

# **Traitement des signaux aléatoires**

GUY PLANTIER  
ESEO

9 décembre 2001

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Processus aléatoires scalaires</b>	<b>4</b>
1.1	Rappels sur les processus aléatoires scalaires. . . . .	4
1.1.1	Modèle de processus aléatoire. . . . .	4
1.1.2	Exemples de processus aléatoires. . . . .	5
1.1.3	Notion de signal aléatoire : $\xi$ est fixé . . . . .	7
1.1.4	Notion de variable aléatoire : le temps $t$ est fixé . . . . .	7
1.1.5	Exemples de caractérisation statistique des processus aléatoires . . . . .	7
1.2	Fonction de répartition et densité de probabilité d'une VA . . . . .	8
1.2.1	Définitions . . . . .	8
1.2.2	Rappels sur quelques résultats de la théorie élémentaire des probabilités . . . . .	8
1.2.3	Fonctions de Répartition et des Densités de Probabilité . . . . .	10
1.2.4	Variables aléatoires discrètes (VAD) . . . . .	12
1.2.5	Variable aléatoire continue (VAC) . . . . .	13
1.3	Estimation rudimentaire d'une Densité de Probabilité . . . . .	14
1.3.1	Histogramme . . . . .	14
1.3.2	Programme MATLAB d'estimation de $p_X(x)$ - Exemple . . . . .	15
1.4	Moyennes statistiques et moments . . . . .	16
1.4.1	Notion d'espérance mathématique d'une VAD . . . . .	16
1.4.2	Espérance mathématique d'une fonction d'une VAC . . . . .	18
1.4.3	Valeur moyenne statistique d'une VA . . . . .	19
1.4.4	Variance et écart type d'une VA . . . . .	19
1.4.5	Valeur quadratique moyenne d'une VA . . . . .	19
1.5	Quelques distributions de probabilités importantes . . . . .	19
1.5.1	Introduction . . . . .	19
1.5.2	Distribution uniforme . . . . .	20
1.5.3	Distribution binomiale . . . . .	20
1.5.4	Distribution de Poisson . . . . .	20
1.5.5	Distribution normale ou de GAUSS . . . . .	22
1.5.6	Distribution de RAYLEIGH . . . . .	25
1.6	Générateurs de nombres aléatoires de MATLAB . . . . .	26
1.6.1	Génération de variables aléatoires à DdP gaussienne - Fonction randn ( ) . . . . .	26
1.6.2	Génération de variables aléatoires à DdP uniforme - Fonction rand ( ) . . . . .	27
1.7	Transformation de VA scalaires . . . . .	28
1.7.1	Hypothèses de travail . . . . .	28
1.7.2	Exemple : relation linéaire instantanée . . . . .	28
1.7.3	Exemple : transformation quadratique . . . . .	30
1.7.4	Exemple : signal sinusoïdal à phase aléatoire . . . . .	32
1.7.5	Exemple : Redressement monoalternance . . . . .	34

<b>2</b>	<b>Vecteurs aléatoires</b>	<b>37</b>
2.1	Notion de vecteurs aléatoires - Définitions . . . . .	37
2.2	Fonctions de répartitions et densités de probabilité d'un vecteur aléatoire. . . . .	38
2.2.1	FR et DdP conjointes - Cas des vecteurs aléatoires continus . . . . .	38
2.2.2	FR et DdP conjointes - Cas des vecteurs aléatoires discrets . . . . .	39
2.2.3	FR et DdP conjointes - Cas général. . . . .	40
2.2.4	Propriétés remarquables des FR et DdP conjointes dans le cas de couples aléatoires. . . . .	40
2.2.5	Estimation de la densité de probabilité conjointe d'un couple aléatoire avec MATLAB . . . . .	41
2.2.6	Fonctions de répartitions et densités de probabilités marginales . . . . .	46
2.2.7	Fonctions de répartitions et densités de probabilités conditionnelles. . . . .	49
2.2.8	Variables statistiquement indépendantes. . . . .	51
2.3	Moyennes statistiques et espérances mathématiques de vecteurs aléatoires. . . . .	53
2.3.1	Espérance mathématique d'une fonction de vecteurs aléatoires. . . . .	53
2.3.2	Propriétés du second ordre. . . . .	54
2.3.3	Inégalité de SCHWARTZ pour variables aléatoires. . . . .	56
2.3.4	Quelques propriétés des matrices d'autocorrélation et d'autocovariance. . . . .	58
2.4	Densité de probabilité conjointe d'un vecteur aléatoire gaussien. . . . .	59
2.5	Transformations des vecteurs aléatoires . . . . .	60
2.5.1	Méthodologie générale . . . . .	60
2.5.2	Application très importante : DdP de la somme de deux variables aléatoires . . . . .	64
2.5.3	Cas particulier où la fonction de transformation est biunivoque . . . . .	68
2.6	Le théorème de la limite centrale par l'exemple . . . . .	75
2.6.1	Exemple de simulation : Somme des résultats du tirages de $N$ dés . . . . .	75
2.6.2	Exemple : DdP de la somme de $N$ variables aléatoires indépendantes . . . . .	76
2.6.3	Énoncé du théorème de la limite centrale . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Corrélations statistiques des signaux aléatoires</b>	<b>82</b>
3.1	Introduction, problématique et notations . . . . .	82
3.2	Statistiques d'ordres 1 et 2 . . . . .	83
3.2.1	Valeur moyenne statistique de processus aléatoires scalaires . . . . .	83
3.2.2	Variance d'un processus aléatoire scalaires . . . . .	84
3.2.3	Autocorrélation et intercorrélations statistiques de processus aléatoires scalaires . . . . .	84
3.2.4	Autocovariance et intercovariance statistique de processus aléatoires scalaires . . . . .	84
3.2.5	Moments statistiques d'ordres 1 et 2 des processus aléatoires vectoriels . . . . .	85
3.3	Stationnarité . . . . .	87
3.3.1	Stationnarité au sens strict . . . . .	87
3.3.2	Stationnarité au sens large ou stationnarité du second ordre . . . . .	87
3.3.3	Propriétés remarquables de l'autocorrélation et de l'intercorrélations . . . . .	89
3.3.4	Matrices d'autocorrélation et d'autocovariance d'un processus aléatoire stationnaire . . . . .	90
3.4	Ergodisme . . . . .	91
3.5	Densité spectrale de puissance (DSP) des processus stationnaires et ergodiques . . . . .	92
3.5.1	Périodogramme des signaux analogiques déterministes . . . . .	92
3.5.2	Périodogramme des signaux numériques déterministes . . . . .	94
3.5.3	Relations entre périodogrammes des signaux analogiques et numériques déterministes . . . . .	95
3.5.4	Densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique . . . . .	95
3.6	Théorème de Wiener-Khinchine . . . . .	96
3.7	Corrélations statistiques des processus aléatoires traités par un SLIT . . . . .	98
3.7.1	Introduction . . . . .	98
3.7.2	Moyenne de la réponse $Y(k, \xi)$ . . . . .	99
3.7.3	Équations de convolution pour la corrélation des signaux non stationnaires . . . . .	99

3.7.4	Équations de convolution pour la corrélation des signaux stationnaires . . . . .	100
3.7.5	Formulation matricielle des équations de convolution pour la corrélation des signaux stationnaires . . . . .	101
3.7.6	Équations aux différences pour la corrélation des signaux stationnaires . . . . .	102
3.8	Notion de bruit blanc . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Caractérisation de quelques processus aléatoires</b>	<b>105</b>
4.1	Signal aléatoire sinusoïdal à phase aléatoire . . . . .	105
4.1.1	Introduction . . . . .	105
4.1.2	Estimation de la moyenne et de la variance avec MATLAB . . . . .	105
4.1.3	Calcul théorique des moments d'ordre 1 et 2 . . . . .	105
4.2	Signal sinusoïdal à phase aléatoire modulé en amplitude par un processus aléatoire . . . . .	106
4.2.1	Introduction . . . . .	106
4.2.2	Détermination de la DSP de $B(k, \xi)$ . . . . .	107
4.2.3	Détermination des moments d'ordre 1 et 2 de $X(k, \xi)$ . . . . .	107
4.2.4	Calcul de la DSP de $X(k, \xi)$ . . . . .	107
4.3	Code en ligne NRZ en échantillonné . . . . .	107
4.3.1	Introduction . . . . .	107
4.3.2	Détermination de la valeur moyenne et de l'autocorrélation expérimentale . . . . .	108
4.3.3	Détermination des moments théoriques d'ordre 1 et 2 . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Notions d'estimation</b>	<b>110</b>
5.1	Introduction . . . . .	110
5.1.1	Notion d'estimation et objectif du travail . . . . .	110
5.1.2	Biais d'un estimateur . . . . .	111
5.1.3	Variance d'un estimateur . . . . .	111
5.1.4	Consistance d'un estimateur . . . . .	111
5.2	Etude d'un estimateur de moyenne . . . . .	112
5.2.1	Introduction . . . . .	112
5.2.2	Estimation de la moyenne du signal . . . . .	112
5.2.3	Calcul du biais, de la variance et de l'intervalle de confiance de l'estimateur . . . . .	112
5.3	Estimation à maximum de vraisemblance . . . . .	113
5.3.1	Introduction . . . . .	113
5.3.2	Estimation conjointe de la moyenne et de la variance d'une variable aléatoire . . . . .	114
5.3.3	Estimation de la vitesse d'un mobile en déplacement uniforme . . . . .	114

# Chapitre 1

## Processus aléatoires scalaires

### 1.1 Rappels sur les processus aléatoires scalaires.

#### 1.1.1 Modèle de processus aléatoire.

Soit  $\Omega$  un ensemble de résultats possibles d'une expérience statistique et soit  $\xi_i$  un élément de  $\Omega$ . Comme le montre la FIGURE 1.1 cet ensemble peut contenir un nombre  $N$  fini ou infini d'éléments.

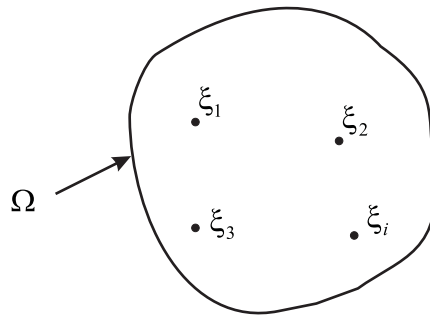


FIG. 1.1 – *Ensemble  $\Omega$  des résultats possible  $\xi$  d'une expérience statistique*

Un processus aléatoire ou processus stochastique est défini comme une famille de fonctions réelles ou complexes à 2 variables  $X(t, \xi)$ . La FIGURE 1.2 présente un exemple de de processus aléatoire et montre qu'à chaque événement  $\xi_i$  est associée **une et une seule** réalisation  $X(t, \xi_i)$ .

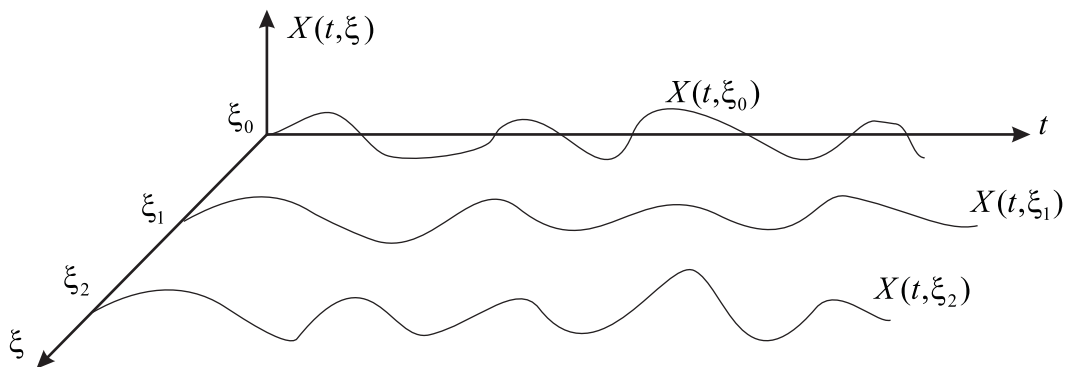


FIG. 1.2 – *Exemple de processus aléatoire. À chaque réalisation d'une expérience statistique  $\xi$  est associée une seule réalisation  $X(t, \xi)$*

### 1.1.2 Exemples de processus aléatoires.

#### Exemple 1

Soit  $M$  le nombre de valeurs distinctes que peuvent prendre toutes les réalisations possibles d'un processus à l'intérieur d'un intervalle quelconque. La FIGURE 1.3 présente différentes réalisations de processus à temps discret et à temps continu quantifiés ou non.

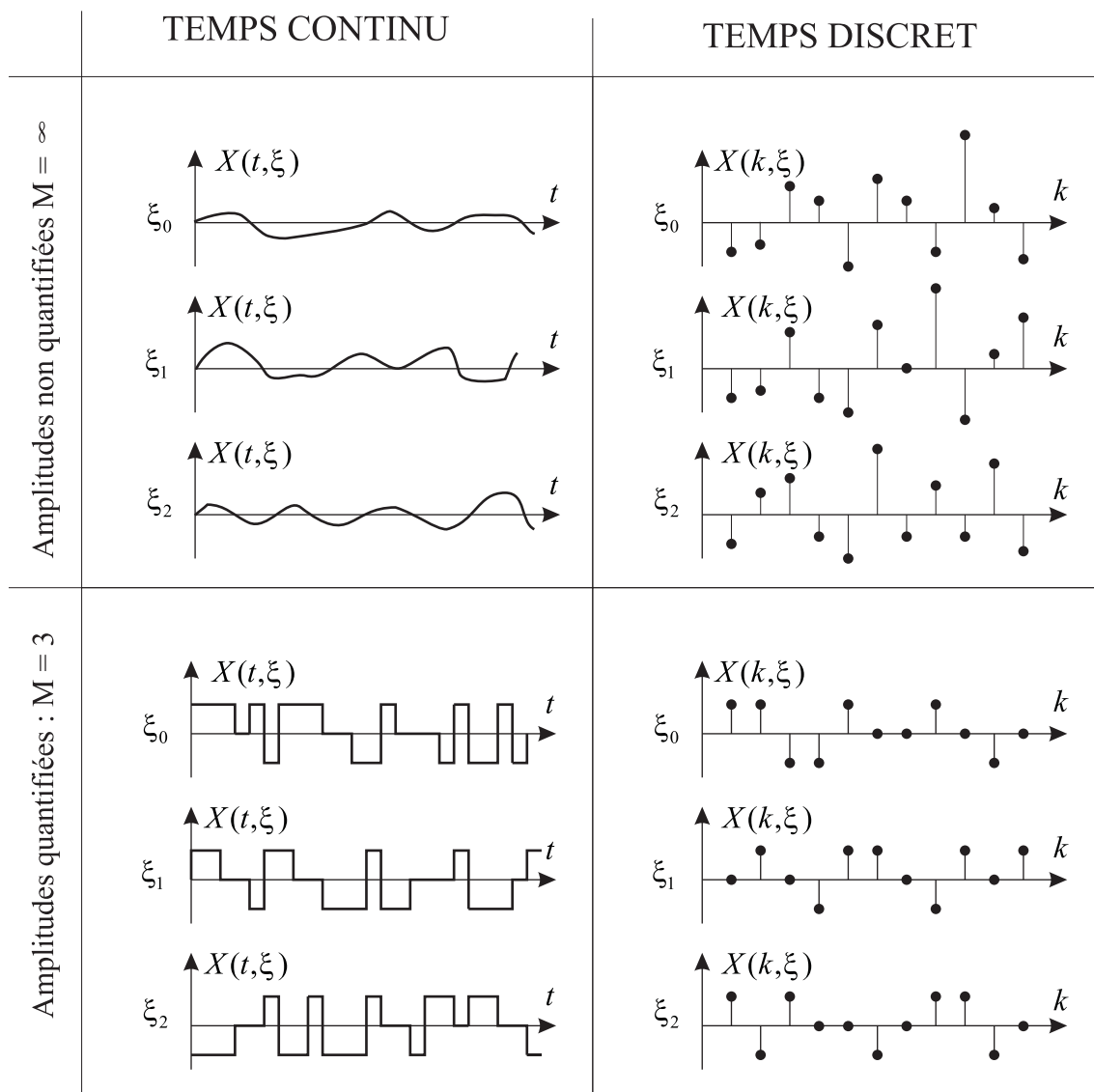


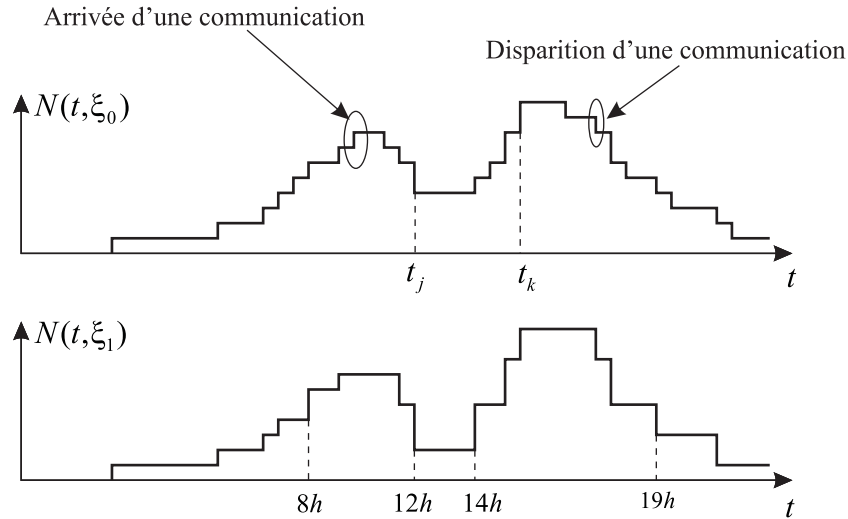
FIG. 1.3 – Différents exemples de processus à temps discret et à temps continu à amplitudes quantifiées ou non

En traitement des signaux aléatoires, les différentes réalisations  $X(t, \xi)$  ou  $X(k, \xi)$  portent des noms particuliers selon que le temps est continu ou discret :

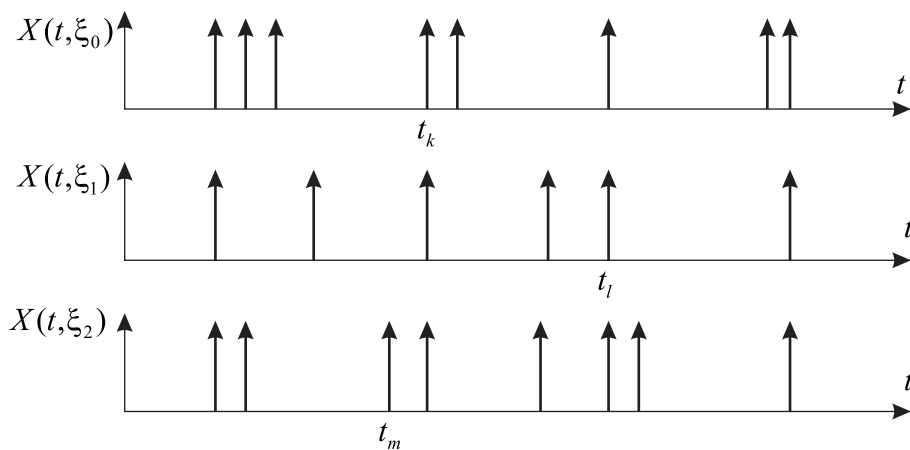
- $X(t, \xi)$  pour  $\xi$  donné désigne un **signal aléatoire**
- $X(k, \xi)$  pour  $\xi$  donné désigne une **suite aléatoire**

**Exemple 2 : Activité enregistrée dans un central téléphonique**

La FIGURE 1.4 présente deux réalisations de  $N(t, \xi)$ , nombre de connexions à un central téléphonique en fonction du temps. Les instants  $t_k$  et  $t_j$  d'arrivée ou de disparition de nouvelles communications sont aléatoires.

FIG. 1.4 – *Activité d'un central téléphonique***Exemple 3 : Processus ponctuel.**

La FIGURE 1.5 présente trois réalisations d'un processus aléatoire que l'on peut recueillir à la sortie d'un photomultiplicateur.

FIG. 1.5 – *Suite d'impulsions à la sortie d'un photomultiplicateur*

Les différentes réalisations  $X(t, \xi_i)$  apparaissent comme une suite d'impulsions arrivant à des temps aléatoires  $t_k$ ,  $t_l$  ou  $t_m$ . Ce processus est appelé processus ponctuel mais il est important de souligner que *ce n'est pas un processus à temps discret* car les  $t_k$ ,  $t_l$  ou  $t_m$  sont des instants quelconques (pas quantifiés).

### 1.1.3 Notion de signal aléatoire : $\xi$ est fixé

Pour  $\xi$  fixé ( $\xi = \xi_i$ ), le processus  $X(t, \xi)$  se réduit à **une réalisation**  $X(t, \xi_i)$  que l'on appelle **signal aléatoire**. Ces signaux, dont la valeur instantanée est imprévisible, ne possèdent pas de représentation temporelle analytique et ne peuvent pas être étudiés rigoureusement à l'aide des outils classiques du traitement des signaux déterministes.

### 1.1.4 Notion de variable aléatoire : le temps $t$ est fixé

Pour un temps  $t$  donné ( $t = t_j$ ) le processus se réduit à une fonction réelle de l'ensemble des résultats possibles d'une expérience statistique vers  $\mathbb{R}$ . Cette fonction de  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une **application** qui associe à chaque élément  $\xi$  **une et une seule** valeur réelle  $X(t_j, \xi)$  que l'on note souvent pour simplifier  $X_j(\xi)$  ou simplement  $X(\xi)$ . Ce sont les **propriétés statistiques** de ces variables aléatoires qui vont nous aider à traiter et analyser les processus aléatoires.

Ces processus sont en particulier caractérisés par leurs moyennes et moments statistiques généralement obtenus à partir des lois de probabilités marginales et conjointes des VA  $X(t_j, \xi)$  qui représentent le comportement du processus aux instants précis  $t_j$ .

### 1.1.5 Exemples de caractérisation statistique des processus aléatoires

**Définition et notation :**  $A(x) = \{\xi \mid X(\xi) = x\}$

$A(x)$  est l'ensemble des points de  $\Omega$  tels que  $X(\xi) = x$ . Différents ensembles  $A(x)$  sont présentés sur la FIGURE 1.6 qui montre par exemple que les deux réalisations  $\xi_1$  et  $\xi_2$  d'une expérience statistique conduisent à deux variables aléatoires  $X(\xi_1)$  et  $X(\xi_2)$  toutes les deux égales à 5.

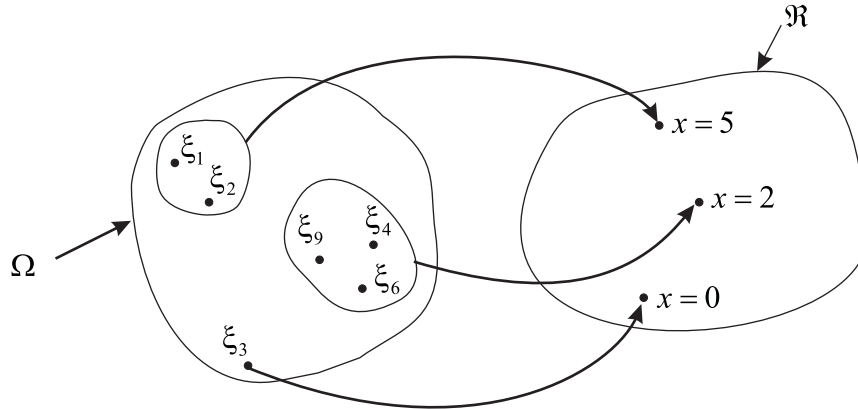


FIG. 1.6 –  $A(x)$ , ensemble des éléments de  $\Omega$  tels que  $X(\xi) = x$

**Définition et notation :**  $\text{Prob}[A(x)] = \text{Prob}[\{\xi \mid X(\xi) = x\}]$

C'est la probabilité pour que  $A(x)$  se réalise. Si  $A(x)$  est réalisé alors  $X(\xi) = x$  l'est aussi. On peut donc écrire :

$$\text{Prob}[A(x)] = \text{Prob}[X(\xi) = x] \quad (1.1)$$

qui est la probabilité pour que la VA  $X(\xi)$  soit égale à  $x$ .

On utilise souvent une représentation graphique pour mettre en évidence certaines propriétés de la VA. Par exemple, si l'on sait que :  $\text{Prob}[A(0)] = 0.1$ ,  $\text{Prob}[A(2)] = 0.6$  et  $\text{Prob}[A(5)] = 0.2$ , on peut représenter ces résultats comme l'indique la FIGURE 1.7.



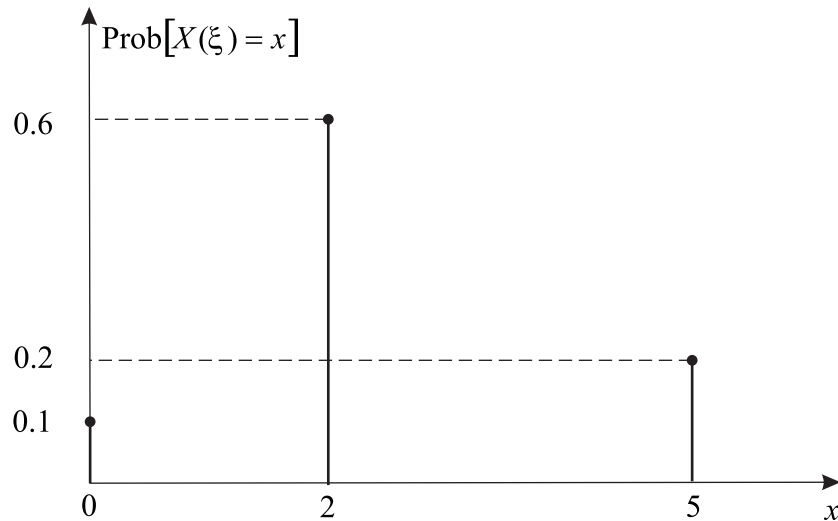


FIG. 1.7 – **Représentation graphique des résultats**  $\text{Prob}[X(\xi) = 0] = 0.1$ ,  $\text{Prob}[X(\xi) = 2] = 0.6$  et  $\text{Prob}[X(\xi) = 5] = 0.2$

## 1.2 Fonction de répartition et densité de probabilité d'une VA

### 1.2.1 Définitions

La fonction de Répartition (FR) d'une VA  $X(\xi)$  est la probabilité pour que  $X(\xi)$  soit inférieure ou égale à une valeur réelle  $x$  donnée. Cette FR, notée  $F_X(x)$  et s'écrit :

$$F_X(x) = \text{Prob}[X(\xi) \leq x] = \text{Fonction de Répartition de } X(\xi) \quad (1.2)$$

La densité de Probabilité (DdP) d'une VA  $X(\xi)$  est par définition la dérivée de la Fonction de Répartition. Cette DdP notée  $p_X(x)$  s'écrit :

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \text{Densité de Probabilité de } X(\xi) \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Rappels sur quelques résultats de la théorie élémentaire des probabilités

#### Concept de probabilité.

Une expérience statistique consiste en l'observation d'événements  $\xi \in \Omega$ . Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\Omega$  auquel on accorde un intérêt particulier. La probabilité pour que l'événement  $A$  se réalise est donnée par :

$$\text{Prob}[A] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad (1.4)$$

où  $N_A$  est le nombre de fois où l'événement  $A$  a été réalisé lors de  $N$  expériences. Nous avons bien sûr :

$$0 \leq \text{Prob}[A] \leq 1 \quad (1.5)$$

**Probabilité conjointe.**

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\Omega$ . La probabilité pour que les événements  $A$  ET  $B$  se réalisent tous les deux est donnée par :

$$\text{Prob}[A \cap B] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{A \cap B}}{N} \quad (1.6)$$

où  $N_{A \cap B}$  désigne le nombre de fois où les deux événements  $A$  et  $B$  ont été réalisés simultanément en  $N$  expériences. Par la suite nous noterons  $A \cap B = AB$ . Il vient alors

$$\text{Prob}[AB] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N} = \text{Probabilité conjointe} \quad (1.7)$$

**Probabilité de l'union de deux événements**

Soit  $C = A \cup B$  un événement dans lequel au moins un des deux événements  $A$  OU  $B$  apparaît (FIGURE 1.8). On note aussi  $C = A \cup B = A + B$  où le signe  $+$  désigne le ou logique. On montre

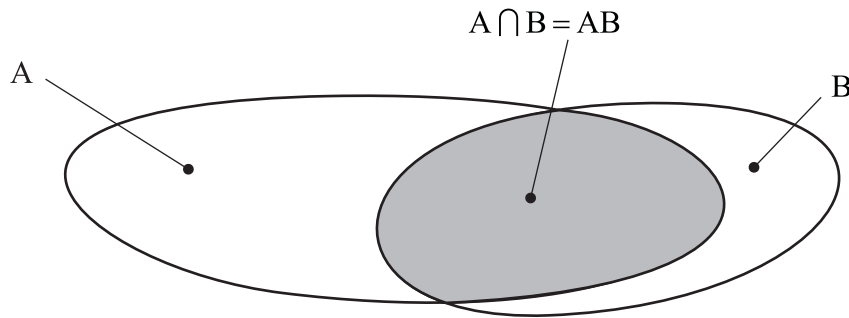


FIG. 1.8 – *Représentation schématique de l'union de deux événements*

simplement que :

$$\text{Prob}[A + B] = \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B] - \text{Prob}[AB] \quad (1.8)$$

**Probabilité de l'union d'événement s'excluant mutuellement.**

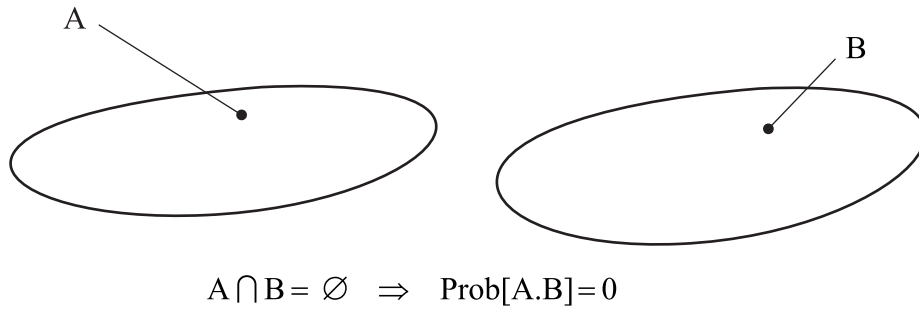
Dans le cas où les deux événements  $A$  et  $B$  s'excluent mutuellement comme le montre la FIGURE 1.9 nous avons  $A \cap B = \emptyset$  et nous pouvons écrire

$$\text{Prob}[A + B] = \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B] \text{ pour } A \text{ et } B \text{ s'excluant mutuellement} \quad (1.9)$$

**Probabilités conditionnelles - Théorème de BAYES.**

Soit deux événements  $A$  et  $B$  ne s'excluant pas mutuellement comme le montre la FIGURE 1.8. On répète  $N$  fois une expérience et on note le nombre d'apparitions des événements  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$  donnés respectivement par  $N_A$ ,  $N_B$  et  $N_{AB}$ . Le rapport  $\frac{N_{AB}}{N_B}$  exprime la fréquence relative d'apparition de l'événement  $A$  lorsque  $B$  est réalisé. Si l'on fait tendre le nombre d'expériences vers l'infini alors  $N_B \rightarrow \infty$ . La probabilité pour que l'événement  $A$  se réalise sachant que  $B$  est réalisée est donnée par :

$$\text{Prob}[A | B] = \lim_{N_B \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N_B} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N_B}$$

FIG. 1.9 – Les deux événements  $A$  et  $B$  s'excluent mutuellement

Nous avons aussi :

$$\text{Prob}[AB] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\text{Prob}[AB] = \text{Prob}[A]\text{Prob}[B|A] = \text{Prob}[B]\text{Prob}[A|B] \quad (1.10)$$

Par extension on obtient :

$$\text{Prob}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \text{Prob}[A_1]\text{Prob}[A_2|A_1]\text{Prob}[A_3|A_1 A_2] \cdots \text{Prob}[A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}] \quad (1.11)$$

### Événements indépendants

Deux événements sont indépendants si  $\text{Prob}[A|B] = \text{Prob}[A]$  ou  $\text{Prob}[B|A] = \text{Prob}[B]$ . En introduisant ces deux relations dans les résultats du paragraphe précédent il vient :

$$\text{Prob}[AB] = \text{Prob}[A]\text{Prob}[B] \text{ si } A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Fonctions de Répartition et des Densités de Probabilité .

La Fonction de Répartition (FR)  $F_X(x)$  d'une variable aléatoire  $X(\xi)$  est définie par

$$F_X(x) = \text{Prob}[X(\xi) \leq x] \quad (1.13)$$

et la Densité de Probabilité (DdP)  $p_X(x)$  de  $X(\xi)$  est donnée par

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.14)$$

Cette dérivation doit, dans certains cas, être prise au sens des distributions. Nous avons alors la relation suivante entre DdP et FR

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(z) dz \quad (1.15)$$

Pour présenter quelques propriétés importantes des FR, considérons deux nombre réels  $a$  et  $b$ , une VA  $X(\xi)$  et  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\Omega$  définis par :

$$\begin{aligned} A &= \{\xi \mid X(\xi) \leq a\} \\ B &= \{\xi \mid a < X(\xi) \leq b\} \end{aligned}$$

Nous avons

$$A.B = \emptyset \implies \text{Prob}[AB] = 0$$

et

$$A + B = \{\xi \mid X(\xi) \leq b\}$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \text{Prob}[A + B] &= \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B] \\ &= \text{Prob}[X(\xi) \leq b] \\ &= F_X(b) \end{aligned}$$

et

$$\text{Prob}[A] = F_X(a)$$

Nous obtenons alors le résultat important suivant

$$\boxed{\text{Prob}[a < X(\xi) \leq b] = F_X(b) - F_X(a)} \quad (1.16)$$

### Propriétés des FR et DdP.

1.  $F_X(x)$  est une fonction non décroissante de  $x$ .
2.  $F_X(x)$  est continue à droite c'est à dire  $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} F_X(x + \epsilon) = F_X(x)$
3.  $F_X(a) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\infty}^{a+\epsilon} p_X(x) dx$
4.  $0 \leq F_X(x) \leq 1$
5.  $F_X(-\infty) = 0$
6.  $F_X(+\infty) = 1$

### Exemple

La FIGURE 1.10 présente un exemple de fonction de répartition  $F_X(x)$  présentant une discontinuité en  $x_0$

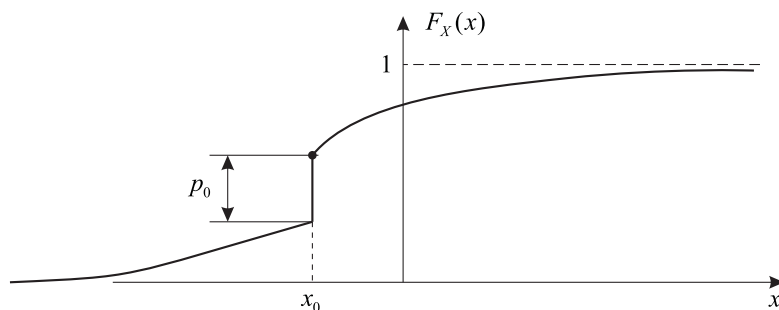


FIG. 1.10 – *Exemple de fonction de répartition*

Pour cet exemple nous avons

$$\text{Prob}[x_0 < X(\xi) \leq x_0] = \text{Prob}[X(\xi) = x_0] = p_0$$

### 1.2.4 Variables aléatoires discrètes (VAD)

Une variable aléatoire est dite discrète lorsqu'elle ne peut prendre qu'un **nombre fini ou dénombrable**  $N$  de valeurs distinctes  $x_i$  avec une probabilité  $p_i$

$$\text{Prob}[X(\xi) = x_i] = p_i$$

Soit, par exemple, la situation où

$$x_1 < x_2 < \dots < x_k < x < x_{k+1} < \dots < x_N$$

L'événement  $[X(\xi) = x]$  est l'union des événements  $[X(\xi) \leq x_i]$  qui s'excluent tous mutuellement. Nous avons

$$[X(\xi) \leq x] = [X(\xi) = x_1] + [X(\xi) = x_2] + \dots + [X(\xi) = x_k]$$

ce qui permet d'écrire :

$$F_X(x) = \text{Prob}[X \leq x] = \text{Prob}[X = x_1] + \text{Prob}[X = x_2] + \dots + \text{Prob}[X = x_k] \quad (1.17)$$

Pour des variables aléatoires discrètes avec  $x < x_{k+1}$

on peut aussi écrire :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^k p_i \quad \text{avec} \quad x < x_{k+1} \quad \text{et} \quad p_i = \text{Prob}[X = x_i] \quad (1.18)$$

L'allure typique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est donnée sur la FIGURE 1.11

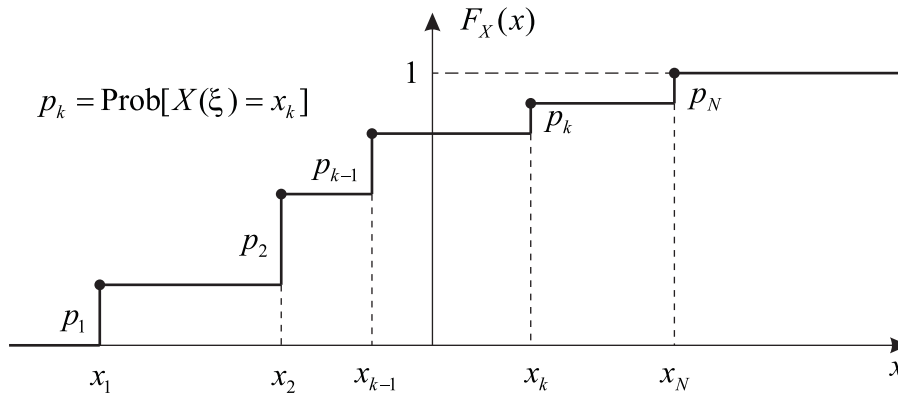


FIG. 1.11 – *Exemple de fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète*

On trouve la densité de probabilité de la VA  $X(\xi)$  en dérivant au sens des distributions  $F_X(x)$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{i=1}^N \text{Prob}[X = x_i] \delta(x - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ici, nous choisissons  $\delta(x)$  pour avoir :

$$\int_{-\infty}^0 \delta(x) dx = 1$$

Une représentation de la densité de probabilité associée à l'exemple de la FIGURE 1.11 est donnée sur la FIGURE 1.12.

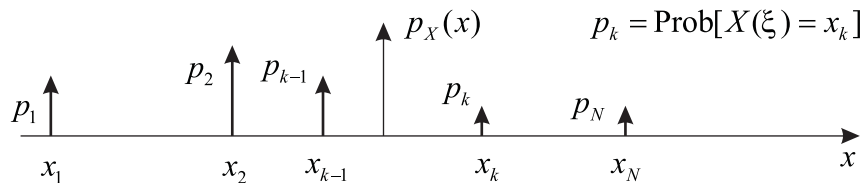


FIG. 1.12 – *Exemple de densité de probabilité d'une variable aléatoire discrète correspondant à l'exemple de la FIGURE 1.11*

On vérifie très facilement que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(a) da$$

### Exemple : Signal carré avec rapport cyclique élevé.

La FIGURE 1.13 présente un exemple de processus aléatoire dans le cas où les variables aléatoires  $X(t_i, \xi)$  (avec  $t_i$  fixé) sont discrètes et peuvent prendre deux valeurs distinctes  $-A$  et  $A$  avec des probabilités différentes.

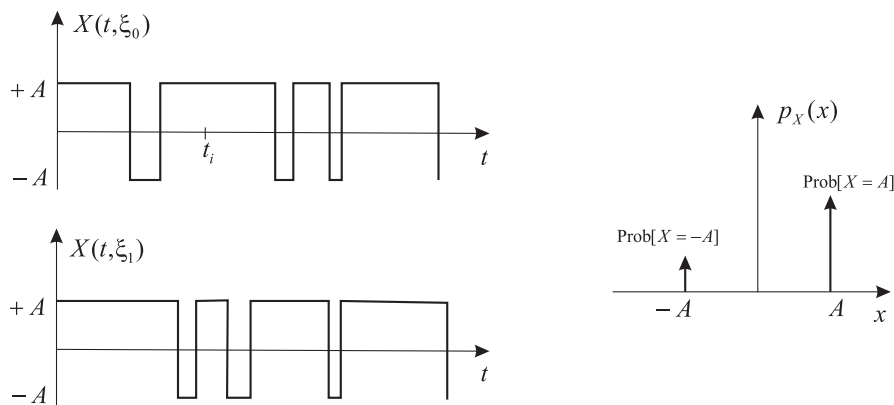


FIG. 1.13 – *Exemple de processus aléatoire : Signal carré avec rapport cyclique élevé*

### 1.2.5 Variable aléatoire continue (VAC)

Une variable aléatoire est dite continue lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. Dans ce cas la fonction de répartition est continue et admet une dérivée au sens classique des fonctions. Nous avons alors :

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \iff F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(a) da$$

ce qui permet d'écrire

$$\text{Prob}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b p_X(x) dx \quad (1.20)$$

La FIGURE 1.14 présente une interprétation de ces deux relations dans le cas d'une densité de probabilité gaussienne.

