和稳定性的模板。通过对问题一中参数标定过程的分析，我们可以得出影响准确性和稳定性的因素，针对这些因素，设计出了一种有着更高精度和稳定性的模板及标定模型。

5 问题一的模型建立以及求解

5.1 模型建立

在一次 *CT* 系统扫描过程中，对应于附件二的每一次旋转下每一个探测器的接收信息，我们绘制出了如下的接收信息分布图：

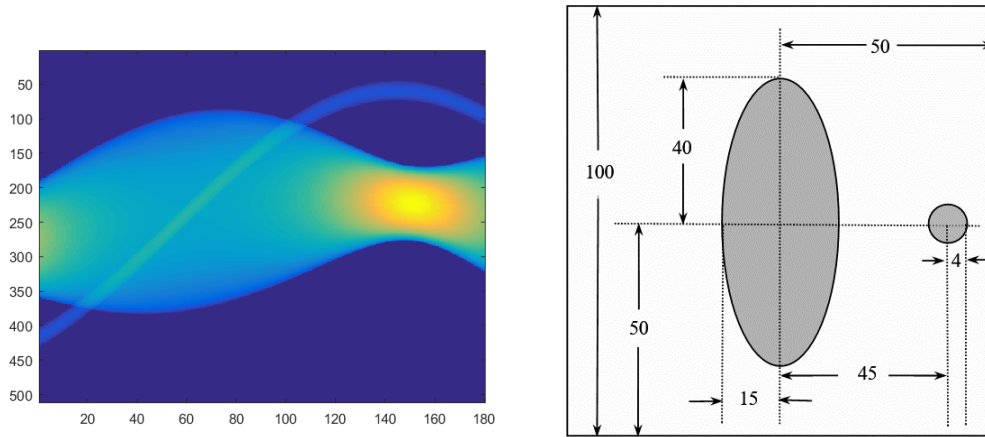


图 1: 接收信息分布图以及托盘中模板的摆放

在这个信息分布图当中，我们用颜色来区别接收信息量的多少：越黄代表接收到的信息越多，越蓝则代表接收到的信息越少。

首先我们认为这 512 个探测器单元是完全等同的，那么此时我们可以忽略探测器的大小、形状、体积等自身属性，而把所有探测器都看成质点。再由于探测器均成相邻直线型分布，那么探测器就相当于等距地分布在一条直线上的 512 个点，此时整个的 *CT* 系统参数标定模型即简化为了一个几何模型。

现在我们来考虑旋转中心在正方形托盘中的大致位置。如果旋转中心不位于探测器直线的中垂线方向上，那么随着旋转次数的逐渐增加，探测器所能接收到的射线能量信息必然会越来越少，*X* 射线的发生器和探测器的相对位置也会发生改变。因此旋转中心必然位于探测器连线的中垂线上。根据几何分析，我们只需要在旋转扫描过程中找到两条探测器连线的中垂线，它们的交点即为旋转中心。[1]

