数学物理方法

教师：苏有琦

单位：大气科学学院

回顾

➢ 求解数学物理方程的常用方法

求解方法	适用条件
分离变量法	齐次方程，齐次边界条件
特征函数法	非齐次方程，齐次边界条件
函数代换法 （将非齐次边界条件变为齐次边界条件）	非齐次边界条件
行波法	主要用于求解无界域内齐次波动方程的定解问题
积分变换法	适用于无界区域或者半无界区域的定解问题

第四章 格林函数法

本章我们将介绍用格林函数法求解拉普拉斯方程边值问题的要点与步骤，把拉普拉斯方程第一边值问题的解通过格林函数以积分的形式表示出来.

4.1 拉普拉斯方程的格林函数法–拉普拉斯方程边值问题的提法

➢ 我们已经从无源静电场的电位分布以及稳恒温度场的温度分布两个问题推导出了三维拉普拉斯方程

$$\Delta_3 u = 0 \text{或者} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

作为描述稳恒和平衡等物理状态的拉普拉斯方程，他不能提初值条件。至于边界条件，应用的较多的是如下两种边值问题.

(1)第一边值问题

在空间(x, y, z)中某一区域Ω的边界Γ上给定了连续函数f，要求这样一个函数$u(x, y, z)$，它在$\Omega + \Gamma$上连续，在Ω内有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程，在Γ上与已知函数f相重合，即

$$u\big|_{\Gamma} = f, \tag{4.1}$$

第一边值问题也称为狄利克雷（Dirichlet）问题。

4.1 拉普拉斯方程的格林函数法--拉普拉斯方程边值问题的提法

拉普拉斯方程的连续解，也就是说，具有二阶连续偏导数并且满足拉普拉斯方程的连续函数，称为调和函数。所以，狄利克雷问题也可以换一种说法：在区域Ω内找一个调和函数，它在边界$\varGamma$上的值为已知.

(2)第二边值问题

在某光滑的闭曲面$\varGamma$上给出连续函数f，要求寻找这样一个函数$u(x,y,z)$，它在$\varGamma$内部的区域Ω中是调和函数，在Ω+$\varGamma$上连续，在$\varGamma$上任一点处法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$存在，并且等于已知函数$f$在该点的值

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varGamma}=f, \tag{4.2}$$

这里的$\vec{n}$是$\varGamma$的外法向量. 第二边值问题也称诺伊曼（Neumann）问题.

以上两个边值问题都是在边界上给定某些边界条件，在区域内部求拉普拉斯方程的解，这样的问题称为内问题.

4.1 拉普拉斯方程的格林函数法–拉普拉斯方程边值问题的提法

在应用中，我们还会遇到狄利克雷问题和诺伊曼问题的另一种提法，例如，当确定某物体外部的稳恒温度场时，就归结为在区域Ω的外部求调和函数u，使满足边界条件$u|_{\Gamma}=f$，这里Γ是Ω的边界，f表示物体表面的温度分布.像这样的定解问题称为拉普拉斯方程的外问题.

4.1 拉普拉斯方程的格林函数法–拉普拉斯方程边值问题的提法

由于拉普拉斯方程的外问题是在无穷区域上给出的，定解问题的解是否应加以一定的限制？基于在电学上总是假定在无穷远处的电位为零，所以在外问题中常常要求附加如下条件：

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}) \tag{4.3}$$

（3）狄利克雷外问题

在空间(x,y,z)的某一闭合曲面Γ上给定连续函数f，要找出这样一个函数$u(x,y,z)$，它在Γ的外部区域Ω'内调和，在$\Omega'+\Gamma$上连续，当点(x,y,z)区域无穷远时，$u(x,y,z)$满足条件（4.3），并且它在边界Γ上取所给的函数值

$$\boldsymbol{u}\Big|_{\Gamma} = \boldsymbol{f}$$

4.1 拉普拉斯方程的格林函数法–拉普拉斯方程边值问题的提法

（4）诺伊曼外问题

在光滑的闭曲面 Γ 上给定连续函数 f，要找出这样一个函数 $u(x,y,z)$ 在，它在闭曲面 Γ 的外部区域 Ω' 内调和，在 $\Omega'+\Gamma$ 上连续，在无穷远处满足条件（4.3），而且它在 Γ 上任一点的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}'}$ 存在，并满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}'}\right|_{\Gamma}=f \tag{4.4}$$

这里 $\vec{n}'$ 是边界曲面 Γ 的内法向量.