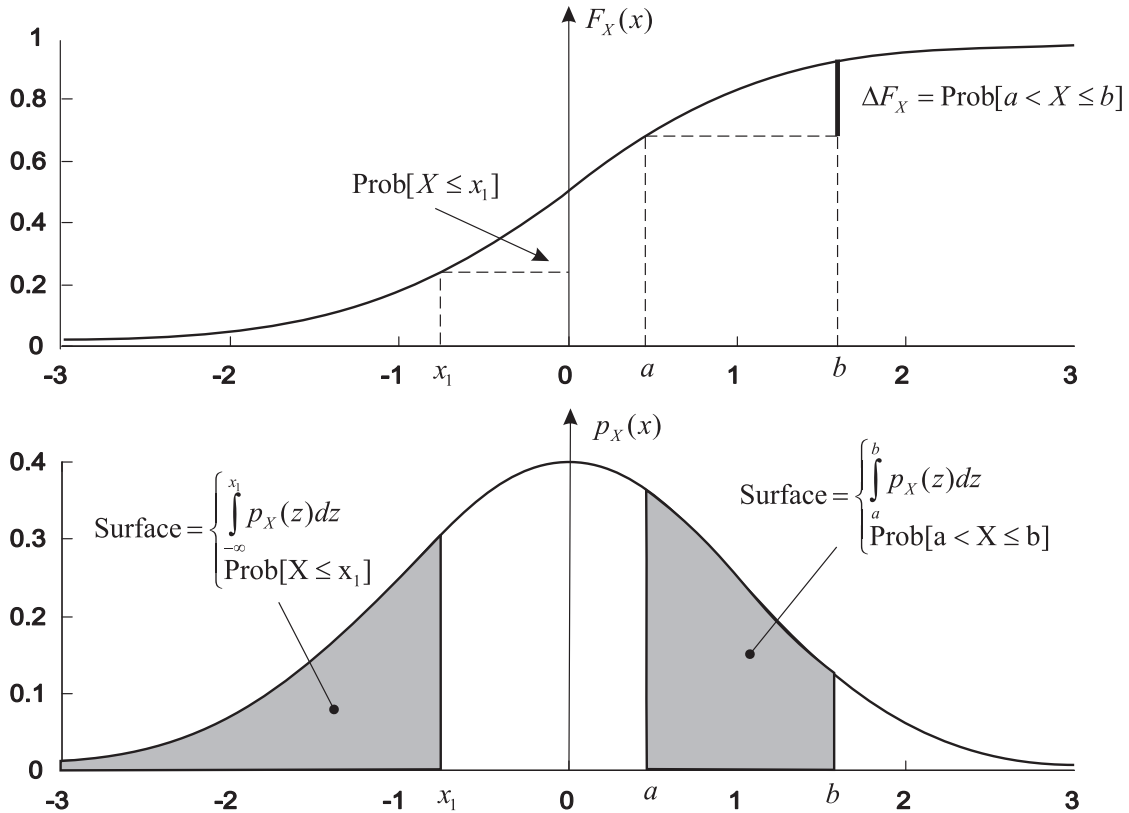


FIG. 1.14 – *Interprétation des notions de fonction de répartition et de densité de probabilité*

## 1.3 Estimation rudimentaire d'une Densité de Probabilité

### 1.3.1 Histogramme

Il est très difficile de déterminer expérimentalement une DdP. On peut cependant utiliser une histogramme des réalisations pour estimer  $p_X(x)$  en  $x_i$ . Pour cela, on effectue dans l'ordre les étapes suivantes :

1. Effectuer  $N$  essais et enregistrer les  $X(\xi_i) (i = 1, 2, \dots, N)$
2. Compter le nombre de fois  $M(x_i, \Delta_x)$  où  $X(\xi_i)$  appartient à l'intervalle  $]x_i - \frac{\Delta_x}{2}, x_i + \frac{\Delta_x}{2}]$
3. La probabilité pour que  $X(\xi_i)$  appartienne à cet intervalle est donnée par :

$$\text{Prob} \left[ x_i - \frac{\Delta_x}{2} < X \leq x_i + \frac{\Delta_x}{2} \right] = \int_{x_i - \frac{\Delta_x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta_x}{2}} p_X(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{M(x, \Delta_x)}{N} \right)$$

Si  $\delta_x$  est suffisamment faible, il est possible d'utiliser la méthode des rectangles pour trouver une valeur approchée de l'intégrale ci-dessus. Il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{M(x_i, \Delta_x)}{N} \right) = \int_{x_i - \frac{\Delta_x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta_x}{2}} p_X(x) dx \approx p_X(x_i) \Delta_x$$

Nous avons donc :

$$p_X(x_i) = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ \Delta_x \rightarrow 0}} \frac{M(x_i, \Delta_x)}{N \Delta_x} \quad (1.21)$$

L'estimation de  $p_X(x_i)$  notée  $\widehat{p}_X(x_i)$  est donnée par l'**histogramme** des réalisations défini par

$$\text{Hist}_X(x_i, \Delta_x, N) = \frac{M(x_i, \Delta_x)}{N \Delta_x} \quad (1.22)$$

4. Reprendre les étapes 1, 2 et 3 ci-dessus pour estimer  $p_X(x)$  en un nouveau point  $x_j$

### Remarque

Une bonne estimation implique :

- Un nombre de réalisations  $N$  suffisamment grand pour réduire les fluctuations statistiques des mesures (**variance** des estimations)
- Un intervalle  $\Delta_x$  assez faible pour réduire une erreur d'estimation appelée **biais** qui peut apparaître si  $p_X(x)$  ne présente pas de symétrie par rapport au centre de l'intervalle

Ces notions fondamentales de biais et variance d'estimation seront approfondies dans les prochains chapitres.

### 1.3.2 Programme MATLAB d'estimation de $p_X(x)$ - Exemple

MATLAB propose la fonction `hist()` décrite ci-dessous qui permet d'estimer assez simplement  $p_X(x)$ . Il est à noter que cette fonction renvoie  $M(x_i, \Delta_x)$ . Il suffit de diviser ce résultat par  $N \Delta_x$  pour avoir une estimation de  $p_X(x_i)$ .

#### Description de la fonction `hist()` de MATLAB

```
HIST Histogram.
N = HIST(Y) bins the elements of Y into 10 equally spaced containers
and returns the number of elements in each container. If Y is a
matrix, HIST works down the columns.

N = HIST(Y,M), where M is a scalar, uses M bins.

N = HIST(Y,X), where X is a vector, returns the distribution of Y
among bins with centers specified by X.

[N,X] = HIST(...) also returns the position of the bin centers in X.

HIST(...) without output arguments produces a histogram bar plot of
the results.
```

La fonction `estim_ddp()` décrite ci-après, permet de calculer une estimation de la densité de probabilité d'une variable aléatoire quelconque en utilisant la fonction `hist()` de MATLAB.



**Description de la fonction `estim_ddp()`**

```

function [estim_dens_prob,x] = estim_ddp(X,Nb_interv)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   FICHER :          estim_ddp.m
%
%   BUT :             Fonction d'estimation de la Densité de Probabilité d'une variable aléatoire
%
%   ARGUMENTS :       - X : vecteur colonne contenant les différentes valeurs de la variable
%                     aléatoire à analyser
%                     - Nb_interv : nombre d'intervalles d'analyse entre X_min et X_max
%                     - estim_dens_prob : estimation de la densité de probabilité au centre des
%                     intervalles d'analyse
%                     - x : vecteur contenant les positions du centre des intervalles d'analyse de
%                       largeur Delta_x
%
%   AUTEUR :          GUY PLANTIER (ESEO)
%
%   DATE :            Novembre 1998
%
%   REFERENCES :      Cours d'analyse et traitement des signaux aléatoires de Guy PLANTIER
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

X_min = min(X);
X_max = max(X);

Delta_x = (X_max-X_min)/Nb_interv;
N = length(X);

[M,x] = hist(X,Nb_interv);
x = x';

estim_dens_prob = M'/(N*Delta_x);

```

**Exemple d'utilisation**

La FIGURE 1.15 présente deux résultats d'estimation de la DdP d'une variable aléatoire gaussienne calculée à l'aide de la fonction `randn()` de MATLAB. Cette figure montre que plus le nombre de points de la VA est élevé, plus la variance d'estimation est faible.

**1.4 Moyennes statistiques et moments****1.4.1 Notion d'espérance mathématique d'une VAD**

Soit une variable aléatoire discrète  $X(\xi)$  à  $n$  états dont on observe  $N$  réalisations :

$$\begin{array}{lll}
 \rightarrow X(\xi) = x_1 & \text{apparaît} & N_1 \text{ fois} \\
 \rightarrow X(\xi) = x_2 & \text{apparaît} & N_2 \text{ fois} \\
 & \vdots & \vdots \\
 \rightarrow X(\xi) = x_n & \text{apparaît} & N_n \text{ fois}
 \end{array}$$

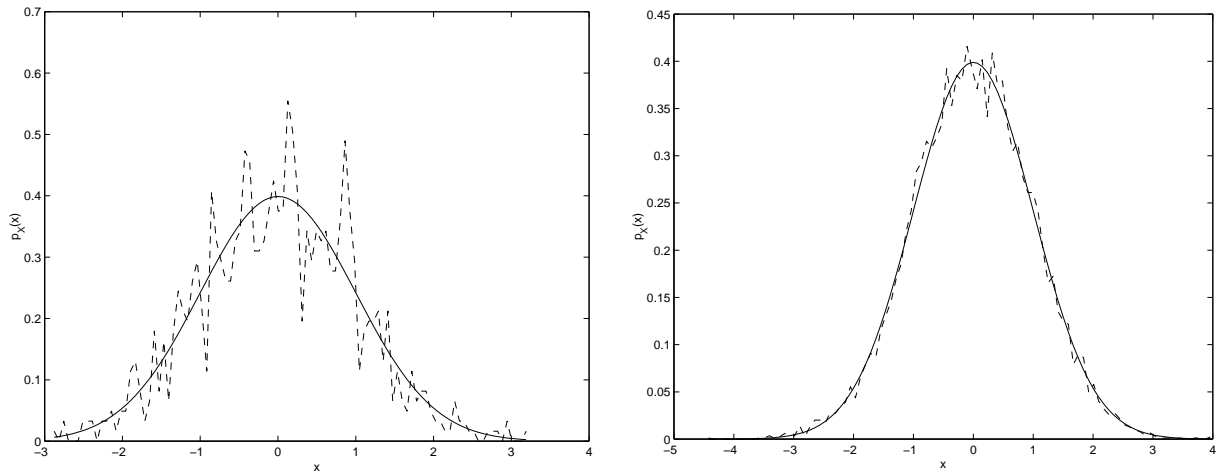


FIG. 1.15 – Estimation de la densité de probabilité  $p_X(x)$  d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire  $X(\xi)$ . Le nombre de points utilisé pour faire l'estimation est de 1000 et 10000 pour les figures de gauche et de droite respectivement. (—) : courbe théorique, (— —) : estimation

avec

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$$

Soit  $Y = f[X(\xi)]$  une fonction de la variable aléatoire  $X(\xi)$  dont un exemple est présenté sur la FIGURE 1.16. Pour simplifier les notations nous écrivons aussi  $Y = f(X)$

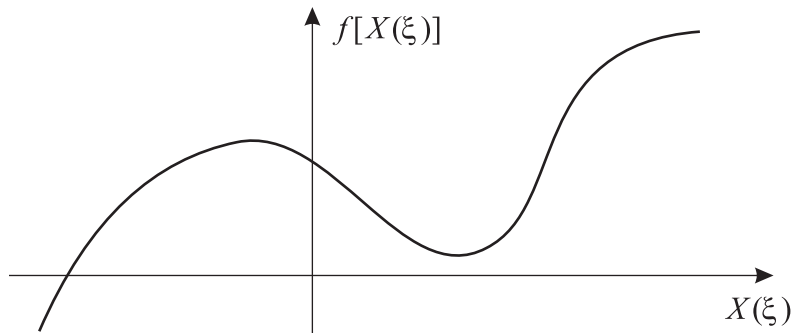


FIG. 1.16 – Exemple de fonction de transformation d'une variable aléatoire  $X(\xi)$

Après avoir observé les  $N$  réalisations de  $X(\xi)$ , on peut calculer simplement la valeur moyenne expérimentale de la fonction  $f(X)$  notée  $\overline{f(X)}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{f(X)} &= \frac{f(x_1)N_1 + f(x_2)N_2 + \cdots + f(x_n)N_n}{N} \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{N_i}{N} \end{aligned}$$

Si l'on fait tendre  $N$  vers l'infini,  $\overline{f(X)}$  tend vers l'**espérance mathématique** de  $f(X)$  notée  $E[f(X)]$ . En remarquant que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \triangleq \text{Prob}(X = x_i)$$

il vient :

$$\boxed{E[f(X)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{f(X)} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{Prob}(X = x_i)} \quad (1.23)$$

En utilisant les résultats de la théorie des distributions, on peut donner pour  $E[f(X)]$  une formule générale valable à la fois pour les VAD et les VAC. Nous avons :

$$f(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx.$$

En reportant cette formule dans  $E[f(X)]$  on obtient :

$$\begin{aligned} E[f(X)] &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_i) \text{Prob}(X = x_i) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \underbrace{\sum_{i=1}^n \text{Prob}(X = x_i) \delta(x - x_i)}_{p_X(x)} dx \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette formule le terme  $p_X(x)$  qui est la DdP de la VAD  $X(\xi)$ . Il vient :

$$\boxed{E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx} \quad (1.24)$$

### 1.4.2 Espérance mathématique d'une fonction d'une VAC

Soit  $X(\xi)$  une VAC. Comme pour l'estimation des DdP par histogramme, on discrétise l'intervalle de variation de  $X(\xi)$  et on compte le nombre de fois  $M(x_i, \Delta_x)$  où  $X(\xi_i)$  appartient à l'intervalle  $]x_i - \frac{\Delta_x}{2}, x_i + \frac{\Delta_x}{2}]$  au cours de  $N$  essais.

La valeur moyenne expérimentale de  $f(X)$  est donnée par :

$$\overline{f(X)} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{M(x_i, \Delta_x)}{N}$$

où  $n$  désigne le nombre d'intervalles élémentaires dans l'intervalle de variation de  $X(\xi)$ . Ce dernier peut être choisi égal à  $] -\infty + \infty[$  sans restreindre la généralité. Dans ce cas,  $n = \infty$ . En faisant tendre le nombre d'expériences  $N$  vers  $+\infty$  et  $\Delta_x$  vers zéro, on obtient l'espérance mathématiques de  $f(X)$ .

$$E[f(X)] = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ \Delta_x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{M(x_i, \Delta_x)}{N}$$

En remarquant que

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ \Delta_x \rightarrow 0}} \frac{M(x_i, \Delta_x)}{N} = p_X(x_i) \Delta_x$$

et que la sommation se transforme en intégrale pour les très faibles valeurs de  $\Delta_x$ , il vient :

$$\boxed{E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx} \quad (1.25)$$

On remarque que les formules (1.25) et (1.24) sont identiques. Ainsi, en exprimant les DdP à l'aide de distributions, il est possible de calculer  $E[f(X)]$  à l'aide d'une seule et même formule, que la variable aléatoire soit continue ou discrète.

### 1.4.3 Valeur moyenne statistique d'une VA

Si on pose  $f(X) = X$  dans  $E[f(X)]$ , on obtient la valeur moyenne statistique de  $X(\xi)$  notée  $\mu_X$

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx = \text{Valeur moyenne statistique de la variable aléatoire } X(\xi) \quad (1.26)$$

### 1.4.4 Variance et écart type d'une VA

En posant  $f(X) = (X - \mu_X)^2$  dans  $E[f(X)]$  on obtient la variance de la VA  $X(\xi)$  notée  $\sigma_X^2$ .

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 p_X(x) dx \quad \text{Variance de la variable aléatoire } X(\xi) \quad (1.27)$$

La variance représente la **puissance des fluctuations de  $X(\xi)$  autour de sa valeur moyenne  $\mu_X$**   
L'écart type  $\sigma_X$  est donné par :

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - \mu_X)^2]} = \text{Écart type de la variable aléatoire } X(\xi) \quad (1.28)$$

et peut être interprété comme la **valeur efficace des fluctuations de  $X_\xi$  autour de sa valeur moyenne  $\mu_X$**

### 1.4.5 Valeur quadratique moyenne d'une VA

La valeur quadratique moyenne  $\mu_{X^2}$  d'une VA  $X(\xi)$  est donnée par :

$$\mu_{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx = \text{Valeur quadratique moyenne de la variable aléatoire } X(\xi) \quad (1.29)$$

$\mu_{X^2}$  représente la puissance de  $X(\xi)$ . On montre très simplement que :

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 \quad (1.30)$$

## 1.5 Quelques distributions de probabilités importantes

### 1.5.1 Introduction

Les exemples de détermination par histogramme de DdP ont mis en évidence des allures très caractéristiques de  $p_X(x)$ . Certaines d'entre elles jouent un rôle important en physique, traitement du signal, télécommunications, etc. Nous les présentons succinctement ci-après.

### 1.5.2 Distribution uniforme

Une variable aléatoire continue est à distribution uniforme si sa densité de probabilité, présentée sur la FIGURE 1.17, est du type :

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{rect}_{b-a} \left( x - \frac{b+a}{2} \right) \quad (1.31)$$

On montre simplement que :

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} \quad (1.32)$$

et

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (1.33)$$

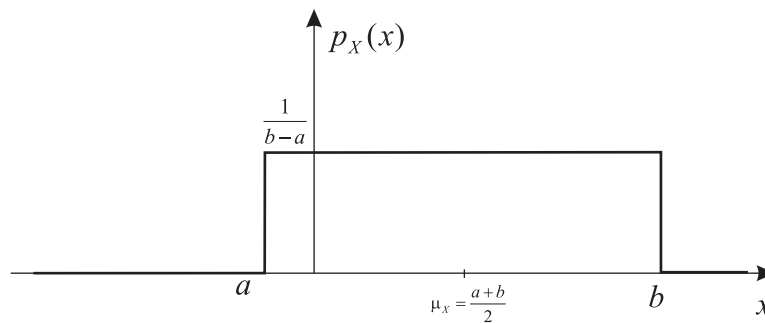


FIG. 1.17 – *Exemple de densité de probabilité uniforme*

### 1.5.3 Distribution binomiale

Une variable aléatoire discrète est à distribution binomiale si sa densité de probabilité peut s'écrire

$$p_X(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \delta(x-k) \quad (1.34)$$

où

- $n$  est un nombre entiers quelconque
- $p$  un réel positif strictement compris entre 0 et 1

On montre simplement que la moyenne et la variance de cette variable aléatoire sont données par :

$$\mu_X = E[X] = np \quad (1.35)$$

et

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = np(1-p) \quad (1.36)$$

Des exemples de distributions binomiales sont donnés sur la FIGURE 1.18.

### 1.5.4 Distribution de Poisson

On considère un processus ponctuel  $X(t, \xi)$  présenté sur la FIGURE 1.19. Prenons par exemple le cas d'un central téléphonique recevant des appels à des instants aléatoires.

On cherche à caractériser un deuxième processus aléatoire  $N(t_1, \tau, \xi)$  qui représente le nombre d'appels enregistré dans un central téléphonique dans l'intervalle de temps  $[t_1, t_1 + \tau]$

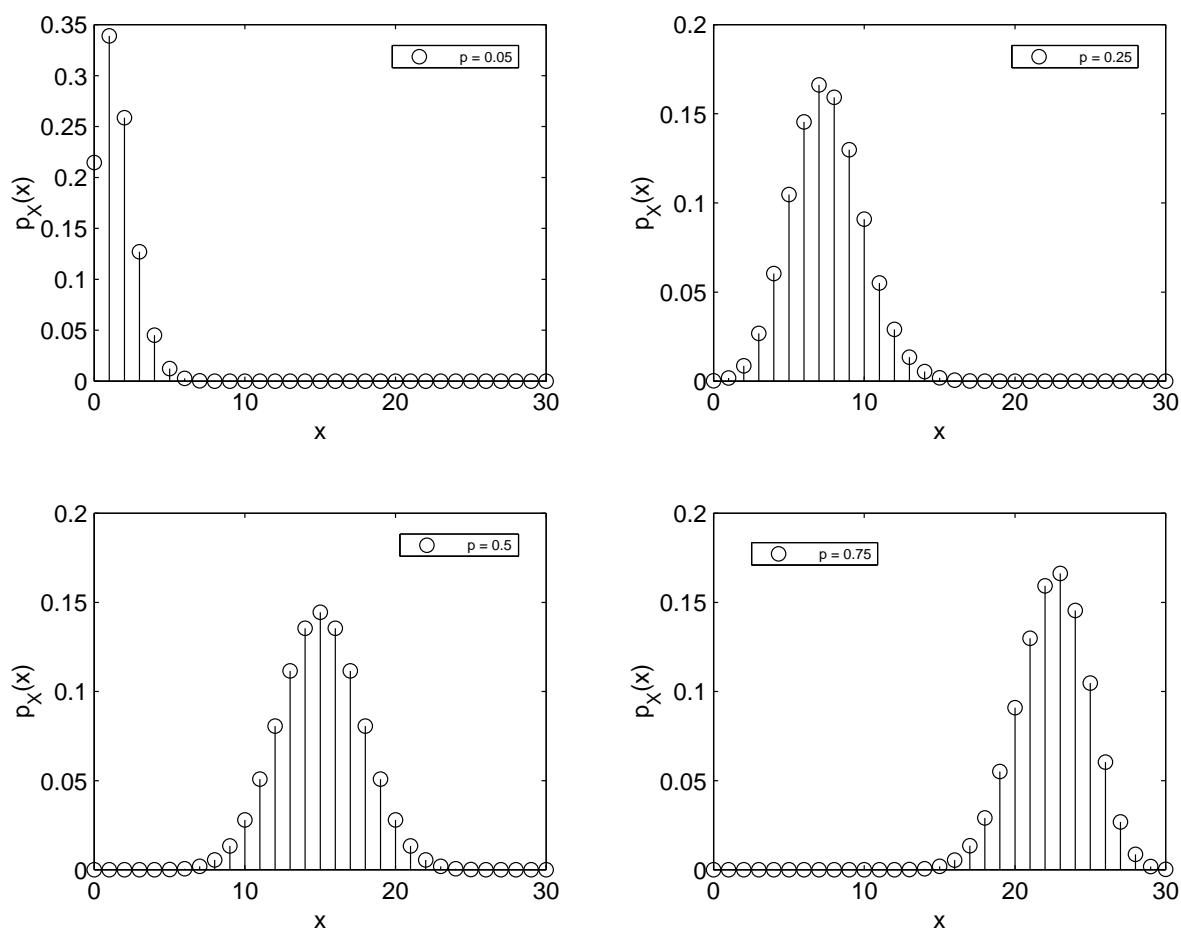


FIG. 1.18 – *Exemples de densité de probabilité de variables aléatoires discrètes ayant une distribution binomiale avec  $n = 30$*

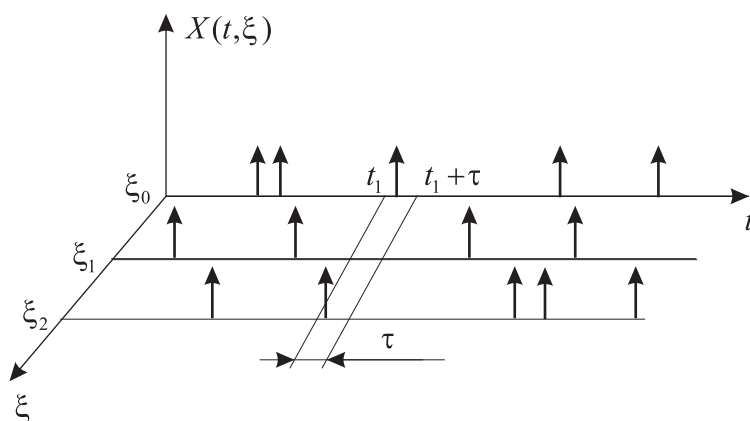


FIG. 1.19 – *Exemple de processus ponctuel*

### Hypothèses de travail

1. Le processus considéré est **stationnaire**, ce qui signifie que le nombre d'appels reçus entre les instants  $t_1$  et  $t_1 + \tau$  est indépendant de  $t_1$

$$N(t_1, \tau, \xi) = N_\tau(\xi) \text{ indépendant de } t_1$$

2. Les nombres d'événements se produisant dans 2 intervalles ne se recouvrant pas sont indépendants.
3. La probabilité d'avoir un seul appel dans un intervalle  $d\tau$  est de l'ordre de  $d\tau$

$$\text{Prob}[N_{d\tau} = 1] = \lambda d\tau$$

4. La probabilité d'avoir plus d'un seul appel dans un intervalle  $d\tau$  est nulle

$$\text{Prob}[N_{d\tau} > 1] = 0$$

Avec ces hypothèses, on montre que la probabilité pour que le nombre d'appels dans un intervalle  $\tau$  soit égal à  $n$  est :

$$\text{Prob}[N_\tau = n] = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} \quad (1.37)$$

Dans le cas général, la densité de probabilité d'une distribution de Poisson s'écrit

$$P_N(n) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \delta(n - k) \quad (1.38)$$

où  $\mu$  désigne une constante réelle.

On montre simplement que la moyenne et la variance de cette variable aléatoire sont données respectivement par :

$$\mu_N = E[N] = \mu \quad (1.39)$$

et

$$\sigma_N^2 = E[(N - \mu_N)^2] = \mu \quad (1.40)$$

Des exemples de distributions poisson sont donnés sur la FIGURE 1.20.

### 1.5.5 Distribution normale ou de GAUSS

Une Variable Aléatoire Continue  $X(\xi)$  de valeur moyenne  $\mu_X$  et de variance  $\sigma_X^2$  est à distribution normale ou gaussienne si sa DdP est du type :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2} \right] \quad (1.41)$$

La notation  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  est souvent utilisée pour traduire le caractère gaussien d'une variable aléatoire.

Une représentation de la fonction de répartition  $F_X(x)$  et de la densité de probabilité  $p_X(x)$  est donnée sur la FIGURE 1.21

La loi normale a une importance considérable en pratique pour deux raisons essentielles

1. En vertu du théorème de la limite centrale, de nombreux phénomènes aléatoires observables en pratique ont une distribution gaussienne.
2. Les processus Gaussiens présentent des propriétés particulières qui rendent possibles certains calculs théoriques ou certaines modélisations.

### Valeurs remarquables pour les variables aléatoires gaussiennes

La FIGURE 1.22 présente un certain nombre de valeurs remarquables pour les variables aléatoires gaussiennes. Ces résultats permettent de calculer les probabilités suivantes :

- $\text{Prob}[\mu_X - \sigma_X < X \leq \mu_X + \sigma_X] = 68,27\%$
- $\text{Prob}[\mu_X - 2\sigma_X < X \leq \mu_X + 2\sigma_X] = 95,45\%$
- $\text{Prob}[\mu_X - 3\sigma_X < X \leq \mu_X + 3\sigma_X] = 99,73\%$

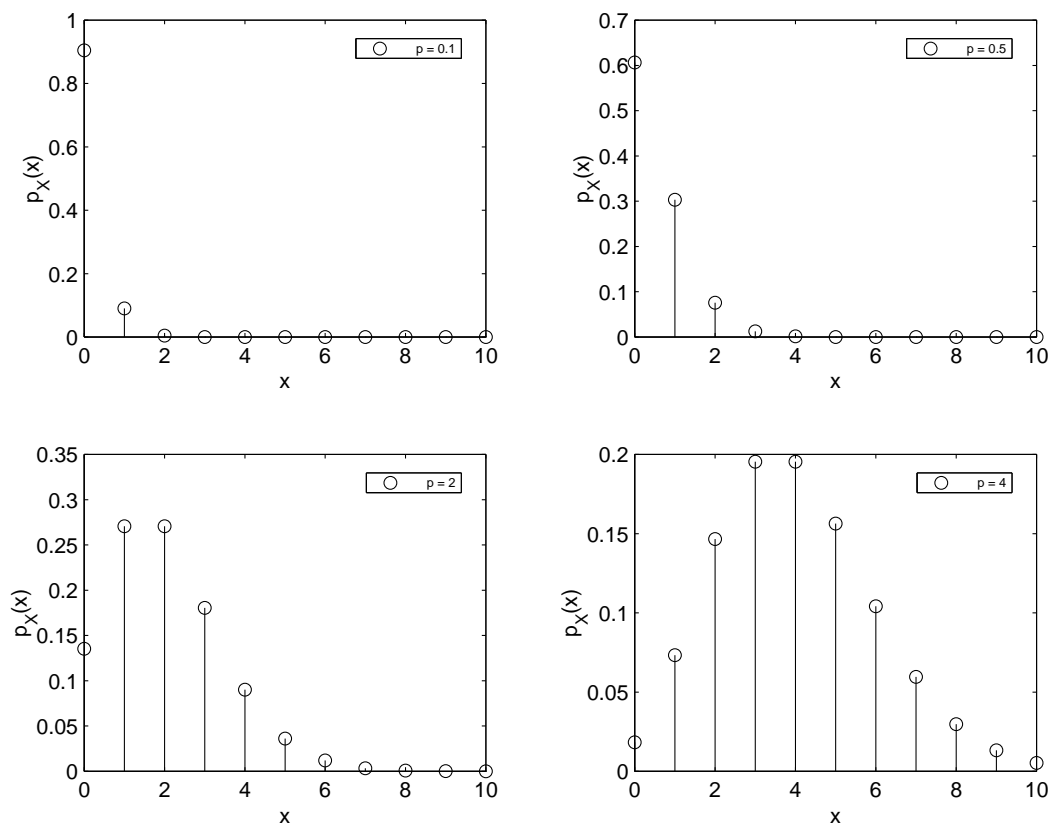


FIG. 1.20 – Exemples de densité de probabilité de variables aléatoires discrètes ayant une distribution poisson

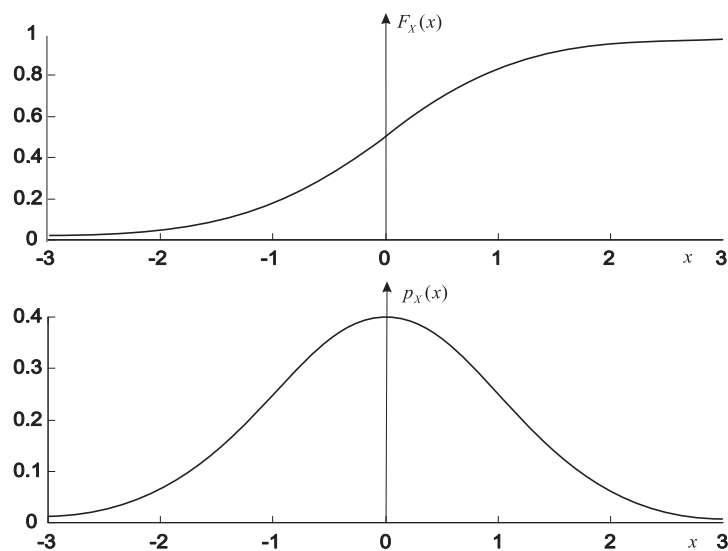


FIG. 1.21 – Représentation de la fonction de répartition  $F_X(x)$  et de la densité de probabilité  $p_X(x)$  d'une loi normale de variance  $\sigma_x^2 = 1$  et de valeur moyenne  $\mu_X = 0$

### Calcul des fonctions de répartition gaussiennes à l'aide des fonction $\text{erf}()$ et $\text{erfc}()$

Soit une variable aléatoire gaussienne  $X(\xi)$  dont la densité de probabilité est donnée par

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]$$



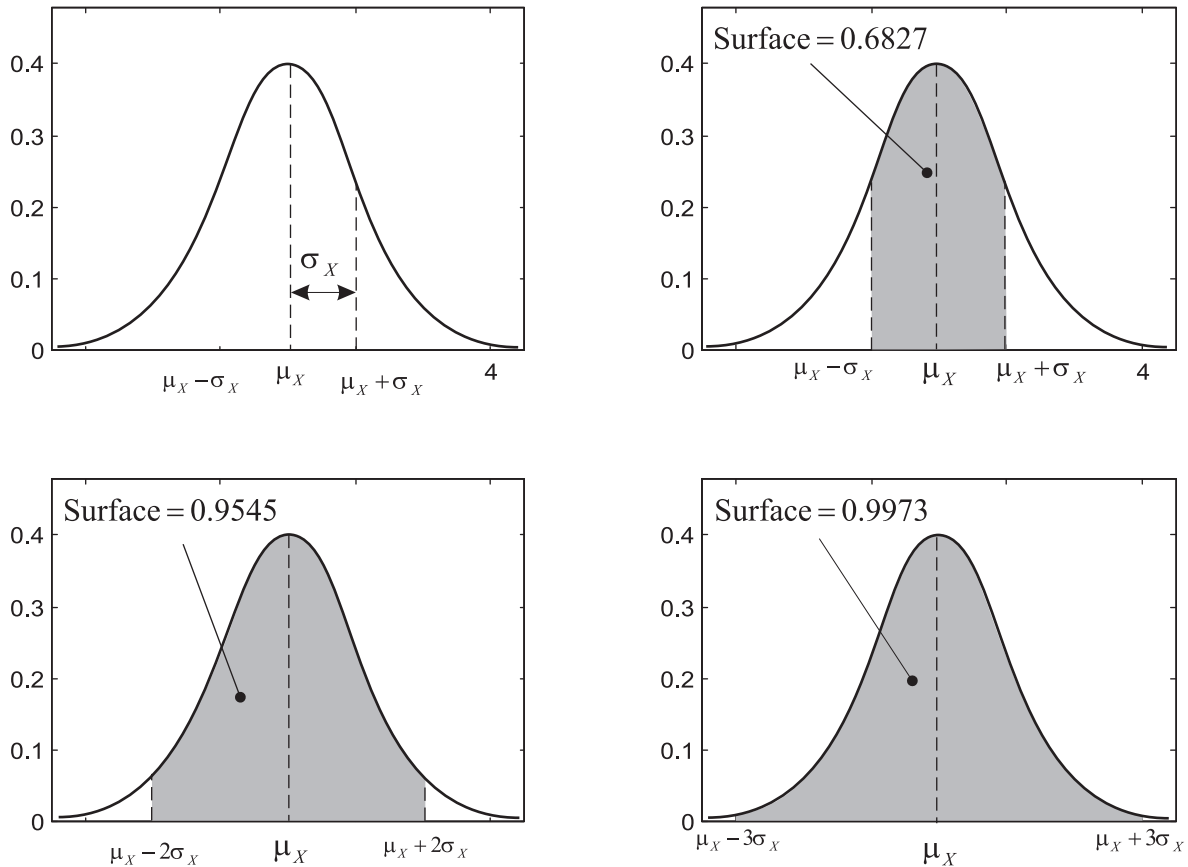


FIG. 1.22 – Valeurs remarquables pour les variables aléatoires gaussiennes de moyenne  $\mu_X$  et de variance  $\sigma_X^2$

La fonction de répartition associée s'écrit

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^x p_X(z) dz \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\mu_X} p_X(z) dz}_{\text{Prob}[X \leq \mu_X] = 1/2} + \int_{\mu_X}^x p_X(z) dz
 \end{aligned}$$

En introduisant  $P_X(x)$  dans cette expression et en effectuant le changement de variable

$$y = \frac{z - \mu_X}{\sqrt{2}\sigma_X}$$

il vient :

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x - \mu_X}{\sqrt{2}\sigma_X}} \exp(-y^2) dy \right] = \text{Prob}[X \leq x]$$

Cette expression fait apparaître la fonction d'erreur erf() définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \quad (1.42)$$

La fonction de répartition  $F_X(x)$  s'exprime alors de la façon suivante

$$F_X(x) = \text{Prob}[X \leq x] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{x - \mu_X}{\sqrt{2}\sigma_X} \right) \right] \quad (1.43)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\text{Prob}[X > x] = 1 - F_X(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{erf} \left( \frac{x - \mu_X}{\sqrt{2}\sigma_X} \right) \right] = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \frac{x - \mu_X}{\sqrt{2}\sigma_X} \right) \quad (1.44)$$

où nous avons utilisé la fonction d'erreur complémentaire  $\text{erfc}()$  définie par

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-y^2) dy \quad (1.45)$$

La description des fonctions  $\text{erf}()$  et  $\text{erfc}()$  de MATLAB est donnée ci-après

#### Description de la fonction **erf** ( ) de MATLAB

ERF Error function.

Y = ERF(X) is the error function for each element of X. X must be real. The error function is defined as:

$$\text{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} * \text{integral from } 0 \text{ to } x \text{ of } \exp(-t^2) dt.$$

See also ERFC, ERFCX, ERFINV.

#### Description de la fonction **erfc** ( ) de MATLAB

ERFC Complementary error function.

Y = ERFC(X) is the complementary error function for each element of X. X must be real. The complementary error function is defined as:

$$\begin{aligned} \text{erfc}(x) &= 2/\sqrt{\pi} * \text{integral from } x \text{ to } \infty \text{ of } \exp(-t^2) dt. \\ &= 1 - \text{erf}(x). \end{aligned}$$

See also ERF, ERFCX, ERFINV.

### 1.5.6 Distribution de RAYLEIGH

Une variable aléatoire est à distribution de Rayleigh si sa densité de probabilité est du type :

$$p_X(x) = \epsilon(x) \frac{x}{\sigma^2} \exp - \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad (1.46)$$

où  $\epsilon(x)$  représente l'échelon unité défini par

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

La moyenne et la variance de cette variable aléatoire sont données respectivement par :

$$\mu_X = E[X(\xi)] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (1.47)$$

et

$$\sigma_X^2 = E[(X(\xi) - \mu_X)^2] = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.48)$$

Un exemple de densité de probabilité de RAYLEIGH est donné sur la FIGURE 1.23

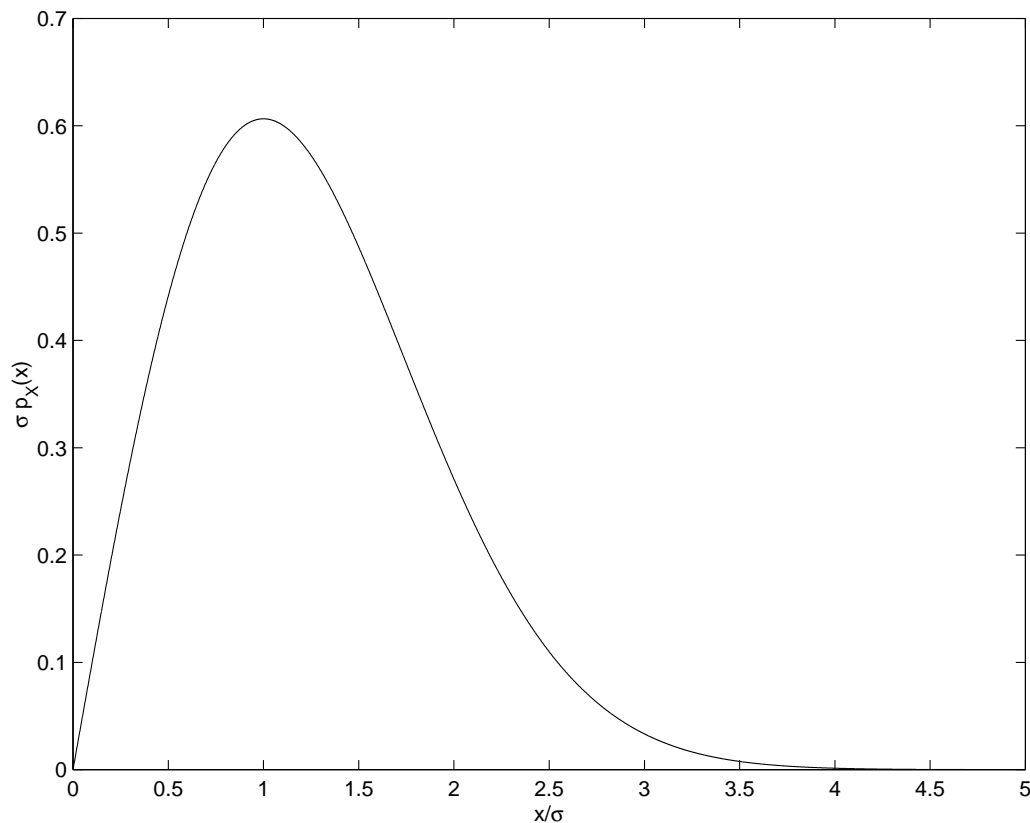


FIG. 1.23 – Représentation de  $\sigma p_X(x)$  dans le cas d'une densité de probabilité de RAYLEIGH

## 1.6 Générateurs de nombres aléatoires de MATLAB

MATLAB dispose de deux fonctions permettant de générer des variables aléatoires à DdP gaussienne et uniforme appelées respectivement `randn()` et `rand()`.

La description de ces fonctions est donnée ci-après

### 1.6.1 Génération de variables aléatoires à DdP gaussienne - Fonction `randn()`

#### Description de la fonction `randn()` de MATLAB

```
RANDN Normally distributed random numbers.
RANDN(N) is an N-by-N matrix with random entries, chosen from
a normal distribution with mean zero and variance one.
```

`RANDN(M,N)` and `RANDN([M,N])` are M-by-N matrices with random entries. `RANDN(M,N,P,...)` or `RANDN([M,N,P,...])` generate random arrays. `RANDN` with no arguments is a scalar whose value changes each time it is referenced. `RANDN(SIZE(A))` is the same size as `A`.

`RANDN` produces pseudo-random numbers. The sequence of numbers generated is determined by the state of the generator. Since MATLAB resets the state at start-up, the sequence of numbers generated will be the same unless the state is changed.

`S = RANDN('state')` is a 2-element vector containing the current state of the normal generator. `RANDN('state',S)` resets the state to `S`. `RANDN('state',0)` resets the generator to its initial state. `RANDN('state',J)`, for integer `J`, resets the generator to its `J`-th state. `RANDN('state',sum(100*clock))` resets it to a different state each time.

MATLAB Version 4.x used random number generators with a single seed. `RANDN('seed',0)` and `RANDN('seed',J)` cause the MATLAB 4 generator to be used. `RANDN('seed')` returns the current seed of the MATLAB 4 normal generator. `RANDN('state',J)` and `RANDN('state',S)` cause the MATLAB 5 generator to be used.

