

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Transformation en <math>z</math></b>	<b>1</b>
1.1	Introduction naïve par l'exemple	1
1.1.1	Transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal causal légèrement amorti	1
1.1.2	Transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal non causal légèrement amorti	3
1.1.3	Récapitulation	4
1.2	Définition de la transformée en $z$	5
1.2.1	Transformée en $z$ bilatérale	5
1.2.2	Transformée en $z$ unilatérale	5
1.3	Pôles et zéros d'une transformée en $z$	5
1.3.1	Pôles d'une transformée en $z$	5
1.3.2	Zéros d'une transformée en $z$	6
1.3.3	Représentation graphique des pôles et des zéros d'une transformée en $z$	6
1.4	Région De Convergence de la transformation en $z$	6
1.4.1	Rappels sur le critère de Cauchy de convergence d'une série	6
1.4.2	Rayons de convergence d'une transformée en $z$	7
1.5	Obtention de la transformée de Fourier à partir de la transformation en $z$	8
1.6	Propriétés de la région de convergence d'une transformée en $z$	8
1.7	Transformées en $z$ usuelles	9
1.8	Propriétés de la transformée en $z$	11
1.8.1	Linéarité	11
1.8.2	Transformée en $z$ d'un signal décalé dans le temps	11
1.8.3	Transformée en $z$ d'un signal modulé par un signal exponentiel	11
1.8.4	Dérivation d'une transformée en $z$	12
1.8.5	Transformée en $z$ d'un signal conjugué	13
1.8.6	Transformée en $z$ d'un signal inversé dans le temps	13
1.8.7	Transformée en $z$ d'un produit de convolution	13
1.8.8	Transformée en $z$ de l'intercorrélation de deux signaux à énergie finie	14
1.8.9	Théorème de la valeur initiale	15
1.9	Étude des SLIT avec la transformée en $z$	15
1.9.1	Cas d'un SLIT caractérisé par sa réponse impulsionnelle	15
1.9.2	Cas d'un SLIT caractérisé par une équation aux différences	15
1.9.3	Stabilité et causalité des SLIT	17
1.9.4	Réponse impulsionnelle d'un filtre caractérisé par une équation aux différences : Exemple	17
1.10	Principaux outils MATLAB pour l'étude des filtres causaux	19
1.10.1	Introduction	19
1.10.2	Calcul des pôles et des zéros - Fonction <code>roots()</code>	21
1.10.3	Lieu des pôles et des zéros - Fonction <code>zplane()</code>	22
1.10.4	Réponse en fréquence - Fonction <code>freqz()</code>	23
1.10.5	Réponse impulsionnelle - Fonction <code>impz()</code>	24
1.10.6	Filtrage causal - Fonction <code>filter()</code>	26
1.10.7	Filtrage non causal - Fonction <code>filtfilt()</code>	28
1.11	Inversion de la transformation en $z$	30
1.11.1	Inversion par intégration directe dans le plan complexe	30
1.11.2	Inversion par consultation d'une table	31
1.11.3	Inversion par division de polynômes	31

1.11.4 Inversion par développement en fractions partielles . . . . .	32
--	----

# Chapitre 1

## Transformation en z

### 1.1 Introduction naïve par l'exemple

#### 1.1.1 Transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal causal légèrement amorti

Soit  $x(k)$  un signal numérique causal défini par

$$x(k) = \epsilon(k) \sin(2\pi f_0 k)$$

où  $f_0$  désigne une fréquence réduite quelconque avec  $|f_0| < 1/2$ .

Ce signal qui est à puissance moyenne finie n'admet pas de transformée de FOURIER au sens classique des fonctions puisque son énergie est infinie :

$$W_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=-K}^K |x(k)|^2 = \infty \implies \text{La TF de ce signal n'existe pas.}$$

Pour pouvoir étudier ce signal, nous sommes obligés d'utiliser la théorie des distributions qui est souvent délicate et lourde à mettre en œuvre. Pour éviter ce genre de problèmes, nous pouvons utiliser une autre méthode qui consiste à transformer ce signal à puissance moyenne finie en un signal à énergie finie que nous pouvons alors étudier avec les outils classiques du traitement du signal présentés aux chapitres précédents. Ce résultat peut être obtenu de différentes façons. Citons par exemple la multiplication du signal  $x(k)$

- par une fenêtre rectangulaire de  $N$  points  $rect_N(k)$ . Cette méthode modifie de façon importante le spectre du signal  $x(k)$  car une fonction rectangulaire possède une discontinuité en  $k = N$  qui a pour effet "d'étaler" le spectre de  $x(k)rect_N(k)$ .
- par une fenêtre sans discontinuité comme par exemple les fenêtres de HANING, BLACKMAN, etc. Nous ne retiendrons pas cette méthode car le calcul de la transformée de FOURIER du signal fenêtré est parfois très complexe.
- par une fenêtre exponentielle "décroissante"  $g(k)$  du type

$$g(k) = r^{-k}$$

ou  $r$  désigne une constante réelle ou complexe. Cette méthode simplifie considérablement les calculs des transformées de FOURIER du signal "atténué"  $x_{at}(k)$

$$x_{at}(k) = x(k)r^{-k}, \quad (1.1)$$

comme nous le montrons ci-après.

La FIGURE 1.1 montre une portion du signal  $x(k)$  ainsi que deux exemples de signaux atténués pour des valeurs de  $r$  distinctes. Il apparaît clairement que seules les valeurs de  $r$  supérieures à 1 permettent de rendre le signal  $x_{at}(k)$  à énergie finie.