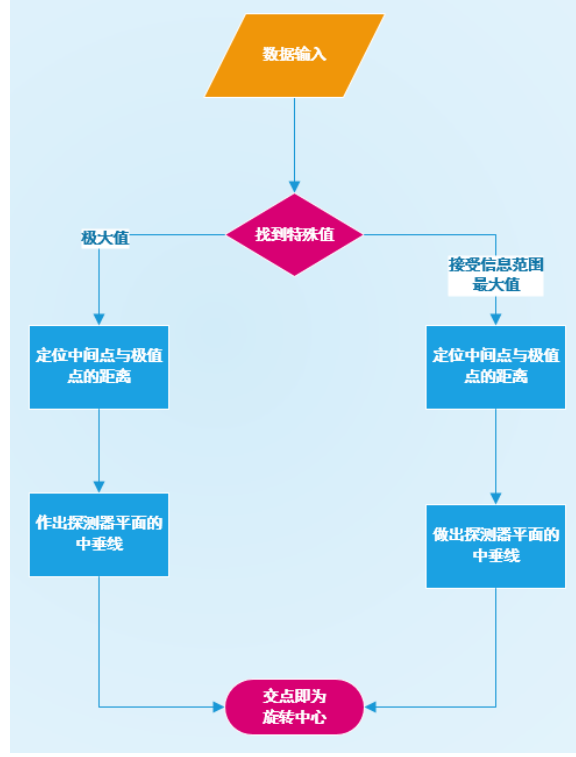


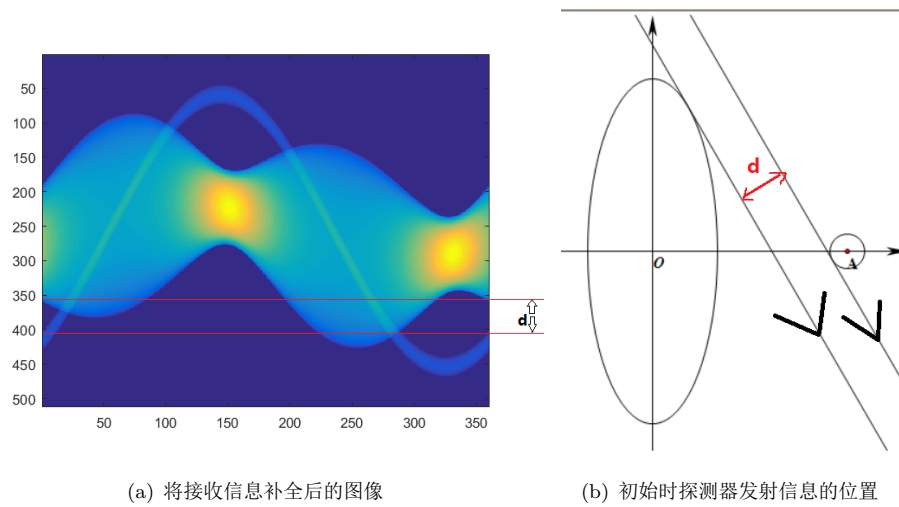
图 2: 旋转中心求得流程

对于等距探测器的间距，以 X 射线方向与椭圆模板的短轴平行情况分析，此时射线横向穿过了整个椭圆和圆样品，即此时的探测器接收信息的范围是最大的。用椭圆模板长轴的长度除以椭圆模板长轴范围内的探测器个数（只有处于长轴范围内的探测器才能接收到信息）即为等距探测器的间距，用公式表达为：

$$r = L/N_t \quad (1)$$

其中 r 表示每两个探测器之间的距离， L 表示椭圆的长轴长度， N_t 表示椭圆长轴范围内的探测器个数。

在整个 CT 系统的扫描旋转过程中，分析图 (a) 中接收信息的分布规律，我们发现在 180 次旋转后的探测器接收信息与初始位置时的接收信息出现了对称，也就是说在正方形托盘上的两个物体的相对位置发生了互换，显然整个发射-接收系统旋转了 180 度，CT 系统采集接收信息时的要求，我们认为 CT 系统在绕旋转中心逆时针旋转 180 度时是等角度旋转的。但此时我们还需要知道 X 射线的初始方向才能明确具体的 180 个方向。分析初始时刻的接收信息，我们发现有一些位置处的探测器发生了“断层”现象（即这部分探测器无法接收到信息，而它们之前与之后的部分探测器均可接收到信息），显然，这些探测器必然是处于与椭圆和圆相切的两条 X 射线间（见图 (b)），根据这一现象的存在区间，即可求得发射的初始方向角。



5.2 模型求解

分析图 1 知, 黄色最高点出现在 X 射线方向与椭圆模板长轴重合处, 因为此时射线穿过整个椭圆模板的长轴, 其接收信息量也就达到了最大; 而当 X 射线方向与椭圆模板短轴平行时, 整个探测器的信息接收范围达到了最大, 在图 1 中显示为淡蓝色部分最宽处, 此种情况下该列的接收信息最大值即为射线方向与短轴重合处。根据以上 X 射线分别与椭圆模板长短轴重合的约束条件, 我们编写程序 (见附录八) 通过遍历搜索到了满足上述条件射线方向下的探测器标号。如图:

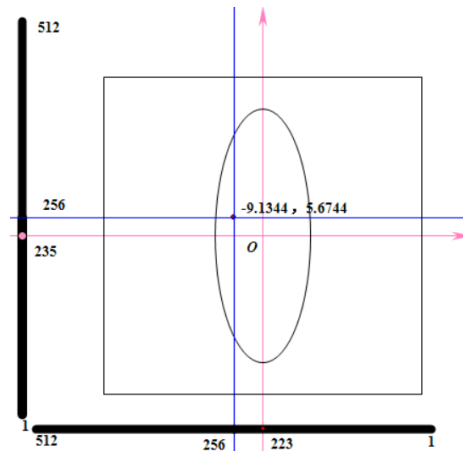


图 3: 旋转中心的确定

当 X 射线方向与椭圆模板长轴重合时, 对应的是第 223 个探测器 (第 1 个探测器到第 512 个探测器是从右至左的顺序), 把此时的射线方向向左平移 33 个单位即为探测器连线的中垂线方向; 同理, 当 X 射线方向与椭圆模板短轴重合时, 对应的是第 235 个探测器, 再把射线方向向上平移 21 个单位即为此时的探测器连线中垂线方向, 最后我们将此坐标系下两条中垂线方向的交点坐标映射到了以椭圆模板中心为原点的正方形托盘坐标系上, 得到了旋转中心在正方形托盘中的位置坐标 $(-9.1344, 5.6744)$ 。

和求解旋转中心的过程类似，我们寻找了 X 射线方向与短轴平行时的情况，而用椭圆样品长轴的长度去除以能接收到信息的探测器个数即为等距探测器地间距：

$$r = L/N_t = 0.2768 \quad (2)$$

之所以在初始时刻会发生“断层”现象（即有部分探测器无法接收到信息，而它们之前与之后的部分探测器均可接收到信息），是因为在圆的切线与椭圆的切线间的 X 射线穿过的区域的空的。其几何模型如图所示：

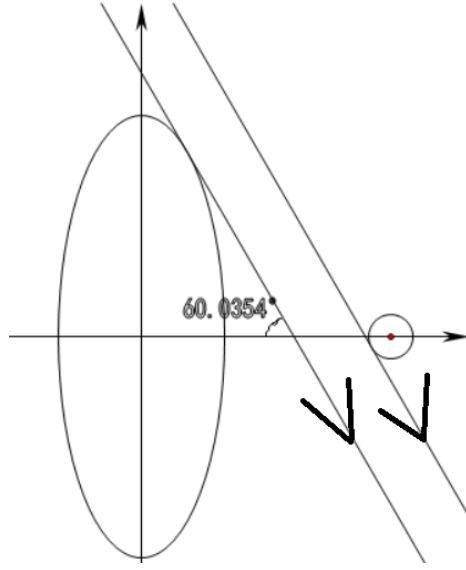


图 4:

首先我们根据切线性质列出了圆的切线方程：

$$kx - y + b = 0 \quad (3)$$

$$b = 4\sqrt{k^2 + 1} - 45k \quad (4)$$

接着我们再假设了椭圆切线的表达式：

$$kx - y + c = 0 \quad (5)$$

分析接收信息的二维分布图，我们得到了初始时刻“断层”现象的长度范围是第 360 个探测器到第 402 个探测器，即 42 个探测器的间距，也就是椭圆切线与圆的切线间的距离为：

$$\frac{|c - b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 42r \quad (6)$$

将它代入椭圆方程 $\frac{y^2}{1600} + \frac{x^2}{225} = 1$ 中，根据相切的性质，由于该一元二次方程的判别式为 0, 可得如下式：

$$(k^2 + \frac{64}{9})x^2 + 2kcx + c^2 - 1600 = 0 \quad (7)$$

根据 (6) 式可得 X 射线的斜率 k ，从而推出 X 射线的初始偏转角为 119.9646° 。

题目附件三中的每一列对应一个方向，当 X 射线方向与椭圆长轴平行时，会出现整个旋转过程中的接受信息量最大值。当 X 射线方向与椭圆短轴平行时，能接收到信息的探测器范围最大。而这两个方向相差 90° 。分析题目附件三中的 X 射线旋转过程，发现它在这个过程中旋转了 93 次，即每次平均旋转 0.97° ，那么第 k 个旋转方向角 β_k 应为：

$$\beta_k = 119.9646^\circ + 0.97^\circ * k \quad (8)$$

5.3 模型检验

通过以上模型的求解，我们得到了 CT 系统的各项标定参数值。现在我们对这些参数进行精确性检验，即通过所求得 CT 系统参数与附件二给出的接收信息数据反推出模板的大小、形状等信息，并将它与实际的模板进行比较，分析预测值与实际值之间的差异。对于反推模板的几何信息的过程，我们采用的是问题二问题三中的滤波反投影图像重建算法模型（具体算法见问题二的模型建立，程序见附录二）重构模板的 CT 图像，将其再与模型实际参数对比，对比结果图如下：

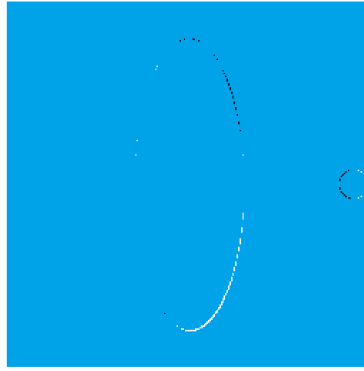


图 5: 重建误差图

如图，整个背景为一 256×256 的正方形网格，我们将理论模板与实际模板的共有部分略去，黑点代表实际模板中存在而理论模板中不存在的网格，白点代表实际模板中不存在而理论模板中存在的网格，黑点与白点的总个数为 152，此即为实际值与理论值的总误差。我们用总误差的网格数 m_1 去除以模板包围的所有网格数 m_2 就得到了所求的 CT 系统标定参数的误差率 E ：

$$E = \frac{m_1}{m_2} = \frac{152}{12568} * 100\% = 1.21\% \quad (9)$$

所求得的误差率为 1.21%，该值较小，也就说明了我们所求得的 CT 系统标定参数精确度较高，可以用来对问题二以及问题三求解。

6 问题二的模型建立及其求解

6.1 模型建立

为了通过已知的接收信息以及问题一中确定的参数来重建该未知介质的 CT 图像（即介质的衰减系数或密度在平面的二维分布）从而得到其各项几何参数信息，我们采用了滤波反投影图像重建算法。即先对投影图像进行滤波去噪处理，然后再用反投影算法进行图像还原。

首先我们对算法中的以下概念进行区分与说明。CT 成像的原理就是利用不同角度下所得的物体射线投影图像，通过数学计算来获得断层图像的。因此投影图像上的灰度值反映的是射线穿过物体后的衰减强度，即物体的线衰减系数。在 X 射线穿过某些不均匀介质时，由于其物质成分与密度的差异，各点对 X 射线的吸收率是不同的。所谓吸收率，指的就是 CT 影像中各个像素所对应的物质对 X 射线的线性平均衰减量。显然，CT 图像的灰度值与各点的吸收率是存在一定的线性相关性的。而对于题目附件给出的接收信息，它是衰减后的射线能量经增益处理后的结果，因此我们认为它可等效为每一条 X 射线路径上的总能量衰减量。

对于 CT 图像密度的二维分布函数 $f(x, y)$ ，它对平面直角坐标系 xOy 中的一条直线做线积分：

$$g(t, \alpha) = \int_L f(x, y) dL \quad (10)$$

其中 t 为原点到该直线的距离，为该直线垂线的方向角。[2] 把密度函数 $f(x, y)$ 在旋转时沿平面内不同直线做线积分时（也称作密度函数在不同方向上的投影），得到的像 $F(t, \alpha)$ 即为密度函数的 Radon 变换。也就是说，CT 图像平面中的每个点 (t, α) 的像函数值即对应了密度函数的某个线积分值，且它们是一一映射的。通过对 Radon 变换建立的 Abel 方程求解，我们得到了 Radon 逆变换的公式，其逆变换的解析表达式如下：

$$f(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial g(t, \alpha)}{\partial t}}{(t - \rho * \cos)(\theta - \alpha)} \quad (11)$$