See also `RAND`, `SPRAND`, `SPRANDN`, `RANDPERM`.

## 1.6.2 Génération de variables aléatoires à DdP uniforme - Fonction `rand()`

### Description de la fonction `rand()` de MATLAB

`RAND` Uniformly distributed random numbers.

`RAND(N)` is an N-by-N matrix with random entries, chosen from a uniform distribution on the interval (0.0,1.0). `RAND(M,N)` and `RAND([M,N])` are M-by-N matrices with random entries. `RAND(M,N,P,...)` or `RAND([M,N,P,...])` generate random arrays. `RAND` with no arguments is a scalar whose value changes each time it is referenced. `RAND(SIZE(A))` is the same size as `A`.

`RAND` produces pseudo-random numbers. The sequence of numbers generated is determined by the state of the generator. Since MATLAB resets the state at start-up, the sequence of numbers generated will be the same unless the state is changed.

`S = RAND('state')` is a 35-element vector containing the current state of the uniform generator. `RAND('state',S)` resets the state to `S`. `RAND('state',0)` resets the generator to its initial state. `RAND('state',J)`, for integer `J`, resets the generator to its `J`-th state. `RAND('state',sum(100*clock))` resets it to a different state each time.

This generator can generate all the floating point numbers in the closed interval  $[2^{(-53)}, 1-2^{(-53)}]$ . Theoretically, it can generate over  $2^{1492}$  values before repeating itself.

MATLAB Version 4.x used random number generators with a single seed. `RAND('seed',0)` and `RAND('seed',J)` cause the MATLAB 4 generator to be used. `RAND('seed')` returns the current seed of the MATLAB 4 uniform generator. `RAND('state',J)` and `RAND('state',S)` cause the MATLAB 5 generator to be used.

See also `RANDN`, `SPRAND`, `SPRANDN`, `RANDPERM`.

## 1.7 Transformation de VA scalaires

### 1.7.1 Hypothèses de travail

Dans ce paragraphe, nous étudions les caractéristiques statistiques d'une VA  $Y(\xi)$  obtenue par transformation d'une VA  $X(\xi)$  à l'aide d'un opérateur de traitement comme l'indique la FIGURE 1.24

$$Y(\xi) = f[X(\xi)]$$

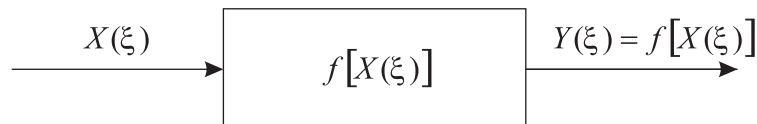


FIG. 1.24 – *Opérateur amnésique de traitement transformant une VA  $X(\xi)$  en une VA  $Y(\xi)$*

Dans ce qui suit, on considère que la relation entre  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$  est sans mémoire (on dit aussi amnésique) c'est-à-dire que  $Y(\xi)$  ne dépend que de la valeur courante de  $X(\xi)$ .

Nous ne présentons pas ici de méthodologie générale pour déterminer les DdP et FR des variables aléatoires mais traitons un certain nombre de problèmes qui devraient guider le lecteur lors de traitements analogues.

### 1.7.2 Exemple : relation linéaire instantanée

Nous avons dans ce cas

$$Y = f(X) = aX + b$$

Pour trouver la DdP de  $Y(\xi)$  recherchons sa fonction de répartition soit

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y]$$

Deux cas se présentent alors comme le montre la FIGURE 1.25

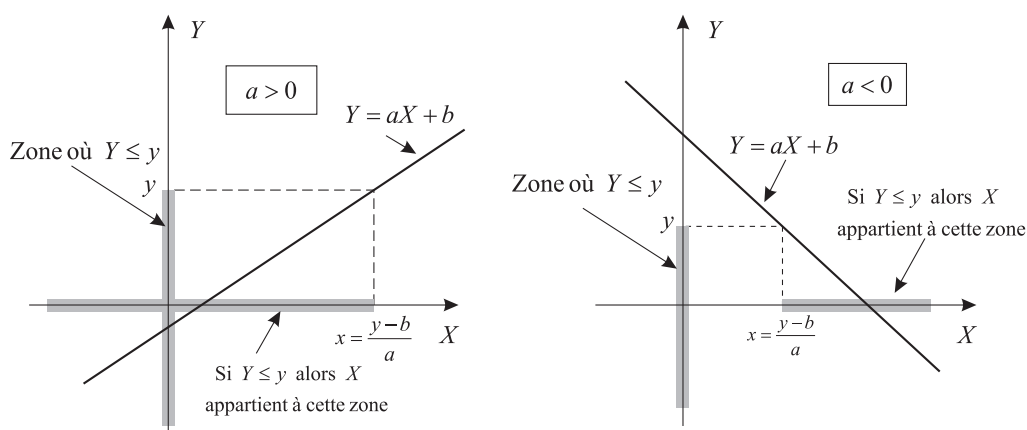


FIG. 1.25 – *Graphes des fonctions  $Y = aX + b$  pour les cas où  $a < 0$  et  $a > 0$*

**Premier cas :  $a > 0$** 

La FR de  $Y(\xi)$  s'écrit

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y] = \text{Prob}\left[X \leq x = \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

La densité de probabilité de  $Y(\xi)$  se déduit alors simplement du résultat précédent par simple dérivation de  $F_Y(y)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dy} \Big|_{x=\frac{y-b}{a}} = \frac{dF_X(x)}{dx} \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{aligned}$$

**Deuxième cas :  $a < 0$** 

La FR de  $Y(\xi)$  s'écrit

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y] = \text{Prob}\left[X \geq x = \frac{y-b}{a}\right] = 1 - \text{Prob}[X \leq x] = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

et la densité de probabilité de  $Y(\xi)$  est donnée par

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = - \frac{dF_X(x)}{dy} \Big|_{x=\frac{y-b}{a}} = - \frac{dF_X(x)}{dx} \frac{dx}{dy} \\ &= -\frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{aligned}$$

**Cas général**

Les deux résultats obtenus précédemment dans le cas où  $a < 0$  et  $a > 0$  peuvent être regroupés en une seule et même expression donnant  $F_Y(y)$

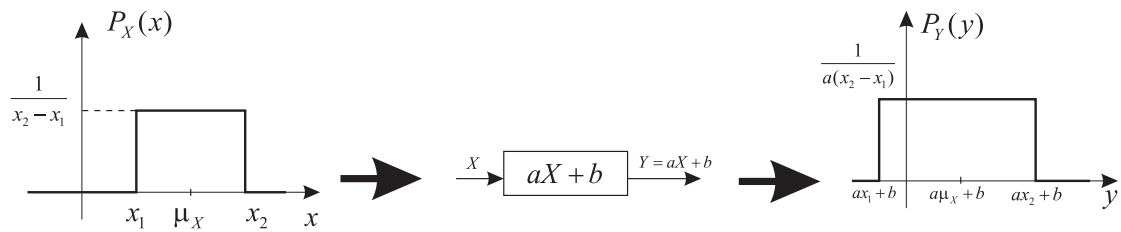
$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (1.49)$$

**Exemple : Cas où  $X(\xi)$  est une variable aléatoire à DdP uniforme**

Considérons le cas où  $p_X(x)$  est uniforme entre  $x_1$  et  $x_2$ . L'exploitation des résultats établis ci-dessus montre que la DdP de la variable aléatoire  $Y(\xi) = aX(\xi) + b$  est elle aussi uniforme, mais dans l'intervalle  $y \in [ax_1 + b, ax_2 + b]$ , comme le montre la FIGURE 1.26.

**Conclusion générale sur les transformations linéaires instantanées :**

Si  $Y(\xi) = aX(\xi) + b$ , la DdP de  $Y(\xi)$  a la même morphologie que celle de  $X(\xi)$  à un décalage  $b$  et un facteur d'échelle  $a$  près.

FIG. 1.26 – *Exemple de transformation de variables aléatoire à DdP uniforme par une relation affine*

### 1.7.3 Exemple : transformation quadratique

On étudie ici l'effet de la transformation quadratique amnésique

$$Y = aX^2$$

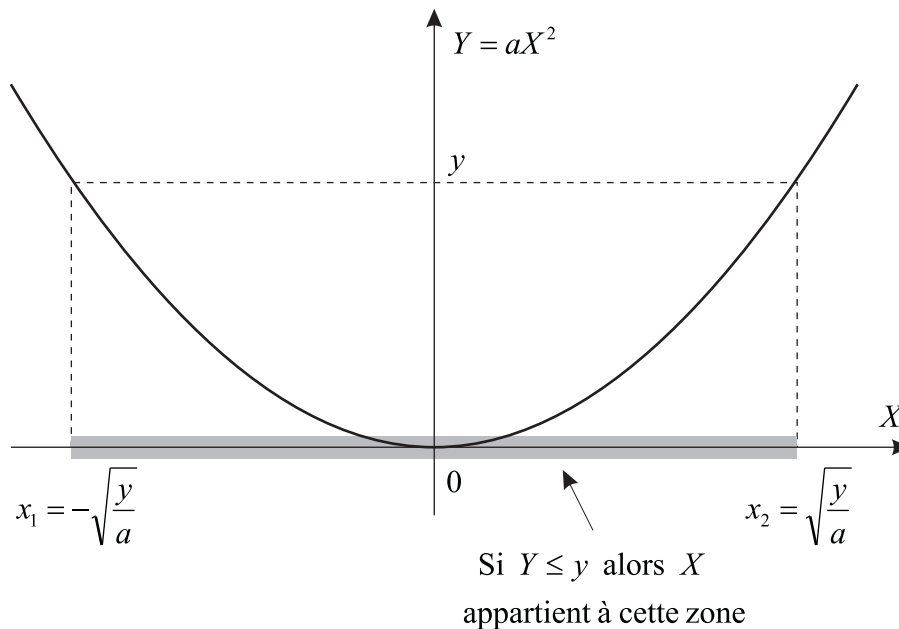
Pour trouver la DdP de  $Y(\xi)$ , recherchons sa fonction de répartition

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y(\xi) \leq y]$$

En prenant, par exemple le cas où  $a > 0$  nous avons :

$$F_Y(y) = \begin{cases} \text{Prob}[Y(\xi) \leq y] & \text{pour } y \geq 0 \\ 0 & \text{pour } y < 0 \end{cases}$$

La condition  $Y(\xi) \leq y$  dans le cas où  $Y = aX^2$  définit un intervalle de variation de  $X(\xi)$  qui assure  $Y(\xi) = aX^2(\xi) \leq y$  comme le montre la FIGURE 1.27.

FIG. 1.27 – *Graphes de la fonction  $Y(\xi) = aX(\xi)^2$  et zones pour laquelle  $Y(\xi) = aX(\xi)^2 \leq y$* 

La fonction de répartition de  $Y(\xi)$  s'écrit alors

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y]$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Prob}[x_1 \leq X \leq x_2] \\
&= F_X(x_2) - F_X(x_1)
\end{aligned}$$

En notant que

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dy} &= \frac{1}{2\sqrt{ay}} \\
\frac{dx_1}{dy} &= -\frac{1}{2\sqrt{ay}}
\end{aligned}$$

on obtient une expression de la densité de probabilité de  $Y(\xi)$  en dérivant  $F_Y(y)$

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\
&= \frac{dF_X(x_2)}{dy} - \frac{dF_X(x_1)}{dy} \\
&= \frac{dF_X(x_2)}{dx_2} \frac{dx_2}{dy} - \frac{dF_X(x_1)}{dx_1} \frac{dx_1}{dy} \\
&= p_X\left(x_2 = \sqrt{\frac{y}{a}}\right) \frac{1}{2\sqrt{ay}} + p_X\left(x_1 = -\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \frac{1}{2\sqrt{ay}}
\end{aligned}$$

### Exemple et exercice de programmation en MATLAB

Une VA  $X(\xi)$  a une fonction de répartition définie sur la FIGURE 1.28

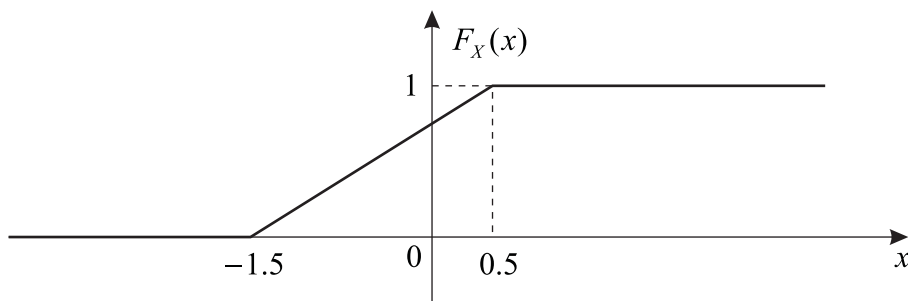


FIG. 1.28 – *Fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X(\xi)$  transformée par une fonction quadratique du type  $Y(\xi) = X^2(\xi)$*

Cette VA est transformée par une fonction quadratique amnésique  $Y = X^2$

1. Calculer théoriquement et expérimentalement  $\mu_Y$ ,  $\sigma_Y^2$ ,  $\mu_{Y^2}$ .
2. Calculer et représenter la fonction de répartition théorique  $F_Y(y)$ .
3. Représenter sur une même figure la densité de probabilité théorique de  $Y(\xi)$  et une estimation de la densité de probabilité obtenue par histogramme.

La FIGURE 1.29 présente le résultat attendu.



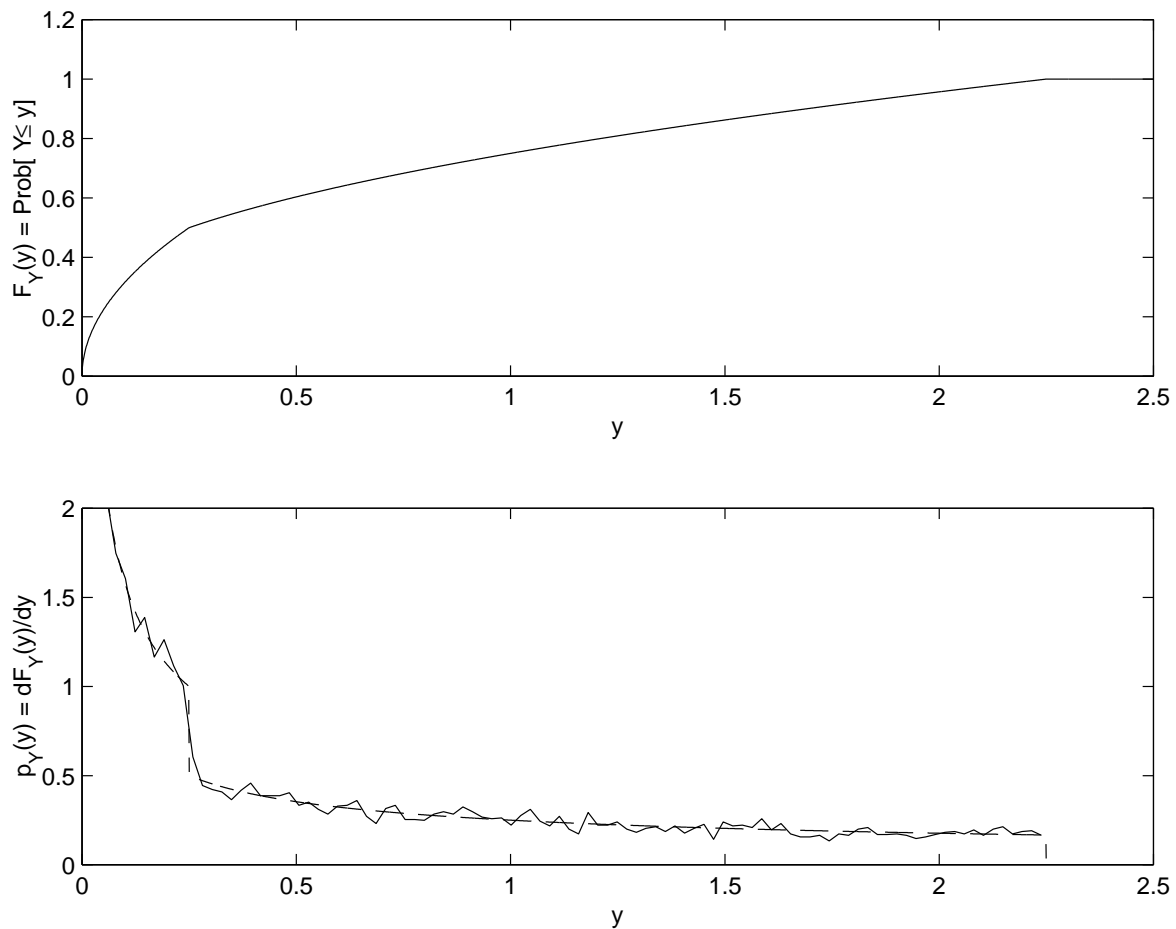


FIG. 1.29 – *Fonction de répartition (courbe du haut) et densité de probabilité (courbes du bas) d'une variable aléatoire à DdP uniforme transformée par une fonction quadratique du type  $Y = X^2$ . Les DdP théorique (— —) et estimée par histogramme (——) sont représentées*

#### 1.7.4 Exemple : signal sinusoïdal à phase aléatoire

Soit  $Y(t, \xi)$  le processus aléatoire dont chaque réalisation est un signal sinusoïdal d'amplitude  $A$ , de fréquence  $F_0$  mais de phase initiale  $X(\xi)$  aléatoire et uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$

$$Y(t, \xi) = A \sin[2\pi F_0 t + X(\xi)]$$

À un instant particulier  $t_0$ , on observe la variable aléatoire  $Y(\xi) = A \sin[2\pi F_0 t_0 + X(\xi)]$  qui est donc obtenue par transformation de la VA  $X(\xi)$  par la fonction :

$$f(X) = A \sin(2\pi F_0 t_0 + X)$$

Les propriétés statistiques de  $X(\xi)$  et de la transformation  $f(X)$  sont présentées sur la FIGURE 1.30. Cette figure introduit deux variables  $x_1$  et  $x_2$  pour lesquelles  $Y(\xi) \leq y$ . Nous avons

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) - 2\pi F_0 t_0 + 2k\pi$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) - 2\pi F_0 t_0 + 2k\pi$$

où  $k$  désigne un entier relatif quelconque.

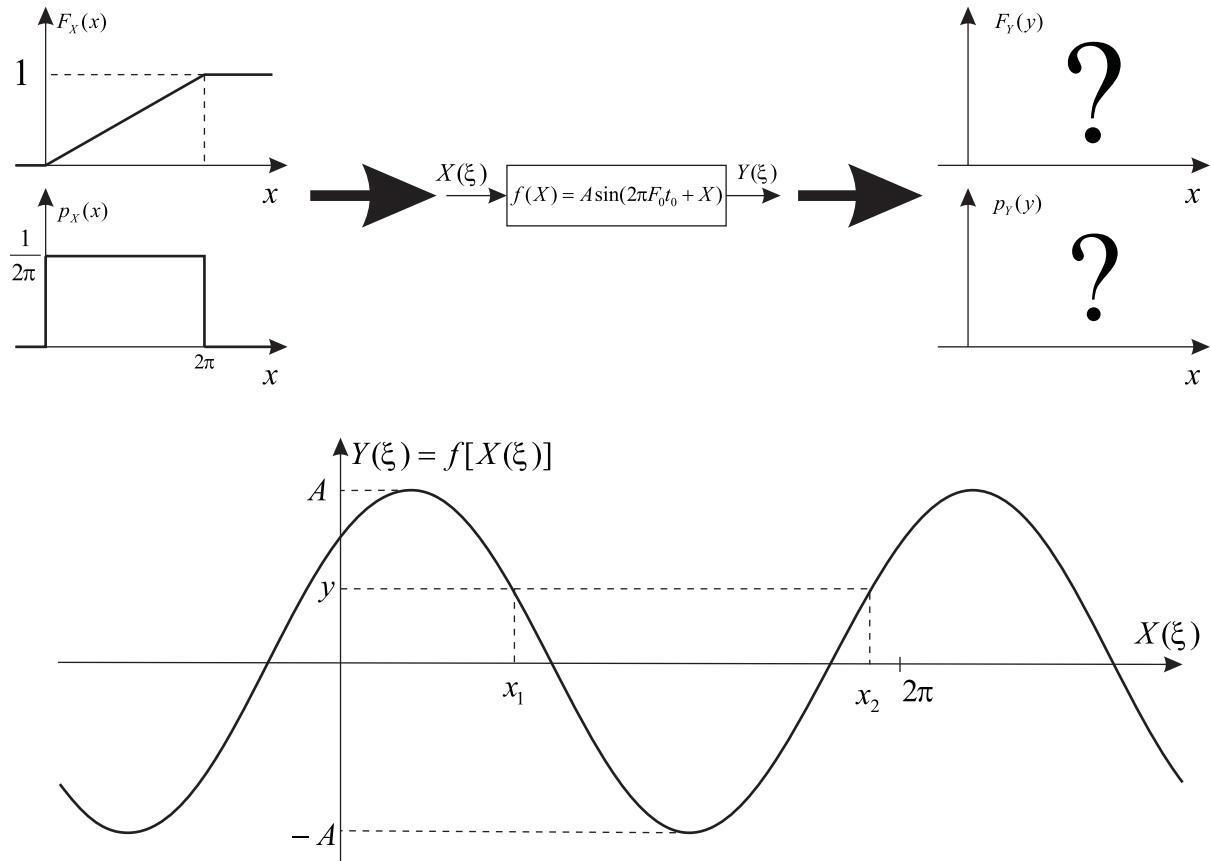


FIG. 1.30 – Transformation sinusöidale d'une variable aléatoire

Pour déterminer la densité de probabilité de  $Y(\xi)$  on recherche tout d'abord sa fonction de répartition

$$F_Y(y) = \begin{cases} \text{Prob}[Y(\xi) \leq y] & \text{pour } |y| \leq |A| \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Pour simplifier, posons :  $Y(\xi) = A \sin \alpha$  où  $\alpha$  désigne l'angle  $2\pi F_0 t_0 + X(\xi) = \alpha$  présenté sur la FIGURE 1.31 Nous avons alors

$$\text{Prob}[Y(\xi) \leq y] = 1 - \text{Prob}[Y(\xi) > y]$$

et

$$Y(\xi) > y \implies \alpha_1 + 2k\pi < \alpha < \pi - \alpha_1 + 2k\pi$$

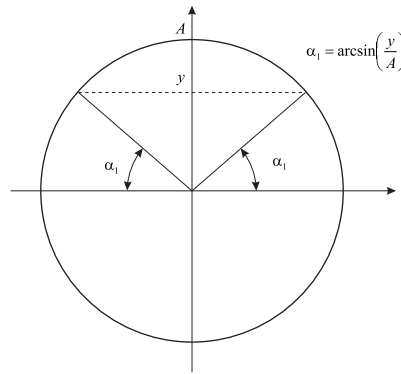
En introduisant dans cette relation l'expression de  $\alpha$  on obtient

$$Y(\xi) > y \implies \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) - 2\pi F_0 t_0 + 2k\pi < X < \pi - \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) - 2\pi F_0 t_0 + 2k\pi$$

Selon les valeurs de  $k$ , plusieurs intervalles de  $X$  entraînent  $Y > y$ . Un seul seulement de ces intervalles appartient à l'intervalle de variation de  $X$  qui est, par hypothèse,  $[0, 2\pi]$ .

Soit  $k_0$  la valeur de  $k$  correspondant à l'intervalle retenu. Nous avons donc :

$$\text{Prob}[Y > y] = \text{Prob} \left[ \underbrace{\arcsin\left(\frac{y}{A}\right) - 2\pi F_0 t_0 + 2k_0\pi}_{x_1} < X < \underbrace{\pi - \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) - 2\pi F_0 t_0 + (2k_0 + 1)\pi}_{x_2} \right]$$

FIG. 1.31 – Définition et calcul de l'angle  $\alpha_1$ 

$$= F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(x_2 - x_1)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \text{Prob}[Y \leq y] \\ &= 1 - \text{Prob}[Y > y] \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La Densité de Probabilité est déterminée par dérivation de  $F_Y(y)$

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - y^2}}$$

La FIGURE 1.32 présente les graphes des fonctions  $F_Y(y)$  et  $p_Y(y)$ .

### 1.7.5 Exemple : Redressement monoalternance

Soit le montage électronique décrit sur la FIGURE 1.33 où  $X(t, \xi)$  désigne un processus aléatoire qui représente la tension de sortie d'un générateur de signaux aléatoires. À un instant  $t = t_0$  quelconque,  $X(\xi) = X(t_0, \xi)$  désigne une variable aléatoire ayant une fonction de répartition  $F_X(x)$  et une densité de probabilité  $p_X(x)$ .

La tension  $X(t, \xi)$  produit un courant  $I(t, \xi)$  qui peut lui aussi être considéré comme un processus aléatoire. A un instant  $t = t_0$  quelconque,  $I(\xi) = I(t_0, \xi)$  désigne une variable aléatoire ayant une fonction de répartition  $F_I(i)$  et une densité de probabilité  $p_I(i)$ .

Selon le signe de  $X(\xi)$ , la diode conduit ou ne conduit pas.  $I(\xi)$  est donc obtenu par transformation de  $X(\xi)$  par la fonction non linéaire  $f(X)$  définie par :

$$I = f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{X}{R} & \text{si } X \geq 0 \end{cases}$$

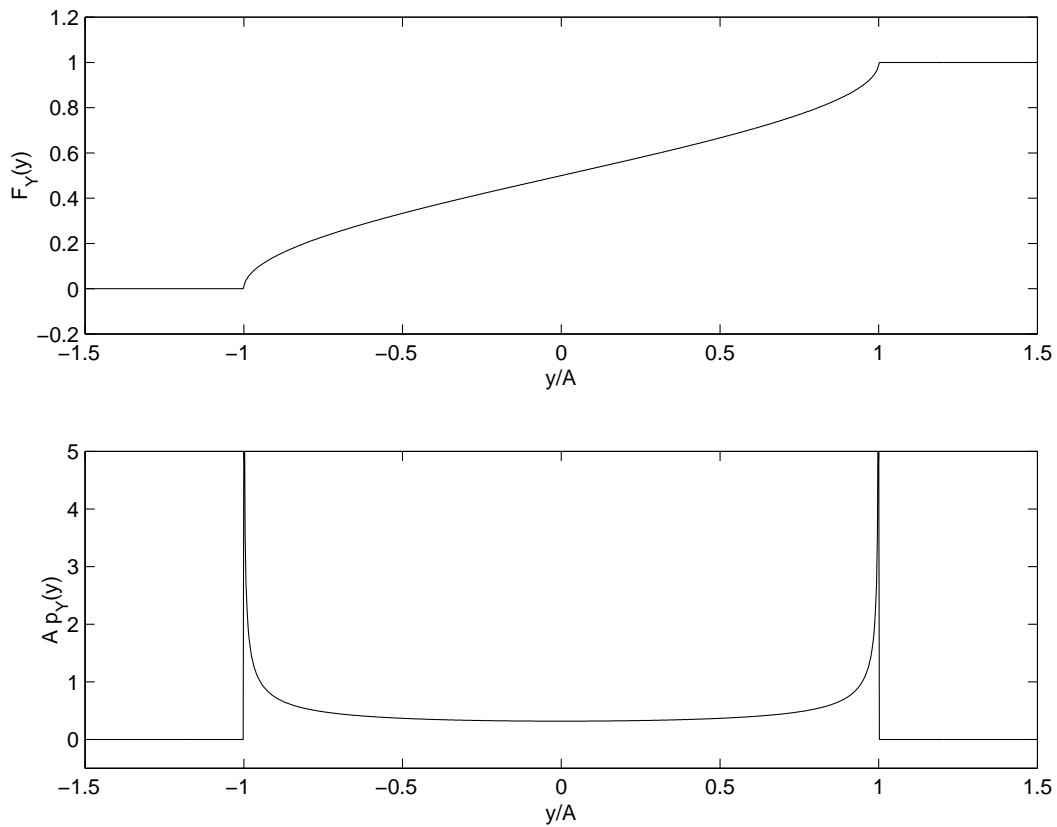


FIG. 1.32 – *Graphes des fonctions  $F_Y(y)$  et  $p_Y(y)$  dans le cas d'une transformation sinusoïdale d'une variable aléatoire à densité de probabilité uniforme. Courbe du haut :  $F_Y(y/A)$ , courbe du bas :  $A p_Y(y/A)$*

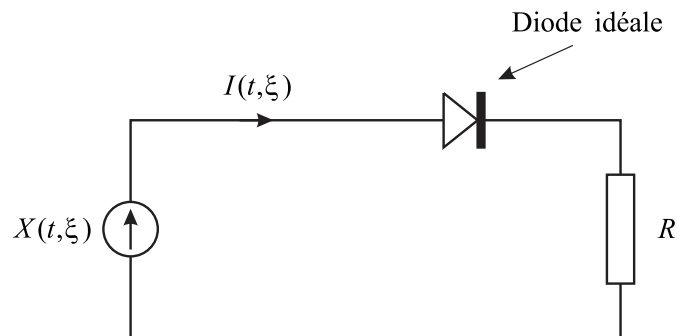


FIG. 1.33 – *Dispositif permettant le redressement monoalternance d'une tension électrique  $X(t, \xi)$*

Un graphe de  $f(X)$  est présenté sur la FIGURE 1.34.  
Cherchons la fonction de répartition de  $I(\xi)$

$$F_I(i) = \text{Prob}[I(\xi) \leq i] = \begin{cases} \textcircled{1} \text{ Prob}[I(\xi) \leq i] & \text{Si } i > 0 \\ \textcircled{2} \text{ Prob}[I(\xi) = 0] & \text{Si } i = 0 \\ \textcircled{3} 0 & \text{Si } i < 0 \end{cases}$$

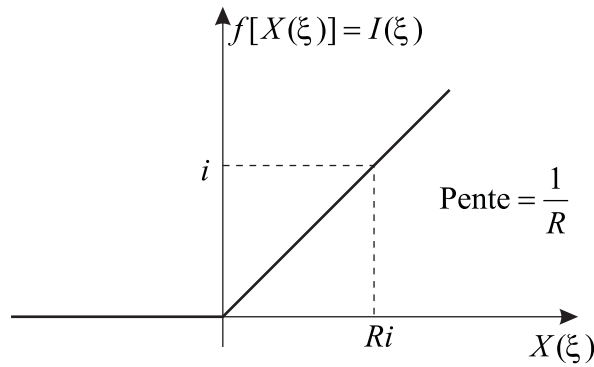


FIG. 1.34 – *Graphes de la fonction de transformation de la variable aléatoire  $X(\xi)$  par le dispositif de redressement monoalternance présenté sur la FIGURE 1.33*

En utilisant les propriétés de la fonction  $f[X(\xi)]$  présentées sur la FIGURE 1.34 nous pouvons écrire :

$$F_I(i) = \text{Prob}[I(\xi) \leq i] = \begin{cases} \textcircled{1} \text{ Prob}[X(\xi) \leq Ri] = F_X(Ri) & \text{Si } i > 0 \\ \textcircled{2} \text{ Prob}[X(\xi) \leq 0] = F_X(0) & \text{Si } i = 0 \\ \textcircled{3} 0 & \text{Si } i < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition  $F_I(i)$  présente donc une discontinuité en zéro si  $F_X(0) \neq 0$  et la densité de probabilité s'exprime à l'aide d'une distribution de DIRAC en zéro. Ces résultats sont illustrés sur la FIGURE 1.35.

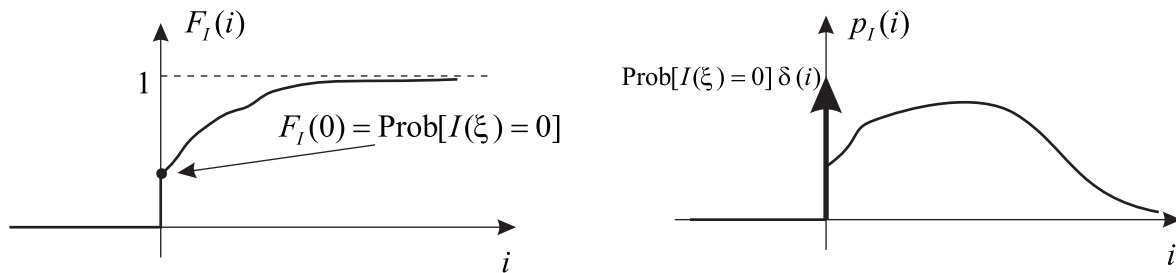


FIG. 1.35 – *Allure de la fonction de répartition et de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $I(\xi)$  obtenue par le dispositif de redressement monoalternance présenté sur la FIGURE 1.33*

## Chapitre 2

# Vecteurs aléatoires

### 2.1 Notion de vecteurs aléatoires - Définitions

Soit par exemple deux processus aléatoires  $X(t, \xi)$  et  $Y(t, \xi)$  présentés sur la FIGURE 2.1. À des instants

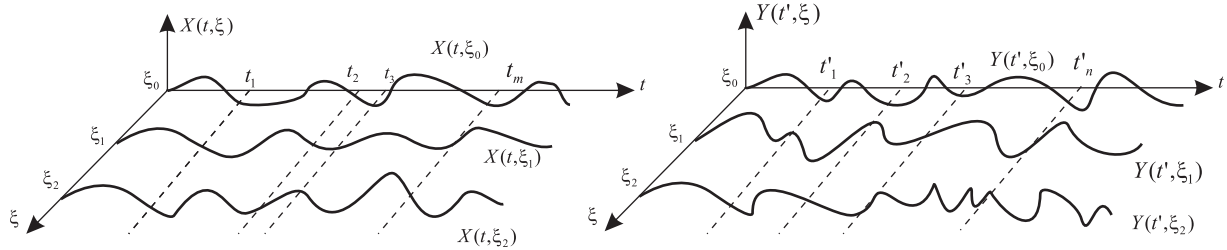


FIG. 2.1 – *Exemples de deux processus aléatoires permettant la formation d'un vecteur aléatoire*

précis  $t_1, t_2, \dots, t_m$  ou  $t'_1, t'_2, \dots, t'_n$  on observe les variables aléatoires

$$\begin{aligned} X_i &= X(t_i, \xi) \\ X_j &= X(t'_j, \xi) \end{aligned}$$

L'ensemble des  $X_i$  ou des  $X_j$  définit un vecteur aléatoire noté  $\vec{X}$  ou  $\vec{Y}$ .

**Définition:**

$$\vec{X} = \begin{cases} X_1 = X(t_1, \xi) \\ X_2 = X(t_2, \xi) \\ \vdots \\ X_m = X(t_m, \xi) \end{cases} \quad \vec{Y} = \begin{cases} Y_1 = Y(t'_1, \xi) \\ Y_2 = Y(t'_2, \xi) \\ \vdots \\ Y_n = Y(t'_n, \xi) \end{cases}$$

**Notations:**

$$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$$

$$\vec{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T$$

On est souvent amené en traitement du signal à étudier les propriétés statistiques de vecteurs aléatoires de dimensions 2. On utilise alors la notion de Couple Aléatoire (CA) qui est un vecteur aléatoire de dimensions 2. Par exemple, si  $\vec{Z}$  est le vecteur aléatoire composé des variables aléatoires  $X_1$  et  $Y_3$ , nous écrivons

$$\vec{Z} = [X_1, Y_3]^T \triangleq [X, Y]^T$$

### Remarque importante concernant les notations

Pour alléger les notations, dans toute la suite de ce cours, nous notons indifféremment  $X$  une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire. Cependant, chaque fois que cela est nécessaire et pour lever toute ambiguïté, nous redéfinissons les notations utilisées. Nous avons par exemple

$$X = X(t_2, \xi) = \text{Variable aléatoire scalaire}$$

$$\vec{X} = X = [X(t_2, \xi), Y(t'_3, \xi)]^T = \text{Vecteur aléatoire}$$

## 2.2 Fonctions de répartition et densités de probabilité d'un vecteur aléatoire.

### 2.2.1 FR et DdP conjointes - Cas des vecteurs aléatoires continus

Un vecteur aléatoire est entièrement décrit par sa Fonction de Répartition Conjointe  $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = \text{Prob}[(X_1 \leq x_1) \text{ et } (X_2 \leq x_2) \text{ et } \dots (X_m \leq x_m)]} \quad (2.1)$$

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \text{ et } x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$$

Pour le couple aléatoire  $[X, Y]^T$  nous avons :

$$F_{X,Y}(x, y) = \text{Prob}[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq y)]$$

La Densité de Probabilité conjointe est donnée par :

$$\boxed{p_X(x) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} F_X(x)} \quad (2.2)$$

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \text{ et } x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$$

Pour le couple aléatoire  $[X, Y]^T$  nous avons :

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

### Exemple : FR et DdP d'un couple aléatoire Gaussien

La FIGURE 2.2 présente un exemple de fonction de répartition et de densité de probabilité conjointes d'un couple aléatoire gaussien.

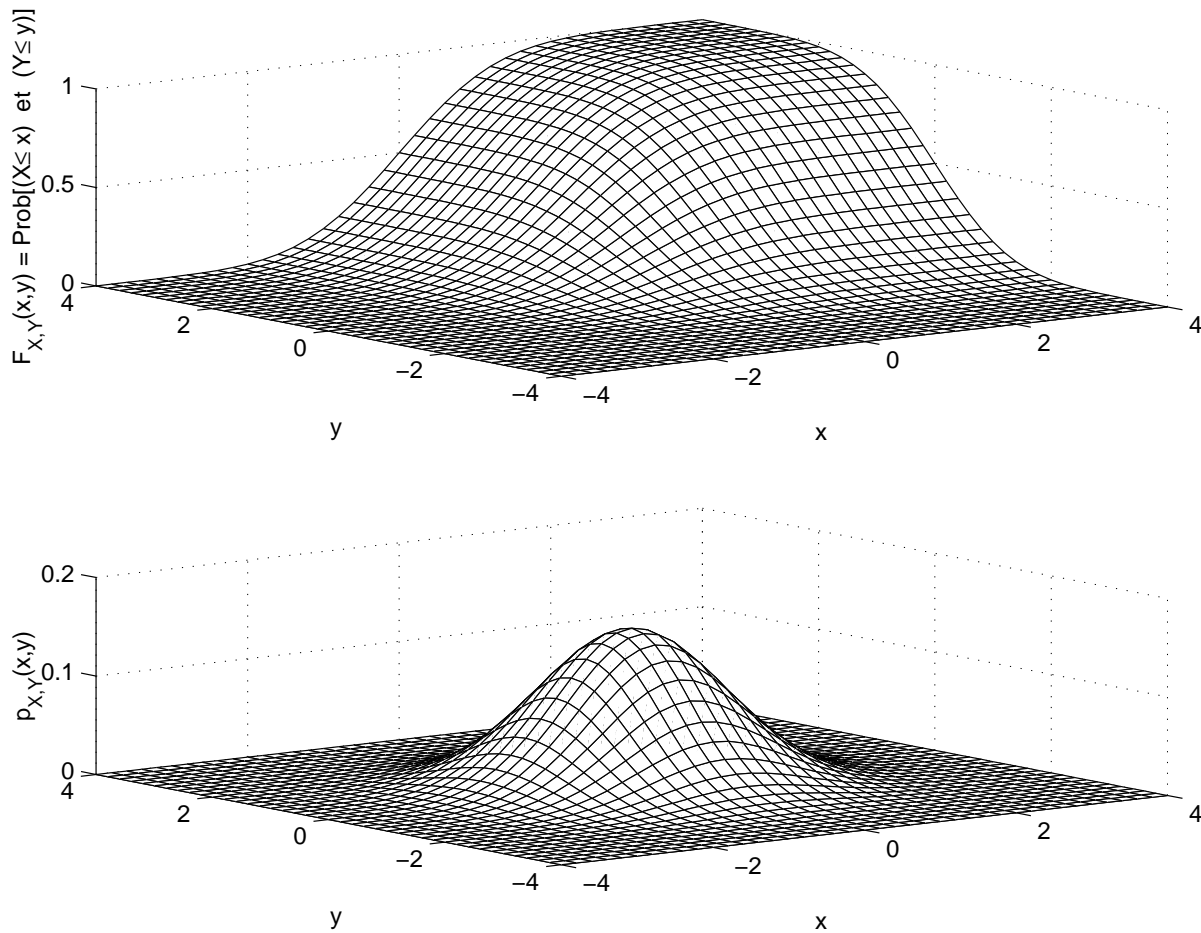


FIG. 2.2 – Exemple de fonction de répartition et de densité de probabilité conjoints d'un couple aléatoire gaussien

### 2.2.2 FR et DdP conjoints - Cas des vecteurs aléatoires discrets

#### FR conjointe

Un vecteur aléatoire est entièrement décrit par sa fonction de répartition conjointe  $F_X(x)$

$$F_X(x) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Prob}[(X_1 \leq x_1) \text{ ET } (X_2 \leq x_2) \text{ ET } \dots (X_m \leq x_m)]$$

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \text{ et } x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$$

C'est la même définition que dans le cas continu.

#### DdP conjointe dans le cas d'un couple aléatoire $[X, Y]^T$

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes pouvant prendre respectivement les valeurs

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_p \text{ (pour } X)$$

et

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_q \text{ (pour } Y)$$



Alors la DdP conjointe s'écrit :

$$p_{X,Y}(x,y) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \text{Prob}[(X = a_i) \text{ ET } (Y = b_j)] \delta(x - a_i, y - b_j) \quad (2.3)$$

C'est un réseau d'impulsions de dirac

### DdP conjointe dans le cas d'un vecteur aléatoire discret de dimension quelconque

Soit  $v_i$  les  $N$  valeurs vectorielles que peut prendre le vecteur aléatoire  $X$  de dimension  $m$

$$\begin{aligned} v_1 &= [v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1m}]^T \\ v_2 &= [v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m}]^T \\ &\vdots \\ v_N &= [v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{Nm}]^T \end{aligned}$$

La DdP de ce vecteur aléatoire s'écrit :

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{i=1}^N \text{Prob}[(X = v_i)] \delta(x - v_i) \\ X &= [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \text{ et } x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \end{aligned} \quad (2.4)$$

La FIGURE 2.3 présente un exemple de fonction de répartition et de densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes. Notons que la densité de probabilité conjointe est un réseau de d'impulsions de dirac qui ne peuvent être représentées que de façon approximatives avec MATLAB .