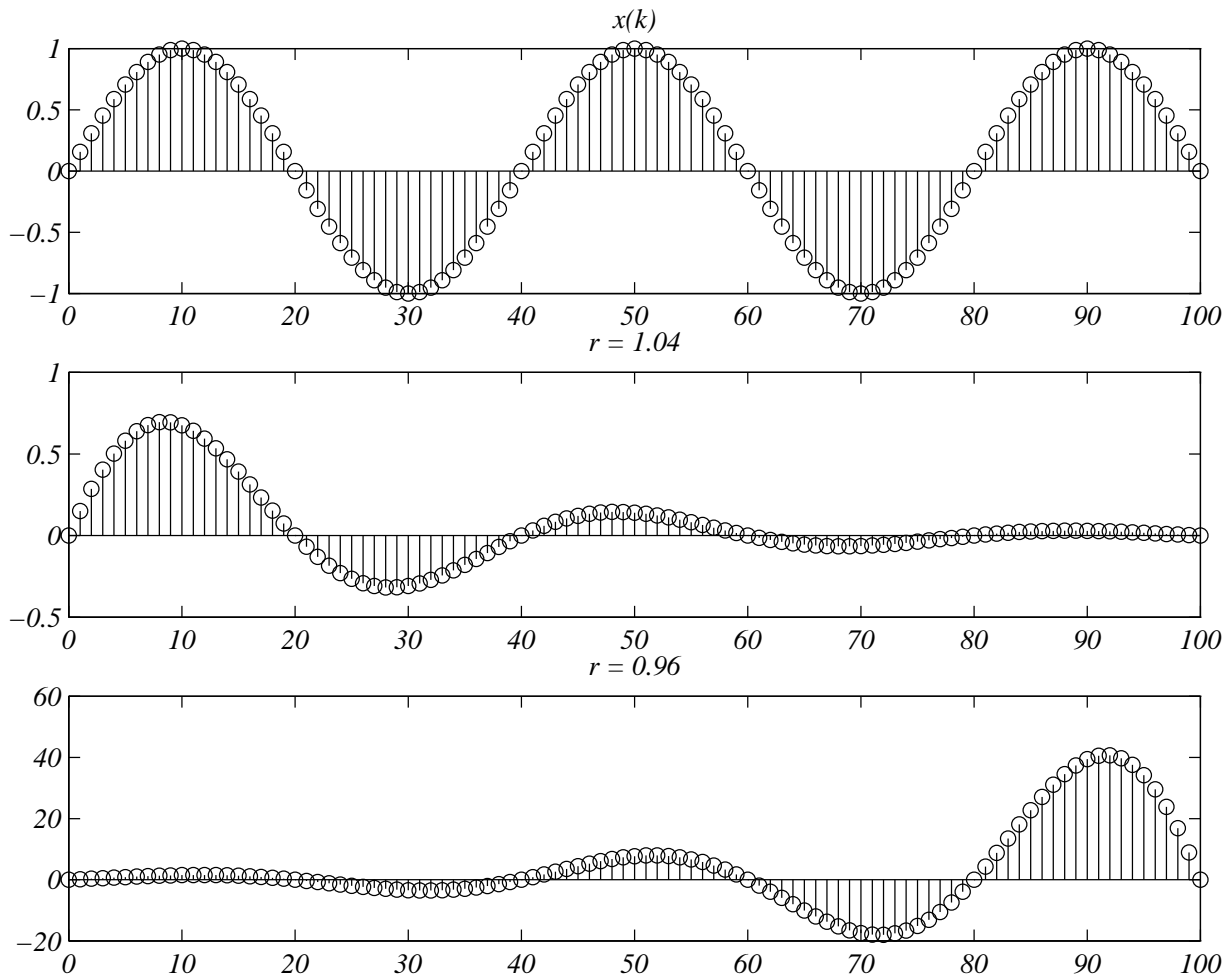


FIG. 1.1 – **Exemples de signaux**  $x_{at}(k) = x(k)r^{-k} = \epsilon(k) \sin(2\pi f_0 k)r^{-k}$  **pour deux valeurs distinctes de  $r$**  ( $r = 1.04$  et  $r = 0.96$ )

Pour ces valeurs particulières de  $r$  on peut alors calculer la transformée de FOURIER de  $x_{at}(k)$ . Il vient

$$\left. \begin{aligned} X_{at}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)r^{-k}e^{-j2\pi f k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon(k) \sin(2\pi f_0 k)r^{-k}e^{-j2\pi f k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2\pi f_0 k)r^{-k}e^{-j2\pi f k} \end{aligned} \right\} \text{ avec } |r| > 1$$

Dans cette formule nous remarquons que

1. Si  $k \rightarrow \infty$  alors le terme  $r^{-k}$  tend vers 0 car nous avons choisi  $r > 1$ . Pour les temps positifs il y a donc bien **atténuation** du signal  $x(k) = \epsilon(k) \sin(2\pi f_0 k)$ , ce qui est l'objectif recherché.
2. Si  $k \rightarrow -\infty$  alors le module de  $r^{-k}$  tend vers  $\infty$  puisque  $|r| > 1$ . Pour les temps négatifs il y a **amplification** des amplitudes de  $x(k)$ , ce qui ne permet pas de rendre le signal  $x_{at}(k) = r^{-k}x(k)$  à énergie finie. Pour éviter ce problème, nous devons obligatoirement considérer que le signal  $x(k) = 0$  pour  $k < K_0$ , où  $K_0$  désigne un temps arbitraire quelconque. En d'autres termes,  $x(k)$  ne doit avoir une amplitude différente de zéro qu'à partir d'un certain temps  $k = K_0$ . Le cas particulier que nous traitons dans cet exemple satisfait à cette condition puisque le signal  $x(k)$  considéré est causal.

Dans les équations précédentes, nous posons

$$z = re^{j2\pi f}, \quad (1.2)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} X_{at}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [re^{j2\pi f}]^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z = re^{j2\pi f} \\ |z| > 1 \\ x(k) = \text{signal causal} \end{cases}$$

Cette équation met en évidence une fonction de la variable complexe  $z$  que nous notons  $X(z)$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad \text{avec } |z| > 1. \quad (1.3)$$

Cette fonction est une somme infinie à laquelle on associe obligatoirement une condition d'existence. L'ensemble des valeurs complexes de la variable  $z$  assurant la convergence de cette série infinie est appelé **Région de Convergence (RDC)** (ou Region of Convergence (ROC) en anglais).

La fonction  $X(z)$  est appelée **Transformée en  $z$  (TZ)** du signal  $x(k)$ . Elle représente la transformée de **Fourier** du signal  $x(k)$  préalablement atténué par un facteur  $r^{-k}$ . Toutes les valeurs de  $r$  assurant que  $x_{at}(k)$  est à énergie finie sont admissibles.

Pour l'exemple traité, on montre simplement que

$$X(z) = \frac{\sin(2\pi f_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi f_0) z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{avec } |z| > 1. \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal non causal légèrement amorti

Nous supposons maintenant que le signal étudié est un signal sinusoïdal non causal défini par

$$x(k) = -\epsilon(-k) \sin(2\pi f_0 k)$$

où  $f_0$  désigne une fréquence réduite quelconque avec  $|f_0| < 1/2$ .

Ce signal est bien sûr un signal à énergie infinie qui n'admet pas de transformée de FOURIER au sens classique des fonctions. En reprenant toute la démarche méthodologique présentée au paragraphe précédent, on peut obtenir à partir de  $x(k)$  un deuxième signal  $x_{at}(k)$  par fenêtrage exponentiel :

$$x_{at}(k) = x(k) r^{-k}.$$

Cependant, pour l'exemple que nous étudions dans ce paragraphe, il est nécessaire de poser les deux conditions

1.  $|r| < 1$  pour avoir  $\lim_{k \rightarrow -\infty} r^{-k} = 0$  et assurer ainsi que  $x_{at}(k)$  est à énergie finie (donc que  $X_{at}(f)$  existe),
2.  $x(k) = 0 \forall k > K_0$  pour éviter l'effet d'amplification des valeurs de  $x(k)$  par le terme  $r^{-k}$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Cette condition est bien sûr vérifiée dans le cas présent puisque le signal considéré est non causal.

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} X_{at}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) r^{-k} e^{-j2\pi f k} \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon(-k) \sin(2\pi f_0 k) r^{-k} e^{-j2\pi f k} \\ &= - \sum_{k=-\infty}^0 \sin(2\pi f_0 k) r^{-k} e^{-j2\pi f k} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=-\infty}^{\infty}} \right\} \text{avec } |r| < 1$$

En posant

$$z = re^{j2\pi f}, \quad (1.5)$$

dans ces équations, on obtient

$$\begin{aligned}
 X_{at}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [re^{j2\pi f}]^{-k} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}
 \end{aligned}
 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z = re^{j2\pi f} \\ |z| < 1 \\ x(k) = \text{signal non causal} \end{cases}$$

qui met en évidence la fonction de la variable complexe  $X(z)$  associée à sa région de convergence

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad \text{avec } |z| < 1. \quad (1.6)$$

Pour l'exemple du signal  $x(k) = -\epsilon(-k) \sin(2\pi f_0 k)$ , il est très simple de montrer que la  $X(z)$  est donné par

$$X(z) = \frac{\sin(2\pi f_0)z}{1 - 2\cos(2\pi f_0)z + z^2} = \frac{\sin(2\pi f_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi f_0)z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{avec } |z| < 1. \quad (1.7)$$

### 1.1.3 Récapitulation

A l'issue de cette étude, il apparaît que les transformées de FOURIER des signaux atténués dépendent de la même fonction de  $z$  (1.4) ou (1.7), que le signal  $x(k)$  soit causal ou non. **C'est seulement la région de convergence ces deux séries qui peut permettre de lever l'indétermination.** La FIGURE 1.2 indique les régions de convergence des transformées en  $z$  des deux signaux que nous venons d'étudier.