(10) 式中 (ρ, θ) 是像素坐标点 (x, y) 的极坐标，且其表明当我们已知密度函数在各个方向上的投影时，利用 Radon 逆变换，即可得到密度函数的二维分布。根据 Fourier 中心切片定理，密度函数在某一方向上投影（Radon 变换）的一维傅里叶变换等价于其在柱坐标系下的二维傅里叶变换。考虑到 Radon 变换中求解图像函数的极坐标表达形式存在较大的困难，我们采用对原始数据的二维傅里叶变换来得到介质的二维衰减图。图像密度函数 $f(x, y)$ 在投影角（即投影直线方向角） α 下，投影 $g(t, \alpha)$ 对 t 的一维傅里叶变换给出了密度函数 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换 $F(\omega_1, \omega_2)$ 的一个切片，该切片与 ω_1 轴相交成 α 角，且通过坐标原点，即：

$$F(\omega_1, \omega_2) = F_1[g(t, \alpha)]|_{\alpha \text{ 固定}} \quad (12)$$

将上式化简，得：

$$f(\rho, \alpha) = \int_0^\pi F^{-1}(|R|F_1g(t, \alpha)) d\alpha \quad (13)$$

式 13 即为我们最终得到的滤波反投影公式，[3] 考虑到需要对特定段的数据进行滤除，我们用 $|R|W(R)$ 近似替代 $|R|$ ，并将 $|R|W(R)$ 称为滤波函数，而称 $W(R)$ 为窗函数，那么 (12)

式也可近似写作：

$$f(\rho, \theta) = \int_0^\pi F_1^{-1}(H(R)F_1g(t, \alpha)) d\alpha \quad (14)$$

将我们整个滤波反投影图像重建算法的流程表示如下：

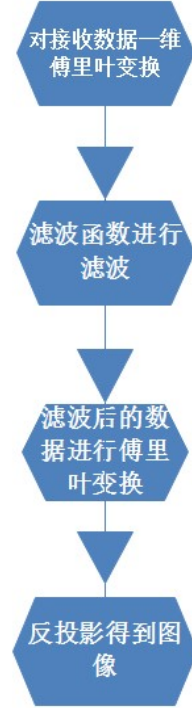


图 6: 滤波反投影算法流程图

6.2 模型求解

在图像的重构过程中，我们首先要对附件三中的数据进行滤波处理来去除噪声，之后进行反投影处理来进行图像的还原。分别作出滤波反投影处理后的图像和直接反投影处理后的图像，如图所示：

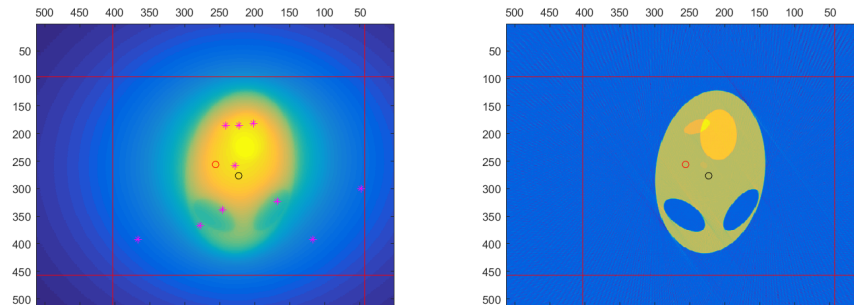


图 7: 未经滤波和经过滤波后的反投影图像

其中左图是未经滤波的直接反投影处理后的图像；右图是滤波反投影处理后的图像。明显可以看出，经过滤波后的图像更加符合真实的物体的形状。

在图 7 的右图中，蓝色代表正方形托盘中的空白区域，而黄色代表介质存在的区域，且颜色越黄代表了该介质的密度越大。红色小圈代表的是旋转中心，黑色小圈代表的是该方形托盘中心。从图七的右图中我们可以很明显地看出，该介质的大致形状为一椭圆，但在椭圆的右侧存在两个空洞，且椭圆的介质密度按照黄色的深浅分布。在两个小椭圆的交界处介质密度最大，在大椭圆除两个空洞及小椭圆外的介质密度最小且均匀，在两个小椭圆的未交界处介质密度中等且均匀。对附件三接收信息进行 CT 图像的灰度值重建，我们得到了如下的灰度三维分布图；

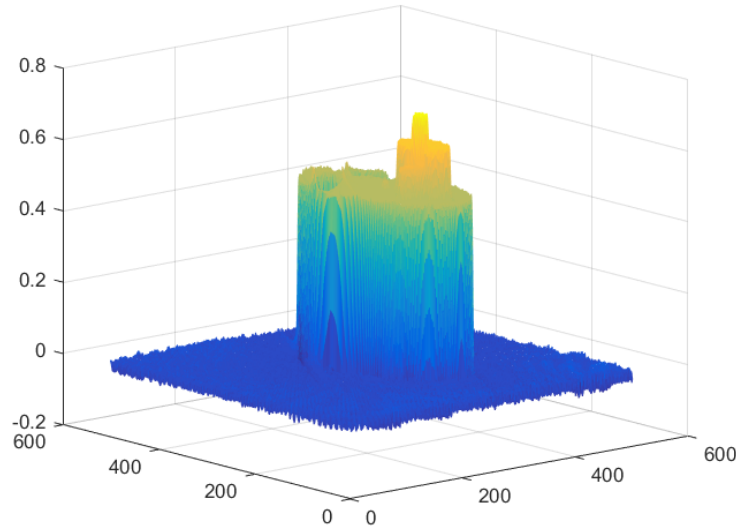


图 8:

当 X 射线穿过正方形托盘中的未知介质时，由于 X 射线会与介质原子发生碰撞，因此 X 射线的能量会发生衰减。在不同介质中，X 射线的能量衰减程度是不同的，我们用衰减系数 μ 来描述不同介质的这一特性。根据比尔定律，当能量强度为 I_0 的平行 X 射线束穿过正方形托盘中的不均匀介质时，探测器上测量的衰减后的射线能量强度 $I(L)$ 为：

$$I(L) = I_0 \exp\left(-\int_L \mu(x) dl\right) \quad (15)$$

由此，我们可以得到 CT 图像的灰度值（即介质的线衰减系数 μ ）与图像中每点的吸收率 a （即各个像素所对应的物质对 X 射线能量的线性平均衰减量）存在如下关系：

$$a = I_0 - I = I_0(1 - e^{-\int_L \mu(x) dl}) \quad (16)$$

即吸收率等于 X 射线穿过单位像素后的能量差值，当介质是均匀的或分段均匀时，我们可以直接将衰减系数进行路径上的累加求和。

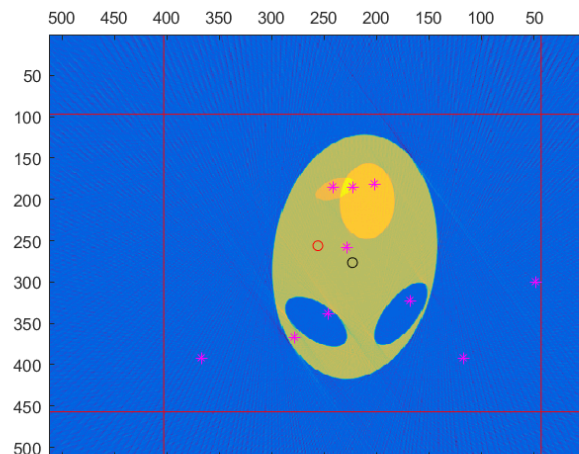


图 9: 旋转中心以及十个点的位置

图九为题目中所要求的十个点的位置，且图中红色圆圈为旋转中心，黑色圆圈为方形托盘中心，它们的吸收率如下表：

表 1: 问题二的十个点吸收率

x 坐标	10.000	34.500	43.500	45.000	48.500	50.0000	56.000	65.500	79.500	98.500
y 坐标	18.000	25.000	33.000	75.500	55.500	75.5000	76.500	37.000	18.000	43.500
吸收率	-0.0395	-0.0321	-0.0319	1.0103	0.9658	0.9869	0.9704	0.0277	-0.0371	-0.0285

7 问题三的模型建立及其求解

7.1 模型建立

类比问题二中的滤波反投影图像重建算法模型，同样地我们调用了 MATLAB 的 `iradon` (Radon 的逆变换) 函数，再导入相关的接收信息数据以及问题一所得的 CT 系统的标定参数，得到了该未知介质的重构 CT 图像。首先根据附件五给出的接收信息数据绘制二维平面分布图：