### 2.2.3 FR et DdP conjointes - Cas général.

La densité de Probabilité dans le cas général s'obtient à partir de la Fonction de Répartition par la formule

$$p_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x)$$

Il faut cependant faire très attention lors du calcul des dérivées partielles de  $F_X(x)$ . En effet, cette fonction peut ne pas être continue ou présenter simplement des ruptures de pente. Dans ce cas, les dérivations seront à prendre au sens des distributions.

### 2.2.4 Propriétés remarquables des FR et DdP conjointes dans le cas de couples aléatoires.

Le cas des couples aléatoires est un cas important car il permet de calculer des moyennes statistiques d'ordre 2. De plus, il est possible de représenter les densités de probabilités conjointes à l'aide de représentations tri dimensionnelles comme le montre la FIGURE 2.4. Pour des valeurs suffisamment faibles de  $dx$  et  $dy$ , le volume élémentaire  $P_{XY}(x,y) dx dy$  représente

$$P_{XY}(x,y) dx dy = \text{Prob}[(X \in [x, x + dx]) \text{ et } (Y \in [y, y + dy])]$$

Par intégration de  $P_{XY}(x,y)$  on obtient la fonction de répartition conjointe

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(a,b) da db \\ &= \text{Prob}[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq y)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

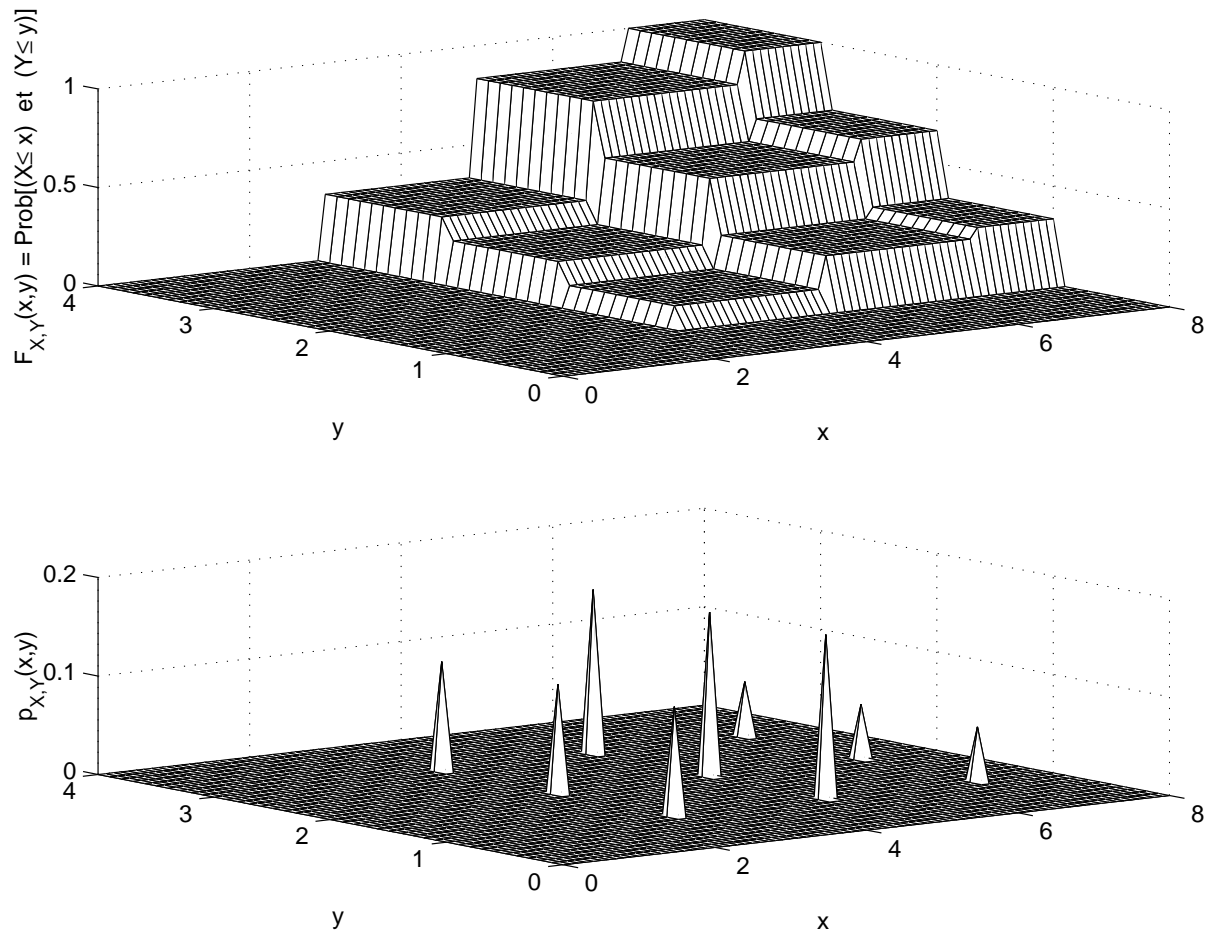


FIG. 2.3 – *Exemple de fonction de répartition et de densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes*

Cette expression permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 F_{X,Y}(\infty, \infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(a,b) da db \\
 &= \text{Prob}[(X \leq \infty) \text{ et } (Y \leq \infty)] \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Par ailleurs, un calcul simple permet de montrer que

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}[(x_1 \leq X \leq x_2) \text{ et } (y_1 \leq Y \leq y_2)] &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p_{X,Y}(x,y) dx dy \\
 &= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) + F_{X,Y}(x_1, y_1)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

### 2.2.5 Estimation de la densité de probabilité conjointe d'un couple aléatoire avec MATLAB

Comme dans le cas de variables aléatoires scalaires, il est possible d'estimer la densité de probabilité conjointe d'un couple de valeurs  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$  dont on a préalablement enregistré  $N$  valeurs dans deux

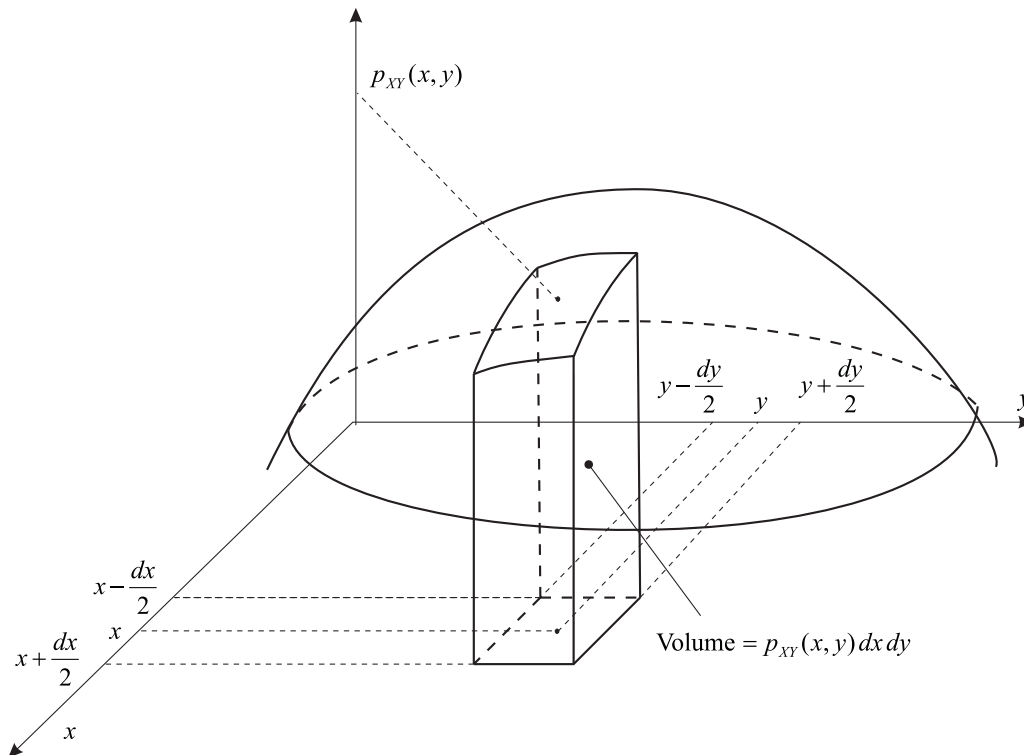


FIG. 2.4 – Représentation de la DdP conjointe d'un couple aléatoire

vecteurs  $X$  et  $Y$ . Pour cela, on effectue dans l'ordre les tâches suivantes :

1. Effectuer  $N$  essais et enregistrer les  $X(\xi_i)$  et les  $Y(\xi_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots, N$  dans deux vecteurs  $X$  et  $Y$
2. Diviser les intervalles de variations de  $X$  et  $Y$  en  $N_X$  et  $N_Y$  intervalles élémentaires de largeurs  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  suffisamment faible. Nous avons

$$\Delta_x = \frac{X_{max} - X_{min}}{N_X} \quad \text{et} \quad \Delta_y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{N_Y}$$

où les  $\bullet_{min}$  et  $\bullet_{max}$  désignent respectivement les valeurs minimales et maximales des vecteurs  $X$  et  $Y$ .

3. Calculer les positions  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N_X$ ) et  $y_l$  ( $l = 1, 2, \dots, N_Y$ ) des centre des intervalles de largeurs  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ .
4. Compter le nombre de fois  $M(x_k, y_l, \Delta_x, \Delta_y)$  où  $X(\xi_i)$  et  $Y(\xi_i)$  vérifient **conjointement**

$$\left\{ X(\xi_i) \in \left[ x_k - \frac{\Delta_x}{2}, x_k + \frac{\Delta_x}{2} \right] \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ Y(\xi_i) \in \left[ y_l - \frac{\Delta_y}{2}, y_l + \frac{\Delta_y}{2} \right] \right\}$$

5. La probabilité pour que la condition ci-dessus soit vérifiée est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Prob} & \left[ \left\{ X(\xi_i) \in \left[ x_k - \frac{\Delta_x}{2}, x_k + \frac{\Delta_x}{2} \right] \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ Y(\xi_i) \in \left[ y_l - \frac{\Delta_y}{2}, y_l + \frac{\Delta_y}{2} \right] \right\} \right] \\ &= \int_{x_k - \frac{\Delta_x}{2}}^{x_k + \frac{\Delta_x}{2}} \int_{y_l - \frac{\Delta_y}{2}}^{y_l + \frac{\Delta_y}{2}} P_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{M(x_k, y_l, \Delta_x, \Delta_y)}{N} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des rectangles pour trouver une valeur approchée de l'intégrale ci-dessus, il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{M(x_k, y_l, \Delta_x, \Delta_y)}{N} \right) = \int_{x_k - \frac{\Delta_x}{2}}^{x_k + \frac{\Delta_x}{2}} \int_{y_l - \frac{\Delta_y}{2}}^{y_l + \frac{\Delta_y}{2}} P_{XY}(x, y) dx dy \approx p_{XY}(x_k, y_l) \Delta_x \Delta_y$$

Nous avons donc :

$$p_{XY}(x_k, y_l) = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ \Delta_x \rightarrow 0 \text{ et } \Delta_y \rightarrow 0}} \frac{M(x_k, y_l, \Delta_x, \Delta_y)}{N \Delta_x \Delta_y} \quad (2.8)$$

L'estimation de  $p_{XY}(x_k, y_l)$  notée  $\widehat{p_{XY}}(x_k, y_l)$  est donnée par l'**histogramme** des réalisations défini par

$$\text{Hist}_{XY}(x_k, y_l, \Delta_x, \Delta_y, N) = \frac{M(x_k, y_l, \Delta_x, \Delta_y)}{N \Delta_x \Delta_y} \quad (2.9)$$

6. Reprendre les étapes 1, 2, 3, 4 et 5 ci-dessus pour estimer  $p_{XY}(x, y)$  en un nouveau point  $(x_k, y_l)$

### Programme MATLAB d'estimation de la densité de probabilité conjointe d'un couple aléatoire

La fonction `ddp2d` ( ) décrite ci-après, permet de calculer une estimation de la densité de probabilité conjointe d'un couple aléatoire quelconque. On utilise la fonction `floor` ( ) de MATLAB qui permet de trouver la position de l'intervalle dans lequel se trouve la variable aléatoire  $X(\xi_i)$  ou  $Y(\xi_i)$ . Cette fonction est décrite ci-après.

#### Description de la fonction `floor` ( ) de MATLAB

`FLOOR` Round towards minus infinity.  
`FLOOR(X)` rounds the elements of X to the nearest integers towards minus infinity.  
 See also `ROUND`, `CEIL`, `FIX`.

#### Description de la fonction `ddp2d` ( )

```
function [Ddp,x,y,delta_X,delta_Y] = ddp2d(X,Y,Nx,Ny)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%
```

```
% FICHER : ddp2d.m
```

```
%
```

```
% BUT : Fonction d'estimation de la Densité de Probabilité conjointe  
% d'un couple aléatoire p_XY(x,y)
```

```
%
```

```
% ARGUMENTS : - X : vecteur colonne contenant les différentes valeurs de la variable  
% aléatoire X à analyser
```

```
% - Y : vecteur colonne contenant les différentes valeurs de la variable  
% aléatoire à analyser
```

```
% - Nx : nombre d'intervalles d'analyse entre X_min et X_max
```

```
% - Ny : nombre d'intervalles d'analyse entre Y_min et Y_max
```

```
% - Ddp : estimation de la densité de probabilité au centre
```

```

%               des intervalles d'analyse
%               - x : vecteur contenant les positions du centre des intervalles
%                   d'analyse de X et de largeur Delta_X
%               - y : vecteur contenant les positions du centre des intervalles
%                   d'analyse de Y et de largeur Delta_Y
%               - delta_X : largeur des intervalles élémentaires d'analyse de X
%               - delta_Y : largeur des intervalles élémentaires d'analyse de Y
%
%   AUTEUR :      GUY PLANTIER (ESEO)
%
%   DATE :        Novembre 1999
%
%   REFERENCES :   Cours d'analyse et traitement des signaux aléatoires de Guy PLANTIER
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

N = length(X);

xmin = min(X);
xmax = max(X);
ymin = min(Y);
ymax = max(Y);

delta_X = (xmax-xmin)/Nx;
delta_Y = (ymax-ymin)/Ny;

lieu_xmax = find(X==xmax);
lieu_ymax = find(Y==ymax);
X(lieu_xmax) = X(lieu_xmax)-delta_X/10;    % Assure que les Xmax sont comptés
                                           % dans le dernier intervalle
Y(lieu_ymax) = Y(lieu_ymax)-delta_Y/10;    % Assure que les Ymax sont comptés
                                           % dans le dernier intervalle

x = xmin+delta_X*((1:Nx)'-0.5);
y = ymin+delta_Y*((1:Ny)'-0.5);

nx = floor((X-xmin)/delta_X)+1;
ny = floor((Y-ymin)/delta_Y)+1;

DdP = zeros(Ny,Nx);
for k = 1:N
    DdP(ny(k),nx(k)) = DdP(ny(k),nx(k))+1;
end

DdP = DdP/N/delta_X/delta_Y;

```

### Programme MATLAB d'estimation de la fonction de répartition conjointe d'un couple aléatoire

Pour obtenir une estimation rudimentaire de la fonction de répartition d'un couple aléatoire, on peut calculer numériquement une valeur approchée de l'intégrale (2.7). En reprenant les notations introduites en début de ce paragraphe pour la présentation de la méthode d'estimation de la densité de probabilité conjointe d'un couple aléatoire, nous avons

$$F_{XY}(x_k, y_l) \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l P_{XY}(x_i, y_j) \Delta_x \Delta_y$$

La fonction MATLAB ci-dessous permet de calculer cette double somme à partir de la densité de probabilité estimée par la fonction `ddp2d()`

### Description de la fonction **FR2d()**

```
function [FR,DdP,x,y,delta_X,delta_Y] = FR2d(X,Y,Nx,Ny)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   FICHER :           FR2d.m
%
%   BUT :              Fonction d'estimation de la Fonction de répartition conjointe F_XY(x,y)
%                      d'un couple aléatoire. L'estimation se fait en intégrant numériquement
%                      l'estimation de la DdP obtenue par la fonction ddp2d();
%
%   ARGUMENTS :        - X : vecteur colonne contenant les différentes valeurs de la variable
%                      aléatoire X à analyser
%                      - Y : vecteur colonne contenant les différentes valeurs de la variable
%                      aléatoire à analyser
%                      - Nx : nombre d'intervalles d'analyse entre X_min et X_max
%                      - Ny : nombre d'intervalles d'analyse entre Y_min et Y_max
%                      - FR : estimation de la fonction de répartition au centre des
%                          intervalles d'analyse
%                      - DdP : estimation de la densité de probabilité au centre des
%                          intervalles d'analyse
%                      - x : vecteur contenant les positions du centre des intervalles
%                          d'analyse de X et de largeur Delta_X
%                      - y : vecteur contenant les positions du centre des intervalles
%                          d'analyse de Y et de largeur Delta_Y
%                      - delta_X : largeur des intervalles élémentaires d'analyse de X
%                      - delta_Y : largeur des intervalles élémentaires d'analyse de Y
%
%   FONCTIONS APPELEES : ddp2d()
%
%   AUTEUR :           GUY PLANTIER (ESEO)
%
%   DATE :             Novembre 1999
%
%   REFERENCES :       Cours d'analyse et traitement des signaux aléatoires de Guy PLANTIER
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[DdP,x,y,delta_X,delta_Y] = ddp2d(X,Y,Nx,Ny);

FR = zeros(size(DdP));

for k = 1:Nx
    for l = 1 : Ny
        FR(l,k) = sum(sum(DdP(1:l,1:k)));
    end
end

FR = FR*delta_X*delta_Y;
```

### Exemples d'application

La FIGURE 2.5 présente la densité de probabilité conjointe théorique et estimée d'un couple aléatoire gaussien dans le cas où  $N = 100000$ . Dans ce cas, l'estimation semble tout à fait correcte.

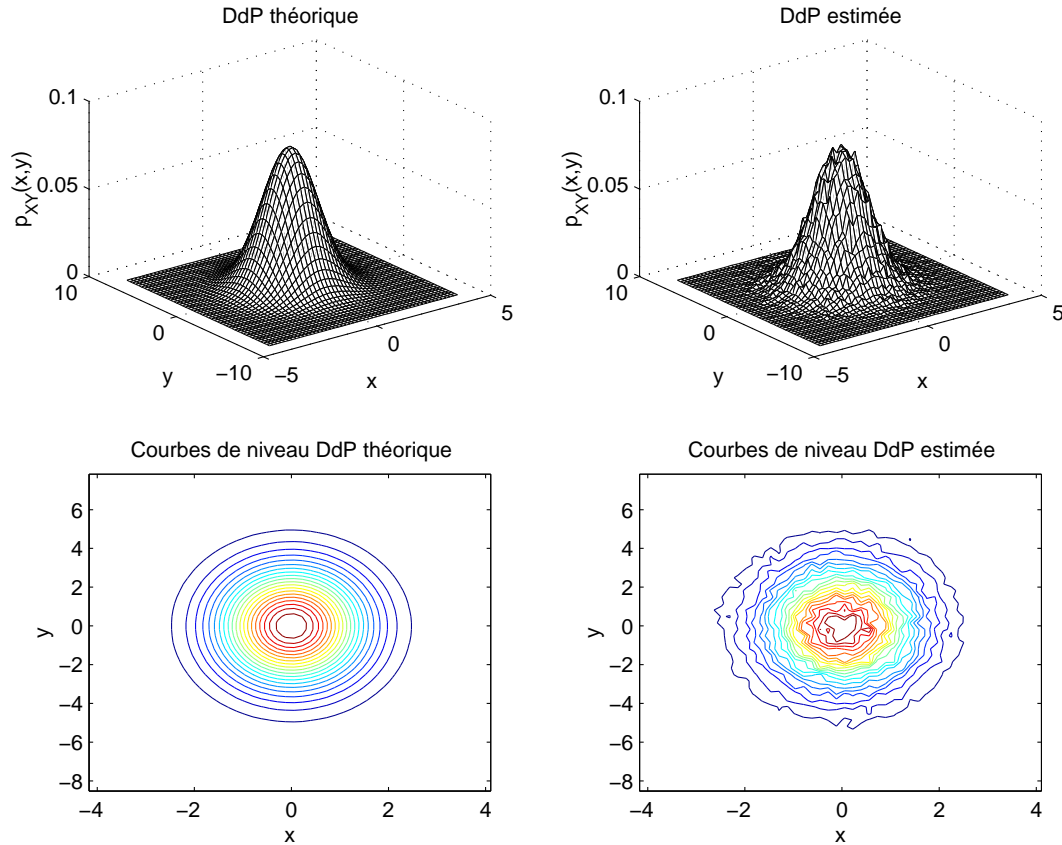


FIG. 2.5 – *Densité de probabilité conjointe théorique et estimée d'un couple aléatoire gaussien. Le nombre  $N$  d'expériences enregistrées pour  $X(\xi_i)$  et  $Y(\xi_i)$  est de  $N = 100000$ .  $N_X = N_Y = 50$*

Comme dans le cas scalaire, le nombre  $N$  d'expériences enregistrées a une influence directe sur la variance de l'estimation. Ce point est illustré sur la FIGURE 2.6 obtenue avec  $N = 10000$ . Le résultat est dans ce cas moins bon que celui qui est présenté sur la FIGURE 2.5.

La FIGURE 2.7 présente la fonction de répartition conjointe théorique et estimée d'un couple aléatoire gaussien dans le cas où  $N = 1000$ . Du fait de l'intégration, l'estimation de la fonction de répartition est correcte, même avec un nombre de points relativement faible. Ceci n'est pas le cas pour l'estimation de la densité de probabilité qui fait intervenir une dérivation de  $F_{XY}(x,y)$ , opération qui accentue beaucoup les erreurs d'estimation.

#### 2.2.6 Fonctions de répartition et densités de probabilités marginales

Nous donnons dans ce qui suit les définitions des FR et DdP marginales dans le cas d'un couple aléatoire. La généralisation aux cas des vecteurs aléatoires de dimensions supérieures à 2 est immédiate.

Soit donc un couple aléatoire  $[X,Y]^T$  dont on connaît les propriétés statistiques conjointes (fonction de

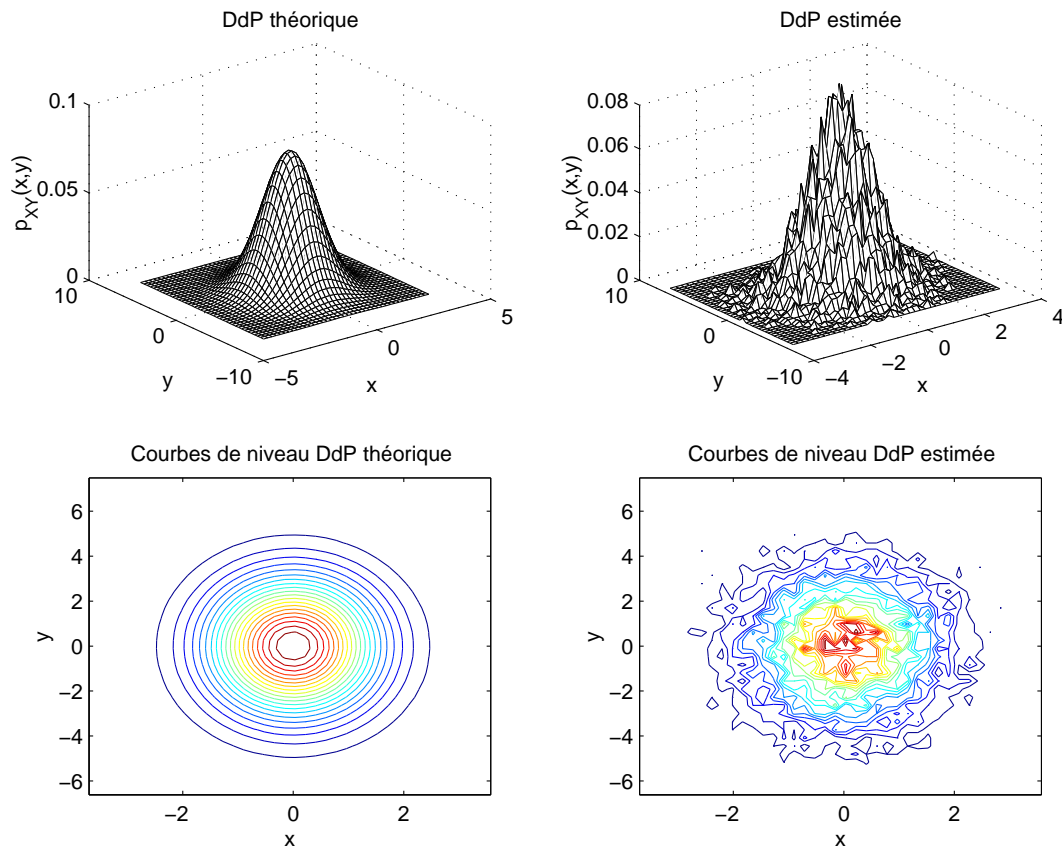


FIG. 2.6 – *Densité de probabilité conjointe théorique et estimée d'un couple aléatoire gaussien. Le nombre  $N$  d'expériences enregistrées pour  $X(\xi_i)$  et  $Y(\xi_i)$  est de  $N = 10000$ .  $N_X = N_Y = 50$*

répartition et densité de probabilité)

$$F_{X,Y}(x,y) = \text{Prob}[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq y)]$$

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Nous recherchons les distributions marginales des variables aléatoire  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$

$$F_X(x) = \text{Prob}[X \leq x]$$

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y]$$

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

Nous savons que :

$$F_{X,Y}(x,\infty) = \text{Prob}[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq \infty)] = \text{Prob}[(X \leq x)]$$

et

$$F_{X,Y}(\infty,y) = \text{Prob}[(X \leq \infty) \text{ et } (Y \leq y)] = \text{Prob}[(Y \leq y)]$$



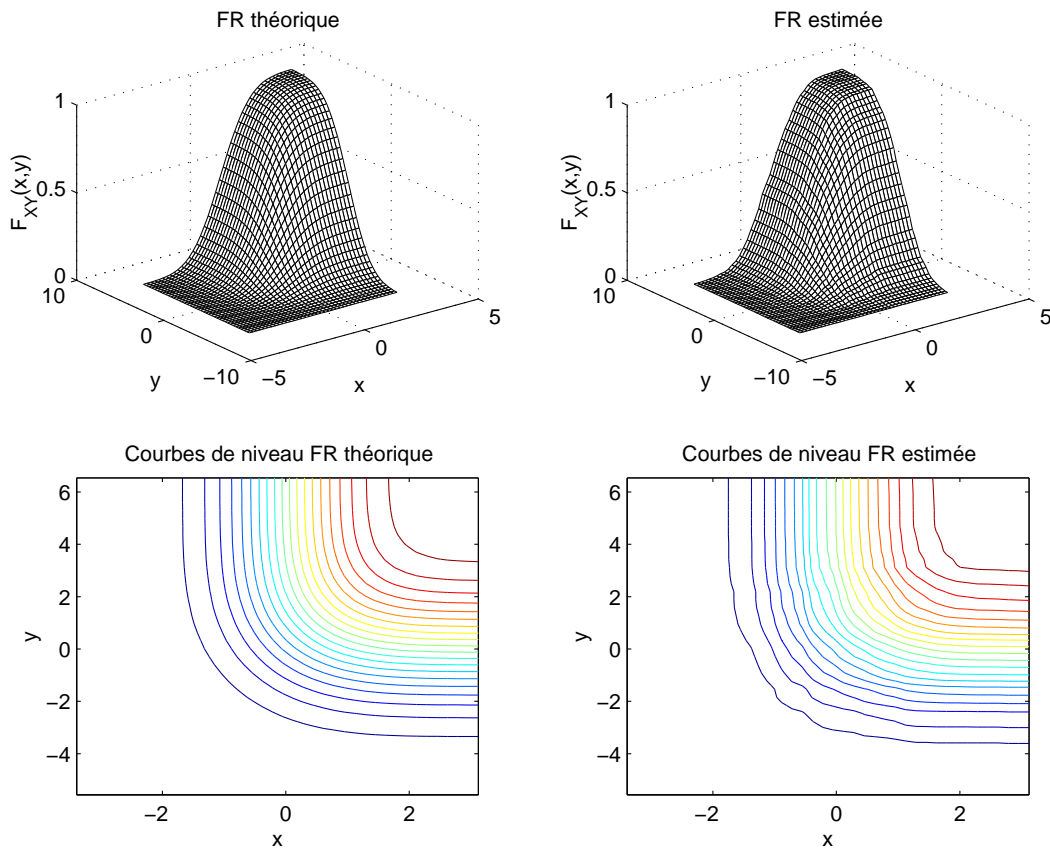


FIG. 2.7 – *Fonction de répartition conjointe théorique et estimée d'un couple aléatoire gaussien. Le nombre  $N$  d'expériences enregistrées pour  $X(\xi_i)$  et  $Y(\xi_i)$  est de  $N = 1000$ .  $N_X = N_Y = 50$*

En résumé nous avons

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) \quad (2.10)$$

et

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) \quad (2.11)$$

Ces distributions sont appelées Fonctions de répartition marginales ou à Priori.

Nous pouvons maintenant calculer les DdP marginales. Nous avons :

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(a, b) da db$$

et

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(a, b) da db$$

Ces deux expressions prennent une forme différente selon que les variables aléatoires étudiées sont discrètes ou continues.

**Cas des variables aléatoires continues**

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y) dy \quad (2.12)$$

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y) dx \quad (2.13)$$

**Cas des variables aléatoires discrètes**

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X,Y}(x, \infty) \\ &= \int_{-\infty}^x p_X(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)] \delta(x' - a_i) \delta(y' - b_j) dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^p \underbrace{\left[ \sum_{j=1}^q \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)] \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y' - b_j) dy'}_{=1} \right]}_{p_i} \delta(x' - a_i) dx' \end{aligned}$$

où  $p$  et  $q$  désignent respectivement le nombre de valeurs distinctes que peuvent prendre les VAD  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$ . En résumé nous pouvons écrire :

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^p p_i \delta(x - a_i) \quad (2.14)$$

et

$$p_Y(y) = \sum_{j=1}^q p_j \delta(y - b_j) \quad (2.15)$$

avec :

$$p_i = \sum_{j=1}^q \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)] = \text{Prob}[X = a_i]$$

et

$$p_j = \sum_{i=1}^p \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)] = \text{Prob}[Y = b_j]$$

**2.2.7 Fonctions de répartition et densités de probabilités conditionnelles.****Fonctions de répartition conditionnelles**

Les définitions de ces distributions conditionnelles sont, ici aussi, données dans le cas de couples aléatoires. La généralisation aux cas des vecteurs aléatoires de dimensions supérieures à 2 est immédiate et

sera donnée sans démonstration. Soit le couple aléatoire  $[X, Y]^T$  dont on connaît les statistiques conjointes  $F_{XY}(x, y)$  et  $p_{XY}(x, y)$ . Nous recherchons les distributions conditionnelles  $F_X(x|Y \leq y)$  et  $F_Y(y|X \leq x)$  définies par

$$\begin{aligned} F_X(x|Y \leq y) &= \text{Prob}[(X \leq x)|(Y \leq y)] \\ &= \text{Prob}[(X \leq x) \text{ sachant que } (Y \leq y)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

et

$$\begin{aligned} F_Y(y|X \leq x) &= \text{Prob}[(Y \leq y)|(X \leq x)] \\ &= \text{Prob}[(Y \leq y) \text{ sachant que } (X \leq x)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

En introduisant dans cette relation la règle de BAYES

$$\begin{aligned} \text{Prob}[A \text{ et } B] &= \text{Prob}[A]\text{Prob}[B|A] \\ &= \text{Prob}[B]\text{Prob}[A|B] \end{aligned}$$

il vient

$$\text{Prob}[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq y)] = \text{Prob}[Y \leq y]\text{Prob}[(X \leq x)|(Y \leq y)]$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= F_Y(y)F_X(x|Y \leq y) \\ &= F_{X,Y}(\infty, y)F_X(x|Y \leq y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

et

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= F_X(x)F_Y(y|X \leq x) \\ &= F_{X,Y}(x, \infty)F_Y(y|X \leq x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les FR conditionnelles sont parfois appelées FR à posteriori

### Densités de probabilité conditionnelles dans le cas continu

On suppose que la FR  $F_{X,Y}(x, y)$  est partout dérivable. Nous avons alors (au sens classique de la dérivation des fonctions)

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

La densité de probabilité conditionnelle est définie par (avec  $dx$  et  $dy$  tendant vers 0)

$$\begin{aligned} p_X(x|y) dx &= \text{Prob}[(x \leq X \leq x + dx) \text{ sachant que } (y \leq Y \leq y + dy)] \\ &= \frac{\text{Prob}[(x \leq X \leq x + dx) \text{ et } (y \leq Y \leq y + dy)]}{\text{Prob}[(y \leq Y \leq y + dy)]} \\ &= \frac{p_{X,Y}(x, y) dx dy}{p_Y(y) dy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y)p_X(x|y) \\ &= p_X(x)p_Y(y|x) \end{aligned}$$

(2.20)

**Densités de probabilité conditionnelles dans le cas discret**

En reprenant les notations du paragraphe précédent, il vient :

$$\begin{aligned}
 p_{X,Y}(x,y) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)] \delta(x - a_i) \delta(y - b_j) \\
 &= \sum_{i=1}^p \text{Prob}[X = a_i] \delta(x - a_i) \sum_{j=1}^q \text{Prob}[Y = b_j | X = a_i] \delta(y - b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^q \text{Prob}[Y = b_j] \delta(y - b_j) \sum_{i=1}^p \text{Prob}[X = a_i | Y = b_j] \delta(x - a_i) \\
 &= p_X(x) p_Y(y|x) \\
 &= p_Y(y) p_X(x|y)
 \end{aligned}$$

En introduisant dans cette relation la règle de BAYES nous obtenons les DdP conditionnelles  $p_X(x|y)$  et  $p_Y(y|x)$

$$\begin{aligned}
 p_X(x|y) &= \sum_{i=1}^p \text{Prob}[X = a_i | Y = b_j] \delta(x - a_i) \\
 &= \sum_{i=1}^p \frac{\text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)]}{\sum_{i=1}^p \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)]} \delta(x - a_i)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 p_Y(y|x) &= \sum_{j=1}^q \text{Prob}[Y = b_j | X = a_i] \delta(y - b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^q \frac{\text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)]}{\sum_{j=1}^q \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)]} \delta(y - b_j)
 \end{aligned}$$

**Conclusions**

Toutes les lois de probabilités conjointes, marginales et conditionnelles d'un couple aléatoire sont données par :

**Cas continu**

- Soit la FR (ou la DdP) conjointe seulement
- Soit la FR (ou la DdP) marginale associée à une FR (ou une DdP) conditionnelle.

**Cas discret**

- Soit par la probabilité conjointe seulement
- Soit par une probabilité marginale et une probabilité conditionnelle.