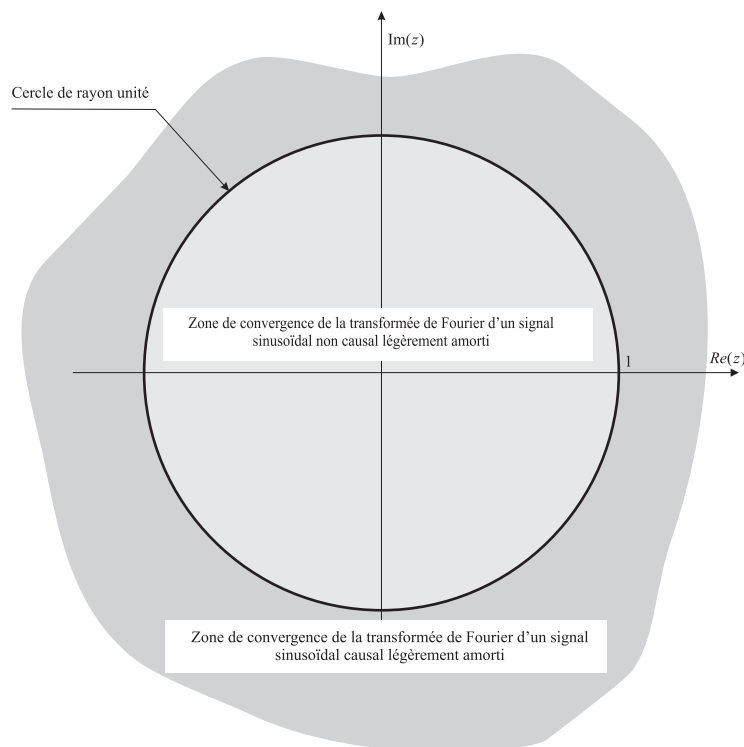


FIG. 1.2 – **Régions de convergence des transformées en  $z$  des signaux  $x(k) = \epsilon(k) \sin(2\pi f_0 k)$  et  $x(k) = -\epsilon(-k) \sin(2\pi f_0 k)$**

## 1.2 Définition de la transformée en $z$

### 1.2.1 Transformée en $z$ bilatérale

Soit  $x(k)$  un signal numérique à temps discret réel ou complexe. La transformée en  $z$  de  $x(k)$  est définie par la fonction  $X(z)$  de la variable complexe  $z$  donnée par

**Définition de la transformée en  $z$  bilatérale du signal  $x(k)$**

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (1.8)$$

**On associe toujours une région de convergence à  $X(z)$**

Dans ce document, nous noterons la correspondance entre  $x(k)$  et  $X(z)$  de la façon suivante :

$$x(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] . \quad (1.9)$$

### 1.2.2 Transformée en $z$ unilatérale

En pratique, on s'intéresse le plus souvent à l'étude des signaux et des systèmes à partir d'un certain temps  $k_0$ , que l'on appelle aussi temps initial, et qui est le plus souvent choisi égal à zéro :  $k_0 = 0$ . Dans ce cas les signaux ou les systèmes étudiés sont causaux. Par ailleurs, pour déterminer complètement l'évolution temporelle des différents signaux étudiés pour  $k \geq k_0$ , il est nécessaire d'associer aux équations aux différences du problème toutes les conditions initiales du système étudié. La transformation en  $z$  bilatérale que nous venons de définir peut bien sûr être utilisée, mais on lui préfère la transformation en  $z$  monolatérale définie par :

**Définition de la transformée en  $z$  monolatérale du signal  $x(k)$**

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (1.10)$$

**On associe toujours une région de convergence à  $X(z)$**

## 1.3 Pôles et zéros d'une transformée en $z$

### 1.3.1 Pôles d'une transformée en $z$

Les valeurs  $p_i$  ( $i$  est un entier) de la variable complexe  $z$  pour lesquelles la transformée  $X(z)$  est infinie sont appelées **pôles** de  $X(z)$ .

$$p_i \text{ est un pôle de } X(z) \iff X(p_i) = \infty$$

Cette définition montre de façon évidente que les pôles d'une transformée en  $z$  n'appartiennent pas à la Région De Convergence de  $X(z)$ .

### 1.3.2 Zéros d'une transformée en $z$

Les valeurs  $z_i$  ( $i$  est un entier) de la variable complexe  $z$  pour lesquelles la transformée  $X(z)$  est nulle sont appelées **zéros** de  $X(z)$ .

$$z_i \text{ est un zéro de } X(z) \iff X(z_i) = 0$$

Les zéros n'appartiennent pas nécessairement à la Région De Convergence de  $X(z)$ .

### 1.3.3 Représentation graphique des pôles et des zéros d'une transformée en $z$

Comme nous le montrons dans les paragraphes suivants, la représentation graphique dans le plan complexe des pôles et des zéros d'une transformée en  $z$ , joue un rôle très important dans l'étude de la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps. La FIGURE 1.3 montre un exemple de cette représentation. Les pôles sont représentés habituellement par des croix  $\times$  et les zéros par de petits cercles  $\circ$ .

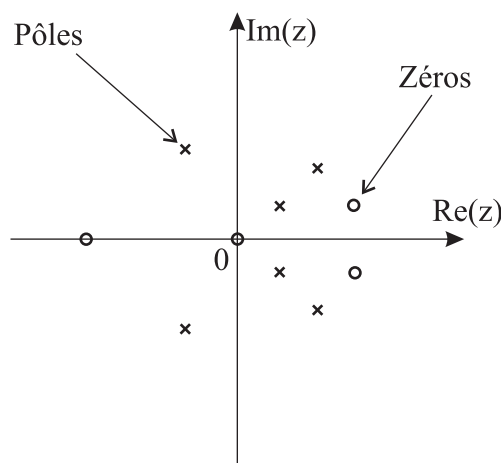


FIG. 1.3 – Exemple de carte des pôles et des zéros d'une transformation en  $z$

## 1.4 Région De Convergence de la transformation en $z$

### 1.4.1 Rappels sur le critère de Cauchy de convergence d'une série

Nous avons vu ci-dessus que deux signaux différents  $x(k)$  peuvent donner une transformée en  $z$  identique. Ce n'est que la Région De Convergence de la TZ qui permet, entre autres, de retrouver le signal  $x(k)$  à partir de  $X(z)$ . Dans ce paragraphe, nous rappelons le critère de convergence de CAUCHY qui permet de calculer la RDC d'une TZ.

Soit une série du type

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots,$$

où les  $u_k$  désignent des grandeurs réelles ou complexes. Le critère de CAUCHY permet d'affirmer que si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{1/k} < 1 \implies \text{La série converge.} \quad (1.11)$$

La détermination des RDC de  $X(z)$  se fait en utilisant ce critère, comme nous le montrons ci-dessous.



### 1.4.2 Rayons de convergence d'une transformée en $z$

La TZ de  $x(k)$  peut s'écrire en faisant apparaître les deux séries  $X_1(z)$  et  $X_2(z)$  définies ci-dessous.

$$X(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)z^{-k}}_{X_1(z)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}}_{X_2(z)}$$

#### Étude de la convergence de $X_1(z)$

En posant  $l = -k$  dans  $X_1(z)$  il vient :

$$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)z^{-k} = \sum_{l=1}^{\infty} x(-l)z^l.$$

Le critère de CAUCHY appliqué à cette série permet de trouver le rayon de convergence de  $X_1(z)$ . Nous avons :

$$X_1(z) \text{ converge si } \lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)z^l|^{1/l} = \lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l} |z| < 1.$$

En posant

$$R_x^+ = \frac{1}{\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l}}, \quad (1.12)$$

la condition de convergence de  $X_1(z)$  s'écrit :

$$|z| < R_x^+ = \frac{1}{\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l}} \implies X_1(z) \text{ converge.} \quad (1.13)$$

#### Étude de la convergence de $X_2(z)$

En appliquant le critère de CAUCHY à l'étude de la convergence de  $X_2(z)$  il vient :

$$X_2(z) \text{ converge si } \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)z^{-k}|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)|^{1/k} |z^{-1}| < 1.$$

En posant

$$R_x^- = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)|^{1/k}, \quad (1.14)$$

la condition de convergence de  $X_2(z)$  s'écrit :