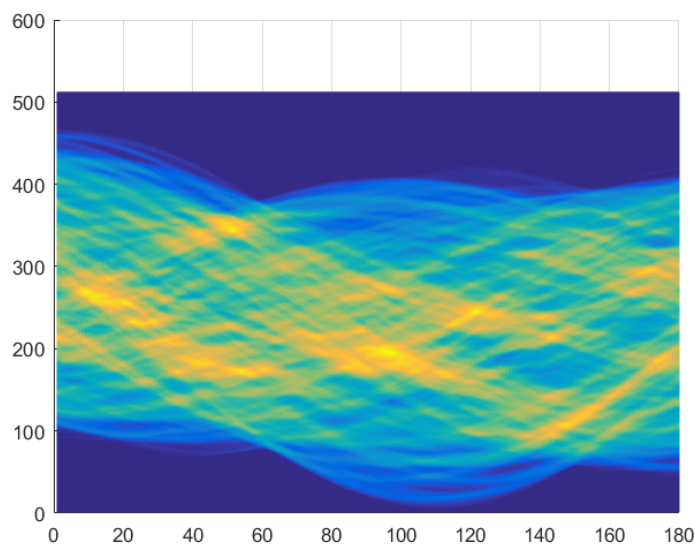


图 10: 探测器接收信息的二维分布

接下来应用滤波反投影算法对该介质的图像进行重建。

7.2 模型求解

我们调用 *iradon* 函数分别对滤波前与滤波后的数据进行 *Radon* 逆变换得到了如下的 CT 重建图：

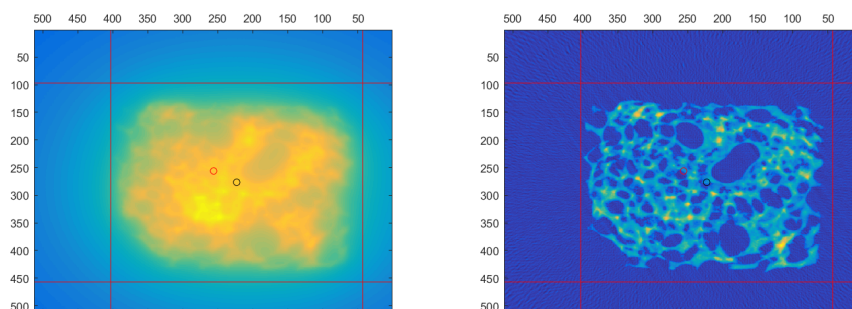


图 11: 未经过滤波和经过滤波后的反投影图像

对滤波前后的图像比较，可以很明显地看出滤波后对图像边缘处信息和整体的密度分布做了较好的处理。据图分析，这个介质大致呈正方形（四条红线围成的是正方形托盘区域），但其左下角存在一定的缺失，且在该介质中存在着大量空洞。至于该介质的密度分布，黄色表示介质中该点的密度较高，淡蓝色表示该处的密度较低，介质整体的密度呈不均匀分布。用附件三的吸收信息数据，我们首先得到了灰度值，对于整个正方形托盘中各点的吸收率信息，以式进行对应的一一映射，我们得到了如表格 *problem3* 所示的吸收率信息，其中具体的 10 个位置处的吸收率数值如下：

表 2: 问题三的十个点吸收率

x 坐标	10.000	34.500	43.500	45.000	48.5000	50.000	56.000	65.500	79.500	98.500
y 坐标	18.000	25.000	33.000	75.500	55.500	75.500	76.500	37.000	18.000	43.500
吸收率	-0.1183	2.1310	0.3178	-0.1750	-0.0706	-0.2230	0.9766	0.2215	-0.0884	0.0401

8 问题四的解决分析

8.1 参数分析

观察并分析附件二所给的数据，我们通过 MATLAB 程序求出了接收信息最多的一个方向（即椭圆的长轴方向）和探测器接收信息范围最大的一个方向（即椭圆的短轴方向），并且考虑到旋转中心总是在探测器连线的中垂线上，因此，我们通过两条中垂线的交点求出了 CT 探测器平面的旋转中心，并求出其与正方形托盘中心的相对位置。但我们在解题过程中，假设了正好有某一个探测器单元，发射的 X 光沿着椭圆长轴，且有两个探测器单元发射的 X 光在椭圆的短轴端点处与椭圆相切，这些严格的要求使得看似严格的求解发生了较大的误差使得失去了一定的精度和稳定性。

同时我们注意到，在探测器平面未发生转动时，椭圆和小圆中间有一定长度的区域不存在任何样品，因此我们认定存在两条平行线分别在同一侧与小圆和椭圆相切，并且切线的距离是一定的。但这个假设的前提是这两条线均存在。在考虑探测器单元之间的距离时，同样也做出了上面的假设。

考虑到求解 CT 系统参数的过程做出了超过五个几乎不可能同时达成的假设，因此很难认为问题一中的参数标定是准确而稳定的。综合上述模板和滤波反投影算法的原理，我们提出了下列改进。

8.2 模板的改造和分析

8.2.1 衍生模型

从已有的模型出发，我们初步衍生出两种标定模板。

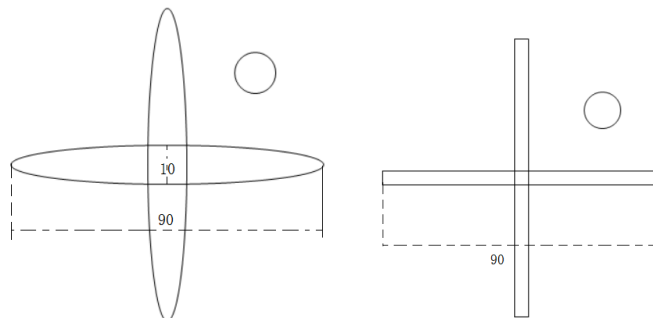


图 12: 衍生出两种标定模板

这两种标定模板是根据已知模板衍生而来，其将椭圆的长轴拉长，以致两个探测器之间的

距离相对椭圆的长轴来说相对变短，进而增大参数标定准确度。同时，横向做出一个已经拉长了的椭圆，可以通过同样的方式来求解旋转中心的位置。注意到图片中的圆，其是用来定位 CT 系统参数的角度的。这样的标定模板提升了标定的准确和稳定性，是可行而有效的办法。

8.2.2 构造模型

为了构造出一个稳定而准确的标定模型，我们将外加手段带入模型。

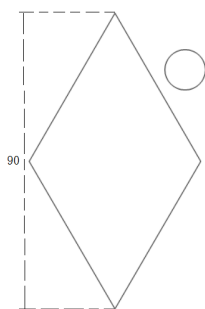


图 13: 构造模型

如图 13 所示，该模板由一个菱形和圆形构成，其菱形主要是用于测定旋转中心和探测单元间的距离，圆形用于确定旋转角度。

如图 14 左图所示，当某一直线左右两边的能量吸收值相等时，可以完全确定该直线即为最大能量吸收所在的直线。

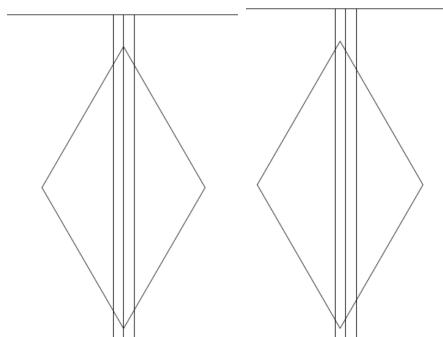


图 14: 吸收能量最多的 X 射线方向

若其值不相等可以通过左右平移实现这左右两边的能量值相等。

同理，在较大角处的最大能量吸收点也可以通过这样的方法进行，进而可以精确地求出正方形托盘的旋转中心。

再考虑 X 射线发射方向，因为模板是菱形，同时也是平行四边形，因此若探测器连线平行于菱形某边，那么在该方向上，必然有部分连续经过菱形的能量吸收值都是固定的。若其不是固定的，可以以旋转中心为轴，通过微小的转动，达成探测板和菱形某边平行的目的，进而结合小圆形的位置，十分精确地求出 CT 系统使用的 X 射线方向。