**2.2.8 Variables statistiquement indépendantes.****Cas continu**

Deux variables aléatoires sont indépendantes si

$$\text{Prob}[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq y)] = \text{Prob}[(X \leq x)] \text{Prob}[Y \leq y | X \leq x]$$

$$= \text{Prob}[(X \leq x)]\text{Prob}[Y \leq y]$$

Ces résultats permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= F_X(x).F_Y(y) && \text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ p_{X,Y}(x,y) &= p_X(x).p_Y(y) && \text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{aligned} \quad (2.21)$$

En généralisant au cas des vecteurs aléatoires  $(m \times n)$  indépendants

$$\begin{aligned} X &= [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \\ Y &= [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T \end{aligned}$$

nous obtenons

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendants}$$

### Exemple : Etude d'un couple aléatoire Gaussien

La DdP d'un couple aléatoire gaussien de moyennes  $\mu_X$  et  $\mu_Y$ , de variances  $\sigma_X^2$  et  $\sigma_Y^2$  et de coefficient de corrélation  $r$  est donnée par

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \exp \left[ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left( \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2r(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right) \right]$$

Nous précisons dans la suite ce cours la signification de  $r$ . Deux cas peuvent se présenter

1. **Cas où le coefficient de corrélation  $r$  est nul :** Dans ce cas, la densité de probabilité conjointe peut s'écrire

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp \left[ -\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp \left[ -\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp \left[ -\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \\ &= p_X(x)p_Y(y) \end{aligned}$$

Dans ce cas les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes car  $p_{X,Y}(x,y)$  peut se mettre sous la forme d'un produit d'une fonctions de  $x$  seul par une fonctions de  $y$  seul. La FIGURE 2.8 présente l'allure de  $p_{X,Y}(x,y)$  dans ce cas. Les courbes de niveau ont l'allure d'ellipses ayant des axes principaux parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

2. **Cas où le coefficient de corrélation  $r$  est différent de zéro :** Dans ce cas, il est impossible de mettre  $p_{X,Y}(x,y)$  sous une forme à variables séparées :

$$p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$$

De ce fait, les variables  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$  ne sont pas indépendantes. La FIGURE 2.9 présente un exemple de densité de probabilité dans ce cas. Remarquons que les axes principaux des ellipses d'isoniveau ne sont plus parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

### Cas discret

Deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes si :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[(X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)] &= \text{Prob}[X = a_i]\text{Prob}[Y = b_j|X = a_i] \\ &= \text{Prob}[X = a_i]\text{Prob}[Y = b_j] \end{aligned}$$

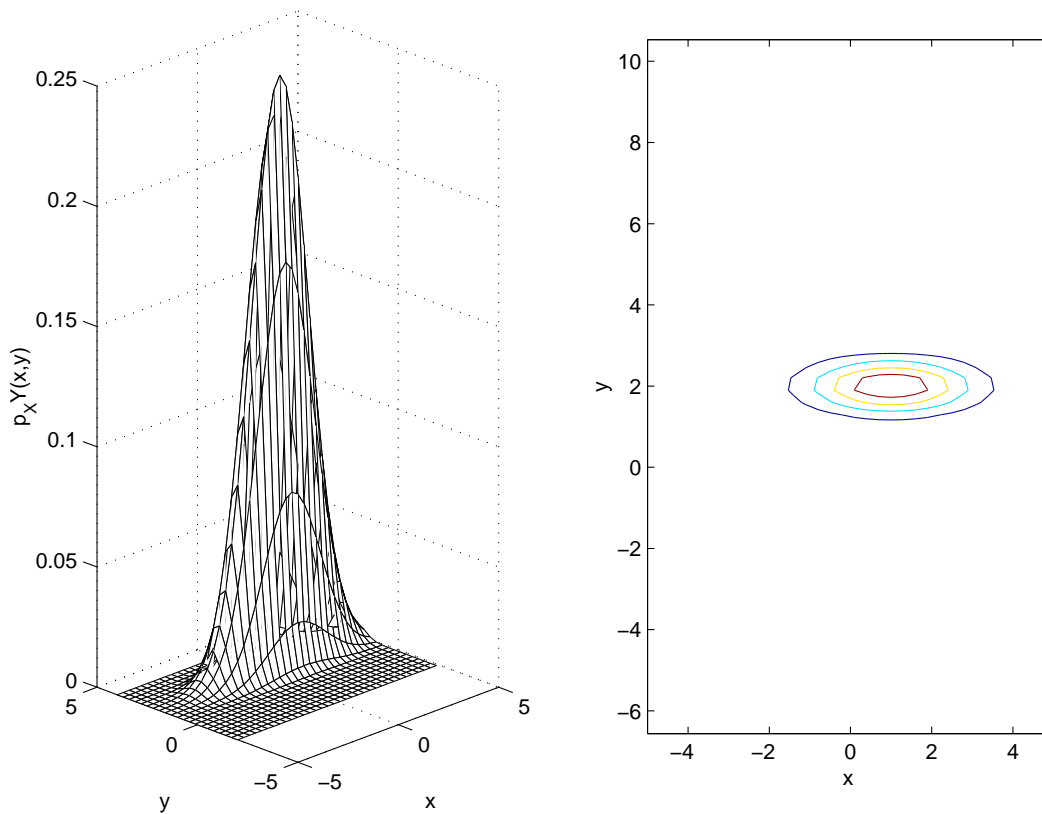


FIG. 2.8 – *Densité de probabilité d'un couple aléatoire gaussien dont les variables  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$  sont indépendantes*

## 2.3 Moyennes statistiques et espérances mathématiques de vecteurs aléatoires.

### 2.3.1 Espérance mathématique d'une fonction de vecteurs aléatoires.

Soit un vecteur aléatoire  $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$  et  $f(X)$  une fonction vectorielle de  $X$

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_m) & = & f_1(X) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_m) & = & f_2(X) \\ \vdots & = & \vdots \\ f_N(X_1, X_2, \dots, X_m) & = & f_N(X) \end{bmatrix}$$

La moyenne statistique de  $f(X)$  est définie par

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} f(X) p_X(x) dx$$

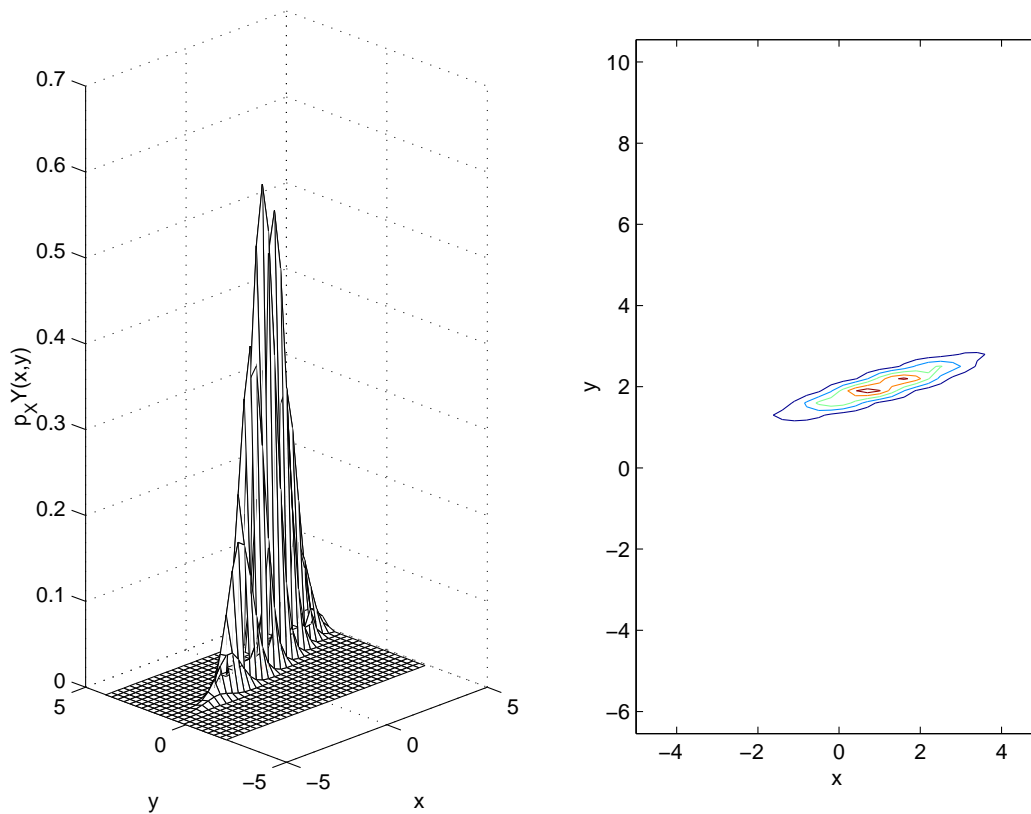


FIG. 2.9 – *Densité de probabilité d'un couple aléatoire gaussien dont les variables  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$  sont dépendantes (corrélées)*

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

$$E[f(X)] = \begin{bmatrix} \int_{\mathbb{R}^m} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) p_X(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \\ \int_{\mathbb{R}^m} f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) p_X(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \\ \vdots \\ \int_{\mathbb{R}^m} f_N(x_1, x_2, \dots, x_m) p_X(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une **fonction scalaire** du couple aléatoire  $X = [X, Y]^T$  nous avons :

$$E[f(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{X, Y}(x, y) dx dy$$

### 2.3.2 Propriétés du second ordre.

**Valeur moyenne de  $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$**

$$\mu_X = E[X] = [E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_m]]^T \quad (2.22)$$

**Matrice d'intercorrélation**

Soit deux vecteurs aléatoires

$$\begin{aligned} X &= [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \\ Y &= [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T \end{aligned}$$

La matrice d'intercorrélation est définie par :

$$R_{XY} = E[XY^T] = \begin{bmatrix} E[X_1Y_1] & E[X_1Y_2] & \cdots & E[X_1Y_n] \\ E[X_2Y_1] & E[X_2Y_2] & \cdots & E[X_2Y_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_mY_1] & E[X_mY_2] & \cdots & E[X_mY_n] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

**Matrice d'autocorrélation**

C'est une matrice carrée formée de la façon suivante

$$R_{XX} = E[XX^T] = \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1X_2] & \cdots & E[X_1X_m] \\ E[X_2X_1] & E[X_2X_2] & \cdots & E[X_2X_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_mX_1] & E[X_mX_2] & \cdots & E[X_mX_m] \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

**Matrice d'intercovariance**

C'est la matrice définie par

$$C_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T]$$

En notant que

$$\begin{aligned} C_{XY} &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T] \\ &= E[XY^T - \mu_X Y^T - X \mu_Y^T + \mu_X \mu_Y^T] \\ &= E[XY^T] - \mu_X \mu_Y^T \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} C_{XY} &= R_{XY} - \mu_X \mu_Y^T \\ &= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})(Y_1 - \mu_{Y_1})] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(Y_2 - \mu_{Y_2})] & \cdots & E[(X_1 - \mu_{X_1})(Y_n - \mu_{Y_n})] \\ E[(X_2 - \mu_{X_2})(Y_1 - \mu_{Y_1})] & E[(X_2 - \mu_{X_2})(Y_2 - \mu_{Y_2})] & \cdots & E[(X_2 - \mu_{X_2})(Y_n - \mu_{Y_n})] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_m - \mu_{X_m})(Y_1 - \mu_{Y_1})] & E[(X_m - \mu_{X_m})(Y_2 - \mu_{Y_2})] & \cdots & E[(X_m - \mu_{X_m})(Y_n - \mu_{Y_n})] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$



**Matrice de covariance**

C'est la matrice définie par

$$\begin{aligned}
 C_{XX} &= R_{XX} - \mu_X \mu_X^T \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] & \cdots & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_m - \mu_{X_m})] \\ E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_1 - \mu_{X_1})] & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_m - \mu_{X_m})] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_m - \mu_{X_m})(X_1 - \mu_{X_1})] & E[(X_m - \mu_{X_m})(X_2 - \mu_{X_2})] & \cdots & \sigma_{X_m}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

La diagonale de cette matrice est composée des variances des variables aléatoires scalaires  $X_i$  avec  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**2.3.3 Inégalité de SCHWARTZ pour variables aléatoires.**

Soit deux VA scalaires  $X$  et  $Y$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
 (\lambda X + Y)^2 \geq 0 &\iff E[\lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2] \geq 0 \quad \forall \lambda \\
 &\iff \lambda^2 E[X^2] + 2\lambda E[XY] + E[Y^2] \geq 0 \quad \forall \lambda
 \end{aligned}$$

Ce polynôme en  $\lambda$  est toujours non négatif. L'équation en  $\lambda$

$$\lambda^2 E[X^2] + 2\lambda E[XY] + E[Y^2] = 0 \tag{2.27}$$

ne peut donc pas avoir de racines réelles distinctes ou alors simplement une racine double. Calculons le discriminant qui est donc toujours  $\leq 0$ .

$$\Delta = \{E[XY]\}^2 - E[X^2] E[Y^2] \leq 0 \implies$$

Cette inégalité, qui porte le nom d'inégalité de SCHWARTZ, peut encore s'écrire :

$$\boxed{\{E[XY]\}^2 \leq E[X^2] E[Y^2]} \tag{2.28}$$

Deux cas se présentent :

1.  $\{E[XY]\}^2 < E[X^2] E[Y^2] \implies$  l'équation (2.27) ne possède pas de racines réelles
2.  $\{E[XY]\}^2 = E[X^2] E[Y^2] \implies$  l'équation (2.27) possède une racine double  $\lambda_0$ . Nous avons alors

$$\lambda_0 X + Y = 0 \implies Y = -\lambda_0 X$$

ce qui montre que l'inégalité de SCHWARTZ ne se transforme en égalité que quand les variables aléatoires sont **proportionnelles**. Nous avons dans ce cas là

$$\{E[XY]\}^2 = E[X^2] E[Y^2]$$

Cette Inégalité SCHWARTZ (IS) peut être utilisée pour obtenir d'importantes propriétés des variances et des corrélations statistiques que nous énumérons ci-dessous :

1. **Posons dans IS**  $Y = 1$ . Nous obtenons alors :

$$\boxed{\{E[X]\}^2 \leq E[X^2] \iff \sigma_X^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2 \geq 0} \quad (2.29)$$

Si  $\mu_{X^2} = E[X^2]$  est finie alors  $\mu_X = E[X]$  est finie. Ceci nous permet de donner la définition d'une variable aléatoire du second ordre : on dit qu'une variable aléatoire est du second ordre si sa valeur quadratique moyenne  $\mu_{X^2} = E[X^2]$  est finie. Dans ce cas, la valeur moyenne est elle aussi finie.

2. **Posons dans IS**  $X = X - \mu_X$  et  $Y = Y - \mu_Y$ . Nous obtenons alors

$$\{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]\}^2 = C_{XY}^2 \leq E[(X - \mu_X)^2] E[(Y - \mu_Y)^2]$$

soit

$$C_{XY}^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\begin{aligned} -\sigma_X \sigma_Y &\leq C_{XY} \leq +\sigma_X \sigma_Y \\ \mu_X \mu_Y - \sigma_X \sigma_Y &\leq R_{XY} \leq +\mu_X \mu_Y + \sigma_X \sigma_Y \\ -\sigma_X^2 &\leq C_{XX} \leq +\sigma_X^2 \\ \mu_X^2 - \sigma_X^2 &\leq R_{XX} \leq +\mu_X^2 + \sigma_X^2 \end{aligned}} \quad (2.30)$$

En posant  $r_{XY} =$  coefficient de corrélation

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

nous avons :

$$\implies -1 \leq r_{XY} \leq 1$$

On peut montrer que si  $r_{XY} = 0$  alors  $\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ . On dit que si  $r_{XY} = 0$ , les variables X et Y sont **non corrélées, ce qui ne signifie pas que X et Y sont indépendantes**.

### Exercice

Soit X et Y 2 VAC scalaires. On suppose que  $p_{X,Y}(x,y)$  est de la forme :

$$p_{X,Y}(x,y) = f(x^2 + y^2)$$

où  $f(\bullet)$  est une fonction de  $x$  et  $y$  vérifiant toutes les propriétés d'une densité de probabilité. Montrer que :

1.  $\mu_X = \mu_Y = 0$
2.  $R_{XY} = 0$  et  $C_{XY} = 0$  et  $r_{XY} = 0$
3. Dans le cas général X et Y ne sont pas indépendantes
4. Dans le cas où  $f(\bullet)$  a une forme exponentielle X et Y sont indépendantes. Le cas gaussien est un exemple particulier où  $r_{XY} = 0 \implies$  X et Y sont indépendantes.

### 2.3.4 Quelques propriétés des matrices d'autocorrélation et d'autocovariance.

Soit  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$  un vecteur aléatoire. La matrice d'autocovariance s'écrit :

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})^2] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] & \cdots & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_n - \mu_{X_n})] \\ E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] & E[(X_2 - \mu_{X_2})^2] & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_n - \mu_{X_n})] & \cdots & \cdots & E[(X_n - \mu_{X_n})^2] \end{bmatrix}$$

Sous une forme plus condensée  $C_{XX}$  s'écrit

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & C_{X_1 X_2} & \cdots & \cdots & C_{X_1 X_n} \\ C_{X_1 X_2} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \cdots & C_{X_2 X_n} \\ C_{X_1 X_3} & C_{X_2 X_3} & \sigma_{X_3}^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{X_1 X_n} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons énoncer les propriétés suivantes :

1. Une matrice d'autocovariance est **symétrique**
2. Une matrice d'autocovariance est **définie non négative**, ce qui signifie

$$v^T C_{XX} v \geq 0 \quad \forall v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \quad (2.31)$$

#### Démonstration

Nous avons :

$$\begin{aligned} v^T E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] v &= E[v^T (X - \mu_X)(X - \mu_X)^T v] \\ &= E \left[ v^T (X - \mu_X) [v^T (X - \mu_X)]^T \right] \\ &= E \left[ |v^T (X - \mu_X)|^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

La quantité  $J = v^T C_{XX} v$  est une forme quadratique des coefficients du vecteur  $v$ .  $J$  est minimum pour  $\overrightarrow{\text{grad}}_v(J) = \vec{0}$

$$\left( \frac{\partial J}{\partial v} \right)_{v_{opt}} = 2C_{XX}v_{opt} = 0 \implies v_{opt} = 0$$

Ainsi,

$$J_{opt} = v_{opt}^T C_{XX} v_{opt} = 0$$

La FIGURE 2.10 présente un exemple de forme quadratique.

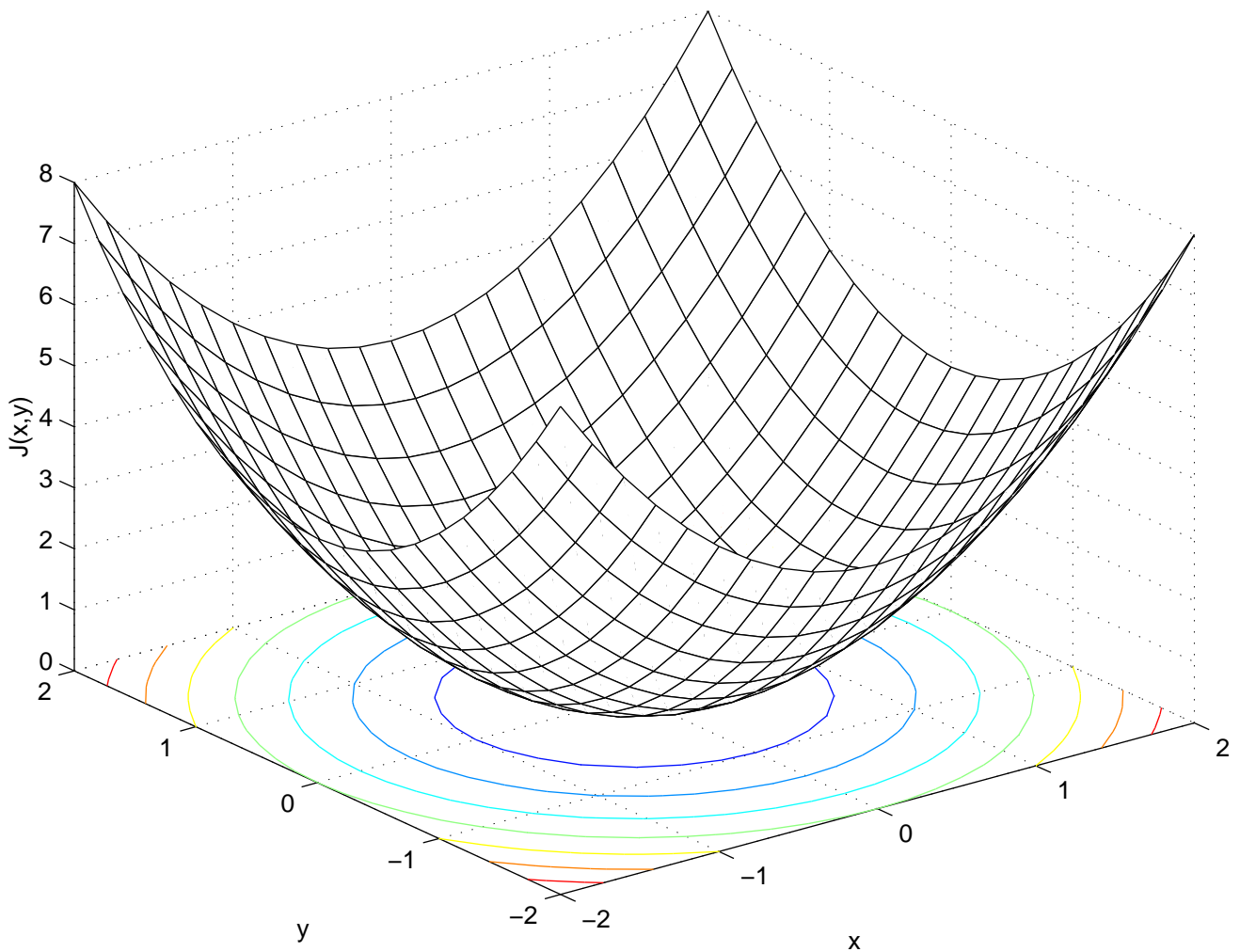


FIG. 2.10 – *Exemple de forme quadratique*  $J(x,y) = \sigma_X^2 x + \sigma_Y^2 y$  avec  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$

## 2.4 Densité de probabilité conjointe d'un vecteur aléatoire gaussien.

La DdP conjointe Gaussienne multidimensionnelle d'un vecteur aléatoire  $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$  est donnée par :

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\sqrt{|C_{XX}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu_X)^T C_{XX}^{-1} (x - \mu_X) \right] \quad (2.32)$$

avec  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

Si les  $X_i$  sont mutuellement non corrélés les matrices  $C_{XX}$  et  $C_{XX}^{-1}$  sont des matrices diagonales d'élé-

ments  $\sigma_{X_i}^2$  et  $1/\sigma_{X_i}^2$  respectivement.

**Si les  $X_i$  et  $X_j$  sont non corrélés  $\forall i, j$  avec  $i \neq j$  alors**

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{X_3}^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{X_1}^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{X_3}^2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_{X_n}^2} \end{bmatrix}$$

**En introduisant ces expressions de  $C_{XX}$  et  $C_{XX}^{-1}$  dans (2.32) il vient**

$$p_X(x) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdots p_{X_n}(x_n)$$

avec

$$p_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_i}} \exp \left[ -\frac{(x_i - \mu_{X_i})^2}{2\sigma_{X_i}^2} \right]$$

**Ceci permet de conclure que dans le cas gaussien, les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes**

## 2.5 Transformations des vecteurs aléatoires

### 2.5.1 Méthodologie générale

Soit  $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$ , un vecteur aléatoire de dimension  $m$  transformé par un opérateur amnésique. Cet opérateur délivre en sortie un nouveau vecteur aléatoire  $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T = f(X)$  de dimension  $n$  qui peut être différente de celle du vecteur  $X$ . Nous avons :

$$Y = f(X) \iff \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_m) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_m) \\ \vdots \\ f_n(X_1, X_2, \dots, X_m) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

L'objectif de cette étude est de calculer la fonction de répartition conjointe  $F_Y(y)$  et la densité de probabilité conjointe  $p_Y(y)$  du vecteur aléatoire  $Y$  avec  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ . La méthode générale que nous utilisons est la même que celle qui a été employée pour l'étude des variables aléatoires scalaires. Elle consiste à établir une *condition d'équivalence en probabilité*. Pour cela, écrivons la fonction de répartition  $F_Y(y)$  sous la forme

$$F_Y(y) = \text{Prob}[(Y_1 \leq y_1) \text{ et } (Y_2 \leq y_2) \text{ et } \cdots \text{ et } (Y_n \leq y_n)] = \text{Prob}[Y \in D(y)],$$

où  $D(y)$  est un domaine de l'espace à  $n$  dimensions, ensemble des valeurs  $y' = [y'_1, y'_2, \dots, y'_n]^T$  telles que  $y' \leq y$  :

$$D(y) = \{y' | (y'_1 \leq y_1) \text{ et } (y'_2 \leq y_2) \text{ et } \dots \text{ et } (y'_n \leq y_n)\}.$$

La condition d'équivalence en probabilité consiste

1. à rechercher le domaine  $D(x)$ , ensemble des valeurs  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$  qui, une fois transformé par la fonction  $f$ , donne le domaine  $D(y)$  :

$$\begin{aligned} D(x) &= \{x | f(x) \in D(y)\}, \\ &= \{x | (f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq y_1) \text{ et } (f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq y_2) \text{ et } \dots \text{ et } (f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq y_n)\}. \end{aligned}$$

Ces deux domaines  $D(x)$  et  $D(y)$  sont présentés sur la FIGURE 2.11.

2. à écrire que la probabilité que  $Y \in D(y)$  est la même que la probabilité que  $X \in D(x)$  :

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \in D(y)] = \int_{D(y)} p_Y(y') dy' = \text{Prob}[X \in D(x)] = \int_{D(x)} p_X(x) dx \quad (2.34)$$

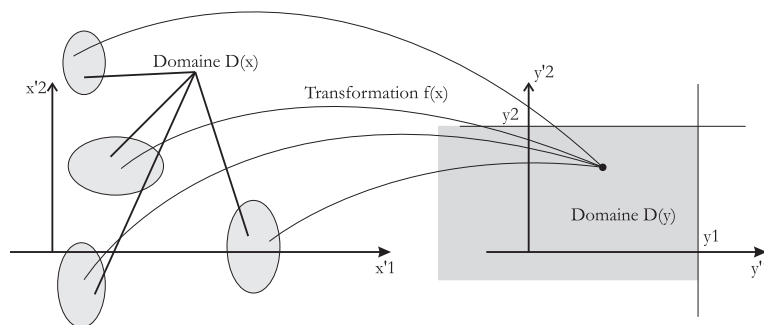


FIG. 2.11 – Transformation du domaine  $D(x)$  en un domaine  $D(y)$

### Exemple

Soit un couple aléatoire  $X = [X_1, X_2]^T$  où  $X_1$  et  $X_2$  désignent deux variables aléatoires scalaires indépendantes ayant une DdP  $p_{X_i}(x_i)$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) uniforme entre  $-a$  et  $a$ . Ce couple aléatoire est transformé par une fonction amnésique qui délivre en sortie la VA scalaire  $Y$  :

$$Y = f(X) = X_1^2 + X_2^2,$$

dont on se propose de calculer la DdP  $p_Y(y)$ . Le domaine  $D(x) = \{x | x_1^2 + x_2^2 \leq y\}$  définit évidemment le disque centré en 0 et de rayon  $r = \sqrt{y}$  comme l'indique la FIGURE 2.12. Par ailleurs, puisque les VA  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et uniformes, la DdP conjointe du couple aléatoire  $X$  s'écrit :

$$p_X(x) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2).$$

Cette fonction des deux variables  $x_1$  et  $x_2$  est représentée sur la FIGURE 2.12 et doit être intégrée sur le domaine  $D(x)$ . Plusieurs cas peuvent se présenter et correspondent à des valeurs particulières de  $\sqrt{y}$  par rapport à  $a$  :

1. si  $y < 0$  alors  $\text{Prob}[Y = X_1^2 + X_2^2 \leq y] = 0$ ,

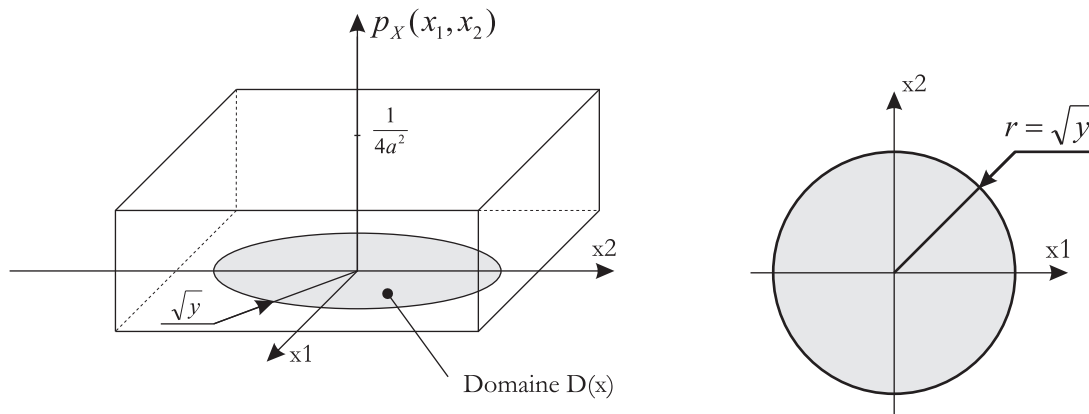


FIG. 2.12 – **Densité de probabilité conjointe**  $p_X(x) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$  **du couple aléatoire**  $X = [X_1, X_2]^T$  **et domaine**  $D(x) = \{x | x_1^2 + x_2^2 \leq y\}$

2. si  $\sqrt{y} \in [0, a]$  alors  $\int_{D(x)} p_X(x) dx$  représente le volume d'un cylindre de révolution de hauteur  $1/4a^2$  et de surface de base  $\pi y$  (cf. FIGURE 2.13)
3. si  $\sqrt{y} \in ]a, \sqrt{2}a]$  alors  $\int_{D(x)} p_X(x) dx$  représente le volume d'un cylindre de hauteur  $1/4a^2$  et de surface de base  $\pi y$  amputée de la surface des 4 onglets cylindrique définis sur la FIGURE 2.13.
4. si  $\sqrt{y} > \sqrt{2}a$  alors  $\int_{D(x)} p_X(x) dx = 1$

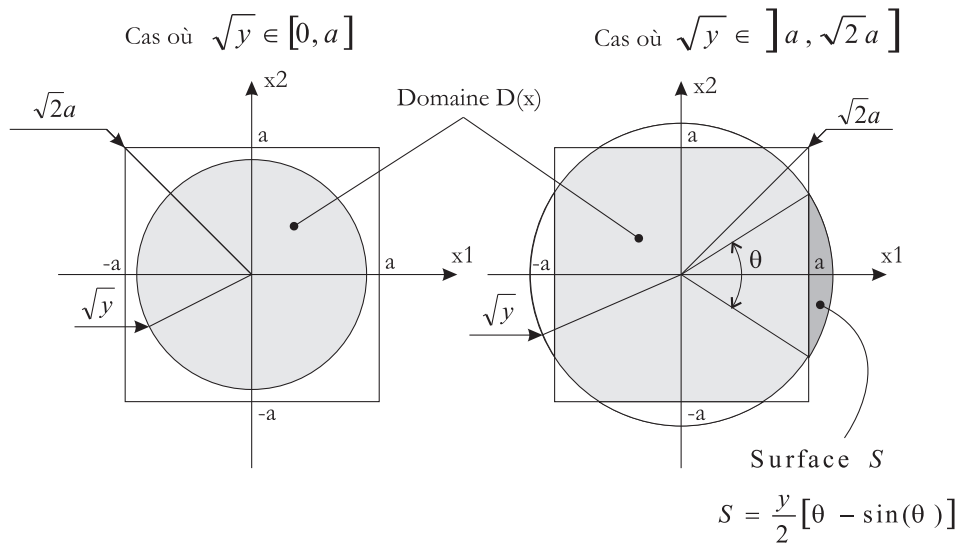


FIG. 2.13 – **Définitions des domaines**  $D(x)$  **pour les deux cas**  $\sqrt{y} \in [0, a]$  **et**  $\sqrt{y} \in ]a, \sqrt{2}a]$

Le programme Matlab ci-après permet de

1. représenter la densité de probabilité conjointe  $p_X(x) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ ,
2. calculer la fonction de répartition  $F_Y(y)$ ,
3. calculer la densité de probabilité  $p_Y(y)$  en dérivant numériquement  $F_Y(y)$ ,
4. estimer expérimentalement  $p_Y(y)$  et comparer ce résultat avec la valeur théorique obtenue ci-dessus. Pour cela, nous générons deux vecteurs aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ayant une DdP uniforme entre  $-a$  et  $a$  puis nous calculons le vecteur résultat  $Y = f(X) = X_1^2 + X_2^2$ . La méthode de l'histogramme est ensuite utilisée pour estimer  $p_Y(y)$ .

Les différentes courbes et figures générées par ce programmes sont présentées sur les FIGURES (2.14) (2.15) (2.16)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   FICHIER :   estim_fr_ddp_transf_vect2.m
%
%   BUT :      Calculer et représenter la fonction de répartition de la
%              Variable Aléatoire
%
%               $Y = X1^2 + X2^2$ 
%
%              où X1 et X2 désignent deux Variables Aléatoire indépendantes,
%              de DdP uniformes entre -a et a
%              Le calcul de la probabilité pour que  $Y \leq y$  se fait par intégration 2D
%              de  $PX1, X2(x1, x2)$  dans le domaine  $D(x)$  que ce programme représente.
%
%   AUTEUR :   Guy PLANTIER (ESEO 1998)
%
%   DATE(S):   07/10/98 (Création)
%
%   fonctions appelées : estim_ddp()
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Définition des constantes du problème
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a = 2;
pas_y_th = 0.01;
N = 1000000;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Représentation de la DdP conjointe en 2 D
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1 = -(a+1):0.1:a+1';
x2 = -(a+1):0.1:a+1';
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);

DdP = ((X1>=-a)&(X1<=a)).*((X2>=-a)&(X2<=a))/(4*a^2);

figure(1)
clf
mesh(x1,x2,DdP)
title('densité de probabilité conjointe du couple aléatoire [X1,X2]^T ');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul et représentation de la FR de la VA Y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y_th = (0 : pas_y_th : 2*a^2+1)';
y_th(1)=eps;

theta = real(2*acos(a./sqrt(y_th)));
FRY_th = (sqrt(y_th)<=a)*pi.*y_th/(4*a^2) + ...

```



```

((sqrt(y_th)>a)&(y_th<=2*a^2)).*y_th.*(pi-2*(theta-sin(theta)))/(4*a^2) + ...
(y_th>2*a^2);

figure(2)
clf
plot(y_th,FRY_th)
title('Fonction de répartition de Y = X_1^2+X_2^2 = Prob[Y\leq y]')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul et représentation de la DdP théorique (approchée) de la VA Y
% et d'une estimation par histogramme de cette DdP
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ddp_th_approx = filter([1 -1],1,FRY_th)/pas_y_th;

X1 = (rand(N,1)-0.5)*2*a;
X2 = (rand(N,1)-0.5)*2*a;

Y = X1.^2 + X2.^2;

[ddp_hist,y_hist] = estim_ddp(Y,150);