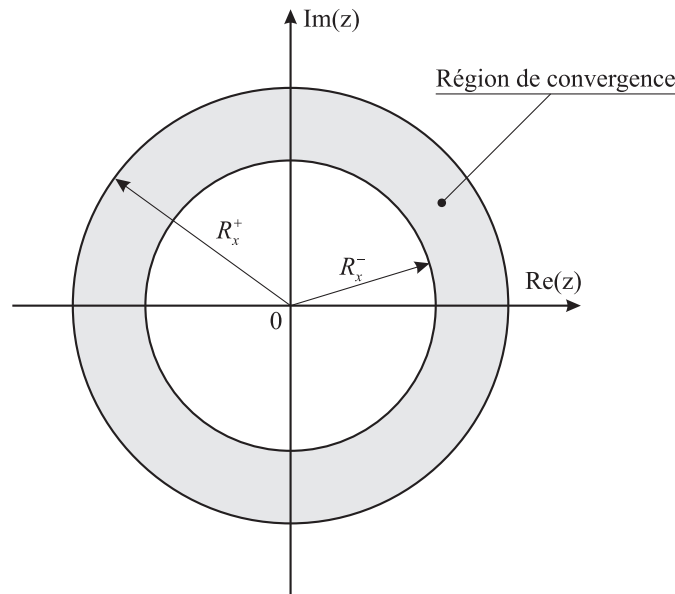
$$|z| > R_x^- = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)|^{1/k} \implies X_2(z) \text{ converge.} \quad (1.15)$$

#### Région de convergence de la transformée en $z$ bilatérale

En combinant les deux résultats obtenus pour  $X_1(z)$  et  $X_2(z)$  nous obtenons la région de convergence de la TZ bilatérale  $X(z)$  qui est en général un anneau du plan complexe défini par :

<b>Région de convergence de la transformée en <math>z</math> bilatérale</b>	(1.16)
$0 \leq R_x^- = \lim_{k \rightarrow \infty}  x(k) ^{1/k} <  z  < R_x^+ = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty}  x(-k) ^{1/k}} \leq \infty$	

La FIGURE 1.4 illustre ce résultat.

FIG. 1.4 – *Région de convergence de la transformée en  $z$  bilatérale*

## 1.5 Obtention de la transformée de Fourier à partir de la transformation en $z$

Soit  $x(k)$  un signal à temps discret vérifiant toutes les conditions pour que sa transformée de FOURIER existe. Celle-ci est donnée par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi f k}.$$

En comparant cette expression avec la TZ de  $x(k)$ , il apparaît clairement que la transformée de FOURIER peut être obtenue en posant  $z = e^{j2\pi f}$  dans  $X(z)$ . Cependant, cette substitution n'est possible que si toutes les valeurs de  $z = e^{j2\pi f}$  appartiennent à la RDC de  $X(z)$  quelles que soient les fréquences  $f$ . L'ensemble de ces valeurs de  $z$  définit le cercle de rayon unité. La relation entre transformée de FOURIER et transformée en  $z$  peut donc s'écrire :

**Relation entre transformée de FOURIER et transformée en  $z$**

$$X(f) = X(z)|_{z=e^{j2\pi f}} \quad (1.17)$$

**Si la région de convergence de  $X(z)$  contient le cercle de rayon unité**

## 1.6 Propriétés de la région de convergence d'une transformée en $z$

Nous résumons ci-dessous certaines propriétés importantes de la RDC qui découlent directement des résultats que nous avons obtenus au paragraphe précédent en utilisant le critère de CAUCHY.

1. La RDC est un anneau dans le plan des  $z$  centré sur l'origine  $z = 0$  et défini par

$$0 \leq R_x^- < |z| < R_x^+ \leq \infty.$$

2. La transformée de FOURIER d'un signal à temps discret  $x(k)$  existe si la RDC de la transformée en  $z$   $X(z)$  contient le cercle unité.

3. La région de convergence ne contient aucun pôle de  $X(z)$ .
4. Si le signal  $x(k)$  est un signal à **durée finie**, c'est à dire  $x(k) = 0$  en dehors d'un intervalle  $[K_1, K_2]$  alors la TZ donnée par (1.8) est toujours convergente quelles que soient les valeurs de  $z$ , sauf peut-être en  $z = 0$  ou  $z = \infty$ . De ce fait, la RDC de  $X(z)$  contient le cercle de rayon unité, ce qui permet d'affirmer que la transformée de FOURIER d'une séquence  $x(k)$  de durée finie existe toujours.
5. Si  $x(k)$  est une **séquence à droite**, c'est à dire une séquence nulle pour  $k < K_2 < \infty$ , alors la région de convergence s'étend à l'extérieur du cercle ayant un rayon égal au plus grand module de tous les pôles de  $X(z)$  jusqu'à  $+\infty$  (cf. FIGURE 1.5). L'infini peut éventuellement appartenir à cette RDC. Une séquence causale est un cas particulier de séquence à droite.
6. Des propriétés 2, 3 et 5, nous déduisons qu'une séquence causale admet une transformée de FOURIER si tous les pôles de sa TZ sont à **l'intérieur du cercle de rayon unité**.
7. Si  $x(k)$  est une **séquence à gauche**, c'est à dire une séquence nulle pour  $-\infty < K_1 < k$ , alors la région de convergence se situe à l'intérieur du cercle ayant un rayon égal au plus petit des modules des pôles de  $X(z)$  (cf. FIGURE 1.5). Cette RDC peut éventuellement contenir l'origine  $z = 0$ .
8. Des propriétés 2, 3 et 7, nous déduisons qu'une séquence non causale admet une transformée de FOURIER si tous les pôles de sa TZ sont à **l'extérieur du cercle de rayon unité**.

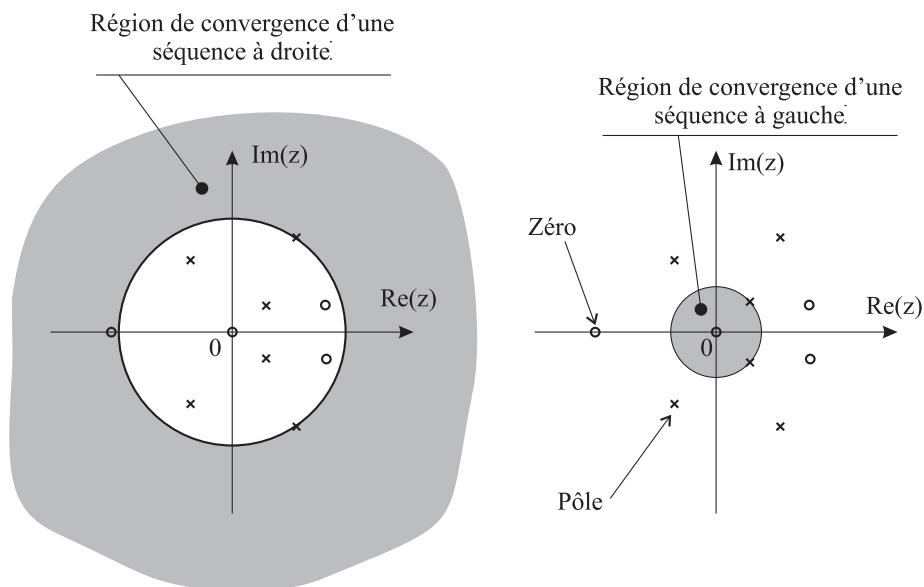


FIG. 1.5 – Régions de convergence de la transformée en  $z$  d'une séquence à droite et d'une séquence à gauche

## 1.7 Transformées en $z$ usuelles

Le TABLEAU 1.1 présente quelques paires de transformées usuelles qui jouent un rôle important en traitement du signal.