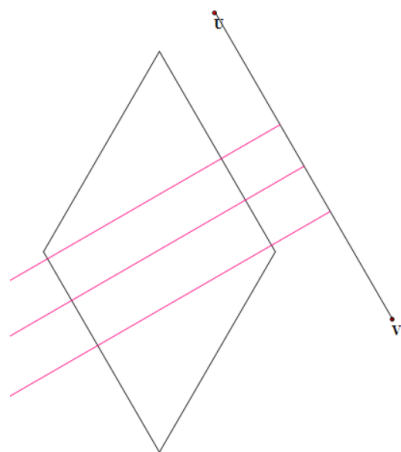


图 15: 垂直方向时的示意图

由于此模板依赖可移动、旋转的正方形底座，因此在正方形底座可靠的情况下，此方法有着极高的准确性和稳定性。

9 模型评价

9.1 模型的优点分析

1. 精确度较高。我们利用问题一所求得的 CT 系统的标定参数以及附件二的接收信息数据反推出了理论上模板的几何信息，并将其与实际值进行了对比，得出误差率仅为 1.21%，说明我们使用的模型精确度较高。

2. 普适性强。通过我们在问题二三中建立的滤波反投影图像重建算法，只需要知道任何未知介质在 CT 系统中的接收信息数据，我们就可以反推出它的 CT 图像，从而得到相应的几何信息。

3. 实用性强。在问题四中我们设计了新的模板来标定 CT 系统的参数，在一定程度上提高了参数的准确性与 CT 成像的精确度。

9.2 模型的缺点分析

1. 在确定问题一中整个 CT 系统旋转时的 180 个方向时，我们简单地考虑为了等角度旋转，并没有对每次的旋转进行具体分析。

2. 在问题二三中由 CT 图像的灰度值推求每个点上的吸收率时，并没有详细考虑介质内空洞的尺寸、不同区域的密度分布等因素。

3. 我们在问题四中设计的新模型与参数标定方法对于正方形托盘要求过于高。

10 模型的推广

在问题二三中我们建立了滤波反投影图像重建算法模型，并运用 MATLAB 中的 `iradon` 函数进行未知介质的重建。相较于断层序列图像的层内分辨率，层间的分辨率要远低于它，因此这会很大程度影响到目标重建的准确性。在原有算法的基础上，我们认为可以采取对特征值点插值的方法，这样不仅能大大提高重建物体在水平和垂直方向上的质量，使得图像具有更高的对比度，还能抑制噪声。

此外，在滤波反投影图像重建算法中，我们使用的是单一的 S-L (shepp-logan) 滤波函数，所以我们可以考虑使用新型混合滤波器（如 R-L 与 S-L 混合滤波器等）来提高图像的归一化程度。[4]

11 参考文献

- [1] 李保磊, 张耀军. X 射线 CT 系统投影旋转中心的测量 [J]. 光学精密工程, 2011, 19(5):967-971.
- [2] 李静. 关于滤波反投影图像重建算法的研究 [J]. 周口师范学院学报, 2016, 33(2):74-76.
- [3] 范惠荣. 关于若干 CT 图象重建算法的研究 [D]. 内蒙古大学, 2003.
- [4] 张斌. 滤波反投影图像重建算法中插值和滤波器的研究 [D]. 中北大学, 2009.

A 附录一：求解第一问的程序

```
%ctReturn2
clear;clc;
load('SHEEL.mat');
figure (2)
d = 0.2768;
phantom2 = [zeros(100,180); s2; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img2 = iradon(phantom2,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
%img=imcrop(img,[256+yc+0.5-fix(50/d) 256+xc-fix(50/d) 2*fix(50/d) 2*fix(50/d)]);
imagesc(img2)
hold on;
plot(256,256,'or')
plot(256+yc,256+xc,'ok')
a=ones(512)*(256+yc+0.5+fix(50/d));
plot(a(1,:),1:512,'r');
a=ones(512)*(256+yc+0.5-fix(50/d));
plot(a(1,:),1:512,'r');
a=ones(512)*(256+xc-fix(50/d));
plot(1:512,a(1,:), 'r');
a=ones(512)*(256+xc+fix(50/d));
plot(1:512,a(1,:), 'r');
for i=1:10
plot(256+yc+0.5-fix((s4(i,2)-50)/d),256+xc-fix((s4(i,1)-50)/d),'k');
end
```