figure(3)
clf
plot(y_th,ddp_th_approx,y_hist,ddp_hist)
title('Densité de probabilité théorique et estimée par histogramme de Y = X_1^2+X_2^2')

```

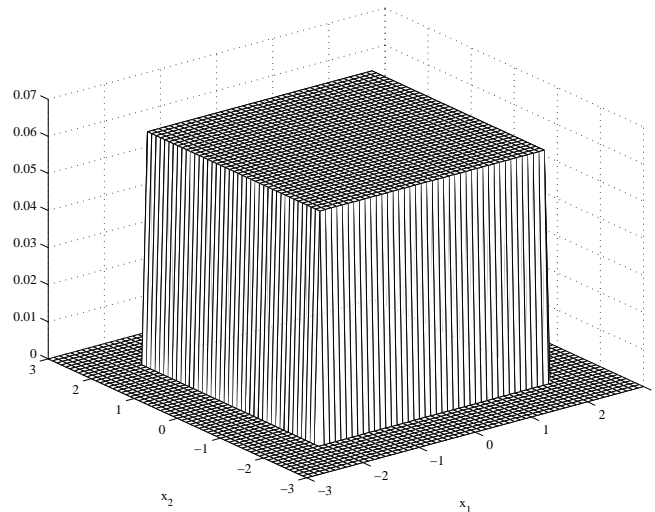
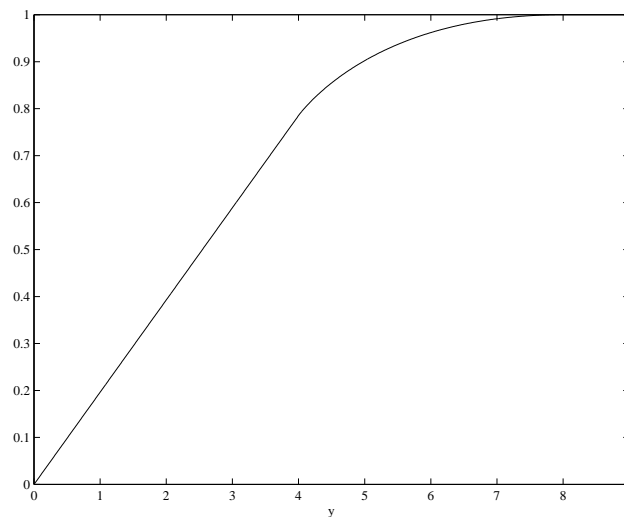
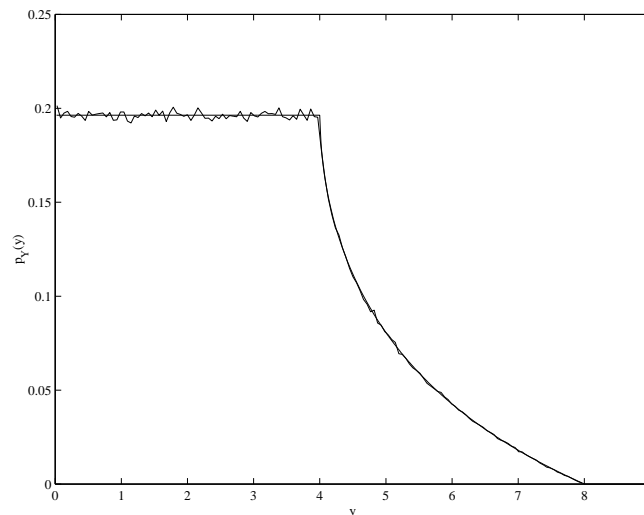


FIG. 2.14 – *Densité de probabilité conjointe  $p_X(x)$  du couple aléatoire  $X = [X_1, X_2]^T$*

### 2.5.2 Application très importante : DdP de la somme de deux variables aléatoires

Soit  $X = [X_1, X_2]^T$  un couple aléatoire où  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires scalaires qui ne sont pas nécessairement indépendantes. Ce couple aléatoire est transformé par une fonction amnésique qui délivre en sortie une variable aléatoire scalaire

$$Y = f(X) = X_1 + X_2 .$$

FIG. 2.15 – *Fonction de répartition*  $p_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y]$  avec  $Y = X_1^2 + X_2^2$ FIG. 2.16 – *Densité de probabilité théorique et estimée par histogramme de*  $Y = X_1^2 + X_2^2$ 

Comme l'indique la FIGURE 2.17, le domaine  $D(x)$  défini par

$$D(x) = \{x = [x_1, x_2]^T \mid x_1 + x_2 \leq y\},$$

représente le demi-plan contenant la valeurs  $x = [x_1, x_2]^T = [-\infty, -\infty]^T$  et limité à droite par la droite d'équation  $x_1 + x_2 = y$ .

Nous pouvons maintenant calculer la FR de  $Y$  à l'aide de la formule générale

$$F_Y(y) = \text{Prob}[Y \leq y] = \text{Prob}[Y \in D(y)] = \text{Prob}[X \in D(x)] = \iint_{D(x)} p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.35)$$

Le calcul de l'intégrale double ci-dessus peut parfois être très compliqué. Cependant, si les VA  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, ce calcul se ramène au calcul d'une intégrale simple comme nous le montrons ci-après.

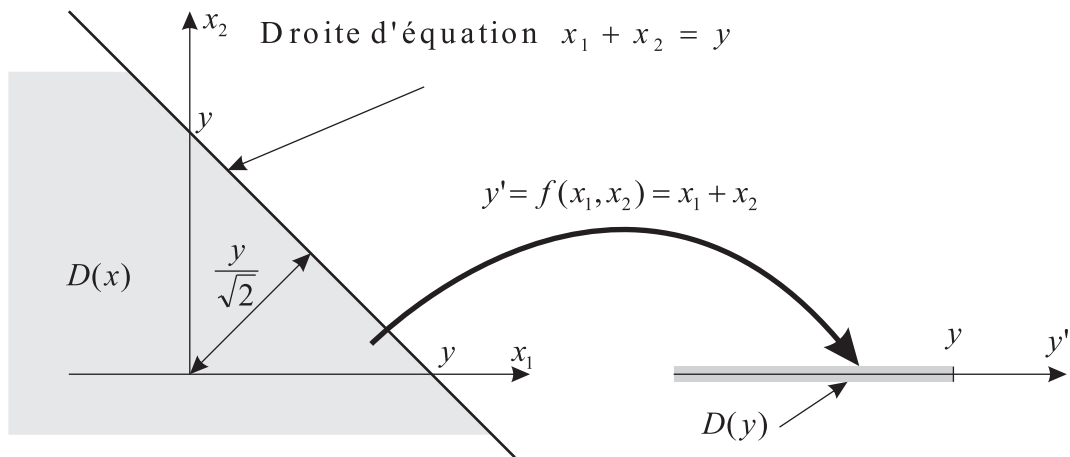


FIG. 2.17 – La transformation du domaine  $D(x)$  par la fonction  $y' = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  donne le domaine  $D(y)$

### Cas où les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes - Exemple

Soit  $X = [X_1, X_2]^T$  un couple aléatoire ayant une DdP conjointe donnée par

$$P_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & \text{pour } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq a, \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Lors calcul de  $F_Y(y)$ , plusieurs cas peuvent se présenter et correspondent à des valeurs particulières de  $y$  par rapport à  $a$  :

1. si  $y < -\sqrt{2}a$  alors  $F_Y(y) = \iint_{D(x)} p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0$ ,
2. si  $y \in [-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a]$  alors  $F_Y(y) = \iint_{D(x)} p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$  représente le volume du cylindre défini sur la FIGURE 2.18
3. si  $y > \sqrt{2}a$  alors  $F_Y(y) = \iint_{D(x)} p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$ .

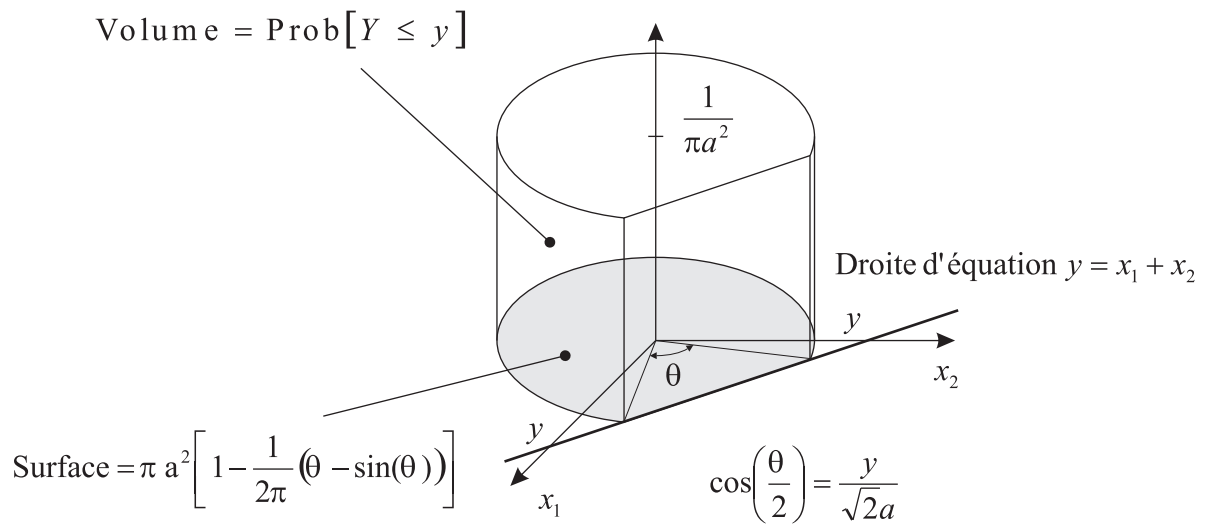
La fonction de répartition de  $Y$  est donc donnée par

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y < -\sqrt{2}a, \\ 1 - \frac{1}{2\pi}[\theta - \sin(\theta)] & \text{pour } y \in [-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a] \text{ avec } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}a}, \\ 1 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

### Cas fondamental où les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes

On s'intéresse maintenant au cas où les VA  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes. Dans ce cas nous pouvons écrire la DdP conjointe du couple aléatoire  $X$  sous la forme :

$$p_X(x) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) .$$

FIG. 2.18 – Définitions des volumes et surfaces permettant de calculer la DdP de  $Y = X_1 + X_2$ 

En introduisant cette expression dans (2.35), il vient

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \iint_{D(x)} p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(x_1) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{y-x_1} p_{X_2}(x_2) dx_2 \right]}_{F_{X_2}(y-x_1)} dx_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y-x_1) dx_1
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous reconnaissons le **produit de convolution** entre  $p_{X_1}(y)$  et  $F_{X_2}(y)$ . Ainsi,

**Pour calculer la fonction de répartition de la somme  $Y$  de deux variables aléatoires indépendantes  $X_1$  et  $X_2$ , il suffit de calculer un des produits de convolution**

$$F_Y(y) = p_{X_1}(y) * F_{X_2}(y) = F_{X_1}(y) * p_{X_2}(y) \quad (2.36)$$

Le calcul de la densité de probabilité de  $Y$  se fait en dérivant la fonction de répartition  $F_Y(y)$  par rapport à  $y$ . Il est très simple de démontrer que pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver un des facteurs

du produit. Ainsi, on obtient le résultat très important suivant

**La densité de probabilité de la somme  $Y$  de deux variables aléatoires indépendantes  $X_1$  et  $X_2$ , est obtenue en calculant le produits de convolution des densités de probabilité  $p_{X_1}(y)$  et  $p_{X_2}(y)$**

$$p_Y(y) = p_{X_1}(y) * p_{X_2}(y) \quad (2.37)$$

**La généralisation au cas de la somme de  $N$  variables aléatoires  $X_i$  indépendantes est immédiate. Si**

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i, \quad (2.38)$$

**alors**

$$p_Y(y) = p_{X_1}(y) * p_{X_2}(y) * p_{X_3}(y) * \cdots * p_{X_N}(y) \quad (2.39)$$

Le calcul de ces produits de convolution est souvent simplifié en utilisant les propriétés des transformées de FOURIER. On appelle **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire, la transformée de FOURIER de sa densité de probabilité.

### 2.5.3 Cas particulier où la fonction de transformation est biunivoque

Si la transformation du vecteur aléatoire  $Y$  est biunivoque, alors la fonction  $Y = f(X)$  est inversible et transforme le vecteur  $X$  de dimension  $m$  en un vecteur  $Y$  de dimension  $n$  avec  $m = n$  obligatoirement. En notant  $g$  la fonction inverse de  $f$ , nous avons :

$$Y = f(X) \text{ et } X = f^{-1}(Y) = g(Y). \quad (2.40)$$

Plus précisément, ces deux relations s'écrivent

$$Y = f(X) \iff \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_m) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_m) \\ \vdots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_m) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

et

$$X = g(Y) \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \\ g_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \\ \vdots \\ g_m(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Pour calculer la fonction de répartition conjointe de  $Y$ , nous utilisons le principe d'équivalence en probabilité présenté au § 2.5.1. Cette FR s'écrit

$$F_Y(y) = \int_{D(y)} p_Y(y') dy' = \int_{D(x)} p_X(x) dx .$$

Dans le cas très particulier des transformations biunivoques, nous pouvons utiliser la procédure de changement de variable pour calculer l'intégrale sur le domaine  $D(x)$ . Nous rappelons ci-après le principe de cette technique dans le cas simple de vecteurs aléatoires bidimensionnels. La généralisation des résultats obtenus au cas des vecteurs aléatoires de dimensions supérieures à 2 ne pose pas de problèmes particuliers.

Dans le cas où  $m = n = 2$ , les deux relations (2.41) et (2.42) deviennent

$$Y = f(X) \iff \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X_1, X_2) \\ f_2(X_1, X_2) \end{bmatrix}$$

et

$$X = g(Y) \iff \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(Y_1, Y_2) \\ g_2(Y_1, Y_2) \end{bmatrix}$$

La méthode du changement de variable consiste à poser  $x_1 = g_1(y_1, y_2)$  et  $x_2 = g_2(y_1, y_2)$  dans l'intégrale sur le domaine  $D(x)$  donnée par

$$F_Y(y) = \iint_{D(x)} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$

Par ailleurs, les deux relations  $y_1 = f_1(x_1, x_2)$  et  $y_2 = f_2(x_1, x_2)$  définissent deux familles de courbes comme l'indique la FIGURE 2.19.

Si  $\Delta y_1$  et  $\Delta y_2$  sont faibles, l'élément de surface  $M_1 M_2 M_3 M_4$  devient parallélépipédique et de surface

$$\Delta S = \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \overrightarrow{M_1 M_4} \right| . \quad (2.43)$$

Si  $\Delta y_1$  et  $\Delta y_2$  sont faibles, on peut donner une valeur approchée des coordonnées des points  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_4$  dans le repère  $(0, x_1, x_2)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1, y_2) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{OM_2} &= \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1 + \Delta y_1, y_2) \\ x_2 = g_2(y_1 + \Delta y_1, y_2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1, y_2) + \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} \Delta y_1 \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) + \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} \Delta y_1 \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{OM_3} &= \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2) \\ x_2 = g_2(y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1, y_2) + \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} \Delta y_1 + \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \Delta y_2 \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) + \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} \Delta y_1 + \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \Delta y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

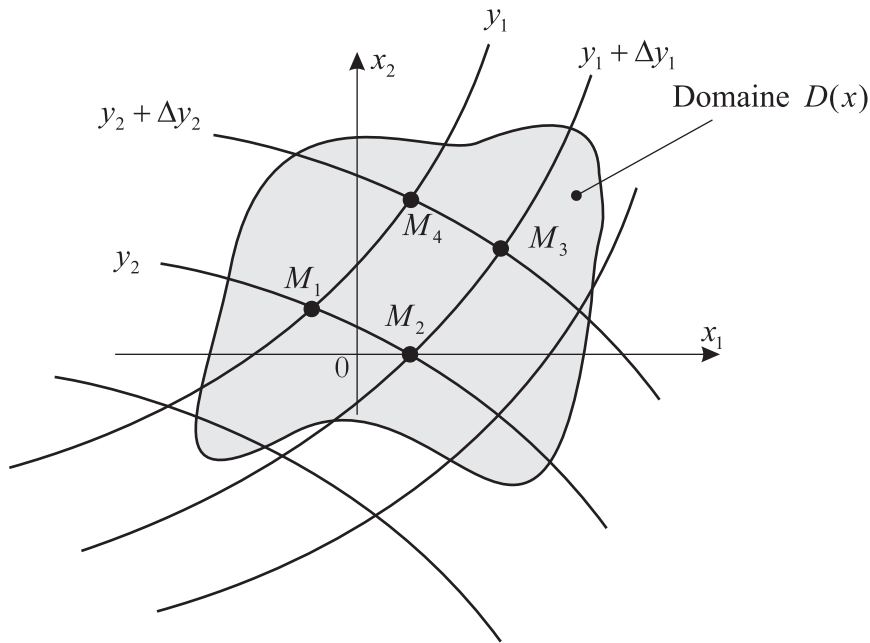


FIG. 2.19 – Familles de courbes utilisées pour effectuer le changement de variables dans le calcul de la densité de probabilité de  $Y = f(X)$

$$\overrightarrow{OM_4} = \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1, y_2 + \Delta y_2) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2 + \Delta y_2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_1 = g_1(y_1, y_2) + \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \Delta y_2 \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) + \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \Delta y_2 \end{bmatrix}$$

En introduisant ces valeurs dans (2.43) on obtient

$$\Delta S \approx \left| \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \right| \Delta y_1 \Delta y_2 = |J| \Delta y_1 \Delta y_2$$

où  $J$  désigne le Jacobien ou déterminant fonctionnel de la transformation  $y = f(x)$ . Ce déterminant s'écrit

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Par ailleurs, nous savons que le domaine  $D(x)$  est transformé de façon biunivoque en  $D(y)$ . Si  $\Delta y_1$  et  $\Delta y_2$  sont très faibles, il est possible d'obtenir une nouvelle expression pour  $F_Y(y)$  donnée par

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \iint_{D(y)} p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \iint_{D(x)} p_{X_1, X_2}[g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)] |J| \Delta y_1 \Delta y_2.$$

Nous en déduisons

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1, X_2}[g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)] |J|$$

La généralisation au cas où  $X$  et  $Y$  sont à dimension  $n$  donne immédiatement le résultat suivant

**La densité de probabilité conjointe d'un vecteur aléatoire  $Y = f(X)$  de dimension  $m$ , obtenu par transformation biunivoque d'un vecteur aléatoire  $X$  de même dimension et de densité de probabilité conjointe  $p_X(x)$  est donnée par**

$$p_Y(y) = p_X[g(y)] |J|, \quad (2.44)$$

où  $g = f^{-1}$  désigne la fonction inverse de  $f$ , et où  $J$  désigne le Jacobien ou déterminant fonctionnel de la transformation  $y = f(x)$ . Nous avons

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}. \quad (2.45)$$

#### Exemple d'application : DdP de la somme de deux variables aléatoires

Soit  $X = [X_1, X_2]^T$  un couple aléatoire, où  $X_1$  et  $X_2$  désignent deux variables aléatoires pas nécessairement indépendantes, et soit  $f$  une fonction définie par :

$$Y = f(X) \iff \begin{bmatrix} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

La fonction  $f$  est évidemment biunivoque et son inverse  $g = f^{-1}$  est donnée par

$$X = g(Y) \iff \begin{bmatrix} X_1 = Y_2 \\ X_2 = Y_1 - Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}.$$

Le jacobien de cette transformation s'écrit alors :

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

En utilisant les résultats généraux obtenus précédemment on obtient facilement la densité de probabilité conjointe du couple aléatoire  $Y$  :

$$p_Y(y_1, y_2) = p_X(y_2, y_1 - y_2) |J| = p_X(y_2, y_1 - y_2).$$



Si par ailleurs les variables aléatoires sont indépendantes, nous avons :

$$p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) ,$$

et la DdP conjointe de  $Y$  s'écrit :

$$p_Y(y_1, y_2) = p_{X_1}(y_2)p_{X_2}(y_1 - y_2) .$$

La DdP marginale de  $Y_1 = X_1 + X_2$  se déduit simplement de cette relation par la formule

$$\begin{aligned} p_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(y_2)p_{X_2}(y_1 - y_2) dy_2 \\ &= p_{X_1}(y_1) * p_{X_2}(y_1) \end{aligned}$$

Cette relation est bien entendu en tout point identique à (2.37).

### Exemple d'application : transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires

Soit  $X = [X_1, X_2]^T$  un couple aléatoire, où  $X_1$  et  $X_2$  désignent deux variables aléatoires pas nécessairement indépendantes, et soit  $f$  une fonction définie par :

$$Y = f(X) \iff \begin{bmatrix} Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \\ Y_2 = \arctan(\frac{X_2}{X_1}) \end{bmatrix} .$$

La fonction  $f$  est biunivoque et son inverse  $g = f^{-1}$  est donnée par

$$X = g(Y) \iff \begin{bmatrix} X_1 = Y_1 \cos(Y_2) \\ X_2 = Y_1 \sin(Y_2) \end{bmatrix} .$$

Le jacobien de cette transformation est donné par

$$J = \begin{vmatrix} \cos(y_2) & -y_1 \sin(y_2) \\ \sin(y_2) & y_1 \cos(y_2) \end{vmatrix} = y_1 \geq 0 .$$

En utilisant les résultats généraux établis précédemment, on obtient facilement la densité de probabilité conjointe du couple aléatoire  $Y$  :

$$p_Y(y_1, y_2) = p_X(y_1 \cos(y_2), y_1 \sin(y_2)) |J| = y_1 p_X(y_1 \cos(y_2), y_1 \sin(y_2)) .$$

Supposons par exemple que  $X_1$  et  $X_2$  soient des variables aléatoires gaussiennes et indépendantes ayant une valeur moyenne nulle et une variance  $\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = \sigma^2$ . Dans ces conditions, les DdP marginales de  $X_1$  et  $X_2$  s'écrivent :

$$p_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{x_i^2}{2\sigma^2} \right] \text{ avec } i = 1 \text{ ou } 2 .$$

La DdP conjointe du couple  $X = [X_1, X_2]^T$  s'écrit alors

$$p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2} \right] .$$

La DdP conjointe des coordonnées polaires  $Y_1$  et  $Y_2$  est alors donnée par, avec  $Y_1 \geq 0$  et  $0 \leq Y_2 \leq 2\pi$  :

$$\left. \begin{aligned} p_Y(y_1, y_2) &= \frac{y_1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{y_1^2 \cos^2(y_2) + y_1^2 \sin^2(y_2)}{2\sigma^2} \right] \\ &= \frac{y_1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{y_1^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned} \right\} \text{ avec } y_1 \geq 0 \text{ et } 0 \leq y_2 \leq 2\pi$$

Cette expression nous permet de calculer les DdP marginales :  $p_{Y_1}(y_1)$  et  $p_{Y_2}(y_2)$  :

$$\begin{aligned} p_{Y_1}(y_1) &= \int_0^{2\pi} p_Y(y_1, y_2) dy_2 = \frac{y_1}{\sigma^2} \exp \left[ -\frac{y_1^2}{2\sigma^2} \right] \text{ avec } y_1 \geq 0 \\ p_{Y_2}(y_2) &= \int_0^\infty p_Y(y_1, y_2) dy_1 = \frac{1}{2\pi} \text{ avec } 0 \leq y_2 \leq 2\pi \end{aligned}$$

Ces deux résultats montrent que

$$p_Y(y_1, y_2) = p_{Y_1}(y_1)p_{Y_2}(y_2) ,$$

ce qui indique que les variables aléatoires  $Y_1$  et  $Y_2$  sont indépendantes. Par ailleurs, on remarque que la variable aléatoire  $Y_1$  a une DdP de RAYLEIGH.

### Exemple d'application : transformation linéaire d'un vecteur aléatoire gaussien

La DdP conjointe gaussienne d'un vecteur aléatoire  $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$  est donnée par

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det(C_{XX})}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu_X)^T C_{XX}^{-1} (x - \mu_X) \right] \quad (2.46)$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$  et où  $C_{XX}$  désigne la matrice de covariance du vecteur aléatoire  $X$ .

Si les  $X_i$  sont mutuellement non corrélées, les matrices  $C_{XX}$  et  $C_{XX}^{-1}$  sont des matrices diagonales qui s'écrivent

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{X_m}^2 \end{bmatrix}$$

et

$$C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{X_1}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{X_m}^2} \end{bmatrix} .$$

Dans ce cas particulier, la DdP conjointe de  $X$  s'écrit :

$$P_X(x) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \cdots p_{X_m}(x_m) .$$

On en déduit que dans le cas gaussien, si les  $X_i$  sont mutuellement non corrélées, alors les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes  $\forall i, j$  avec  $i \neq j$

Supposons maintenant qu'un vecteur aléatoire gaussien  $X$  soit transformé par une fonction linéaire  $f$  qui s'écrit

$$Y = f(X) = AX$$

où  $A$  désigne une matrice  $m \times m$ . Nous nous plaçons dans le cas général où les  $X_i$  ne sont pas nécessairement indépendants. La fonction inverse  $g = f^{-1}$  est donnée par :

$$X = g(Y) = A^{-1}Y .$$

Le Jacobien de la transformation s'écrit

$$J = \det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} ,$$

et la densité de probabilité conjointe de  $Y$  s'écrit :

$$p_Y(y) = p_X[g(y)]|J| = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\det(C_{XX})|} |\det(A)|} \exp \left[ -\frac{1}{2} (A^{-1}y - \mu_X)^T C_{XX}^{-1} (A^{-1}y - \mu_X) \right] .$$

Par ailleurs, le vecteur moyenne statistique de  $Y$  s'écrit :

$$\mu_Y = A\mu_X \iff \mu_X = A^{-1}\mu_Y .$$

En introduisant cette relation dans  $p_Y(y)$  et en remarquant que  $\sqrt{|\det(C_{XX})|} |\det(A)| = \sqrt{|\det(AC_{XX}A^T)|}$  et que  $A^{-1T} C_{XX}^{-1} A^{-1} = (AC_{XX}A^T)^{-1}$ , on obtient le résultat très important suivant

**Si un vecteur aléatoire gaussien (ou normal)  $X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$  de vecteur moyenne  $\mu_X$  et de matrice de covariance  $C_{XX}$  est transformé par une fonction biunivoque linéaire donnée par**

$$Y = A.X , \quad (2.47)$$

**alors le vecteur aléatoire  $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]^T$  est aussi normal, avec une moyenne statistique**

$$\mu_Y = A.\mu_X , \quad (2.48)$$

**et une matrice de covariance**

$$C_{YY} = A.C_{XX}.A^T . \quad (2.49)$$

**En résumé, nous avons**

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\det(C_{XX})|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu_X)^T C_{XX}^{-1} (x - \mu_X) \right]$$

$$\downarrow Y = A.X$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\det(A.C_{XX}.A^T)|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - \mu_Y)^T [A.C_{XX}.A^T]^{-1} (y - \mu_Y) \right] . \quad (2.50)$$

## 2.6 Le théorème de la limite centrale par l'exemple

### 2.6.1 Exemple de simulation : Somme des résultats du tirages de $N$ dés

Soit  $N$  dés que l'on tire au hasard et soit  $Z_N$  la somme des résultats  $X_i$  avec  $i = 1 \dots N$  de ces  $N$  tirages :

$$Z_N = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Les résultats  $X_i$  de ces  $N$  tirages sont des variables aléatoires discrètes et indépendantes et ont des DdP données par

$$p_{X_i}(x) = \sum_{j=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x - j).$$

On peut calculer la DdP de la VA  $X_N$  en utilisant les résultats des paragraphes précédents qui font intervenir les  $N$  produits de convolution des DdP marginales  $p_{X_i}(x)$ . Il est aussi possible de calculer toutes les combinaisons possibles des VAD  $X_i$ , d'en calculer les différentes sommes puis d'en déduire la DdP de  $Z$ . Un programme MATLAB a été écrit pour effectuer ces différentes tâches, et nous présentons sur la FIGURE 2.20 les différents résultats obtenus.

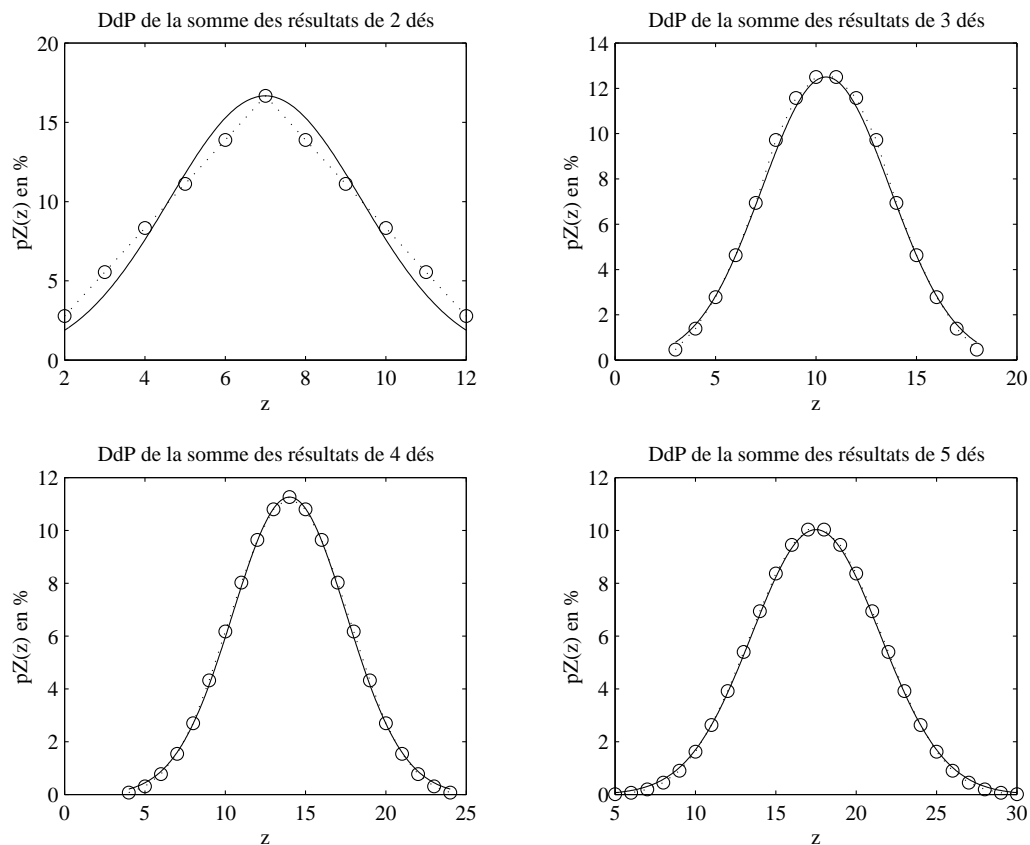


FIG. 2.20 – *Densité de probabilité de la somme des résultats du tirages de  $N$  dés (courbes o...o...o) et courbe gaussienne (courbes —)*

Clairement, il apparaît que si le nombre de dés utilisés augmente, la DdP de  $Z$  tend à "s'arrondir" et a ressembler à une loi gaussienne que nous présentons en même temps que les courbes obtenues. Pour  $N = 5$ , nous ne voyons presque plus de différence entre  $P_{Z_N}(z)$  et la loi gaussienne.

### 2.6.2 Exemple : DdP de la somme de $N$ variables aléatoires indépendantes

Soit  $X_i$  une variable aléatoire ayant une densité de probabilité  $p_{X_i}(x_i)$  définie sur la FIGURE 2.21. On

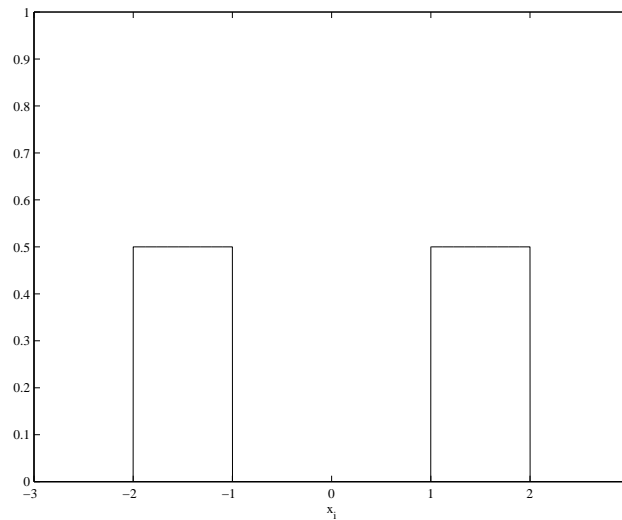


FIG. 2.21 – *Densité de probabilité de la variable aléatoire  $X_i$*

se propose de déterminer la DdP de la VA  $Y_N$  définie par

$$Y_N = \sum_{i=1}^N X_i .$$

Pour cela, nous calculons les  $N$  produits de convolution de la DdP  $p_{X_i}(x_i)$  mis en évidence précédemment. Le programme MATLAB ci-après

1. détermine une valeur approchée de ces convolutions en utilisant la fonction `conv ( )` de MATLAB. Ceci revient à approcher le calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes. La FIGURE 2.22 présente les DdP de  $Y_N$  pour différentes valeurs de  $N$  et superpose aux courbes obtenues la loi de probabilité gaussienne de même variance que  $Y_N$ .
2. estime la DdP de  $Y_N$  par histogramme. Ces résultats sont présentés sur la FIGURE 2.23

Cet exemple met lui aussi en évidence que si le nombre  $N$  augmente, la DdP de  $Y_N$  tend à "s'arrondir" et a ressembler à une loi gaussienne.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   FICHIER :    ddp_somme_va.m
%
%   BUT :       Calculer et représenter la densité de probabilité
%               de la somme de N variables aléatoires Xi indépendantes
%               ayant chacune une même DdP. Ce calcul se fait
%               en calculant les N produits de convolution de pXi(x).
%               On réalise aussi une expérience en sommant N vecteurs
%               aléatoires ayant une DdP pXi(x), et l'on calcule la DdP
%               du résultat par la méthode de l'histogramme.
%
%   AUTEUR :    Guy PLANTIER (ESEO)
%
%   DATES :     13-10-98 (création)
%
```

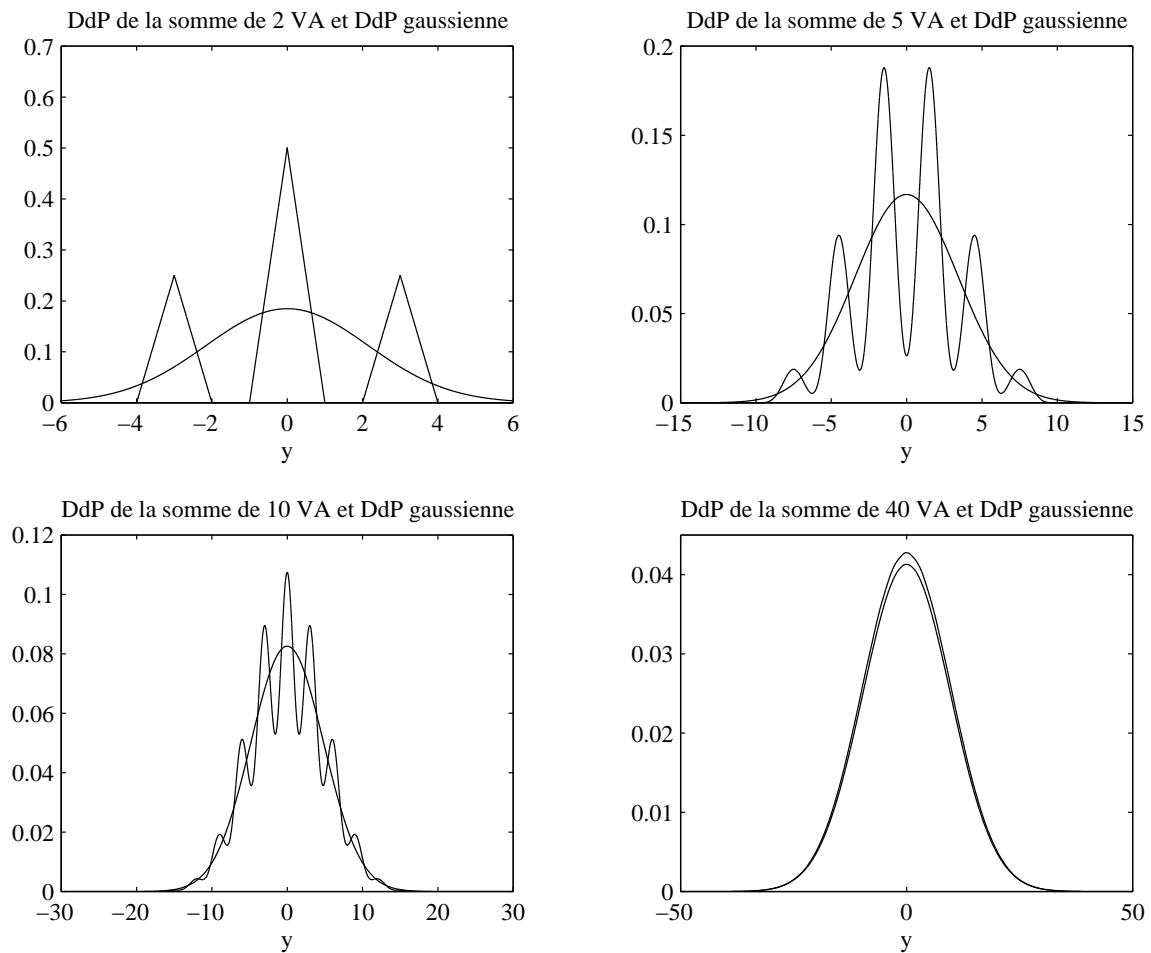


FIG. 2.22 – *Densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y_N$  pour différentes valeurs de  $N$  et loi de probabilité gaussienne de même variance et de même moyenne que  $Y_N$*

```
% FONCTION APPELEE : estim_ddp() ---> Estimation d'une DdP
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Définition des constantes du problème
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

a = 1; % La DdP de X est uniforme dans les intervalles [-b,-a] et [a,b]
b = 2;
var_X = (b^3-a^3)/(b-a)/3;

x_min = -3;
x_max = 3;

pas_x = 0.001;
```

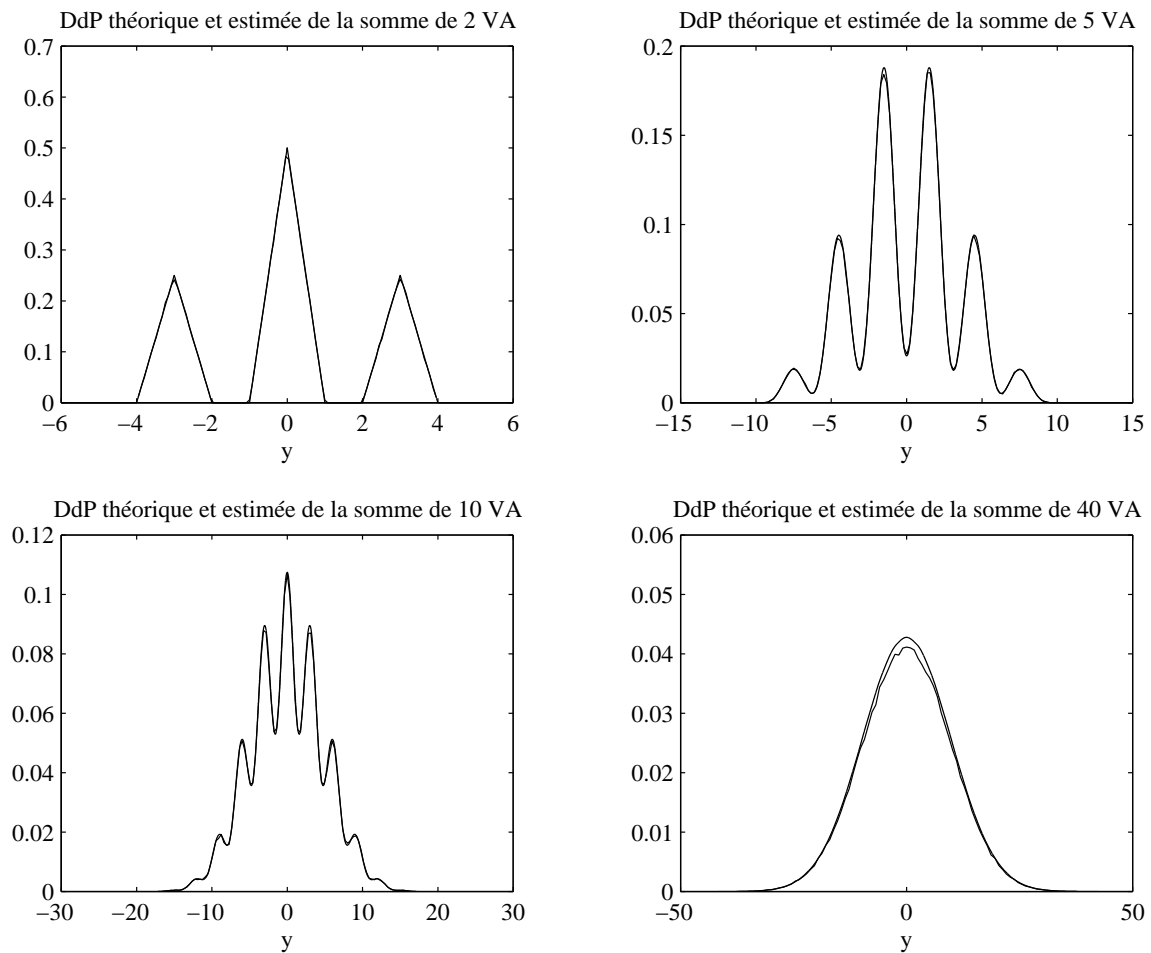


FIG. 2.23 – *Densité de probabilité théorique et estimée par histogramme de la variable aléatoire  $Y_N$  pour différentes valeurs de  $N$*

```
nb_exp = 400000;    % Nombre d'expériences statistiques pour la détermination de la
                    % DdP par histogramme

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul et présentation de la DdP de Xi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

xi = (x_min:pas_x:x_max)';
N_xi = length(xi);
x_min = xi(1);
x_max = xi(N_xi);

DdP_Xi = ((abs(xi)>=a)&(abs(xi)<=b))/(2*(b-a));

figure(1)
clf
plot(xi,DdP_Xi)
%grid
xlabel('x_i')
axis([x_min,x_max,0,1])
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Calcul des N produits de convolution des DdP de la VA Xi pour
%   N=2, 5, 10, 40
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

N = 2;
DdP_YN = DdP_Xi;
for k = 1:N-1
    DdP_YN = conv(DdP_Xi,DdP_YN)*pas_x;
end
DdP_2= DdP_YN;
xi_2 = (N*x_min:pas_x:N*x_max)';
var_Y_th = N*var_X;
DdP_2_th = exp(-xi_2.^2/2/var_Y_th)/sqrt(2*pi*var_Y_th);

N = 5;
DdP_YN = DdP_Xi;
for k = 1:N-1
    DdP_YN = conv(DdP_Xi,DdP_YN)*pas_x;
end
DdP_5 = DdP_YN;
xi_5 = (N*x_min:pas_x:N*x_max)';
var_Y_th = N*var_X;
DdP_5_th = exp(-xi_5.^2/2/var_Y_th)/sqrt(2*pi*var_Y_th);

N = 10;
DdP_YN = DdP_Xi;
for k = 1:N-1
    DdP_YN = conv(DdP_Xi,DdP_YN)*pas_x;
end
DdP_10 = DdP_YN;
xi_10 = (N*x_min:pas_x:N*x_max)';
var_Y_th = N*var_X;
DdP_10_th = exp(-xi_10.^2/2/var_Y_th)/sqrt(2*pi*var_Y_th);

N = 40;
DdP_YN = DdP_Xi;
for k = 1:N-1
    DdP_YN = conv(DdP_Xi,DdP_YN)*pas_x;
end
DdP_40 = DdP_YN;
xi_40 = (N*x_min:pas_x:N*x_max)';
var_Y_th = N*var_X;
DdP_40_th = exp(-xi_40.^2/2/var_Y_th)/sqrt(2*pi*var_Y_th);

figure(2)
clf
subplot(221)
plot(xi_2,DdP_2,xi_2,DdP_2_th)
title('DdP de la somme de 2 VA et DdP gaussienne')
xlabel('y')
subplot(222)
plot(xi_5,DdP_5,xi_5,DdP_5_th)
title('DdP de la somme de 5 VA et DdP gaussienne')
xlabel('y')
subplot(223)

```



```

plot(xi_10,DdP_10,xi_10,DdP_10_th)
title('DdP de la somme de 10 VA et DdP gaussienne')
xlabel('y')
subplot(224)
plot(xi_40,DdP_40,xi_40,DdP_40_th)
title('DdP de la somme de 40 VA et DdP gaussienne')
xlabel('y')
v = axis;
v(1)=-50;
v(2)=50;
axis(v);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Estimation des Ddp par histogramme
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

N = 2;
X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
Y = (X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a);
for k = 1:N-1
    X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
    Y = Y+((X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a));
end
[DdP_2_hist,xi_2_hist] = estim_ddp(Y,100);

N = 5;
X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
Y = (X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a);
for k = 1:N-1
    X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
    Y = Y+((X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a));
end
[DdP_5_hist,xi_5_hist] = estim_ddp(Y,100);

N = 10;
X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
Y = (X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a);
for k = 1:N-1
    X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
    Y = Y+((X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a));
end
[DdP_10_hist,xi_10_hist] = estim_ddp(Y,100);

N = 40;
X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
Y = (X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a);
for k = 1:N-1
    X = (b-a)*2*(rand(nb_exp,1)-0.5);
    Y = Y+((X<=0).*(X-a)+(X>0).*(X+a));
end
[DdP_40_hist,xi_40_hist] = estim_ddp(Y,100);

figure(3)
clf
subplot(221)

```

```
plot(xi_2,DdP_2,xi_2_hist,DdP_2_hist)
title('DdP théorique et estimée de la somme de 2 VA')
xlabel('y')
subplot(222)
plot(xi_5,DdP_5,xi_5_hist,DdP_5_hist)
title('DdP théorique et estimée de la somme de 5 VA')
xlabel('y')
subplot(223)
plot(xi_10,DdP_10,xi_10_hist,DdP_10_hist)
title('DdP théorique et estimée de la somme de 10 VA')
xlabel('y')
subplot(224)
plot(xi_40,DdP_40,xi_40_hist,DdP_40_hist)
title('DdP théorique et estimée de la somme de 40 VA')
xlabel('y')
v = axis;
v(1)=-50;
v(2)=50;
axis(v);
```

### 2.6.3 Énoncé du théorème de la limite centrale

Les résultats présentés dans les deux exemples précédents ne sont que la traduction d'un théorème fondamental des probabilités : **théorème de la limite centrale** ou **théorème central limite**. Il peut s'énoncer comme suit

**La distribution statistique de la somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes, possédant la même loi de probabilité, tend asymptotiquement vers une distribution gaussienne lorsque  $N \rightarrow \infty$ , quelle que soit la distribution des termes individuels.**

La démonstration de ce théorème sort du cadre de ce cours. Elle se fait en général en utilisant les fonctions caractéristiques des différentes VA.

Ce théorème reste valable même si les distributions individuelles sont différentes, pour autant que la variance de chacun des termes individuels soit négligeable vis-à-vis de la variance de la somme.

Ce théorème est important car de très nombreux phénomènes aléatoires observés en physique, résultent de la somme d'un très grand nombre de processus aléatoires indépendants et ayant des DdP souvent inconnues. La distribution résultante peut, en vertu du théorème de la limite centrale, être assimilée à une loi gaussienne qui est complètement définie par la moyenne et la variance du processus.

## Chapitre 3

# Corrélations statistiques des signaux aléatoires

### 3.1 Introduction, problématique et notations

Le chapitre sur les vecteurs aléatoires du second ordre a présenté les outils nécessaires à l'étude, la modélisation et le traitement statistique des processus aléatoires. Cependant, les notations utilisées ne font pas apparaître suffisamment clairement la *dépendance temporelle* des différents moments utilisés pour caractériser un grand nombre de processus aléatoires à traiter. L'objectif de ce chapitre est de :

- donner les définitions des moments statistiques du second ordre (*valeurs moyennes, corrélations et covariances*) en exprimant explicitement ces grandeurs en fonction du temps,
- présenter les notions de *stationnarité* et d'*ergodisme*,
- définir la notion de *Densité Spectrale de Puissance* (DSP) pour les signaux aléatoires stationnaires et ergodiques en insistant sur un résultat fondamental de l'analyse spectrale : le théorème de WIENER-KINTCHINE,
- donner les formules d'auto et d'intercorrélation des processus aléatoires à l'entrée et la sortie d'un Système Linéaire et Invariant dans le Temps.

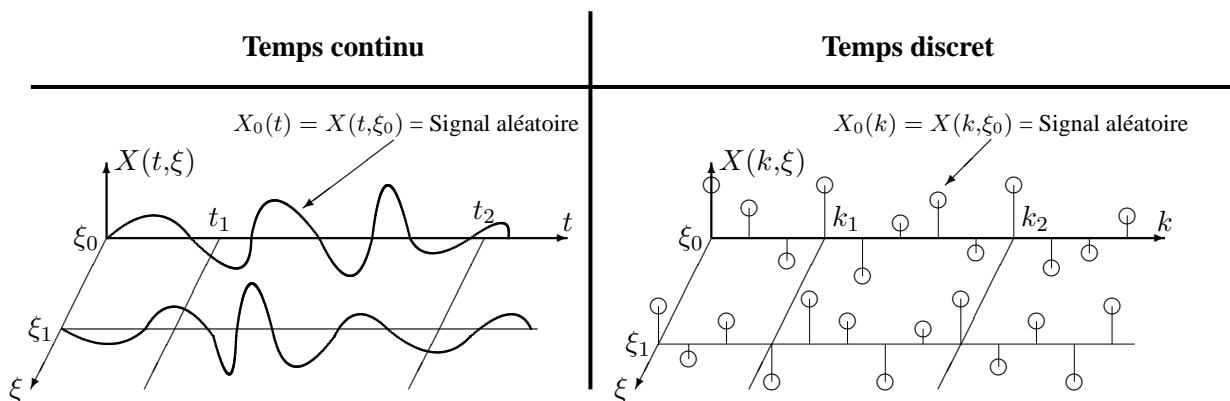


FIG. 3.1 – *Processus aléatoires à temps continu et à temps discret*

La FIGURE 3.1 présente deux réalisations ( $\xi = \xi_0$  et  $\xi = \xi_1$ ) d'un processus aléatoire à temps continu  $X(t, \xi)$  et d'un processus aléatoire à temps discret  $X(k, \xi)$ . En fixant les instants d'observation  $t = t_i$  ou

$k = k_i$ , on obtient une variable aléatoire que nous notons  $X(t_i)$  ou  $X(k_i)$  ou encore  $X_i$  pour simplifier.

Temps continu	Temps discret
$X_i = X(t_i) = X(t_i, \xi)$	$X_i = X(k_i) = X(k_i, \xi)$

Dans ce qui suit, nous présentons toutes les notions pour le cas où les processus sont à temps discret. La transposition au cas du temps continu est immédiate.

Le processus aléatoire pris aux temps  $k = k_1, k_2, \dots, k_n$  constitue un vecteur aléatoire  $X$  défini par :

$$X = \begin{bmatrix} X(k_1) = X(k_1, \xi) \\ X(k_2) = X(k_2, \xi) \\ \vdots \\ X(k_n) = X(k_n, \xi) \end{bmatrix} = [X(k_1), X(k_2), \dots, X(k_n)]^T$$

Ce vecteur aléatoire est entièrement défini par sa fonction de répartition conjointe

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; k_1, k_2, \dots, k_n) = \text{Prob}\{[X(k_1) \leq x_1] \text{ et } [X(k_2) \leq x_2] \text{ et } \dots [X(k_n) \leq x_n]\} , \quad (3.1)$$

ou sa densité de probabilité conjointe

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; k_1, k_2, \dots, k_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} . \quad (3.2)$$

**Les deux fonctions  $F_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$  et  $p_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$  dépendent en général du temps.**

Lorsque l'on se limite aux statistiques d'ordre 1 et 2 pour caractériser un processus aléatoire, les seules fonctions nécessaires sont :

- Les fonctions de répartition ou les densités de probabilités marginales

$$F_{X_i}(x; k_i) = \text{Prob}[X(k_i) \leq x] ,$$

$$p_{X_i}(x; k_i) = \frac{\partial F_{X_i}(x; k_i)}{\partial x} .$$

- Les fonctions de répartition ou les densités de probabilités conjointes du couple aléatoire  $X = [X(k_i), X(k_j)]^T$

$$F_X(x_1, x_2; k_i, k_j) = \text{Prob}\{[X(k_i) \leq x_1] \text{ et } [X(k_j) \leq x_2]\} ,$$

$$p_X(x_1, x_2; k_i, k_j) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; k_i, k_j)}{\partial x_1 \partial x_2} .$$

## 3.2 Statistiques d'ordres 1 et 2

### 3.2.1 Valeur moyenne statistique de processus aléatoires scalaires

La valeur moyenne statistique  $\mu_X(k_i)$  à l'instant  $k_i$  de la variable aléatoire  $X(k_i)$  est le moment du 1<sup>ier</sup> degré de  $X(k_i)$  défini par :

$$\mu_X(k_i) = E[X(k_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x; k_i) dx . \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Variance d'un processus aléatoire scalaires

La variance  $\sigma_X^2(k_i)$  à l'instant  $k_i$  de la variable aléatoire  $X(k_i)$  est le moment du 2<sup>ième</sup> degré de la variable aléatoire centrée  $X(k_i) - \mu_X(k_i)$  défini par :

$$\begin{aligned}\sigma_X^2(k_i) &= E\{[X(k_i) - \mu_X(k_i)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_X(k_i)]^2 p_X(x; k_i) dx, \\ &= E[X^2(k_i)] - \mu_X^2(k_i).\end{aligned}\quad (3.4)$$

La variance est une mesure à l'instant  $k_i$  de la puissance de la dispersion de la VA  $X(k_i)$  autour de sa valeur moyenne.