下面我们重点讨论内问题，所有方法也可以适用于外问题.

4.2 格林公式及其应用

- 圆对称解

二维拉普拉斯方程 $$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{4.5}$$

的圆对称解

二维拉普拉斯方程在极坐标中的表达式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \tag{4.6}$$

求方程（4.6）的圆对称的解$u(r)$（即$u(r)$不依赖于θ的解），此时方程可化简为

$$\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0$$

变系数常微分方程—变量代换（令$t=lnr$，或者r$=e^t$），解得:

$$u=C_1 lnr+C_2 \qquad (r\neq 0)$$

C_1和C_2为任意常数.

4.2 格林公式及其应用

$$u = C_1 lnr + C_2 \qquad (r \neq 0)$$

若令$C_1 = -1$，$C_2 = 0$，则可得到

$$u_0 = ln\frac{1}{r} \qquad (r \neq 0)$$

通常称它为二维拉普拉斯方程的基本解.（圆对称解）

- 球对称解

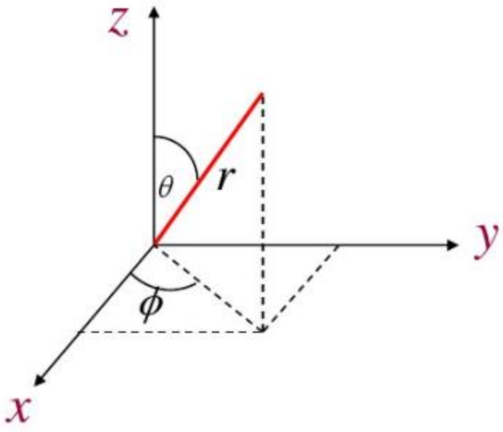
三维拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

的球对称解

4.2 格林公式及其应用

作球坐标变换



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi$$

$$r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

4.2 格林公式及其应用

球坐标系下三维拉普拉斯方程变为如下形式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (4.7)$$

求方程（4.7）的球对称的解$u(r)$（即$u(r)$不依赖于θ和φ的解），此时方程可化简为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0$$

直接积分，得到解为

$$u=\frac{C_1}{r}+C_2 \qquad (r\neq 0)$$

其中C_1，C_2为任意常数。若令$C_1=1$，$C_2=0$，则可得到

$$u_0=\frac{1}{r} \qquad (r\neq 0)$$

通常称它为三维拉普拉斯方程的基本解。

4.2 格林公式及其应用

二维拉普拉斯方程的基本解

$$u_0 = \ln\frac{1}{r} \qquad (r \neq 0)$$

三维拉普拉斯方程的基本解

$$u_0 = \frac{1}{r} \qquad (r \neq 0)$$

研究三维拉普拉斯方程中，**基本解**起着非常重要的作用。

很容易验证，当$r \neq 0$时，函数$\frac{1}{r}$和$\ln\frac{1}{r}$分别满足三维和二维拉普拉斯方程

三维和二维拉普拉斯方程基本解在研究**拉普拉斯方程解的积分表达式**起着非常重要的作用

4.2 格林公式

建立拉普拉斯方程解的积分表达式，需要先推导出格林公式，而格林公式则是曲面积分中（奥-高）高斯公式的直接推论

- 高斯公式的回顾

设Ω是以足够光滑的曲面Γ为边界的有界区域，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$是在$\Omega+\Gamma$上连续的，在Ω内具有一阶连续偏导数的任意函数，则成立如下高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iint_{\Gamma}[P\cos(\vec{n},x)+Q\cos(\vec{n},y)+R\cos(\vec{n},z)]dS \quad (4.7)$$

其中dV是体积元素，$\vec{n}$是Γ的外法向量，$\cos(\vec{n},x)$，$\cos(\vec{n},y)$，$\cos(\vec{n},z)$是$\vec{n}$的方向余弦.dS是Γ上的面积元素.