B 附录二：求解第二问的程序

```
%ctReturn3
clear;clc;
load('SHEEL.mat');
figure (2)
d = 0.2768;
phantom3 = [zeros(100,180); s3; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img3 = iradon(phantom3,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
%img=imcrop(img,[256+yc+0.5-fix(50/d) 256+xc-fix(50/d) 2*fix(50/d) 2*fix(50/d)]);
imagesc(img3)
```

```

hold on;
plot(256,256,'or')
plot(256+yc,256+xc,'ok')
a=ones(512)*(256+yc+0.5+fix(50/d));
plot(a(1,:),1:512,'r');
a=ones(512)*(256+yc+0.5-fix(50/d));
plot(a(1,:),1:512,'r');
a=ones(512)*(256+xc-fix(50/d));
plot(1:512,a(1,:), 'r');
a=ones(512)*(256+xc+fix(50/d));
plot(1:512,a(1,:), 'r');
%for i=1:10
%      plot(256+yc+0.5-fix((s4(i,2)-50)/d),256+xc-fix((s4(i,1)-50)/d), 'm*');
%end

```

C 附录三: 第三问程序

```

%ctReturn5
clear;clc;
load('SHEEL.mat');
figure (2)
d = 0.2768;
phantom5 = [zeros(100,180); s5; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img5 = iradon(phantom5,[0:179]+120,'v5cubic','None',1,512);
%img=imcrop(img,[256+yc+0.5-fix(50/d) 256+xc-fix(50/d) 2*fix(50/d) 2*fix(50/d)]);
imagesc(img5)
hold on;
plot(256,256,'or')
plot(256+yc,256+xc,'ok')
a=ones(512)*(256+yc+0.5+fix(50/d));
plot(a(1,:),1:512,'r');
a=ones(512)*(256+yc+0.5-fix(50/d));
plot(a(1,:),1:512,'r');
a=ones(512)*(256+xc-fix(50/d));
plot(1:512,a(1,:), 'r');
a=ones(512)*(256+xc+fix(50/d));
plot(1:512,a(1,:), 'r');
%for i=1:10

```

```
%      plot(256+yc+0.5-fix((s4(i,2)-50)/d),256+xc-fix((s4(i,1)-50)/d),'m*');
%end
```

D 附录四：第一问误差分析

```
%duibi
clear;clc;
load('SHEEL.mat');
d = 0.2768;
phantom5 = [zeros(100,180); s2; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img5 = iradon(phantom5,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
tem=img5;

tem=imcrop(tem,[256+yc+0.5-fix(50/d) 256+xc-fix(50/d) 2*fix(50/d) 2*fix(50/d)]);

tem=imresize(tem,[256,256]);
tem=imrotate(tem,-90);
tem=(tem>0.3);
tem=double(tem);
cha1=tem-s1;
cha2=s1-tem;
figure(1);
imshow(cha1,[-1 1]);
```

E 附录五：第一问吸收率最大值的求解

```
%maxOfReduce
function [ long ,whereEnd ] = maxOfReduce( col )

L=[];
L(1)=0;
for i=2:512
if col(i)~=0
L(i)=L(i-1)+1;
else
L(i)=0;
```

```

end
end
[long, whereEnd]=max(L);
end

```

F 附录六: 第一问最宽处 ϕ 长轴的求解

```

%duibi
clear;clc;
load('SHEEL.mat');
d = 0.2768;
phantom5 = [zeros(100,180); s2; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img5 = iradon(phantom5,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
tem=img5;

tem=imcrop(tem,[256+yc+0.5-fix(50/d) 256+xc-fix(50/d) 2*fix(50/d) 2*fix(50/d)]);

tem=imresize(tem,[256,256]);
tem=imrotate(tem,-90);
tem=(tem>0.3);
tem=double(tem);
cha1=tem-s1;
cha2=s1-tem;
figure(1);
imshow(cha1,[-1 1]);

```

G 附录七: 第二问吸收率的求解

```

%problem2
clear;clc;
load('SHEEL.mat');
figure(2)
d = 0.2768;
phantom1 = [zeros(100,180); s2; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img1 = iradon(phantom1,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
tem=img1;

```

```

tem=imcrop(tem,[256+yc+0.5-fix(50/d) 256+xc-fix(50/d) 2*fix(50/d) 2*fix(50/d)]);

tem=imresize(tem,[256,256]);
tem=imrotate(tem,-90);
tem=tem.*2;
%imagesc(tem./2);
mesh(tem);

```

H 附录八: 旋转中心求解

```

%ss915finally
clear; clc;
load('SHEEL.mat');

maxInS2=max(max(s2));
[row,col]=find(maxInS2==s2);

[a,b,c]=getLongestCol(s2);

```

I 附录九: 第三问十个点的吸收率

```

%xiaolvzhi3
clear; clc;
load('SHEEL.mat');
d = 0.2768;
phantom5 = [zeros(100,180); s5; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img5 = iradon(phantom5,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
img=img5.*2;
xishoulv_5=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
for i=1:10
xishoulv_5(i)=img(256+yc+0.5-fix((s4(i,2)-50)/d),256+xc-fix((s4(i,1)-50)/d));
end

```

J 附录十: 第二问十个点的吸收率

```

%xishoulv2
clear ; clc ;
load ( 'SHEEL.mat' );
d = 0.2768;
phantom5 = [zeros(100,180); s3; zeros(100,180)];
xc = -33;          yc = 20.5;          %*d
img5 = iradon(phantom5,[0:179]+120,'v5cubic','Shepp-Logan',1,512);
img=2.*img5;
xishoulv_2=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
for i=1:10
xishoulv_2(i)=img(256+yc+0.5-fix((s4(i,2)-50)/d),256+xc-fix((s4(i,1)-50)/d));
end

```