L'écart type  $\sigma(k_i)$  de la VA  $X(k_i)$  est la racine carrée de la variance, et mesure la valeur efficace à l'instant  $k_i$  de la dispersion de la VA  $X(k_i)$  autour de sa valeur moyenne.

$$\sigma_X(k_i) = \sqrt{E\{[X(k_i) - \mu_X(k_i)]^2\}}. \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Autocorrélation et intercorrélations statistiques de processus aléatoires scalaires

Considérons deux processus aléatoires  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  et les couples aléatoires

$$\begin{bmatrix} X_i = X(k_i) = X(k_i, \xi) \\ X_j = X(k_j) = X(k_j, \xi) \end{bmatrix} = [X(k_i), X(k_j)]^T \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} X_i = X(k_i) = X(k_i, \xi) \\ Y_j = Y(k_j) = Y(k_j, \xi) \end{bmatrix} = [X(k_i), Y(k_j)]^T.$$

La fonction d'autocorrélation statistique  $R_X(k_i, k_j)$  du processus  $X(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est donnée par :

$$R_X(k_i, k_j) = E[X(k_i)X(k_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_X(x_1, x_2; k_i, k_j) dx_1 dx_2. \quad (3.6)$$

La fonction d'intercorrélations statistiques  $R_{X,Y}(k_i, k_j)$  entre les processus  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est donnée par :

$$R_{X,Y}(k_i, k_j) = E[X(k_i)Y(k_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y p_{X,Y}(x, y; k_i, k_j) dx dy. \quad (3.7)$$

### 3.2.4 Autocovariance et intercovariance statistiques de processus aléatoires scalaires

L'autocovariance statistique  $C_X(k_i, k_j)$  du processus aléatoire  $X(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est donnée par :

$$\begin{aligned}C_X(k_i, k_j) &= E\{[X(k_i) - \mu_X(k_i)][X(k_j) - \mu_X(k_j)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu_X(k_i)][x_2 - \mu_X(k_j)] p_X(x_1, x_2; k_i, k_j) dx_1 dx_2 \\ &= E[X(k_i)X(k_j)] - \mu_X(k_i)\mu_X(k_j) \\ &= R_X(k_i, k_j) - \mu_X(k_i)\mu_X(k_j).\end{aligned}\quad (3.8)$$

En posant  $k_i = k_j$  dans  $C_X(k_i, k_j)$  on retrouve la variance du processus aléatoire  $X(k, \xi)$  :

$$C_X(k_i, k_i) = E\{[X_i - \mu_X(k_i)]^2\} = \sigma_X^2(k_i)$$

La fonction d'intercovariance statistique  $C_{X,Y}(k_i, k_j)$  entre les processus  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
C_{X,Y}(k_i, k_j) &= E\{[X(k_i) - \mu_X(k_i)][Y(k_j) - \mu_Y(k_j)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_X(k_i)][y - \mu_Y(k_j)] p_{X,Y}(x, y; k_i, k_j) dx dy \\
&= E[X(k_i)Y(k_j)] - \mu_X(k_i)\mu_Y(k_j) \\
&= R_{X,Y}(k_i, k_j) - \mu_X(k_i)\mu_Y(k_j) .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

### 3.2.5 Moments statistiques d'ordres 1 et 2 des processus aléatoires vectoriels

Il est possible d'étendre les définitions des moyennes et moments statistiques d'ordres 1 et 2 présentées dans les paragraphes précédents au cas où les processus sont vectoriels. Soit donc  $X(k_i, \xi) = X(k_i)$  et  $Y(k_j, \xi) = Y(k_j)$  deux vecteurs aléatoires dépendant du temps

$$X(k_i, \xi) = X(k_i) = \begin{bmatrix} X_1(k_i, \xi) \\ X_2(k_i, \xi) \\ \vdots \\ X_m(k_i, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(k_i) \\ X_2(k_i) \\ \vdots \\ X_m(k_i) \end{bmatrix} \quad Y(k_j, \xi) = Y(k_j) = \begin{bmatrix} Y_1(k_j, \xi) \\ Y_2(k_j, \xi) \\ \vdots \\ Y_n(k_j, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(k_j) \\ Y_2(k_j) \\ \vdots \\ Y_n(k_j) \end{bmatrix}$$

Dans les définitions que nous proposons ci-dessus, nous omettons volontairement le terme  $\xi$  pour alléger les notations.

#### Valeur moyenne statistique de $X(k_i)$ et $Y(k_j)$

Le vecteur moyenne associé à  $X(k_i)$  est défini par

$$\mu_X(k_i) = E[X(k_i)] = \begin{bmatrix} E[X_1(k_i)] \\ E[X_2(k_i)] \\ \vdots \\ E[X_m(k_i)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1}(k_i) \\ \mu_{X_2}(k_i) \\ \vdots \\ \mu_{X_m}(k_i) \end{bmatrix} . \tag{3.10}$$

La transposition au calcul de  $\mu_Y(k_j)$  est immédiate :

$$\mu_Y(k_j) = E[Y(k_j)] = \begin{bmatrix} E[Y_1(k_j)] \\ E[Y_2(k_j)] \\ \vdots \\ E[Y_n(k_j)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{Y_1}(k_j) \\ \mu_{Y_2}(k_j) \\ \vdots \\ \mu_{Y_n}(k_j) \end{bmatrix} . \tag{3.11}$$

**Matrice d'autocorrélation et d'intercorrrelation statistique de  $X(k_i)$  et  $Y(k_j)$** 

La matrice d'autocorrélation statistique de  $X(k_i)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est définie par

$$\begin{aligned}
 R_X(k_i, k_j) &= E[X(k_i)X^T(k_j)] \\
 &= \begin{bmatrix} E[X_1(k_i)X_1(k_j)] & E[X_1(k_i)X_2(k_j)] & \cdots & E[X_1(k_i)X_m(k_j)] \\ E[X_2(k_i)X_1(k_j)] & E[X_2(k_i)X_2(k_j)] & \cdots & E[X_2(k_i)X_m(k_j)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_m(k_i)X_1(k_j)] & E[X_m(k_i)X_2(k_j)] & \cdots & E[X_m(k_i)X_m(k_j)] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$R_X(k_i, k_j)$  est une matrice carrée  $m \times m$  définie non négative.

La matrice d'intercorrrelation statistique entre  $X(k_i)$  et  $Y(k_j)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est définie par

$$\begin{aligned}
 R_{XY}(k_i, k_j) &= E[X(k_i)Y^T(k_j)] \\
 &= \begin{bmatrix} E[X_1(k_i)Y_1(k_j)] & E[X_1(k_i)Y_2(k_j)] & \cdots & E[X_1(k_i)Y_n(k_j)] \\ E[X_2(k_i)Y_1(k_j)] & E[X_2(k_i)Y_2(k_j)] & \cdots & E[X_2(k_i)Y_n(k_j)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_m(k_i)Y_1(k_j)] & E[X_m(k_i)Y_2(k_j)] & \cdots & E[X_m(k_i)Y_n(k_j)] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$R_{XY}(k_i, k_j)$  est une matrice rectangulaire  $m \times n$ .

**Matrice d'autocovariance et d'intercovariance statistique de  $X(k_i)$  et  $Y(k_j)$** 

La matrice d'autocovariance ou de covariance statistique de  $X(k_i)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est définie par

$$\begin{aligned}
 C_X(k_i, k_j) &= E\{[X(k_i) - \mu_X(k_i)][X(k_j) - \mu_X(k_j)]^T\} \\
 &= E[X(k_i)X^T(k_j)] - \mu_X(k_i)\mu_X^T(k_j) \\
 &= R_X(k_i, k_j) - \mu_X(k_i)\mu_X^T(k_j) \\
 &= \begin{bmatrix} C_{X_1}(k_i, k_j) & C_{X_1X_2}(k_i, k_j) & \cdots & C_{X_1X_m}(k_i, k_j) \\ C_{X_2X_1}(k_i, k_j) & C_{X_2}(k_i, k_j) & \cdots & C_{X_2X_m}(k_i, k_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{X_mX_1}(k_i, k_j) & C_{X_mX_2}(k_i, k_j) & \cdots & C_{X_m}(k_i, k_j) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$C_X(k_i, k_j)$  est une matrice carrée  $m \times m$  définie non négative.

La matrice d'intercovariance statistique entre  $X(k_i)$  et  $Y(k_j)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est définie par

$$\begin{aligned}
 C_{XY}(k_i, k_j) &= E\{[X(k_i) - \mu_X(k_i)][Y(k_j) - \mu_Y(k_j)]^T\} \\
 &= E[X(k_i)Y^T(k_j)] - \mu_X(k_i)\mu_Y^T(k_j) \\
 &= R_{XY}(k_i, k_j) - \mu_X(k_i)\mu_Y^T(k_j) \\
 &= \begin{bmatrix} C_{X_1Y_1}(k_i, k_j) & C_{X_1Y_2}(k_i, k_j) & \cdots & C_{X_1Y_n}(k_i, k_j) \\ C_{X_2Y_1}(k_i, k_j) & C_{X_2Y_2}(k_i, k_j) & \cdots & C_{X_2Y_n}(k_i, k_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{X_mY_1}(k_i, k_j) & C_{X_mY_2}(k_i, k_j) & \cdots & C_{X_mY_n}(k_i, k_j) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$C_{XY}(k_i, k_j)$  est une matrice rectangulaire  $m \times n$ .

### 3.3 Stationnarité

La notion de stationnarité joue un rôle très important en analyse et traitement des signaux aléatoires. De façon générale, un processus aléatoire est dit stationnaire si certaines de ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps. Selon que l'on se limite aux propriétés d'ordre 1, 2 ou supérieur, on obtient des degrés de stationnarité différents.

#### 3.3.1 Stationnarité au sens strict

Un processus aléatoire est *stationnaire au sens strict* si **toutes** ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, ce qui signifie que :

- La fonction de répartition conjointe est invariante dans le temps :

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; k_1, k_2, \dots, k_n) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; k_1 + N, k_2 + N, \dots, k_n + N) \quad \forall n \text{ et } \forall N.$$

- La densité de probabilité conjointe est invariante dans le temps.
- Tous les moments s'ils existent sont invariants dans le temps.

Cette condition de stationnarité est très sévère et pratiquement seuls les signaux gaussiens y satisfont.

#### 3.3.2 Stationnarité au sens large ou stationnarité du second ordre

D'après l'inégalité de SCHWARTZ, si la valeur quadratique moyenne  $E[X^2(k_1)]$  d'un processus aléatoire est finie  $\forall k_1$  alors,

- sa valeur moyenne  $\mu_X(k_1) = E[X(k_1)]$  est finie  $\forall k_1$
- sa fonction d'autocorrélation  $R_X(k_1, k_2) = E[X(k_1)X(k_2)]$  est finie  $\forall k_1$  et  $\forall k_2$ .

Dans ce cas le processus aléatoire est dit du **second ordre**.

Deux processus aléatoires sont *stationnaires du second ordre* si :

1.  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  sont du second ordre,
2. la statistique d'ordre 1 est invariante dans le temps :

$$p_X(x; k_i) = p_X(x) \quad \forall k_i$$



3. la densité de probabilité conjointe  $P_X(x_1, x_2; k_i, k_j)$  ne dépend plus que de l'écart temporel  $k = k_j - k_i$  :

$$p_X(x_1, x_2; k_i, k_j) = p_X(x_1, x_2; k) .$$

4. la densité de probabilité conjointe  $P_{X,Y}(x, y; k_i, k_j)$  du couple aléatoire  $[X(k, \xi), Y(k, \xi)]^T$  ne dépend plus que de l'écart temporel  $k = k_j - k_i$  :

$$p_{X,Y}(x, y; k_i, k_j) = p_{X,Y}(x, y; k) .$$

De ce fait, les moments d'ordre 1 et 2 de deux processus aléatoires stationnaires du deuxième ordre possèdent les propriétés suivantes :

1. La valeur moyenne est constante dans le temps :

$$\mu_X(k_i) = \mu_X = \text{constante} \quad \forall k_i \quad (3.16)$$

2. La variance est constante dans le temps :

$$\sigma_X^2(k_i) = \sigma_X^2 = \text{constante} \quad \forall k_i \quad (3.17)$$

3. L'autocorrélation et l'autocovariance ne sont fonction que de l'écart temporel  $k = k_j - k_i$  :

$$\left. \begin{aligned} R_X(k_i, k_j) &= R_X(k) = E[X(l)X(l+k)] \\ C_X(k_i, k_j) &= C_X(k) = E\{[X(l) - \mu_X][X(l+k) - \mu_X]\} \\ &= R_X(k) - \mu_X^2 . \end{aligned} \right\} \forall l \quad (3.18)$$

4. L'intercorrrelation et l'intercovariance ne sont fonction que de l'écart temporel  $k = k_j - k_i$  :

$$\left. \begin{aligned} R_{X,Y}(k_i, k_j) &= R_{X,Y}(k) = E[X(l)Y(l+k)] \\ C_{X,Y}(k_i, k_j) &= C_{X,Y}(k) = E\{[X(l) - \mu_X][Y(l+k) - \mu_Y]\} \\ &= R_{X,Y}(k) - \mu_X \mu_Y . \end{aligned} \right\} \forall l \quad (3.19)$$

**Remarque :** Dans le cas de processus gaussiens, les moments d'ordre quelconque s'expriment en fonction des moments d'ordre 1 et 2. De ce fait, pour des processus gaussiens la stationnarité au sens large implique la stationnarité au sens strict.

### 3.3.3 Propriétés remarquables de l'autocorrélation et de l'intercorrélation

Soit  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  deux processus aléatoires réels et stationnaires. Dans ce cas les fonctions d'auto- et d'intercorrélation présentent les propriétés suivantes :

**Parité de  $R_X(k)$  :** En posant  $l = l - k$  dans (3.18) on obtient

$$R_X(k) = R_X(-k) \Rightarrow \text{l'autocorrélation d'un processus réel stationnaire est paire.}$$

**La fonction d'intercorrélation est ni paire ni impaire** En posant  $l = l - k$  dans (3.19) on obtient

$$R_{X,Y}(k) = R_{Y,X}(-k)$$

**Valeur à l'origine :**

$$R_X(0) = E[|X(k)|^2]$$

$R_X(0)$  est une quantité réelle positive. C'est la puissance moyenne du processus aléatoire stationnaire  $X(k, \xi)$ . Par ailleurs, d'après l'inégalité de SCHWARTZ, nous pouvons écrire :

$$|R_X(k)| \leq R_X(0) ,$$

ce qui montre que l'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire possède un maximum absolu à l'origine.

**Valeur à l'infini :** Quand  $k \rightarrow \pm\infty$  les variables aléatoires  $X(l)$  et  $X(l + k)$  deviennent en général indépendantes. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} R_X(k) = E[X(l)]E[X(l + k)] = \mu_X^2$$

Les propriétés que nous venons d'énoncer sont illustrées sur la FIGURE 3.2.

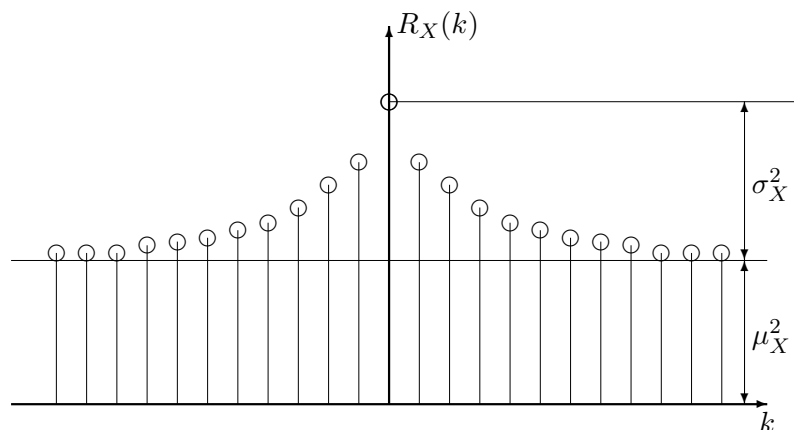


FIG. 3.2 – Allure typique d'une fonction d'autocorrélation d'un processus réel à temps discret

### 3.3.4 Matrices d'autocorrélation et d'autocovariance d'un processus aléatoire stationnaire

Soit  $X(k, \xi)$  un processus aléatoire stationnaire du second ordre et  $X_k$  le vecteur aléatoire de dimension  $N$  défini par :

$$X_k = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k+1) \\ X(k+2) \\ \vdots \\ X(k+N-1) \end{bmatrix} = [X(k), X(k+1), X(k+2), \dots, X(k+N-1)]^T;$$

La matrice d'autocorrélation du vecteur aléatoire  $X_k$  s'écrit :

$$R_{X_k} = E[X_k X_k^T] = \begin{bmatrix} E[X^2(k)] & E[X(k)X(k+1)] & \dots & E[X(k)X(k+N-1)] \\ E[X(k)X(k+1)] & E[X^2(k+1)] & \dots & E[X(k+1)X(k+N-1)] \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ E[X(k)X(k+N-1)] & \dots & \dots & E[X^2(k+N-1)] \end{bmatrix}$$

Les différents termes  $R_X(k_i, k_j) = E[X(k+k_i)X(k+k_j)]$  de cette matrice sont les intercorrélations des variables aléatoires  $X(k+k_i)$  et  $X(k+k_j)$ . Si l'on suppose que le processus  $X(k, \xi)$  est stationnaire alors  $R_X(k_i, k_j)$  ne dépend que de la différence  $k = k_j - k_i$  :

$$R_X(k_i, k_j) = R_X(k_j - k_i) = R_X(k) \quad \text{si le processus } X(k, \xi) \text{ est stationnaire.}$$

La matrice d'autocorrélation s'écrit donc :

$$R_X = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & \dots & R_X(N-1) \\ R_X(1) & R_X(0) & \dots & R_X(N-2) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ R_X(N-1) & \dots & \dots & R_X(0) \end{bmatrix} \quad \text{avec } R_X(k) = E[X(l)X(l+k)] \quad \forall l \quad (3.20)$$

Une telle matrice est symétrique et chaque diagonale est composée d'éléments identiques. C'est une matrice de TOEPLITZ. Avec MATLAB il est possible de construire une telle matrice à l'aide de la fonction

**MATLAB**

```
x = toeplitz(x);
```

où

- $x$  désigne le vecteur d'autocorrélation de dimension  $N$  du processus aléatoire stationnaire  $X(k, \xi)$   
 $x = [R_X(0), R_X(1), R_X(2), \dots, R_X(N-1)]$ ,
- $X$  désigne la matrice d'autocorrélation de dimension  $N^2$  de  $X(k, \xi)$

En suivant le même raisonnement que ci-dessus, on peut définir la *matrice d'autocovariance* d'un processus aléatoire stationnaire comme

$$C_X = \begin{bmatrix} R_X(0) - \mu_X^2 & R_X(1) - \mu_X^2 & \dots & R_X(N-1) - \mu_X^2 \\ R_X(1) - \mu_X^2 & R_X(0) - \mu_X^2 & \dots & R_X(N-2) - \mu_X^2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ R_X(N-1) - \mu_X^2 & \dots & \dots & R_X(0) - \mu_X^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } R_X(k) = E[X(l)X(l+k)] \quad \forall l \quad (3.21)$$

### 3.4 Ergodisme

Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* si l'on peut identifier les moyennes temporelles (valeur moyenne temporelle, corrélations temporelles, etc.) aux moyennes statistiques (valeur moyenne statistique, corrélations statistiques, etc.) Les conséquences directes de l'ergodisme sont listées dans les TABLEAUX 3.1 et 3.2.

Nom	Formulation statistique	Formulation temporelle	Interprétation
Valeur moyenne	$\mu_X = E[X]$	$\mu_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$	Composante continue
Valeur quadratique moyenne	$P_X = E[X^2(t)]$	$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$	Puissance totale de $X(t, \xi)$
Ecart quadratique moyen (variance)	$\sigma_X^2 = E\{[X(t) - \mu_X]^2\}$	$\sigma_X^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu_X]^2 dt$	Puissance des fluctuations de $X(t, \xi)$ autour de la valeur moyenne $\mu_X$
Ecart type	$\sigma_X = \sqrt{E\{[X(t) - \mu_X]^2\}}$	$\sigma_X = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu_X]^2 dt}$	Valeur efficace des fluctuations de $X(t, \xi)$ autour de la valeur moyenne $\mu_X$
Autocorrélation	$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$	$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt$	
Autocovariance	$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2$	$\varphi_x(\tau) - \mu_X^2$	
Relations particulières	$R_X(0) = E[X^2(t)] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$ $C_X(0) = \sigma_X^2$	$P_X = \varphi_x(0)$ $\sigma_X^2 = \varphi_x(0) - \mu_X^2$	Puissance Totale de $X(t, \xi)$

TAB. 3.1 – Principales caractéristiques d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique à temps continu

L'hypothèse d'ergodisme est souvent difficile à vérifier. On admet cependant que la plupart des processus aléatoires usuels sont ergodiques. Ceci permet en pratique de calculer les valeurs moyennes statistiques et temporelles en utilisant la formulation la plus adaptée et la plus simple pour les calculs. On choisira par exemple

- la **formulation temporelle** lorsque l'on cherchera à *estimer* une grandeur sur la base de l'observation d'une ou de plusieurs réalisations du processus aléatoire pendant un certain temps. Dans ce cas la durée d'observation devra être suffisamment longue pour avoir une estimation correcte mais suffisamment faible pour que le processus puisse être considéré comme stationnaire.
- la **formulation statistique** lorsque l'on cherchera à déterminer théoriquement une grandeur, à partir de la modélisation statistique du processus aléatoire (fonctions de répartition, densités de probabilité, etc.).

Nom	Formulation statistique	Formulation temporelle	Interprétation
Valeur moyenne	$\mu_X = E[X]$	$\mu_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N x(l)$	Composante continue
Valeur quadratique moyenne	$P_X = E[X^2(k)]$	$P_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N x^2(l)$	Puissance totale de $X(k, \xi)$
Ecart quadratique moyen (variance)	$\sigma_X^2 = E\{[X(k) - \mu_X]^2\}$	$\sigma_X^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N [x(l) - \mu_X]^2$	Puissance des fluctuations de $X(k, \xi)$ autour de la valeur moyenne $\mu_X$
Ecart type	$\sigma_X = \sqrt{E\{[X(k) - \mu_X]^2\}}$	$\sigma_X = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N [x(l) - \mu_X]^2}$	Valeur efficace des fluctuations de $X(k, \xi)$ autour de la valeur moyenne $\mu_X$
Autocorrélation	$R_X(k) = E[X(l)X(l+k)]$	$\varphi_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N x(l)x(l+k)$	
Autocovariance	$C_X(k) = R_X(k) - \mu_X^2$	$\varphi_x(k) - \mu_X^2$	
Relations particulières	$R_X(0) = E[X^2(k)] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$ $C_X(0) = \sigma_X^2$	$P_X = \varphi_X(0)$ $\sigma_X^2 = \varphi_X(0) - \mu_X^2$	Puissance Totale de $X(k, \xi)$

TAB. 3.2 – Principales caractéristiques d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique à temps discret

### 3.5 Densité spectrale de puissance (DSP) des processus stationnaires et ergodiques

#### 3.5.1 Périodogramme des signaux analogiques déterministes

Soit  $x_a(t)$  un signal analogique à puissance moyenne finie. Pour estimer la puissance de ce signal, on examine une portion de signal dans l'intervalle de temps  $[-T/2, T/2]$ . Le signal à énergie finie  $x_a(t, T)$  défini par

$$\begin{aligned}
 x_a(t, T) &= \begin{cases} x_a(t) & \text{pour } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases} \\
 &= \text{rect}(t, -T/2, T/2) x_a(t) \quad \forall t
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

admet une transformée de Fourier  $X_a(F, T)$ .

Dans cette expression,  $\text{rect}(t, -T/2, T/2)$  désigne la fenêtre rectangulaire définie par

$$\text{rect}(t, -T/2, T/2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases} \tag{3.23}$$

La puissance moyenne  $P_{x_a}(-T/2, T/2)$  du signal  $x_a(t)$  dans l'intervalle de temps  $[-T/2, T/2]$ , peut être calculée :

- soit dans le domaine temporel en intégrant la distribution temporelle  $|x_a(t, T)|^2/T$ ,
- soit dans le domaine fréquentiel en intégrant la distribution fréquentielle  $|X_a(F, T)|^2/T$ .

$$P_{x_a}(-T/2, T/2) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_a(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F, T)|^2 dF. \quad (3.24)$$

Ce résultat porte le nom d'identité de PARSEVAL.

La puissance moyenne totale  $P_{x_a}$  du signal  $x_a(t)$  entre  $-\infty$  et  $\infty$  est obtenue par un passage à la limite de l'équation ci-dessus :

$$P_{x_a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_a(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F, T)|^2 dF \quad (3.25)$$

La *Densité Spectrale de Puissance* du signal  $x_a(t)$  est alors définie par la limite, pour autant que celle-ci existe :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{x_a}(F) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_a(F, T)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x_a(t) \exp(-j2\pi Ft) dt \right|^2 \end{aligned} \right\} = \text{Densité Spectrale de Puissance} \quad (3.26)$$

On peut donner à la Densité Spectrale de Puissance une signification physique. En effet, comme l'indique la FIGURE 3.3, la part  $\Delta P_{x_a}$  de la puissance du signal  $x_a(t)$  distribuée entre les fréquences  $F_1$  et  $F_2$  est donnée par

$$\Delta P_{x_a} = \int_{-F_2}^{-F_1} \Phi_{x_a}(F) dF + \int_{F_1}^{F_2} \Phi_{x_a}(F) dF.$$

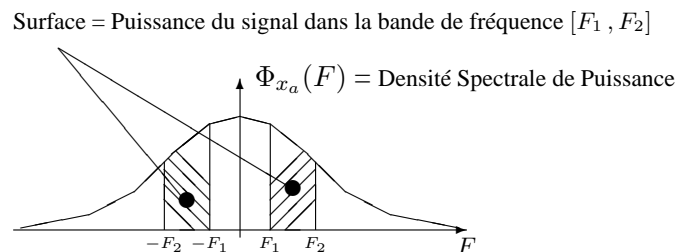


FIG. 3.3 – *Interprétation physique de la Densité Spectrale de Puissance*

La formule (3.26) met en évidence une grandeur  $\Phi_{x_a}(F, T)$  communément appelée *périodogramme analogique* du signal déterministe  $x_a(t)$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{x_a}(F, T) &= \frac{|X_a(F, T)|^2}{T} \\ &= \frac{\left| \int_{-T/2}^{T/2} x_a(t) \exp(-j2\pi Ft) dt \right|^2}{T} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Périodogramme Analogique de} \\ \text{x}_a(t) \text{ sur une durée } T \end{array} \right. \quad (3.27)$$

En introduisant (3.27) dans (3.26) on obtient la définition de la DSP d'un signal analogique déterministe en fonction de son périodogramme

$$\Phi_{x_a}(F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{x_a}(F, T). \quad (3.28)$$

### 3.5.2 Périodogramme des signaux numériques déterministes

Soit  $x(k)$  un signal numérique à puissance moyenne finie obtenu par échantillonnage à la fréquence  $F_e$  d'un signal analogique  $x_a(t)$ . Pour estimer la puissance de ce signal, on examine une portion de signal dans l'intervalle de temps  $[-N/2, N/2 - 1]$ . Le signal à énergie finie  $x(k, N)$  défini par

$$\begin{aligned} x(k, N) &= \begin{cases} x(k) & \text{pour } k \in [-N/2, N/2 - 1], \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases} \\ &= \text{rect}(k, -N/2, N/2 - 1)x(k) \quad \forall k \end{aligned} \quad (3.29)$$

admet une transformée de Fourier  $X(f, N)$  où  $f = F/F_e$  désigne la *fréquence réduite*. Dans cette expression,  $\text{rect}(k, -N/2, N/2 - 1)$  désigne la fenêtre rectangulaire définie par

$$\text{rect}(k, -N/2, N/2 - 1) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \in [-N/2, N/2 - 1], \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases} \quad (3.30)$$

La puissance moyenne totale  $P_x$  du signal  $x(k)$  dans l'intervalle de temps  $[-N/2, N/2 - 1]$ , peut être calculée :

- soit dans le domaine temporel en sommant les différents termes  $|x(k, N)|^2/N$ ,
- soit dans le domaine fréquentiel en intégrant la distribution fréquentielle  $|X(f, N)|^2/N$ .

$$P_x(-N/2, N/2 - 1) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \int_{f=-1/2}^{1/2} |X(f, N)|^2 df. \quad (3.31)$$

La puissance moyenne totale  $P_x$  du signal  $x(k)$  entre  $-\infty$  et  $\infty$  est obtenue par un passage à la limite de l'équation ci-dessus :

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |x(k)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} |X(f, N)|^2 df \quad (3.32)$$

La *Densité Spectrale de Puissance* du signal  $x(k)$  est alors définie par la limite, pour autant que celle ci existe :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |X(f, N)|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(k) \exp(-j2\pi f k) \right|^2 \end{aligned} \right\} = \text{Densité Spectrale de Puissance} \quad (3.33)$$

La formule (3.33) met en évidence une grandeur  $\Phi_x(f, N)$  communément appelée *périodogramme numérique* du signal déterministe  $x(k)$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x(f, N) &= \frac{|X(f, N)|^2}{N} \\ &= \frac{\left| \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(k) \exp(-j2\pi f k) \right|^2}{N} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Périodogramme Numérique de} \\ \text{x(k) sur une durée N} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

En introduisant (3.34) dans (3.33) on obtient la définition de la DSP d'un signal numérique déterministe en fonction de son périodogramme

$$\Phi_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_x(f, N). \quad (3.35)$$

### 3.5.3 Relations entre périodogrammes des signaux analogiques et numériques déterministes

Si les variations d'un signal analogique  $x_a(t)$  sont assez faibles pendant une période d'échantillonnage  $T_e$ , une bonne approximation de la puissance moyenne totale  $P_{x_a}$  de ce signal peut être obtenue en estimant l'intégrale dans le domaine temporel de l'équation (3.24), par la méthode des rectangles. En notant  $x(k) = x_a(kT_e)$  les différents échantillons du signal numérique, on obtient

$$P_{x_a} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |x(k)|^2 \text{ avec } N \text{ "grand"}. \quad (3.36)$$

En introduisant cette relation dans l'identité de PARSEVAL (3.31), on obtient une approximation de la DSP du signal analogique à partir de la DSP du signal numérique :

$$\Phi_{x_a}(F) \approx \frac{T_e}{N} |X(f, N)|^2 \Big|_{f=F/F_e} = T_e \Phi_x(f, N) \Big|_{f=F/F_e} \text{ avec } N \text{ "grand" et } F \in [-F_e/2, F_e/2] \quad (3.37)$$

Il apparaît clairement sur cette formule que le périodogramme du signal analogique à la fréquence  $F \in [F_e/2, F_e/2]$  est le périodogramme du signal numérique à la fréquence réduite  $F/F_e$  multiplié par un facteur  $T_e$ .

### 3.5.4 Densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique

Soit  $X(t, \xi)$  et  $X(k, \xi)$  deux processus aléatoires stationnaires et ergodiques à temps continu et à temps discret respectivement. La présentation des notions de DSP pour les processus aléatoires sera faite dans le cas du temps discret uniquement, mais la transposition au cas du temps continu est immédiate.

Pour estimer la densité spectrale de puissance de ces processus, on peut utiliser un périodogramme. Pour cela, on prélève  $N$  échantillons d'une réalisation  $x_i(k) = X(k, \xi_i)$  avec  $i = 0, 1, 2, \dots$ . On obtient donc une "tranche" de signal  $x_i(k, N)$  de durée  $N$  de la  $i^{\text{ème}}$  réalisation

$$\begin{aligned} x_i(k, N) &= \begin{cases} x_i(k) = X(k, \xi_i) & \text{pour } k \in [-N/2, N/2 - 1], \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \\ &= \text{rect}(k, -N/2, N/2 - 1) x_i(k) \quad \forall k \end{aligned}$$

Le périodogramme  $\Phi_{x_i}(f, N)$  de  $x_i(k, N)$  est donné par

$$\begin{aligned} \Phi_{x_i}(f, N) &= \frac{|X_i(f, N)|^2}{N} \\ &= \frac{\left| \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k, \xi_i) \exp(-j2\pi f k) \right|^2}{N} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{|X_i(f, N)|^2}{N}} \right\} = \begin{cases} \text{Périodogramme Numérique de} \\ x_i(k) \text{ sur une durée } N \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $X_i(f, N)$  désigne la transformée de FOURIER de  $x_i(k, N)$ .

Il est très important de remarquer qu'à chaque réalisation de  $X(k, \xi_i)$  correspond un périodogramme  $\Phi_{x_i}(f, N)$  différent. Ainsi,

**Le périodogramme  $\Phi_{x_i}(f, N)$  est une grandeur aléatoire. A l'ensemble des réalisations  $x_i(k) = X(k, \xi_i)$  avec  $i = 0, 1, 2, \dots$ , correspond pour chaque fréquence  $f$  un ensemble de valeurs de périodogramme distribuées aléatoirement autour d'une valeur moyenne théorique  $\Phi_x(f, N) = E[\Phi_{x_i}(f, N)]$**



La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire peut alors être définie en calculant l'espérance mathématique des périodogrammes des réalisations. Les définitions de ces DSP sont présentées dans le TABLEAU 3.3. La mesure de ces DSP ne peut pas être réalisée en pratique. Seul le périodogramme peut être déterminé expérimentalement. Les résultats aléatoires obtenus à partir de l'analyse de réalisations différentes de  $X(k, \xi_i)$  seront tous légèrement différents les uns des autres. Certaines techniques de moyennage permettent cependant d'obtenir des résultats acceptables. Ces techniques expérimentales sont abordées dans le chapitre consacré à l'estimation.

Définition de la Densité Spectrale de Puissance d'un processus aléatoire	
Temps continu	Temps discret
$\Phi_x(F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \{ \Phi_x(F, T) = E[\Phi_{x_i}(F, T)] \}$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{ X_i(F, T) ^2}{T} \right]$ <p>avec</p> $X_i(F, T) = \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) \exp(-j2\pi Ft) dt$	$\Phi_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \Phi_x(f, N) = E[\Phi_{x_i}(f, N)] \}$ $= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{ X_i(f, N) ^2}{N} \right]$ <p>avec</p> $X_i(f, N) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x_i(k) \exp(-j2\pi fk)$

TAB. 3.3 – Définitions de la Densité Spectrale de Puissance d'un processus aléatoire à temps continu ou discret. Les relations sont exprimées en fonction des périodogrammes des différentes réalisations  $x_i(t)$  ou  $x_i(k)$  des processus.

### 3.6 Théorème de Wiener-Khintchine

Lorsque nous avons présenté les notions de corrélations temporelles de signaux déterministes, nous avons montré que la Densité Spectrale de Puissance est donnée par la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation. L'objectif de ce paragraphe est d'établir, si possible, un lien entre la fonction d'autocorrélation statistique et la DSP d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique.

Le périodogramme d'un processus à temps discret est défini en (3.38) et peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned}
 \Phi_{x_i}(f, N) &= \frac{|X_i(f, N)|^2}{N} \\
 &= \frac{X_i^*(f, N) X_i(f, N)}{N} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x_i(k) \exp(j2\pi fk) \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} x_i(l) \exp(-j2\pi fl) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_i(k) x_i(l) \text{rect}(k, -N/2, N/2-1) \text{rect}(l, -N/2, N/2-1) \exp[-j2\pi f(l-k)]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

En prenant l'espérance mathématique de l'équation ci-dessus, en posant  $m = l - k$  et en intervertissant les opérations d'espérance mathématique et de sommation, il vient

$$E[\Phi_{x_i}(f, N)] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[x_i(k) x_i(k+m)] \text{rect}(k, -N/2, N/2-1) \text{rect}(k+m, -N/2, N/2-1) \exp[-j2\pi fm] \tag{3.40}$$

Dans cette expression, nous reconnaissons la fonction d'autocorrélation statistique du processus aléatoire stationnaire et ergodique  $X(k, \xi)$

$$R_X(m) = E[x_i(k)x_i(k+m)] = E[X(k)X(k+m)] .$$

Ainsi

$$E[\Phi_{x_i}(f, N)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{rect}(k, -N/2, N/2-1) \text{rect}(k+m, -N/2, N/2-1)}{N} \right] R_X(m) \exp[-j2\pi fm] . \quad (3.41)$$

Cette expression fait apparaître la fonction d'autocorrélation de la fenêtre rectangulaire  $\text{rect}()$ . On démontre très simplement que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}(k, -N/2, N/2-1) \text{rect}(k+m, -N/2, N/2-1) = \text{tri}(m, -N, N)$$

où  $\text{tri}(m, -N, N)$  désigne la fonction triangulaire présentée sur la FIGURE 3.4 et définie par

$$\text{tri}(m, -N, N) = \begin{cases} \frac{N-|m|}{N} & \text{pour } m \in [-N, N], \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases} \quad (3.42)$$

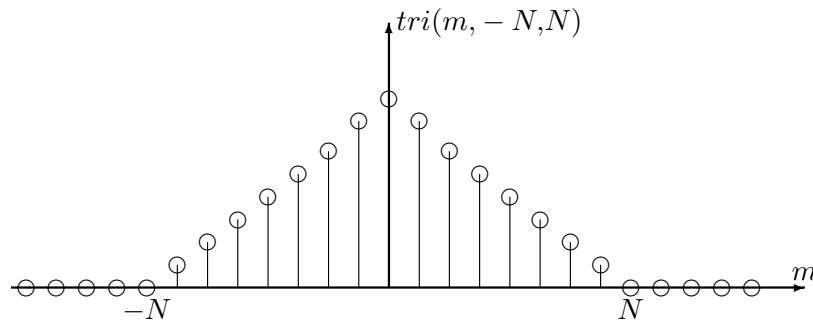


FIG. 3.4 – **Fonction**  $\text{tri}(m, -N, N)$

L'espérance mathématique du périodogramme s'écrit donc

$$E[\Phi_{x_i}(f, N)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{tri}(m, -N, N) R_X(m) \exp[-j2\pi fm] . \quad (3.43)$$

En introduisant cette dernière équation dans les expressions du TABLEAU 3.3 et en remarquant que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{tri}(m, -N, N) = 1 ,$$

on obtient une deuxième définition de la DSP d'un processus aléatoire et ergodique

$$\Phi_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[\Phi_{x_i}(f, N)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) \exp[-j2\pi fm] . \quad (3.44)$$

La DSP s'obtient donc par la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation statistique du processus. Puisque  $X(k, \xi)$  est ergodique, la DSP est aussi égale à la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation temporelle.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour les processus à temps discret peut être transposé très simplement au cas du temps continu. Le TABLEAU 3.4 présente un résumé synthétique des résultats obtenus.

Définition de la Densité Spectrale de Puissance d'un processus aléatoire	
Temps continu	Temps discret
$\begin{aligned}\Phi_x(F) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \{ \Phi_x(F, T) = E[\Phi_{x_i}(F, T)] \} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{ X_i(F, T) ^2}{T} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(\tau) \exp(-j2\pi F\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi F\tau) d\tau\end{aligned}$ <p>avec</p> $\begin{aligned}X_i(F, T) &= \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) \exp(-j2\pi Ft) dt \\ \varphi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) x_i(t + \tau) dt \\ R_X(\tau) &= E[X(t)X(t + \tau)]\end{aligned}$	$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \Phi_x(f, N) = E[\Phi_{x_i}(f, N)] \} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{ X_i(f, N) ^2}{N} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_x(m) \exp(-j2\pi fm) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) \exp(-j2\pi fm)\end{aligned}$ <p>avec</p> $\begin{aligned}X_i(f, N) &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x_i(k) \exp(-j2\pi fk) \\ \varphi_x(m) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x_i(k) x_i(k + m) \\ R_X(m) &= E[X(k)X(k + m)]\end{aligned}$
Théorème de Wiener-Khintchine	

TAB. 3.4 – *Théorème de WIENER-KHINTCHINE : La Densité Spectrale de Puissance d'un signal est égale à la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation du signal, qu'il soit déterministe, aléatoire ou une combinaison des deux.*

## 3.7 Corrélations statistiques des processus aléatoires traités par un SLIT

### 3.7.1 Introduction

Considérons un Système numérique Linéaire et Invariant dans le Temps (SLIT) de réponse impulsionnelle  $h(k)$ , attaqué par un signal aléatoire  $X(k, \xi)$  comme l'indique la FIGURE 3.5.

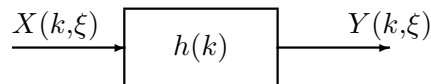


FIG. 3.5 – *Système numérique Linéaire et Invariant dans le Temps attaqué par un processus aléatoire  $X(k, \xi)$*

A l'ensemble des réalisations du signal d'entrée  $X(k, \xi)$  correspond l'ensemble des réalisations du signal de sortie  $Y(k, \xi)$ . Ces deux processus sont reliés par l'équation de convolution

$$Y(k, \xi) = h(k) * X(k, \xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) X(k - l, \xi). \quad (3.45)$$

L'objectif de ce paragraphe est d'établir les moyennes statistiques et les fonctions d'auto- et d'intercorrélation des processus d'entrée et de sortie du filtre numérique stable, invariant dans le temps et de réponse

impulsionnelle  $h(k)$ . Les résultats ne sont établis que pour les processus à temps discret, car c'est en traitement numérique du signal qu'ils sont les plus utiles.