高斯公式反映了三重积分与曲面积分之间的内在联系

格林公式

- 由高斯公式可以推导出以下两个推论

设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在$\Omega+\Gamma$上具有一阶连续偏导数，在Ω内具有连续的所有二阶偏导数，令

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

则有

$$\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iint_{\Gamma}[u\frac{\partial v}{\partial x}cos(\vec{n},x)+u\frac{\partial v}{\partial y}cos(\vec{n},y)+u\frac{\partial v}{\partial z}cos(\vec{n},z)]dS$$

格林公式

左边: $$\iiint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]dV$$

右边: $$\frac{\partial v}{\partial x}cos(\vec{n},x)+\frac{\partial v}{\partial y}cos(\vec{n},y)+\frac{\partial v}{\partial z}cos(\vec{n},z)=\nabla v\cdot\vec{n}=\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}$$

$$\iiint_\Omega (u\Delta v)dV+\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV=\iint_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}dS \qquad (4.8)$$

其中$\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}$为$v$沿方向$\vec{n}$的方向导数，$\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$和$\nabla v=(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z})$，分别为$u$和$v$的梯度，(4.8)式称为第一格林公式（专门用于拉普拉斯方程和泊松方程的处理）.

格林公式

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v)dV+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV=\iint_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS \tag{4.9}$$

将（4.9）中的u和v的位置互换，得

$$\iiint_{\Omega}(v\Delta u)dV+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)dV=\iint_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS \tag{4.10}$$

将（4.9）与（4.10）相减，得到第二格林公式

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dV=\iint_{\Gamma}(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})dS \tag{4.11}$$

公式(4.11)对于在Ω内有二阶连续偏导数，在Ω+ Γ上有一阶连续偏导数的任意函数$u=u(x,y,z)$和$v=v(x,y,z)$都是成立的.

格林公式

➢ 补充：平面上的格林公式

利用已知结论

设$\boldsymbol{D}$是以足够光滑的曲线$\boldsymbol{C}$为边界的有界区域，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是在$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}$上连续，在$\boldsymbol{D}$内有连续偏导数的任意函数，则成立如下公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\sigma=\int_C \left(P\cos(\vec{n},x)+Q\cos(\vec{n},y)\right)dS \qquad (3')$$

其中$d\sigma$是面积元素，$\vec{n}$是C的外法线方向，dS是C上的弧长元素.

格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\sigma = \int_C \left(P\cos(n,x) + Q\cos(n,y)\right) dS \qquad (3')$$

设函数$u = u(x,y)$和$v = v(x,y)$以及他们的所有一阶偏导数在$D + C$上是连续的，且在D内具有连续的所有二阶偏导数.

在公式(3')中，令$P = u\frac{\partial v}{\partial x}$，$Q = u\frac{\partial v}{\partial y}$，则得：

$$\iint_D u\Delta v d\sigma = \int_C u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) d\sigma \qquad (4')$$

将u和v互换，得到

$$\iint_D v\Delta u d\sigma = \int_C v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\sigma \qquad (5')$$

格林公式

由(4')减去(5')，则得到平面上的格林公式

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)d\sigma = \int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS \tag{6'}$$

公式（6'）对于D内有二阶连续偏导数，在$D+C$上有一阶连续偏导数的任意函数$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$都是成立的.

把所有维数的格林第一第二公式统一在一个形式下

格林公式

利用格林公式可以推出调和函数的一些基本性质

➢ 调和函数的积分表达式

设Ω为实数域中的给定区域， $M_0(x_0,y_0,z_0)$为Ω中固定点， $M(x,y,z)$为Ω中动点，记

$$r_{MM_0}=\overline{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

为M与M_0两点间的距离.

现在我们来求调和函数在M_0的值.为此，构造一个函数

$$v=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

很显然，$v=\frac{1}{r}$是三维拉普拉斯方程的基本解。函数$v=\frac{1}{r}$除了点$M_0(x_0,y_0,z_0)$以外处处满足拉普拉斯方程。

格林公式

➢ 调和函数的积分表达式

由于$v=\frac{1}{r}$在区域Ω内有奇点M_0，做一个以M_0为球心，以充分小的正数ε为半径的球面Γ_ε，在Ω内挖去Γ_ε所包围的球域K_ε得到$\Omega-K_\varepsilon$，在$\Omega-K_\varepsilon$内直至边界上$v=\frac{1}{r}$是任意次可微的.