Signal $x(k)$	Transformée $X(z)$	RDC
$d(k)$	1	Tout le plan des $z$
$\epsilon(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-\epsilon(-k - 1)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
$d(k - k_0)$	$z^{-k_0}$	Tout le plan des $z$ sauf 0 si $k_0 > 0$ ou $\infty$ si $k_0 < 0$
$\epsilon(k)a^k$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-\epsilon(-k - 1)a^k$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$\epsilon(k)ka^k$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-\epsilon(-k - 1)ka^k$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\epsilon(k)\cos(2\pi f_0 k)$	$\frac{1 - \cos(2\pi f_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi f_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\epsilon(k)\sin(2\pi f_0 k)$	$\frac{\sin(2\pi f_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi f_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\epsilon(k)a^k\cos(2\pi f_0 k)$	$\frac{1 - a\cos(2\pi f_0)z^{-1}}{1 - 2a\cos(2\pi f_0)z^{-1} + a^2z^{-2}}$	$ z  >  a $
$\epsilon(k)a^k\sin(2\pi f_0 k)$	$\frac{a\sin(2\pi f_0)z^{-1}}{1 - 2a\cos(2\pi f_0)z^{-1} + a^2z^{-2}}$	$ z  >  a $
$\begin{cases} a^k & \text{pour } k \in [0, N - 1] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z  > 0$

TAB. 1.1 – Quelques transformées en  $z$  usuelles

## 1.8 Propriétés de la transformée en $z$

Dans ce paragraphe, nous énumérons un certain nombre de propriétés importantes de la transformée en  $z$ . Pour cela, nous considérons deux signaux  $x_1(k)$  et  $x_2(k)$  ainsi leurs TZ et RDC associées :

$$\begin{aligned} x_1(k) &\stackrel{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} X_1(z) \quad \text{RDC} = R_{x_1} \iff R_{x_1}^- < |z| < R_{x_1}^+ \\ x_2(k) &\stackrel{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} X_2(z) \quad \text{RDC} = R_{x_2} \iff R_{x_2}^- < |z| < R_{x_2}^+ \end{aligned}$$

### 1.8.1 Linéarité

La transformée en  $z$  de la combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en  $z$  des deux signaux

Domaine temporel	Transformée en $z$	Région de convergence
$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contient au moins $R_{x_1} \cap R_{x_2}$

(1.18)

### 1.8.2 Transformée en $z$ d'un signal décalé dans le temps

Soit le signal

$$x_2(k) = x_1(k - k_0) ,$$

où  $k_0$  désigne un entier positif ou négatif. La TZ de  $x_2(k)$  est donnée par

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k - k_0) z^{-k} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) z^{-(l+k_0)} \\ &= z^{-k_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) z^{-l} \\ &= z^{-k_0} X_1(z) \end{aligned}$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons effectué le changement de variable  $l = k - k_0$ . Par ailleurs, la RDC de  $X_2(z)$  est la même que celle de  $X_1(z)$  sauf peut-être en  $z = 0$  ou en  $z = \infty$  car, en ces valeurs de  $z$  et selon le signe de  $k_0$ , le nombre de pôles de  $X_1(z)$  est modifié par le terme  $z^{-k_0}$ . Nous pouvons donc écrire :

Domaine temporel	Transformée en $z$	Région de convergence
$x_2(k) = x_1(k - k_0)$	$X_2(z) = z^{-k_0} X_1(z)$	$R_{x_1}$ sauf peut-être en $z = 0$ ou en $z = \infty$

(1.19)

### 1.8.3 Transformée en $z$ d'un signal modulé par un signal exponentiel

Soit le signal

$$x_2(k) = z_0^k x_1(k) ,$$

où  $z_0$  désigne une variable complexe quelconque. La TZ de  $x_2(k)$  est donnée par

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_0^k x_1(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left( \frac{z}{z_0} \right)^{-k} \\ &= X_1 \left( \frac{z}{z_0} \right) \end{aligned}$$

La RDC de cette dernière expression est donnée par :

$$R_{x_1}^- < \left| \frac{z}{z_0} \right| < R_{x_1}^+ \iff |z_0| R_{x_1}^- < |z| < |z_0| R_{x_1}^+ .$$

Nous pouvons donc écrire :

Domaine temporel	Transformée en $z$	Région de convergence
$x_2(k) = z_0^k x_1(k)$	$X_2(z) = X_1 \left( \frac{z}{z_0} \right)$	$ z_0  R_{x_1}^- <  z  <  z_0  R_{x_1}^+$

(1.20)

#### 1.8.4 Dérivation d'une transformée en $z$

Soit la TZ de  $x_1(k)$  donnée par

$$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k} .$$

Nous calculons l'expression

$$\begin{aligned} X_2(z) &= -z \frac{dX_1(z)}{dz} \\ &= -z \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k) x_1(k) z^{-k-1} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x_1(k) z^{-k} \\ &= \mathcal{Z}[k x_1(k)] \end{aligned}$$

La RDC de cette dernière expression est donnée par

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |k x_1(k)|^{1/k} < |z| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |-k x_1(-k)|^{1/k}} ,$$

qui se simplifie de la façon suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(k)|^{1/k} < |z| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(-k)|^{1/k}} , \iff R_{x_1}^- < |z| < R_{x_1}^+ .$$

Nous pouvons donc écrire :

Domaine temporel	Transformée en $z$	Région de convergence
$x_2(k) = k x_1(k)$	$X_2(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz}$	$R_{x_1}$ sauf peut-être en $z = 0$ ou en $z = \infty$

(1.21)

### 1.8.5 Transformée en z d'un signal conjugué

Soit le signal complexe donné par

$$x_2(k) = x_1^*(k) .$$

Il est très simple de démontrer que :

Domaine temporel	Transformée en z	Région de convergence
$x_2(k) = x_1^*(k)$	$X_2(z) = X_1^*(z^*)$	$R_{x_1}$

(1.22)

### 1.8.6 Transformée en z d'un signal inversé dans le temps

Soit le signal

$$x_2(k) = x_1(-k) .$$

Sa TZ peut être calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 X_2(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(-k) z^{-k} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) z^l \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) \left(\frac{1}{z}\right)^{-l} \\
 &= X_1\left(\frac{1}{z}\right)
 \end{aligned}$$

La RDC de cette dernière expression est donnée par

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(k)|^{1/k} < \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(-k)|^{1/k}} ,$$

qui se simplifie de la façon suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(-k)|^{1/k} < |z| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(k)|^{1/k}} , \iff \frac{1}{R_{x_1}^+} < |z| < \frac{1}{R_{x_1}^-} .$$

Nous pouvons donc écrire :

Domaine temporel	Transformée en z	Région de convergence
$x_2(k) = x_1(-k)$	$X_2(z) = X_1\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_{x_1}^+} <  z  < \frac{1}{R_{x_1}^-}$

(1.23)

### 1.8.7 Transformée en z d'un produit de convolution

Soit le signal  $y(k)$ , résultat du produit de convolution des signaux  $x_1(k)$  et  $x_2(k)$

$$y(k) = x_1(k) * x_2(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) x_2(k-l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_2(l) x_1(k-l) .$$

La transformée en  $z$  de  $y(k)$  est donnée par

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)x_2(k-l)z^{-k}.$$

En intervertissant les signes somme de cette équation et en posant  $m = k - l$ , il vient

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k-l)z^{-k} \right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l) \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)z^{-(m+l)} \right] \\ &= \underbrace{\left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)z^{-l} \right]}_{X_1(z)} \underbrace{\left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)z^{-m} \right]}_{X_2(z)} \end{aligned}$$

La RDC de  $Y(z)$  est l'intersection des deux RDC  $R_{x_1}$  et  $R_{x_2}$ . En résumé, la transformée en  $z$  du produit de convolution des signaux  $x_1(k)$  et  $x_2(k)$  est le produit simple des transformées en  $z$   $X_1(z)$  et  $X_2(z)$ .

Domaine temporel	Transformée en $z$	Région de convergence
$y(k) = x_1(k) * x_2(k)$	$Y(z) = X_1(z)X_2(z)$	$R_{x_1} \cap R_{x_2}$

(1.24)

### 1.8.8 Transformée en $z$ de l'intercorrélation de deux signaux à énergie finie

Nous avons brièvement présenté la notion de corrélation temporelle de deux signaux à énergie finie au chapitre précédent. Nous la reprenons ici en la généralisant au cas des signaux complexes, et nous en déterminons la TZ.