### 3.7.2 Moyenne de la réponse $Y(k, \xi)$

La valeur moyenne statistique du signal de sortie à l'instant  $k$  est donnée par

$$\begin{aligned}\mu_Y(k) &= E[Y(k, \xi)] \\ &= E \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) X(k-l, \xi) \right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) E[X(k-l, \xi)] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \mu_X(k-l)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mu_Y(k) = h(k) * \mu_X(k)} \quad (3.46)$$

Si  $X(k, \xi)$  est stationnaire alors  $\mu_X(k) = \mu_X = \text{cte}$  et

$$\mu_Y(k) = \mu_X \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) = \mu_X \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \exp(-j2\pi f l) \right]_{f=0} = \mu_X H(f)|_{f=0},$$

où  $H(f)$  désigne la transformée de FOURIER de la réponse impulsionnelle du SLIT. C'est encore la réponse en fréquence du filtre numérique. Ainsi

$$\boxed{\mu_Y(k) = \mu_X H(0) = \text{constante si le processus } X(k, \xi) \text{ est stationnaire}} \quad (3.47)$$

Dans cette équation,  $H(0)$  représente le gain du filtre en continu.

### 3.7.3 Équations de convolution pour la corrélation des signaux non stationnaires

L'intercorrélation des processus  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est donnée par

$$R_{X,Y}(k_i, k_j) = E[X(k_i, \xi) Y(k_j, \xi)] = E\{X(k_i, \xi) [X(k_j, \xi) * h(k_j)]\} = E[X(k_i, \xi) X(k_j, \xi)] * h(k_j),$$

d'où

$$\boxed{R_{X,Y}(k_i, k_j) = R_X(k_i, k_j) * h(k_j)} \quad (3.48)$$

L'autocorrélation du processus  $Y(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  est donnée par

$$\begin{aligned}R_Y(k_i, k_j) &= E[Y(k_i, \xi) Y(k_j, \xi)] \\ &= E \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) X(k_i - l, \xi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) X(k_j - m, \xi) \right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) E[X(k_i - l, \xi) X(k_j - m, \xi)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) R_X(k_i - l, k_j - m) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) [R_X(k_i - l, k_j) * h(k_j)] \\
&= h(k_j) * \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) R_X(k_i - l, k_j)
\end{aligned}$$

d'où

$$R_Y(k_i, k_j) = R_X(k_i, k_j) * h(k_j) * h(k_i) \quad (3.49)$$

### 3.7.4 Équations de convolution pour la corrélation des signaux stationnaires

Si  $X(k, \xi)$  est stationnaire alors, en posant  $k = k_j - k_i$  dans l'autocorrélation du signal d'entrée du filtre on obtient

$$R_X(k_i, k_j) = R_X(k_j - k_i) = R_X(k) .$$

L'intercorrélation  $R_{X,Y}(k_i, k_j)$  vue en (3.48) peut alors s'écrire

$$R_{X,Y}(k_i, k_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) R_X(k_i, k_j - l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) R_X(k - l) = R_{X,Y}(k) .$$

Ainsi

$$R_{X,Y}(k) = h(k) * R_X(k) \text{ si le processus } X(k, \xi) \text{ est stationnaire} \quad (3.50)$$

L'autocorrélation aux instants  $k_i$  et  $k_j$  du processus de sortie du filtre excité par un processus stationnaire s'écrit

$$\begin{aligned}
R_Y(k_i, k_j) &= E[Y(k_i, \xi) Y(k_j, \xi)] \\
&= E \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) X(k_i - l, \xi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) X(k_j - m, \xi) \right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) E[X(k_i - l, \xi) X(k_j - m, \xi)] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) R_X(k - m + l)
\end{aligned}$$

En posant  $p = m - l$  et en se souvenant que l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle du filtre (signal à énergie finie) est donnée par

$$\circ \varphi_h(p) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) h(l - p) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) h(l + p) ,$$

on obtient

$$R_Y(k_i, k_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(l + p) R_X(k - p)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_X(k-p) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)h(l+p) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_X(k-p) \overset{\circ}{\varphi}_h(p)
\end{aligned}$$

Nous remarquons que la fonction d'autocorrélation  $R_Y(k_i, k_j)$  ne dépend que du décalage temporel  $k = k_j - k_i$ . Ce résultat, associé à (3.47), montre que si  $X(k, \xi)$  est stationnaire alors  $Y(k, \xi)$  l'est aussi. Ainsi,

$$R_Y(k) = R_X(k) * \overset{\circ}{\varphi}_h(k) \text{ si le processus } X(k, \xi) \text{ est stationnaire} \quad (3.51)$$

La densité spectrale de puissance du signal de sortie d'un filtre excité par un processus aléatoire stationnaire s'obtient, d'après le théorème de WIENER-KHINTCHINE, en calculant la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation du signal de sortie  $Y(k, \xi)$  donnée par (3.51). On obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_y(f) &= \mathcal{F}[R_Y(k)] \\
&= \mathcal{F}[R_X(k) * \overset{\circ}{\varphi}_h(k)] \\
&= \mathcal{F}[R_X(k)] \mathcal{F}[\overset{\circ}{\varphi}_h(k)] \\
&= \Phi_x(f) H(f) H^*(f)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) |H(f)|^2 \quad (3.52)$$

### 3.7.5 Formulation matricielle des équations de convolution pour la corrélation des signaux stationnaires

Si le filtre est à réponse impulsionnelle de durée  $N$  finie. On peut écrire  $N$  fois l'équation de convolution (3.50) pour les valeurs  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . En utilisant la propriété de parité de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire réel et stationnaire ( $R_X(k) = R_X(-k)$ ), on obtient

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}(0) &= h(0)R_X(0) + h(1)R_X(1) + h(2)R_X(2) + \dots + h(N-1)R_X(N-1) \\
R_{X,Y}(1) &= h(0)R_X(1) + h(1)R_X(0) + h(2)R_X(1) + \dots + h(N-1)R_X(N-2) \\
R_{X,Y}(2) &= h(0)R_X(2) + h(1)R_X(1) + h(2)R_X(0) + \dots + h(N-1)R_X(N-3) \\
\vdots &= \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\
R_{X,Y}(N-1) &= h(0)R_X(N-1) + h(1)R_X(N-2) + h(2)R_X(N-3) + \dots + h(N-1)R_X(0)
\end{aligned}$$

Ce système d'équations linéaires peut s'écrire de façon plus synthétique sous la forme d'une équation matricielle. En introduisant les deux vecteurs  $h$  et  $R_{X,Y}$  définis par

$$h = [h(0), h(1), h(2), \dots, h(N-1)]^T \quad (3.53)$$

et

$$R_{X,Y} = [R_{X,Y}(0), R_{X,Y}(1), R_{X,Y}(2), \dots, R_{X,Y}(N-1)]^T, \quad (3.54)$$

on obtient

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{X,Y}(0) \\ R_{X,Y}(1) \\ \vdots \\ R_{X,Y}(N-1) \end{bmatrix}}_{R_{X,Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & \cdots & R_X(N-1) \\ R_X(1) & R_X(0) & \cdots & R_X(N-2) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ R_X(N-1) & \cdots & \cdots & R_X(0) \end{bmatrix}}_{R_X} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}}_h \quad (3.55)$$

Cette équation, qui peut encore s'écrire

$$\mathbf{R}_{X,Y} = \mathbf{R}_X \bullet \mathbf{h} \quad (3.56)$$

représente la formulation matricielle de l'équation de convolution pour la corrélation. Rappelons que si les processus  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  sont ergodiques, on peut remplacer les corrélations statistiques par les corrélations temporelles. Ainsi, avec la fonction `conv()` et l'ensemble des outils de l'algèbre linéaire de MATLAB, **MATLAB** il est possible par exemple de

- calculer les  $N$  premiers points de l'intercorrélation entrée-sortie d'un filtre linéaire et invariant dans le temps si l'on connaît les  $N$  premiers points de l'autocorrélation du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle  $h(k)$ ,
- calculer les  $N$  premiers points de la réponse impulsionnelle  $h(k)$  si l'on connaît (ou si l'on mesure) l'autocorrélation du signal d'entrée et l'intercorrélation entrée-sortie du filtre.

### 3.7.6 Équations aux différences pour la corrélation des signaux stationnaires

Si le filtre n'est pas caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(k)$  mais plutôt par une équation aux différences reliant l'entrée et la sortie du filtre

$$a_0 Y(k, \xi) + a_1 Y(k-1, \xi) + \cdots + a_N Y(k-N, \xi) = b_0 X(k, \xi) + b_1 X(k-1, \xi) + \cdots + b_M X(k-M, \xi), \quad (3.57)$$

qui peut encore s'écrire

$$\sum_{n=0}^N a_n Y(k-n, \xi) = \sum_{m=0}^M b_m X(k-m, \xi), \quad (3.58)$$

on peut obtenir des équations aux différences reliant les auto- et intercorrélations des signaux d'entrée.

Multiplions les deux membres de (3.58) par  $Y(k-l, \xi)$  et en prenons l'espérance mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ Y(k-l, \xi) \sum_{n=0}^N a_n Y(k-n, \xi) \right] &= \mathbb{E} \left[ Y(k-l, \xi) \sum_{m=0}^M b_m X(k-m, \xi) \right] \\ \sum_{n=0}^N a_n \mathbb{E} [Y(k-l, \xi) Y(k-n, \xi)] &= \sum_{m=0}^M b_m \mathbb{E} [Y(k-l, \xi) X(k-m, \xi)] \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des fonctions d'intercorrélation vues au § 3.3.3, on obtient une première équation aux différences

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N a_n R_Y(l-n) &= \sum_{m=0}^M b_m R_{Y,X}(l-m) \\
\sum_{n=0}^N a_n R_Y(l-n) &= \sum_{m=0}^M b_m R_{X,Y}(m-l)
\end{aligned}
\tag{3.59}$$

En multipliant les deux membres de (3.58) par  $X(k-l, \xi)$  et en prenant l'espérance mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned}
E \left[ X(k-l, \xi) \sum_{n=0}^N a_n Y(k-n, \xi) \right] &= E \left[ X(k-l, \xi) \sum_{m=0}^M b_m X(k-m, \xi) \right] \\
\sum_{n=0}^N a_n E [X(k-l, \xi) Y(k-n, \xi)] &= \sum_{m=0}^M b_m E [X(k-l, \xi) X(k-m, \xi)]
\end{aligned}$$

Ces deux équations définissent une deuxième équation aux différences pour la corrélation

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N a_n R_{X,Y}(l-n) &= \sum_{m=0}^M b_m R_X(l-m) \\
\sum_{n=0}^N a_n R_{Y,X}(n-l) &= \sum_{m=0}^M b_m R_X(m-l)
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

On peut obtenir une description fréquentielle de ces équations aux différences en calculant la transformée de FOURIER des deux membres des équations (3.59) et (3.60). En notant  $\Phi_{X,Y}(f) = \mathcal{F}[R_{X,Y}(l)]$  l'inter-spectre entre  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  on obtient :

$$\Phi_Y(f) \sum_{n=0}^N a_n \exp(-j2\pi f n) = \Phi_{Y,X}(f) \sum_{m=0}^M b_m \exp(-j2\pi f m), \tag{3.61}$$

et

$$\Phi_{X,Y}(f) \sum_{n=0}^N a_n \exp(-j2\pi f n) = \Phi_X(f) \sum_{m=0}^M b_m \exp(-j2\pi f m). \tag{3.62}$$

Les propriétés des fonctions de corrélations permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
R_X(k) = R_X(-k) &\implies \Phi_X(f) = \Phi_X^*(f) \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{La DSP de } X(k, \xi) \text{ est une} \\ \text{fonction réelle positive} \end{array} \right. \\
R_{X,Y}(k) = R_{Y,X}(-k) &\implies \Phi_{X,Y}(f) = \Phi_{Y,X}^*(f)
\end{aligned}
\tag{3.63}$$

En introduisant (3.63) dans (3.61) et (3.62) on obtient une relation fondamentale permettant de calculer la densité spectrale de puissance du signal de sortie du filtre, en fonction des différents coefficients  $a_n$  et  $b_n$  de l'équation aux différences et de la DSP du signal d'entrée

$$\Phi_Y(f) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \exp(-j2\pi f m)}{\sum_{n=0}^N a_n \exp(-j2\pi f n)} \quad \Phi_X(f) = |H(f)|^2 \Phi_X(f) \tag{3.64}$$



### 3.8 Notion de bruit blanc

**On appelle bruit blanc (par analogie avec la lumière) un processus aléatoire stationnaire  $X(k, \xi)$  dont la densité spectrale de puissance est constante pour toute fréquence :**

$$\Phi_X(f) = \sigma_X^2$$

**Le bruit blanc a donc une fonction d'autocorrélation :**

$$R_X(k) = \sigma_X^2 d(k)$$

**où  $d(k)$  désigne l'impulsion unité.**

Les propriétés du bruit blanc sont illustrée sur la FIGURE 3.6.

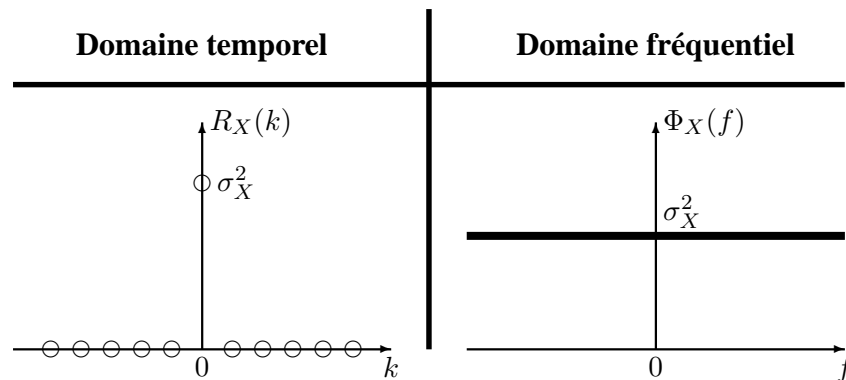


FIG. 3.6 – *Principales propriétés du bruit blanc*

## Chapitre 4

# Caractérisation de quelques processus aléatoires

### 4.1 Signal aléatoire sinusoïdal à phase aléatoire

#### 4.1.1 Introduction

Soit  $X_1(k, \xi)$  et  $X_2(k, \xi)$  deux processus aléatoires scalaires définis par

$$X_1(k, \xi) = A \cos[2\pi f_0 k + \theta_1(\xi)]$$

$$X_2(k, \xi) = A \cos[2\pi f_0 k + \theta_2(\xi)]$$

où

- $f_0 = 0.1$
- $\theta_1(\xi)$  et  $\theta_2(\xi)$  sont des variables aléatoires scalaires ayant une densité de probabilité uniforme dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et  $[0, \pi]$  respectivement.

On propose dans ce qui suit de déterminer de façon théorique et expérimentale

- les différents moments de ces processus aléatoires,
- si ces processus sont stationnaires et ergodiques.

#### 4.1.2 Estimation de la moyenne et de la variance avec MATLAB

1. A l'aide des fonctions `meshgrid()` et `rand()`, créez deux matrices  $X_1$  et  $X_2$  de  $M$  lignes et  $N$  colonnes où chaque ligne représente une réalisation particulière des processus aléatoires  $X_1(k, \xi)$  et  $X_2(k, \xi)$ , pour  $k$  variant de 0 à  $N - 1$ . Prenez pour cela  $M \geq 200$  et  $N \geq 50$ .
2. Pour ces deux processus, calculez et représentez sur une même figure les valeurs moyennes statistiques expérimentales  $\hat{\mu}_{X_1}(k)$  et  $\hat{\mu}_{X_2}(k)$ .
3. Pour ces deux processus, calculez et représentez sur une même figure la variance statistique expérimentale  $\hat{\sigma}_{X_1}^2(k)$  et  $\hat{\sigma}_{X_2}^2(k)$ .
4. En vous reportant aux définitions de la stationnarité pages 5 et 6 du poly, déterminez si ces processus sont stationnaires ou non.

#### 4.1.3 Calcul théorique des moments d'ordre 1 et 2

1. Calculez théoriquement la moyenne  $\mu_{X_i}(k)$  et la variance  $\sigma_{X_i}^2(k)$  avec  $i = 1$  ou  $2$ .

2. Comparez ces valeurs théoriques avec les valeurs estimées aux questions précédentes  $\hat{\mu}_{X_i}(k)$  et  $\hat{\sigma}_{X_i}^2(k)$ . Tracez pour cela sur quatre figures différentes
  - $\mu_{X_i}(k)$  et  $\hat{\mu}_{X_i}(k)$
  - $\sigma_{X_i}^2(k)$  et  $\hat{\sigma}_{X_i}^2(k)$
 avec  $i = 1$  ou  $2$ .
3. Calculez les autocorrélations des processus  $X_1(k, \xi)$  et  $X_2(k, \xi)$  aux instants  $k_i$  et  $k_j$  définies par

$$R_{X_1}(k_i, k_j) = E[X_1(k_i, \xi)X_1(k_j, \xi)]$$

$$R_{X_2}(k_i, k_j) = E[X_2(k_i, \xi)X_2(k_j, \xi)]$$

et indiquez si elles ne dépendent que de l'écart temporel  $k = k_j - k_i$ .

4. Déterminez lequel des processus est stationnaire et comparez ce résultat théorique avec le résultat expérimental obtenu au § 4.1.2.
5. Pour le processus qui est stationnaire, calculez  $\varphi_X(k, \xi_l)$  l'autocorrélation temporelle théorique de la réalisation particulière de ce processus correspondant à  $\xi = \xi_l$ . Ce processus est-il ergodique ?
6. Créez une réalisation particulière  $X_i(k, \xi_l)$  de  $N$  points et calculez à l'aide de la fonction `xcorr()` :
  - $\hat{\varphi}_B(k, \xi_l)$ , une estimation **biaisée** de l'autocorrélation temporelle
  - $\hat{\varphi}_U(k, \xi_l)$ , une estimation **non biaisée** de l'autocorrélation temporelle.
7. Représentez sur une même figure  $\varphi_X(k)$ ,  $\varphi_B(k, \xi_l)$  et  $\varphi_U(k, \xi_l)$ . Faites varier le nombre de points  $N$  de la réalisation  $X_i(k, \xi_l)$  et aidez-vous éventuellement des fonctions `axis()` ou `zoom`. Concluez.
8. En vous aidant du théorème de WIENER-KHINTCHINE (cf. TAB. 1.4 page 15 du poly.), calculez la densité spectrale de puissance du processus aléatoire stationnaire et ergodique.

## 4.2 Signal sinusoïdal à phase aléatoire modulé en amplitude par un processus aléatoire

### 4.2.1 Introduction

Soit  $X(k, \xi)$  un processus aléatoire défini par

$$X(k, \xi) = A[1 + B(k, \xi)] \cos[2\pi f_0 k + \theta(\xi)] ,$$

où

- $f_0 = 0.1$ ,
- $B(k, \xi)$  est un processus modulant réel et stationnaire, résultat du filtrage d'un bruit blanc gaussien aléatoire  $N(k, \xi)$  de moyenne nulle et de variance  $\sigma_N^2 = 1$  par un filtre de réponse impulsionnelle

$$h(k) = \epsilon(k)0.9^k ,$$

- $\theta(\xi)$  est équiprobable dans  $[0, 2\pi]$ ,
- $N(k, \xi)$  et  $\theta(\xi)$  sont indépendants.

Nous nous proposons de déterminer de façon théorique et expérimentale la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de  $X(k, \xi)$  à l'aide du théorème de WIENER-KHINTCHINE.

### 4.2.2 Détermination de la DSP de $B(k, \xi)$

1. En vous aidant des résultats du § 1.7 du poly., calculez théoriquement la valeur moyenne  $\mu_B(ki)$  et l'autocorrélation statistique  $R_B(k_i, k_j)$  de  $B(k, \xi)$ . Ce processus est-il stationnaire ? Si oui, exprimez  $R_B(k_i, k_j)$  en fonction de  $k = k_j - k_i$ .
2. Calculez la variance théorique de  $B(k, \xi)$ .
3. Représentez sur une même figure  $R_B(k)$ , une estimation biaisée et une estimation non biaisée de l'autocorrélation temporelle d'une réalisation particulière de  $B(k, \xi)$ .
4. Calculez théoriquement  $\Phi_B(f)$ , la DSP de  $B(k, \xi)$ .
5. Représentez sur une figure  $\Phi_B(f)$ .

### 4.2.3 Détermination des moments d'ordre 1 et 2 de $X(k, \xi)$

1. Calculez la valeur moyenne  $\mu_X(ki)$  et l'autocorrélation statistique  $R_X(k_i, k_j)$  de  $X(k, \xi)$ . Ce processus est-il stationnaire ? Si oui, exprimez  $R_X(k_i, k_j)$  en fonction de  $k = k_j - k_i$ .
2. Représentez  $R_X(k)$  sur une figure.

### 4.2.4 Calcul de la DSP de $X(k, \xi)$

1. Exprimez  $\Phi_X(f)$  en fonction de  $\Phi_B(f)$ .
2. En utilisant l'expression de  $\Phi_B(f)$  trouvée précédemment, calculez et représentez  $\Phi_X(f)$  sur une figure.

## 4.3 Code en ligne NRZ en échantillonné

### 4.3.1 Introduction

Soit  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$ , deux processus aléatoires cadencés dont les valeurs changent tous les  $N$  points tout en restant constantes dans des intervalles de durée  $N$

$$X(k, \xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A(l, \xi) h[k - lN - \theta(\xi)] ,$$

$$Y(k, \xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A(l, \xi) h[k - lN] ,$$

où

- $A(l, \xi)$  est une Variable Aléatoire Discrète (VAD) à DdP uniforme, appartenant à un alphabet de  $M$  valeurs équiréparties entre  $A_1$  et  $A_M$ ,
- $\theta(\xi)$  est une VAD équiprobable dans  $[0, N - 1]$ ,
- $h(k)$  est la fenêtre rectangulaire définie par

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \in [0, N - 1] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

- les  $A(l, \xi)$  et  $\theta(\xi)$  sont indépendants.

On se propose dans ce qui suit de déterminer la valeur moyenne, la fonction d'autocorrélation ainsi que la DSP de  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$ .

### 4.3.2 Détermination de la valeur moyenne et de l'autocorrélation expérimentale

1. Créez une réalisation de  $L.N$  points de  $X(k, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$  et calculez une estimation des moyennes temporelles  $\hat{\mu}_X(\xi)$  et  $\hat{\mu}_Y(\xi)$  pour différentes valeurs de  $L \geq 100$ . Vous traiterez les deux cas suivants :
  - (a)  $N = 10, M = 8, A_1 = -3.5, A_M = 3.5$ ,
  - (b)  $N = 10, M = 8, A_1 = 0, A_M = 7$ .
2. Pour ces deux cas, calculez une estimation biaisée et non biaisée des autocorrélations temporelles  $\hat{\varphi}_X(k, \xi)$  et  $\hat{\varphi}_Y(k, \xi)$ . Représentez ces fonctions d'autocorrélations pour  $k \in [-2N, 2N]$ .

### 4.3.3 Détermination des moments théoriques d'ordre 1 et 2

1. Calculez  $\mu_X(k_i), \mu_Y(k_i)$ , les moyennes statistiques de  $X(k_i, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$ . Sont-elles indépendantes de  $k_i$  ?
2. Calculez  $\sigma_X^2(k_i)$  et  $\sigma_Y^2(k_i)$  les variances statistiques de  $X(k_i, \xi)$  et  $Y(k, \xi)$ . Sont-elles indépendantes de  $k_i$  ?
3. Calculez l'autocorrélation statistique  $R_X(k_i, k_i + k)$ . Montrez qu'elle est indépendante de  $k_i$  ? Le processus est-il stationnaire ? Donnez aussi  $P_X$ , la puissance totale de  $X(k_i, \xi)$ .
4. Calculez l'autocorrélation statistique  $R_Y(k_i, k_i + k)$ . Montrez qu'elle est cyclo-stationnaire. Donnez aussi  $P_Y$ , la puissance totale de  $Y(k_i, \xi)$ .
5. En utilisant le théorème de WIENER-KHINTCHINE, calculez  $\Phi_X(f)$ , la densité spectrale de puissance du processus  $X(k, \xi)$ . Pour cela, nous rappelons que la fenêtre triangulaire  $tri(k, -N, N)$  s'obtient à partir de l'autocorrélation d'une fenêtre rectangulaire de  $N$  points

$$\begin{aligned}
 tri(k, -N, N) &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} rect(m, 0, N-1) rect(m+k, 0, N-1), \\
 &= \frac{1}{N} rect(k, 0, N-1) * rect(-k, 0, N-1), \\
 &= \begin{cases} \frac{N-|k|}{N} & \text{pour } k \in [-N, N], \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

6. En utilisant le théorème de WIENER-KHINTCHINE modifié, calculez la densité spectrale de puissance  $\Phi_Y(f)$  du processus  $Y(k, \xi)$ . Montrez que

$$\Phi_X(f) = \Phi_Y(f).$$

7. Ecrivez une fonction MATLAB `dsp_nrz(f)` qui renvoie la DSP de  $X(k, \xi)$ , notée  $\Phi_X(f)$ , pour toutes les valeurs des fréquences rangées dans l'argument d'entrée `f`.
8. Représentez  $\Phi_X(f)$  pour  $f \in [-0.5, 0.5]$  et pour les deux cas suivants :
  - (a)  $N = 10, M = 8, A_1 = -3.5, A_M = 3.5$ ,
  - (b)  $N = 10, M = 8, A_1 = 0, A_M = 7$ .
9. Rappelez la formule analytique permettant de calculer  $P_X(f_1)$ , la puissance du signal dans une bande de fréquence  $[-f_1, f_1]$  (puisque nous étudions un processus à temps discret,  $f_1 \in [0, 0.5]$ ).
10. En vous aidant des fonctions `quad()` et `dsp_nrz(f)`, écrivez un programme permettant de représenter en % le rapport  $K(f_1) = P_X(f_1)/P_X$ . Cette quantité représente la part de puissance de  $X(k, \xi)$  contenue dans la bande de fréquence  $[-f_1, f_1]$  par rapport à la puissance totale du processus aléatoire.

Avec les valeurs numériques données au § précédent, représentez  $K(f_1)$  pour  $f_1 \in [0, 0.5]$  et calculez précisément  $K(1/N)$ ,  $K(2/N)$  et  $K(3/N)$ . Pour assurer à la fonction `quad()` un fonctionnement optimal, nous vous conseillons de modifier la fonction `dsp_nrz(f)` de façon à rajouter une constante quelconque (par exemple 1) à la valeur  $\Phi_X(f)$ . Vous devez bien sûr corriger le résultat de l'intégration numérique pour tenir compte de cette modification.

# Chapitre 5

## Notions d'estimation

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Notion d'estimation et objectif du travail

Soit  $X(k, \xi)$  un processus aléatoire réel et  $\alpha(k_i)$  une grandeur quelconque caractérisant statistiquement ce processus. Par exemple  $\alpha(k_i)$  peut être

- la moyenne statistique :  $\alpha(k_i) = \mu_X(k_i) = E[X(k_i, \xi)]$ ,
- la variance :  $\alpha(k_i) = \sigma_X^2(k_i) = E\{[X(k_i, \xi) - \mu_X(k_i)]^2\}$
- etc.

Il est très souvent nécessaire en pratique de déterminer expérimentalement la valeur de  $\alpha(k_i)$ . On parle alors *d'estimation* et l'on note  $\hat{\alpha}_K(k_i, \xi_j)$  la valeur expérimentale obtenue à partir de  $K$  échantillons temporels d'une réalisation particulière du processus correspondant à  $\xi = \xi_j$ . Nous avons

$$\hat{\alpha}_K(k_i, \xi_j) = \text{Fonction}[X(k_i, \xi_j), X(k_i - 1, \xi_j), X(k_i - 2, \xi_j), \dots, X(k_i - K + 1, \xi_j),] \quad (5.1)$$

**$\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)$  est elle même une variable aléatoire qui est entièrement définie par sa densité de probabilité  $p_{\hat{\alpha}_K}(x)$**

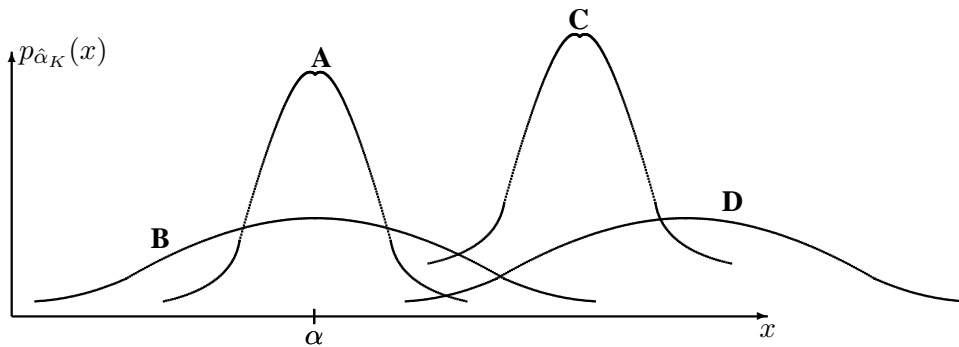


FIG. 5.1 – Différentes densités de probabilité de l'estimation d'un paramètre  $\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)$ . Courbe A : biais faible et variance faible, Courbe B : biais faible et variance importante, Courbe C : biais important et variance faible, Courbe D : biais important et variance importante.

La FIGURE 5.1 montre différents cas que l'on peut rencontrer en pratique. Il est évident le choix de l'utilisateur se portera sur un estimateur ayant un biais et une variance aussi faibles que possible. Il faut cependant noter qu'une bonne estimation est parfois obtenue au prix d'algorithmes assez complexes. L'estimateur choisi devra alors faire le compromis entre biais, variance et complexité des calculs.

L'objectif de ce chapitre est de caractériser totalement l'estimateur de moyenne d'un processus aléatoire donné par la formule

$$\hat{\mu}_K(k_i, \xi) = \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{K-1} X(k_i - l, \xi) \quad (5.2)$$

### 5.1.2 Biais d'un estimateur

Le biais d'un estimateur  $Biais[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)]$  est par définition, la différence entre l'espérance mathématique de l'estimation et la valeur théorique à estimer :

$$Biais[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)] = E[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)] - \alpha = \text{Biais de l'estimation } \hat{\alpha}_K(k_i, \xi) \quad (5.3)$$

Sur la FIGURE 5.1 nous voyons que

- pour les courbes **A** et **B**, la DdP  $p_{\hat{\alpha}_K}(x)$  est centrée sur la valeur théorique  $\alpha$ . On dit dans ce cas que l'estimation est **non biaisée**.
- pour les courbes **C** et **D**, la DdP  $p_{\hat{\alpha}_K}(x)$  n'est pas centrée sur la valeur théorique  $\alpha$ . L'estimation est dans ce cas **biaisée**.

### 5.1.3 Variance d'un estimateur

La variance d'un estimateur  $Var[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)]$  est une mesure de "l'étendue" ou de "l'étalement" de la DdP  $p_{\hat{\alpha}_K}(x)$ . C'est aussi une mesure de la puissance des fluctuations statistiques de l'estimation  $\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)$  autour de sa valeur moyenne statistique  $E[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)]$ .

$$Var[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)] = E\{[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi) - E[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)]]^2\} = \text{Variance de l'estimation } \hat{\alpha}_K(k_i, \xi) \quad (5.4)$$

Sur la FIGURE 5.1 nous voyons que

- pour les courbes **A** et **C**, la DdP  $p_{\hat{\alpha}_K}(x)$  est "resserrée". On dit dans ce cas que l'estimation est à **variance faible**.
- pour les courbes **B** et **D**, la DdP  $p_{\hat{\alpha}_K}(x)$  est assez "étalée". L'estimation est dans ce cas à **variance importante**.

### 5.1.4 Consistance d'un estimateur

On dit qu'un estimateur est consistant si son biais et sa variance tendent vers zéro lorsque le nombre de points  $K$  utilisés pour estimer le paramètre tend vers l'infini.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{K \rightarrow \infty} Biais[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)] = 0 \\ \lim_{K \rightarrow \infty} Var[\hat{\alpha}_K(k_i, \xi)] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'estimateur est consistant} \quad (5.5)$$



## 5.2 Etude d'un estimateur de moyenne

### 5.2.1 Introduction

Soit  $B(k, \xi)$  un processus aléatoire stationnaire et ergodique ayant une DdP uniforme entre 0 et  $\pi$  et dont les échantillons sont statistiquement indépendants. Soit  $X(k, \xi)$  un second processus aléatoire donné par :

$$X(k, \xi) = \sin[B(k, \xi)] \quad (5.6)$$

1. Calculez théoriquement la valeur moyenne  $\mu_X(k_i)$  de  $X(k, \xi)$ .
2. Calculez théoriquement la variance  $\sigma_X^2(k_i)$  de  $X(k, \xi)$ .
3. Calculez théoriquement l'autocorrélation  $R_X(k_i, k_j)$  de  $X(k, \xi)$ .
4. Le processus  $X(k, \xi)$  est-il stationnaire ?
5. Pour une valeur  $k = k_i$  quelconque, calculez théoriquement la DdP de la variable aléatoire continue  $X(k_i, \xi)$ .
6. Pour une valeur  $k = k_i$  quelconque, calculez avec MATLAB  $N = 200$  réalisations de  $X(k_i, \xi)$  et représentez sur une même courbe une estimation et la valeur théorique de la DdP.

Dans ce qui suit on se propose d'étudier l'estimation de la valeur moyenne de  $X(k, \xi)$  donnée par

$$\hat{\mu}_K(k_i, \xi) = \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{K-1} X(k_i - l, \xi) . \quad (5.7)$$

Puisque le processus est stationnaire, nous écrirons plus simplement :

$$\hat{\mu}_K(\xi) = \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{K-1} X(l, \xi) . \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Estimation de la moyenne du signal

1. En vous aidant de la fonction `rand()` de MATLAB, créez une matrice  $\mathbf{X}$  de  $N$  lignes et  $K$  colonnes où chaque ligne représente une réalisation de  $X(k, \xi)$ .
2. En vous aidant de la transposition, de la fonction `mean()` et de la formule (5.8), calculez et représentez sur une courbe les  $N$  estimations de la valeur moyenne. Comparez le résultat obtenu avec la théorie.
3. Représentez une estimation de la DdP de l'estimation de la moyenne. Calculez expérimentalement une estimation de la moyenne statistique et de la variance de  $\hat{\mu}_K(\xi)$ . Que constatez-vous ? Commentez.
4. Reprenez les étapes 1 à 3 précédentes pour différentes valeurs de  $K$  et de  $N$ .

### 5.2.3 Calcul du biais, de la variance et de l'intervalle de confiance de l'estimateur

1. Calculez théoriquement le biais de l'estimateur de moyenne.
2. Calculez théoriquement la variance de l'estimateur de moyenne.
3. L'estimateur est-il consistant ?
4. En vous aidant de la question 3 du paragraphe précédent, donnez l'expression théorique de la DdP  $p_{\hat{\mu}_K}(x)$  de  $\hat{\mu}_K(\xi)$  lorsque  $K$  est "grand". Représentez sur une même courbe  $p_{\hat{\mu}}(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} p_{\hat{\mu}_K}(x)$  et une estimation par histogramme de la DdP de  $\hat{\mu}_K(\xi)$  pour différentes valeurs de  $K$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux valeurs réelles positives. La probabilité  $P$  pour que  $\hat{\mu}_K(\xi)$  appartienne à l'intervalle  $[\mu_X - a, \mu_X + b]$  est donnée par

$$P = \text{Prob}[\mu_X - a \leq \hat{\mu}_K(\xi) \leq \mu_X + b]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mu_X - a}^{\mu_X + b} p_{\hat{\mu}}(x) dx \\
&= \text{Prob}[-a \leq \hat{\mu}_K(\xi) - \mu_X \leq b] \\
&= \text{Prob}[\hat{\mu}_K(\xi) - b \leq \mu_X \leq \hat{\mu}_K(\xi) + a]
\end{aligned}$$

$[\hat{\mu}_K(\xi) - b, \hat{\mu}_K(\xi) + a]$  est l'intervalle dans lequel on a des chances de trouver la valeur vraie de la moyenne  $\mu_X$  avec une probabilité  $P$ . On l'appelle Intervalle de Confiance (IC) de l'estimateur.

1. Pour  $K = 10$ ,  $K = 100$ ,  $K = 1000$  et  $K = 10000$ , calculez la probabilité pour que  $\hat{\mu}_K(\xi) \in [\mu_X - 0.01, \mu_X + 0.01]$ .
2. Calculez  $a$  avec  $a \geq 0$  pour que  $\text{Prob}[\hat{\mu}_K(\xi) - a \leq \mu_X \leq \hat{\mu}_K(\xi) + a] = 99\%$

## 5.3 Estimation à maximum de vraisemblance

### 5.3.1 Introduction

La méthode du maximum de vraisemblance est une technique d'estimation paramétrique qui suppose connues un certain nombre de caractéristiques du système étudié comme par exemple

1. la Densité de Probabilité,
2. la moyenne,
3. la variance,
4. la dépendance d'un processus en fonction du temps,
5. etc.

Elle présuppose donc une modélisation de la réalité mais ne permet pas de conclure sur la qualité de la modélisation. L'objectif de cet atelier est d'illustrer cette méthode dans le cadre de deux exemples.

Les différentes étapes à franchir pour mettre en œuvre cette technique consistent

1. à exprimer la Densité de Probabilité de probabilité conjointe  $p_X(x, \alpha)$  d'un vecteur aléatoire

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_M]^T$$

en fonction de  $N$  paramètres  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) rassemblés dans un vecteur

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N] .$$

C'est à cette étape que le traiteur des signaux fait une hypothèse, une modélisation du processus. La qualité des résultats obtenus par cette méthode dépend en grande partie de la pertinence du modèle choisi.

2. à effectuer une mesure (ou observation) de  $X$

$$X = x_{obs} = [x_{1,obs}, x_{2,obs}, \dots, x_{M,obs}]^T .$$

La fonction  $P_X(x_{obs}, \alpha)$  des  $N$  variables  $\alpha_i$  obtenue en remplaçant  $x$  par  $x_{obs}$  dans  $P_X(x, \alpha)$  est alors appelée **fonction de vraisemblance** des paramètres  $\alpha_i$ . Nous avons alors :

$$\text{Prob}[X = x_{obs} \pm \frac{\Delta_x}{2}, \alpha] \approx p_X(x_{obs}, \alpha) \Delta_x \quad \text{avec } \Delta_x \text{ "petit",}$$

qui exprime la probabilité pour que le vecteur aléatoire  $X$  appartienne au domaine  $x_{obs} \pm \frac{\Delta x}{2}$ . Puisque le cas  $X = x_{obs}$  s'est produit, on suppose qu'il était assez probable. De ce fait, il est assez intuitif de choisir pour les paramètres  $\alpha_i$ , ceux qui maximisent la probabilité  $\text{Prob}[X = x_{obs} \pm \frac{\Delta x}{2}, \alpha]$ . Ainsi, la méthode du maximum de vraisemblance consiste à **maximiser la fonction de vraisemblance**. Nous avons alors

$$\hat{\alpha} = \text{valeur de } \alpha \text{ qui maximise } p_X(x_{obs}, \alpha)$$

Nous sommes alors amenés à résoudre le système de  $N$  équations à  $N$  inconnues

$$\frac{\partial p_X(x_{obs}, \alpha)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

En vertu du théorème de la limite centrale, la DdP conjointe  $p_X(x, \alpha)$  est très souvent choisie gaussienne. Dans ce cas, il est plus commode de chercher le maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance.

### 5.3.2 Estimation conjointe de la moyenne et de la variance d'une variable aléatoire

Soit  $X(k, \xi)$  un processus aléatoire blanc, gaussien et stationnaire dont on mesure  $M$  échantillons  $X(k_i, \xi)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ). Ces  $M$  mesures sont regroupées dans le vecteur aléatoire

$$X = [X(k_1, \xi), X(k_2, \xi), \dots, X(k_M, \xi)]^T = [x_{1,obs}, x_{2,obs}, \dots, x_{M,obs}]^T.$$

1. Ecrivez la DdP conjointe du vecteur aléatoire  $X$  dépendant de la moyenne  $\mu_X$  et de la variance du processus  $\sigma_X^2$ .
2. Ecrivez la fonction de vraisemblance des paramètres  $\mu_X$  et  $\sigma_X^2$ .
3. Ecrivez un programme MATLAB qui permet de
  - (a) créer une observation  $x_{obs}$  d'un processus aléatoire blanc, gaussien et stationnaire de moyenne  $\mu_X$  et de variance  $\sigma_X^2$ .
  - (b) représenter en 3D le logarithme de la fonction de vraisemblance en fonction de différentes valeurs de  $\mu_X$  et  $\sigma_X^2$ . Utiliser pour cela les fonctions `meshgrid()` et `meshc()` de MATLAB.
  - (c) trouver graphiquement la valeur du couple  $[\mu_X, \sigma_X^2]$  qui maximise la fonction de vraisemblance. Utiliser pour cela la fonction `contour()` de MATLAB.
4. Exprimez analytiquement la moyenne  $\hat{\mu}_X$  et la variance  $\hat{\sigma}_X^2$  estimées par la méthode du maximum de vraisemblance.

### 5.3.3 Estimation de la vitesse d'un mobile en déplacement uniforme

On considère un mobile se déplaçant à la vitesse constante  $V$  que l'on souhaite estimer à partir d'une observation bruitée de  $M$  échantillons de la position  $X(k, \xi)$ . Nous avons alors :

$$X(k, \xi) = kVT_e + B(k, \xi),$$

où  $B(k, \xi)$  représente un bruit gaussien, centré, blanc et de variance  $\sigma_B^2$ .

1. Exprimez la distribution de probabilité conjointe du vecteur aléatoire des observations

$$X = [X(1, \xi), X(2, \xi), \dots, X(M, \xi)]^T.$$

2. Déduisez de ces résultats l'estimateur du maximum du vraisemblance de  $V$ . Calculez son biais et sa variance.
3. Comparez les résultats obtenus à ceux donnés par un estimateur plus intuitif, qui consiste à faire la moyenne en chaque point :

$$\hat{V}(\xi) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{X(k, \xi)}{kT_e}.$$

4. Ecrivez un programme MATLAB qui illustre ce problème.

On donne

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$