在第二格林公式中取函数u为调和函数，假定它在$\Omega+\Gamma$上有一阶连续偏导数，而取$v=\frac{1}{r}$，并以$\Omega-K_\varepsilon$代替公式中的Ω，则公式可转化为：

$$\boxed{\iiint_\Omega (u\Delta v)dV-\iiint_\Omega (v\Delta u)dV=\iint_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega-K_\varepsilon}\left(u\Delta\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\Delta u\right)dV=\iint_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \vec{n}}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS}$$

格林公式

➢ 调和函数的积分表达式

等式左端，因为在$\Omega - K_\varepsilon$内部

$$\Delta u = 0，\ \Delta \frac{1}{r} = 0$$

等式右端，积分区域分割原理

$$外表面：\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS$$

$$内表面，球面K_\varepsilon上：\iint_{\Gamma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{n}} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS$$

因为K_ε的外法向指向内部，因此球面上$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$

因为球域K_ε的半径为ε，则$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$

$$因此，内表面，球面K_\varepsilon上：\iint_{\Gamma_\varepsilon}\left(u\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS$$

格林公式

➢ 调和函数的积分表达式

因此，内表面，球面K_ε上：

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon}(u\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})dS=\iint_{\Gamma_\varepsilon}(u\frac{1}{\varepsilon^2}-\varepsilon\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Gamma_\varepsilon}udS-\varepsilon\iint_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS$$

$$=4\pi\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Gamma_\varepsilon}udS}-4\pi\varepsilon\boxed{\iint_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS}$$

球面平均

$$=4\pi\bar{u}-4\pi\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial \vec{n}}$$

因此，得到

$$\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \vec{n}}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS+4\pi\bar{u}-4\pi\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial \vec{n}}=0$$

格林公式

➢ 调和函数的积分表达式

$$\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\vec{n}}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS+4\pi\bar{u}-4\pi\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}=0$$

在$\varepsilon\to 0$时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{u}=u\,(M_0)$，因为$u\,(x,y,z)$连续且一阶连续可微，所以$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}$有界（有限量），所以$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}4\pi\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}=0$，则上式可化为

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\vec{n}}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS$$

上式说明，对于在$\Omega+\Gamma$上有连续一阶偏导数的调和函数u，它在区域Ω内任意一点M_0的值，可以通过上式积分表达式用这个函数在区域边界Γ上的值及其在Γ上的法向导数来表示.

格林公式

- 调和函数的基本性质：

性质1

设$u(x,y,z)$是区域Ω内的调和函数，在$\Omega+\Gamma$上有一阶连续偏导数，则

$$\boxed{\iint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=0}$$

其中Γ是区域Ω的边界，$\vec{n}$是Γ的外法线方向。说明调和函数的外法线方向的导函数沿着区域边界的积分是零。

物理意义：对于稳定的温度场，这表示经过物体界面流入和流出物体的热量相等（边界流量的平均值是零），否则就不能保持热的动态平衡，而使温度产生不稳定。

格林公式

➢ 调和函数的基本性质：

- 性质1 证明：

设u是在以Γ为边界的区域Ω内的调和函数，在$\Omega+\Gamma$上有一阶连续偏导数，则在第二格林公式中取u为所给的调和函数，$v\equiv 1$，就得到

$$\boxed{\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dV=\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS} \Rightarrow \boxed{\iint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS=0}$$

- 诺伊曼内问题有解的必要条件

由$\iint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dS=0$可得诺伊曼内问题（$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f$）有解的必要条件为函数$f$满$\iint_{\Gamma}f\,dS=0$

诺伊曼内问题 $\begin{cases}\Delta u(x,y,z)=0,(x,y,z)\in\Omega\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f(x,y,z)\end{cases}$

格林公式

➢ 调和函数的基本性质：

性质2 平均值公式

设函数$u(M)$在某区域Ω内是调和的，K_a表示以M_0为球心、以a为半径且完全落在区域Ω内部的球面，则成立如下平均值公式

$$\boxed{u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{K_a} u dS}$$

证明：把$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\vec{n}}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS$应用到球面$K_a$上，得到

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{K_a}\left(u\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS$$

右边第一项：

$$\iint_{K_a} u\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\iint_{K_a} u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\iint_{K_a} u\left(-\frac{1}{r^2}\right)dS=\iint_{K_a} u\left(-\frac{1}{a^2}\right)dS$$

格林公式

➢ 调和函数的基本性质：

性质2 平均值公式

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{K_a}\left(u\left(-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS$$