Soit  $x_1(k)$  et  $x_2(k)$  deux signaux réels ou complexes à énergie finie. L'intercorrélation  $\overset{\circ}{\varphi}_{x_1x_2}(k)$  temporelle entre ces deux signaux est donnée par

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_{x_1x_2}(k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1^*(l)x_2(l+k) \\ &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} x_1^*(l'-k)x_2(l') \\ &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} x_1^*[-(k-l')]x_2(l') \\ &= x_1^*(-k) * x_2(k) \end{aligned} \tag{1.25}$$

En appliquant à cette expression les propriétés des TZ (1.22), (1.23) et (1.24), il est très simple de montrer que

Domaine temporel	Transformée en $z$	Région de convergence
$\overset{\circ}{\varphi}_{x_1x_2}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1^*(l)x_2(l+k)$	$\overset{\circ}{\Phi}_{x_1x_2}(z) = X_1^*\left(\frac{1}{z^*}\right)X_2(z)$	$\left[\frac{1}{R_{x_1}^+} <  z  < \frac{1}{R_{x_1}^-}\right] \cap R_{x_2}$

(1.26)



### 1.8.9 Théorème de la valeur initiale

Soit  $x_1(k)$  un signal causal. Sa TZ est alors donnée par

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = x_1(0) + x_1(1)z^{-1} + x_1(2)z^{-2} + \dots$$

En faisant tendre  $z$  vers  $+\infty$  la TZ  $X_1(z)$  se réduit à  $x_1(0)$  qui est la valeur initiale de  $x(k)$ . En résumé nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_1(z) = x_1(0) \quad (1.27)$$

## 1.9 Étude des SLIT avec la transformée en $z$

### 1.9.1 Cas d'un SLIT caractérisé par sa réponse impulsionnelle

Nous avons montré dans le chapitre présentant les propriétés des SLIT, qu'un Système Linéaire Invariant dans le Temps, excité par un signal  $x(k)$  et délivrant en sortie un signal  $y(k)$ , est complètement caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(k)$ . Nous avons

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(k-l) .$$

Par ailleurs, nous avons montré que la transformée en  $z$  de cette expression est donnée par

$$Y(z) = X(z)H(z) ,$$

avec une région de convergence de  $Y(z)$  égale à l'intersection des deux ROC de  $X(z)$  et de  $H(z)$  respectivement données par  $R_x$  et  $R_h$  :

$$R_y = R_x \cap R_h .$$

### 1.9.2 Cas d'un SLIT caractérisé par une équation aux différences

Considérons maintenant le cas où le système est caractérisé par une équation aux différences de la forme :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_n x(k-n) , \quad (1.28)$$

soit :

$$\sum_{l=0}^m a_l y(k-l) = \sum_{l=0}^n b_l x(k-l) .$$

En utilisant les différentes propriétés de la TZ présentées aux paragraphes précédents, nous pouvons calculer la transformée en  $z$  des deux membres de cette équation :

$$\sum_{l=0}^m a_l z^{-l} Y(z) = \sum_{l=0}^n b_l z^{-l} X(z) . \quad (1.29)$$

Il est important de remarquer que les seules conditions à remplir pour que ce calcul soit possible sont

1. Le système est Linéaire et Invariant dans le Temps,
2. Les régions de convergences de  $X(z)$  et  $Y(z)$  se recouvrent.

Plus précisément, soulignons que la stabilité et/ou la causalité du filtre ne sont pas nécessaires pour obtenir ce résultat.

De (1.29) nous déduisons l'expression de la **fonction de transfert** en  $z$  associée à l'équation aux différences (1.28) :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}} \\ &= \frac{\sum_{l=0}^n b_l z^{-l}}{\sum_{l=0}^m a_l z^{-l}} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Cette relation permet aussi d'écrire

$$Y(z) = X(z)H(z),$$

ce qui montre que  $H(z)$  est la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $h(k)$  du SLIT étudié.

#### Remarque importante

Cette expression fait apparaître le rapport de deux polynômes en  $z^{-1}$  car l'équation aux différences (1.29) est écrite en fonction des signaux  $x(k)$  et  $y(k)$  **retardés** dans le temps. Il est bien sûr possible d'exprimer (1.29) en fonction d'une combinaison linéaire des signaux  $x(k)$  et  $y(k)$  **avancés** dans le temps. Dans ce cas,  $H(z)$  s'exprime sous la forme du rapport de deux polynômes en  $z$  comme le montre la relation ci-dessous

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}} \\ &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-n} [b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n]}{z^{-m} [a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m]} \\ &= \frac{\sum_{l=0}^n b_{n-l} z^l}{z^{m-n} \sum_{l=0}^m a_{m-l} z^l} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Les deux expressions (1.30) et (1.31) sont identiques, mais on préfère en pratique utiliser la relation (1.30) qui permet de déterminer très simplement la réponse impulsionnelle du SLIT quand celui-ci est causal.

La fonction de transfert peut aussi s'exprimer en fonction des pôles  $p_k$  et des zéros  $z_k$  de  $H(z)$  :

$$H(z) = \left( \frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^n (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^m (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.32)$$

Soulignons pour terminer ce paragraphe que la méthode qui nous a permis de déterminer  $H(z)$  à partir de l'équation (1.30), ne fait d'hypothèse que sur les RDC de  $X(z)$  et  $Y(z)$  qui doivent se recouvrir totalement ou partiellement. De ce fait, la RDC de  $H(z)$  ne peut pas être déterminée. En utilisant les différentes propriétés des Transformées en  $z$  énumérées dans les paragraphes précédents, nous déduisons que:

**Plusieurs réponses impulsionnelles différentes  $h(k)$  peuvent donner une même transformée en  $z$**

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}} = \left( \frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^n (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^m (1 - p_k z^{-1})} .$$

**De ce fait, plusieurs SLIT ayant tous des réponses impulsionnelles différentes peuvent être caractérisés par une seule et même équation aux différences du type**

$$\sum_{l=0}^m a_l y(k-l) = \sum_{l=0}^n b_l x(k-l) .$$

**Le seul moyen pour déterminer une réponse impulsionnelle unique est d'apporter une information complémentaire comme par exemple la stabilité et/ou la causalité du filtre.**

### 1.9.3 Stabilité et causalité des SLIT

Nous avons vu précédemment que

1. les pôles d'une TZ jouent un rôle primordial pour la détermination de la RDC : la RDC ne contient pas de pôles
2. si le cercle unité appartient à la RDC, alors le filtre est stable,
3. si la RDC s'étend au-delà des pôles de plus grand module, alors la séquence est à droite,
4. si la RDC est à l'intérieur du cercle de rayon égal au plus petit module des pôles, alors la séquence est à gauche.

Ces différentes possibilités permettent de trouver toutes les réponses impulsionnelles d'un SLIT caractérisé par une équation aux différences du type (1.30). Pour le cas particulier très important des filtres causaux, nous avons :

**Un filtre causal est un SLIT dont la réponse impulsionnelle est une séquence à droite. La RDC de sa fonction de transfert s'étend au-delà des pôles de plus grand module.**

**Un filtre causal et stable est un SLIT dont la fonction de transfert en  $z$  a une RDC qui contient le cercle unité et qui s'étend au-delà des pôles de plus grand module.**

### 1.9.4 Réponse impulsionnelle d'un filtre caractérisé par une équation aux différences : Exemple

Dans cet exemple nous donnons la méthodologie employée pour trouver les différentes réponses impulsionnelles de SLIT caractérisés par une équation aux différences. La méthode présentée peut être étendue à n'importe quel problème sans grande difficulté. Considérons l'équation aux différences suivante :

$$y(k) - \frac{5}{2}y(k-1) + y(k-2) = 2x(k) - \frac{5}{2}x(k-1) .$$

En reprenant la démarche méthodologique présentée précédemment nous obtenons la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z(2z - \frac{5}{2})}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}.$$

Cette fonction de transfert en  $z$  possède

- deux pôles :  $p_1 = \frac{1}{2}$  et  $p_2 = 2$ ,
- deux zéros :  $z_1 = 0$  et  $z_2 = \frac{5}{4}$ .