其中右边第二项：$\iint_{K_a}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\frac{1}{a}\iint_{K_a}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS$

由性质1得到，调和函数的外法线方向的导函数在沿着区域边界的积分是零，因此

$$\iint_{K_a}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\frac{1}{a}\iint_{K_a}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=0$$

得到

$$\boxed{u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{K_a}u\,dS}$$

上式为在**球面上$u(M_0)$的积分表达**形式

格林公式

➢ 调和函数的基本性质：

性质3：拉普拉斯方程解的唯一性（基于格林公式）

狄利克雷问题在$C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\overline{\Omega})$内的解是唯一确定的，诺伊曼问题的解除了相差一常数外也是唯一确定的.

证明： 以u_1和u_2表示定解问题的两个解，则他们的差$v=u_1-u_2$必是原问题满足零边界条件的解

狄利克雷问题，v满足 $\begin{cases}\Delta v=0, & v\in\Omega\\ v\big|_{\Gamma}=0.\end{cases}$ 诺伊曼问题问题，v满足 $\begin{cases}\Delta v=0, & v\in\Omega\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0.\end{cases}$

下面证明满足以上狄利克雷问题的函数v，若满足$v\in C^1(\overline{\Omega})$，则在$\Omega$内恒为零，满足以上诺伊曼问题的函数$v$为一个常数

格林公式

- 调和函数的基本性质：

性质3：拉普拉斯方程解的唯一性（基于格林公式）

使用第一格林公式，取$u = v = u_1 - u_2$

$$\boxed{\iiint_{\Omega}(u\Delta v)dV + \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV = \iint_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{0 = \iint_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS - \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV = 0} \Rightarrow \boxed{\iiint_{\Omega}|grad\ v|^2 dV = 0}$$

格林公式

➢ 调和函数的基本性质：

性质3：拉普拉斯方程解的唯一性（基于格林公式）

$$\boxed{\iiint_{\Omega} |grad\ v|^2 dV = 0}$$

所以在Ω内必有

$$|grad\ v| = 0$$

所以

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{或者} v = C$$

对于狄利克雷问题，由边界条件$v|_{\Gamma} = 0$，则$v = 0$

4.3 格林函数

对于在区域Ω中为调和函数，在Ω+ $\varGamma$上具有一阶连续偏导数的函数u，我们有等式

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\varGamma}[u\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\frac{1}{r_{MM_0}})-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}]dS \qquad (1)$$

积分表达式表示函数u在区域Ω内部的数值可以用函数u及其法向导数$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$在边界$\varGamma$上的数值表示出来。

但狄利克雷问题或诺伊曼问题的解还不能直接由（1）式求出.
对于狄利克雷问题，u在$\varGamma$上的值是已给定的，而$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$在边界$\varGamma$上的值就不知道，由于狄利克雷的解是唯一的，因此，$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$在边界$\varGamma$上的值就不能再任意给定了. 所以，不能通过调和函数的积分表示直接求解拉普拉斯方程的边值问题.

4.3 格林函数

对于狄利克雷问题，为了求解狄利克雷问题，我们自然首先想到从公式（1）中设法消去$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. 为此，我们需要引入格林函数的概念. 借助格林第二公式

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dV=\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS \qquad (2)$$

在格林第二公式（2）中，取函数u,v均为区域Ω内的调和函数，并在$\Omega+\Gamma$上具有一阶连续偏导数的函数，则得到

$$0=\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS \qquad (3)$$

将（3）式与（1）式相加，得到

$$u(M_0)=\iint_{\Gamma}-\frac{1}{4\pi}\left[u\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right]+\left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS \qquad (4)$$

4.3 格林函数

将（4）式进一步化简，得到

$$u(M_0)=\iint_{\Gamma}-\frac{1}{4\pi}\left[u\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right]+\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS \qquad (4)$$

$$u(M_0)=\iint_{\Gamma}\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]+\boxed{\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-v\right)}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right\}dS \qquad (5)$$

如果能选取调和函数v，使其在边界上满足

$$v\Big|_{\Gamma}=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\Big|_{\Gamma}$$

这样（5）式中的$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$项就消失了，于是有

$$u(M_0)=\iint_{\Gamma}u\left[\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]dS \qquad (6)$$

4.3 格林函数

将（6）式进一步化简，得到

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v\right) dS \tag{7}$$

令

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v \tag{8}$$

则（8）式可表示为

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS \tag{9}$$

其中$G(M, M_0)$称为拉普拉斯方程的格林函数（或称为狄利克雷问题的源函数）. 而且$G(M, M_0)$在边界Γ上恒等于0.

4.3 格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v \tag{8}$$

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS \tag{9}$$

因此，如果格林函数$G(M, M_0)$已经知道，并且它在$\Omega+\Gamma$上具有一阶连续偏导数，如果拉普拉斯方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in \Omega \\ u\big|_{\Gamma} = f(x,y,z). \end{cases} \tag{10}$$

在$\Omega+\Gamma$上具有一阶连续偏导数的解存在的话，那么定解问题（10）的解可表示为

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} f(x,y,z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS \tag{11}$$

4.3 格林函数

对于泊松方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{F}，(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \Omega \\ \boldsymbol{u}\Big|_{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}). \end{cases}$$

若存在在$\overline{\Omega}$上一次连续可微的解，这个解必能表示为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{M_0}) = -\iint_{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{f}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} \boldsymbol{dS} - \iiint_{\Omega} \boldsymbol{GFdV}$$

这样一来，对任意函数$\boldsymbol{f}$求解拉普拉斯方程或泊松方程的狄利克雷问题就转化为求此区域内的格林函数.

应用（11）求解拉普拉斯方程的狄利克雷问题时，关键在于要找到格林函数（8）的$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M_0})$

4.3 格林函数

从$v|_{\Gamma}=\left.\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\right|_{\Gamma}$可知，确定格林函数由必须解一个特殊的狄利克雷问题

$$\begin{cases}\Delta v(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in\Omega\\ v|_{\Gamma}=\left.\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}\right|_{\Gamma}\end{cases}$$

由这个函数v确定的格林函数，称为第一边值问题的格林函数.

注：这个定解问题求解也不简单，所以说它只有理论意义.

对于某些特殊区域，如球域、半空间等，可以求出格林函数

4.3 格林函数

➢ 格林函数的几个重要性质

性质1 格林函数$G(M,M_0)$在除去$M=M_0$一点外处处满足拉普拉斯方程，当$M\to M_0$时，$G(M,M_0)$趋于无穷大，其阶数和$\frac{1}{r_{MM_0}}$相同.

性质2 在边界Γ上格林函数$G(M,M_0)$恒等于0

性质3 在区域Ω内，下面不等式成立

$$0<G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

性质4 （对称性）

格林函数$G(M,M_0)$关于自变量M和参量M_0之间具有对称性质，即若M_1，$M_2\in\Omega$，则

$$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$$

这个性质在电学上的意义可以这样来描述：

M_1处的单位点电荷在M_2处产生的电位等于M_2处的单位点电荷在M_1处产生的电位

4.3 格林函数

➢ 格林函数的几个重要性质

性质5

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \vec{n}} dS = -1$$

证明 考察下列狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \\ \left. u \right|_{\Gamma} = f(x, y, z) = 1. \end{cases}$$

利用格林公式可以得到

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} f \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS = -\iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS$$

4.4 两种特殊区域的格林函数及狄利克雷问题的解

对于一个由曲面Γ所围成的区域Ω，只要求出了它的格林函数，则在这个区域内狄利克雷的解就能以积分形式表示出来，对于某些特殊的区域，它的格林函数可以用**电象法（镜像法）**求得.

电象法：在区域Ω外找出M_0关于边界Γ的象点M_1，然后在这个象点放置适当的负电荷，由它产生的负电位与点M_0单位正电荷所产生的正电位在曲面Γ上互相抵消，由于M_0在Γ内部，它关于Γ的象点M_1则在Γ的外部。放在M_1处的点电荷所形成的电

场的电位在Γ的内部是调和函数v，而且根据库仑定律，$v|_\Gamma = \left.\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\right|_\Gamma$，所以，在$M_0$和$M_1$处两个点电荷所形成电场在$\Gamma$内的电位就是所要求的格林函数。

4.4.1 半空间的格林函数

求解拉普拉斯方程在半空间$z \geq 0$内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \ z > 0 & (12) \\ u\big|_{z=0} = f(x,y,z). -\infty < x, y < +\infty & (13) \end{cases}$$