De ce fait, trois Régions De Convergence peuvent être associées à  $H(z)$  :

- **RDC 1** =  $\{z \mid |z| > 2\}$
- **RDC 2** =  $\{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 2\}$
- **RDC 3** =  $\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$

Ces différentes RDC ainsi que les pôles et les zéros de  $H(z)$  sont présentés sur la FIGURE 1.6. Pour trouver les réponses impulsionnelles associées à ces RDC, nous décomposons  $H(z)$  en deux fractions rationnelles simples  $H_a(z)$  et  $H_b(z)$  :

$$H(z) = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{H_a(z)} + \underbrace{\frac{1}{1 - 2z^{-1}}}_{H_b(z)}.$$

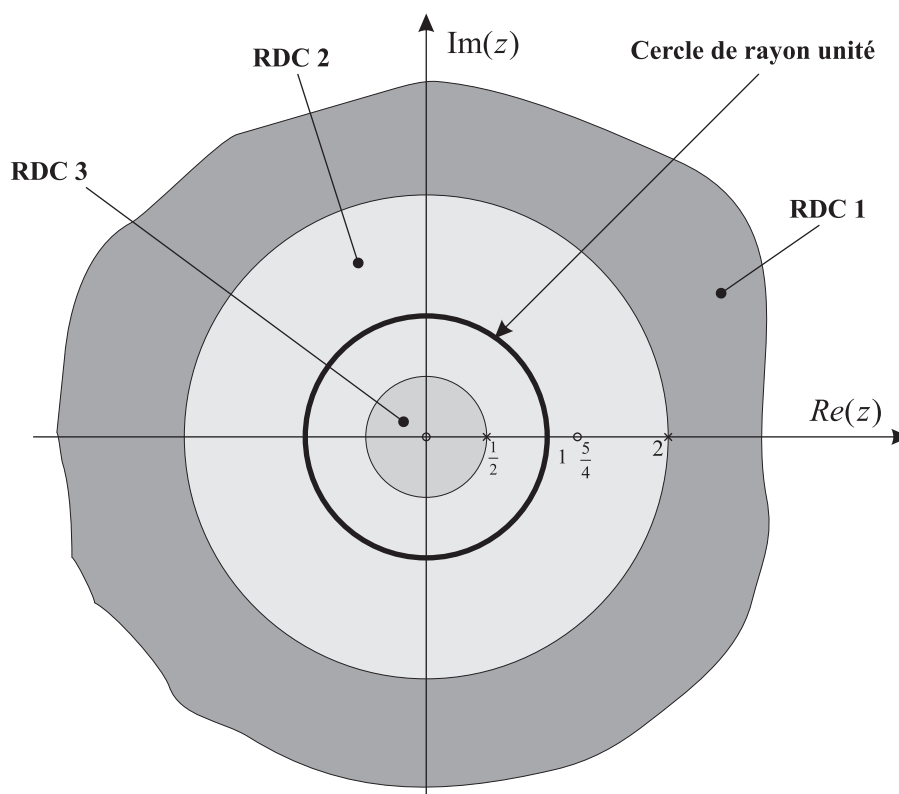


FIG. 1.6 – Pôles, zéros et différentes RDC de  $H(z)$

Nous avons montré précédemment que la RDC de la TZ de la somme de deux signaux contient au moins l'intersection des RDC des TZ de chacun des signaux. De ce fait, les différentes RDC de  $H(z)$  correspondent à l'intersection des RDC de  $H_a(z)$  et  $H_b(z)$ . Ces deux dernières fonctions de  $z$  possèdent chacune

- un seul pôle ( $p_a = p_1 = \frac{1}{2}$  pour  $H_a(z)$  et  $p_b = p_2 = 2$  pour  $H_b(z)$ ),
- deux régions de convergences possibles **RDC<sub>a</sub>** et **RDC<sub>b</sub>**:
  - **RDC<sub>a</sub>** =  $\{z \mid |z| < |p_a|\}$  ou **RDC<sub>a</sub>** =  $\{z \mid |z| > |p_a|\}$
  - **RDC<sub>b</sub>** =  $\{z \mid |z| < |p_b|\}$  ou **RDC<sub>b</sub>** =  $\{z \mid |z| > |p_b|\}$

L'intersection des différentes combinaisons de ces **RDC<sub>a</sub>** et **RDC<sub>b</sub>** donne les régions de convergences **RDC 1**, **RDC 2** et **RDC 3**. Le tableau ci-dessous résume ces différentes possibilités ainsi que les conséquences sur la réponse impulsionnelle du filtre.

	<b>RDC 1</b>	<b>RDC 2</b>	<b>RDC 3</b>
<b>RDC<sub>a</sub></b>	$\{z \mid  z  > 0.5\}$	$\{z \mid  z  > 0.5\}$	$\{z \mid  z  < 0.5\}$
<b>RDC<sub>b</sub></b>	$\{z \mid  z  > 2\}$	$\{z \mid  z  < 2\}$	$\{z \mid  z  < 2\}$
<b>Conséquences</b>	L'ensemble des propriétés de la transformée en $z$ nous permet de conclure : <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>h_a(k)</math> est une séquence à droite,</li> <li>– <math>h_b(k)</math> est une séquence à droite,</li> <li>– <math>h(k)</math> est une séquence à droite : le SLIT est causal</li> <li>– le SLIT n'est pas stable car le cercle de rayon unité n'appartient pas à <b>RDC 1</b>.</li> </ul>	L'ensemble des propriétés de la transformée en $z$ nous permet de conclure : <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>h_a(k)</math> est une séquence à droite,</li> <li>– <math>h_b(k)</math> est une séquence à gauche,</li> <li>– la séquence <math>h(k)</math> n'est ni à droite ni à gauche : Le SLIT n'est pas causal</li> <li>– le SLIT est stable car le cercle de rayon unité appartient à la région de convergence <b>RDC 2</b>.</li> </ul>	L'ensemble des propriétés de la transformée en $z$ nous permet de conclure : <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>h_a(k)</math> est une séquence à gauche,</li> <li>– <math>h_b(k)</math> est une séquence à gauche,</li> <li>– <math>h(k)</math> est une séquence à gauche : le SLIT n'est pas causal</li> <li>– le SLIT n'est pas stable car le cercle de rayon unité n'appartient pas à <b>RDC 3</b>.</li> </ul>
$h(k)$	$\epsilon(k)(0.5^k + 2^k)$	$\epsilon(k)0.5^k - \epsilon(-k - 1)2^k$	$-\epsilon(-k - 1)(0.5^k + 2^k)$

Les différentes réponses impulsionnelles associées aux régions de convergence **RDC 1**, **RDC 2** et **RDC 3** sont présentées sur la FIGURE 1.7.

## 1.10 Principaux outils MATLAB pour l'étude des filtres causaux

### 1.10.1 Introduction

Dans ce paragraphe nous présentons les différents outils proposés par MATLAB pour étudier un Système Linéaire et Invariant dans le Temps caractérisé par une équation aux différences du type (1.28). La fonction de transfert  $H(z)$  de ce filtre est alors donnée par

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}$$

Sauf cas particulier, MATLAB suppose que le SLIT est causal. De ce fait, la réponse impulsionnelle est une séquence à droite et la RDC de  $H(z)$  s'étend à l'extérieur du cercle ayant un rayon égal au plus grand module des pôles.