首先找到格林函数$G(M, M_0)$，在半空间$z > 0$的点$M_0(x_0, y_0, z_0)$放单位正电荷，并找出M_0关于$z = 0$平面的对称点$M_1(x_0, y_0, -z_0)$，在M_1放单位负电荷，则它与点M_0的电位正电荷所产生的电位在平面$z = 0$上互相抵消。由于$\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$在上半空间$z > 0$内为调和函数，在闭域$z \geq 0$上具有连续一阶偏导数，因此，上半空间的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi r_{MM_1}}$$

4.4.1 半空间的格林函数

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} f(x,y,z)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}dS \qquad (14)$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi r_{MM_1}} \qquad (15)$$

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$r_{MM_1} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$$

为了求（12）和（13）的解，需要计算$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{z=0}$，由于在平面$z$=0上的外法线方向是$oz$轴的负向，因此，

4.4.1 半空间的格林函数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$= -\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi r_{MM_1}}\right)}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left.\left\{\frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}\right|_{z=0}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + {z_0}^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (16)$$

4.4.1 半空间的格林函数

将（16）代入到（14）中，得到

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} f(x, y, z)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}dS \tag{14}$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + {z_0}^2]^{\frac{3}{2}}}f(x, y)dxdy$$

4.4.2 球域的格林函数

求解球域上的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, & (x,y,z)\in\Omega \\ u\big|_{\Gamma}=f(x,y,z). \end{cases}$$

其中Ω是以o为心，R为半径的球域，边界为Γ

现利用静电源像法求球的格林函数，设有一个球心在原点，半径为R的球面Γ，在球内任取一点$M_0(r_{oM_0}=\rho_0)$，连oM_0并延长至M_1使$r_{oM_0}\cdot r_{oM_1}=R^2$，点$M_1$称为$M_0$关于球面$\Gamma$的反演点。以$\rho_1$表示$r_{oM_1}$，则

$$\rho_0\rho_1=R^2$$

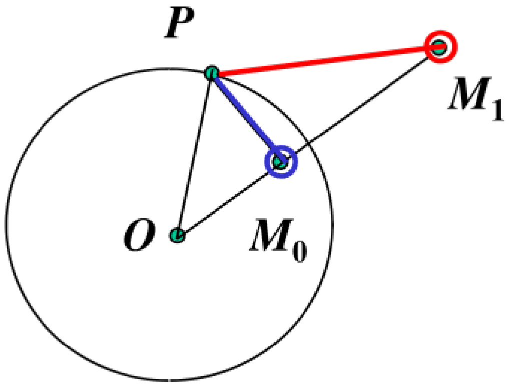
在点M_0放单位正电荷，在M_1放置q单位的负电荷，选取适当q值，使得这两个电荷产生得电位在球面Γ上相互抵消，P为球面任意一点，即

$$\frac{1}{4\pi r_{M_0P}}=\frac{q}{4\pi r_{M_1P}} \qquad \text{或者} \qquad q=\frac{r_{M_1P}}{r_{M_0P}}$$

4.4.2 球域的格林函数

因为 $$\rho_0\rho_1 = R^2$$

即 $$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}$$



即ΔOM_1P和ΔOM_0P是相似三角形，因此

$$\frac{r_{M_1P}}{r_{M_0P}} = \frac{R}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{R}{\rho_0}$$

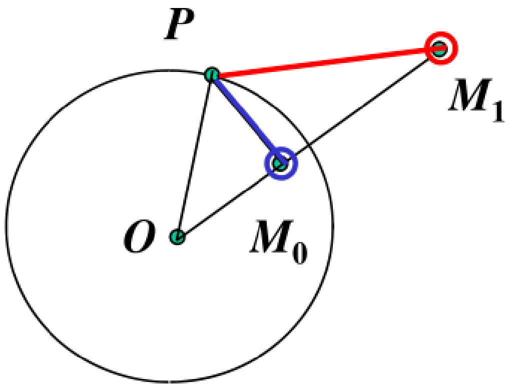
即在点M_1处放置$\frac{R}{\rho_0}$单位负电荷，由它形成的球域内任意一点M的电场的电位$v = \frac{R}{4\pi\rho_0 r_{M_1M}}$，不仅在$\Gamma$所围成的球域$\Omega$的内部是调和函数，在$\Omega+\Gamma$上一次连续可微，而且在$\Gamma$上满足

$$\left.\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}\right|_\Gamma = \left.\frac{R}{4\pi\rho_0 r_{M_1M}}\right|_\Gamma \qquad \text{即} \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0P}} - \frac{R}{\rho_0 r_{M_1P}}\right) = 0$$

4.4.2 球域的格林函数

所以球域的格林公式为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{R}{\rho_0 r_{M_1M}}\right)$$



记$r_0=r_{OM_0}$， $r=r_{OM}$， $r_1=r_{OM_1}$，γ是OM_0和OM的夹角

M是球域内部或者是球面上任意一点，在ΔOMM_0和ΔOMM_1中，分别用余弦定理，有

$$r_{MM_0}=\sqrt{{r_0}^2+r^2-2rr_0cos\gamma}$$

$$r_{MM_1}=\sqrt{{r_1}^2+r^2-2rr_1cos\gamma}$$

所以，

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{{r_0}^2+r^2-2rr_0cos\gamma}}-\frac{R}{r_0\sqrt{{r_1}^2+r^2-2rr_1cos\gamma}}\right)$$

4.4.2 球域的格林函数

由$r_1 = r_{OM_1} = \frac{R^2}{r_0}$，有

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{{r_0}^2 + r^2 - 2rr_0 cos\gamma}} - \frac{R}{\sqrt{{r_0}^2{r_1}^2 - 2R^2 rr_0 cos\gamma + R^4}}\right)$$

由于狄利克雷定解问题的解为

$$u(M_0) = -\iint_{\Gamma} f(M)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS$$

因此，求$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}$（多元函数求导，链式法则）

在球面Γ上

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R}$$

4.4.2 球域的格林函数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma}=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{2r-2r_0cos\gamma}{({r_0}^2+r^2-2rr_0cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}-(-\frac{1}{2})\frac{\left(2r{r_0}^2-2R^2r_0cos\gamma\right)R}{(r^2{r_0}^2-2R^2rr_0cos\gamma+R^4)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{r=R}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{r-r_0cos\gamma}{({r_0}^2+r^2-2rr_0cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\left(r{r_0}^2-R^2r_0cos\gamma\right)R}{(r^2{r_0}^2-2R^2rr_0cos\gamma+R^4)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{r=R}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{R-r_0cos\gamma}{({r_0}^2+R^2-2Rr_0cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\left(R{r_0}^2-R^2r_0cos\gamma\right)R}{(R^2{r_0}^2-2R^3r_0cos\gamma+R^4)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{r=R}$$

4.4.2 球域的格林函数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi R}\left(\frac{R^2 - {r_0}^2}{({r_0}^2 + R^2 - 2Rr_0 cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

现在利用格林函数求解球域内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0，\ (x, y, z) \in \Omega \\ \left. u\right|_{\Gamma} = f(x, y, z). \end{cases}$$

因此得到求内狄利克雷问题的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_{\Gamma} f(x, y, z)\frac{R^2 - {r_0}^2}{({r_0}^2 + R^2 - 2Rr_0 cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} dS$$

4.4.2 球域的格林函数

将坐标系统一成球坐标

$$\boxed{\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}}$$

$$\boxed{u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - {r_0}^2}{({r_0}^2 + R^2 - 2Rr_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} f(R, \theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi}$$

----球域上的泊松公式

其中$(r_0, \theta_0, \varphi_0)$为点$M_0$的坐标，$(R, \theta, \varphi)$是球面$\Gamma$上点$P$的流动坐标，$\cos\gamma$是$\overrightarrow{OM_0}$和$\overrightarrow{OP}$夹角的余弦，

$$\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OM_0}||\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$$

由于

$$\overrightarrow{OM_0} = (r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0, r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0, r_0\cos\theta_0)$$

$$\overrightarrow{OP} = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$

4.4.2 球域的格林函数

选取单位向量

$$\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{OP} = cos\gamma$$

$$\overrightarrow{OM_0} = (sin\theta_0 cos\varphi_0, sin\theta_0 sin\varphi_0, cos\theta_0)$$

$$\overrightarrow{OP} = (sin\theta cos\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\theta)$$

$$cos\gamma = cos\theta cos\theta_0 + sin\theta sin\theta_0 (cos\varphi cos\varphi_0 + sin\varphi sin\varphi_0)$$

$$= cos\theta cos\theta_0 + sin\theta sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$