Pour les différentes fonctions MATLAB que nous présentons nous donnons un exemple d'utilisation pour le cas d'un filtre passe-bas BUTTERWORTH du 4<sup>ième</sup> ordre et de fréquence de coupure  $f_c = 0.1$ . Ce filtre est calculé par la fonction `butter()` qui renvoie les deux vecteurs **a** et **b** des coefficients de l'équation aux différences associées à ce filtre. Rappelons qu'un polynôme est toujours défini en MATLAB par le vecteur des coefficients de la variable **rangés selon les puissances décroissantes de la variable**.

$$\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n]$$

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m]$$

La syntaxe de la fonction `butter()` est rappelée ci-dessous.

```
z help butter
```

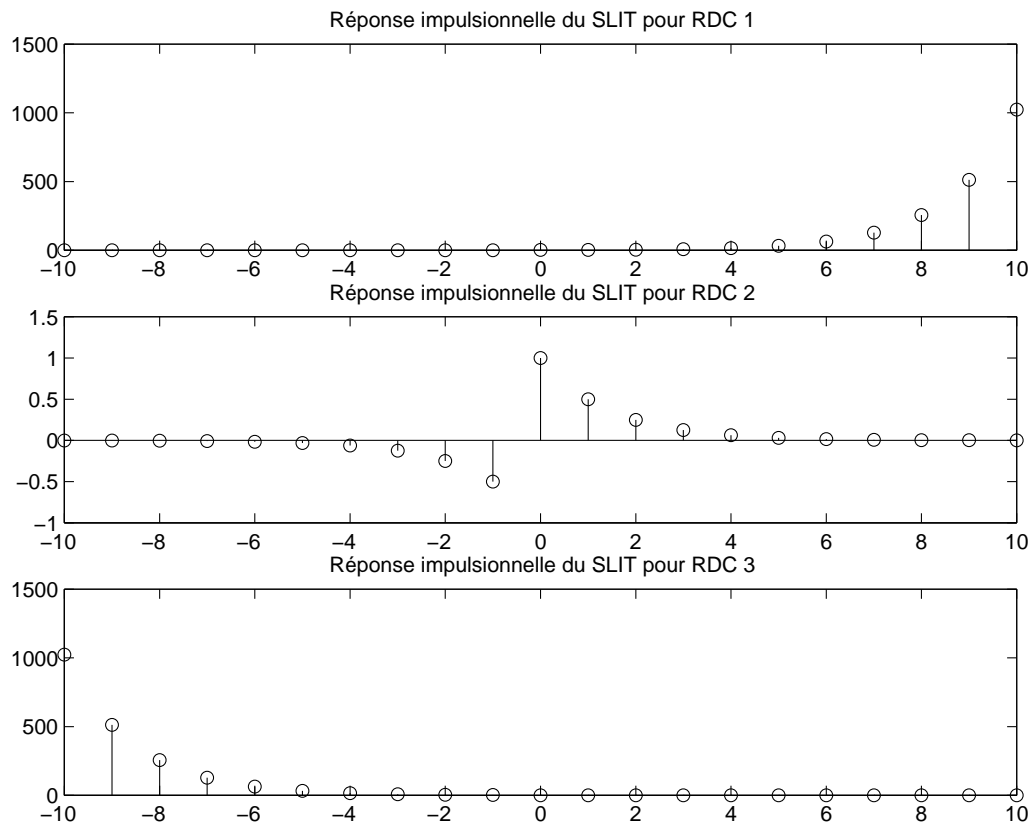


FIG. 1.7 – Réponses Impulsionnelles associées aux régions de convergence RDC 1, RDC 2 et RDC 3

BUTTER Butterworth digital and analog filter design.

`[B,A] = BUTTER(N,Wn)` designs an Nth order lowpass digital Butterworth filter and returns the filter coefficients in length N+1 vectors B (numerator) and A (denominator). The coefficients are listed in descending powers of z. The cut-off frequency Wn must be  $0.0 < Wn < 1.0$ , with 1.0 corresponding to half the sample rate.

If Wn is a two-element vector,  $Wn = [W1 \ W2]$ , BUTTER returns an order 2N bandpass filter with passband  $W1 < W < W2$ .

`[B,A] = BUTTER(N,Wn,'high')` designs a highpass filter.

`[B,A] = BUTTER(N,Wn,'stop')` is a bandstop filter if  $Wn = [W1 \ W2]$ .

When used with three left-hand arguments, as in

`[Z,P,K] = BUTTER(...)`, the zeros and poles are returned in length N column vectors Z and P, and the gain in scalar K.

When used with four left-hand arguments, as in

`[A,B,C,D] = BUTTER(...)`, state-space matrices are returned.

`BUTTER(N,Wn,'s')`, `BUTTER(N,Wn,'high','s')` and `BUTTER(N,Wn,'stop','s')` design analog Butterworth filters. In this case, Wn can be bigger than 1.0.

See also BUTTORD, BESSELF, CHEBY1, CHEBY2, ELLIP, FREQZ, FILTER.

Pour l'exemple choisi, le filtre est calculé comme suit :

#### Exemple d'utilisation en MATLAB

```

z [b,a] = butter(4,2*0.1);           % Les fréquences MATLAB sont les doubles des
                                     % fréquences réduites utilisées dans ce cours
z b
b =
    0.0048    0.0193    0.0289    0.0193    0.0048

z a
a =
    1.0000   -2.3695    2.3140   -1.0547    0.1874

```

Fin de l'exemple

### 1.10.2 Calcul des pôles et des zéros - Fonction `roots` ( )

Cette fonction permet de calculer les pôles et les zéros d'un polynôme caractérisé par un vecteur de coefficients.

```
z help roots
```

```

ROOTS Find polynomial roots.
ROOTS(C) computes the roots of the polynomial whose coefficients
are the elements of the vector C. If C has N+1 components,
the polynomial is C(1)*X^N + ... + C(N)*X + C(N+1).

See also POLY, RESIDUE, FZERO.

```

Pour l'exemple du filtre passe-bas présenté en introduction, les zéros et les pôles sont calculés par les commandes MATLAB suivantes

**Exemple d'utilisation en MATLAB**

```

> zeros = roots(b)

zeros =

-1.0002
-1.0000 + 0.0002i
-1.0000 - 0.0002i
-0.9998

> poles = roots(a)

poles =

0.6605 + 0.4433i
0.6605 - 0.4433i
0.5243 + 0.1458i
0.5243 - 0.1458i

```

**Fin de l'exemple****1.10.3 Lieu des pôles et des zéros - Fonction `zplane()`**

La représentation graphique des pôles et des zéros est une information très importante qui permet très rapidement de se faire une idée précise sur

- la stabilité d'un SLIT,
- les différentes régions de convergence de la fonction de transfert associée à un SLIT,
- etc.

La fonction `zplane()` de MATLAB permet d'obtenir ce graphique.

```
> help zplane
```

**ZPLANE** Z-plane zero-pole plot.

**ZPLANE(Z,P)** plots the zeros **Z** and poles **P** (in column vectors) with the unit circle for reference. Each zero is represented with a 'o' and each pole with a 'x' on the plot. Multiple zeros and poles are indicated by the multiplicity number shown to the upper right of the zero or pole. **ZPLANE(Z,P)** where **Z** and/or **P** is a matrix plots the zeros or poles in different columns with different colors.

If either argument is a row, **ZPLANE** finds the roots of the argument with **ROOTS**. So, **ZPLANE(B,A)** where **B** and **A** are row vectors containing transfer function polynomial coefficients plots the poles and zeros of  $B(z)/A(z)$ . **ZPLANE** assumes scalars are zeros or poles.

**[H1,H2,H3]=ZPLANE(Z,P)** returns vectors of handles to the lines and text objects generated. **H1** is a vector of handles to the zeros lines, **H2** is a vector of handles to the poles lines, and **H3** is a vector of handles to the axes / unit circle line and to text objects which are present when there are multiple zeros or poles. In case there are no zeros or no poles, **H1** or **H2** is set to the empty matrix **[]**.

**ZPLANE(Z,P,AX)** puts the plot into axes **AX**.



See also `FREQZ`.

Pour l'exemple du filtre passe-bas présenté en introduction, la carte des pôles et des zéros que nous donnons sur la FIGURE 1.8 est obtenue par la commande MATLAB suivante

#### Exemple d'utilisation en MATLAB

```
zplane(b,a)
```

Fin de l'exemple

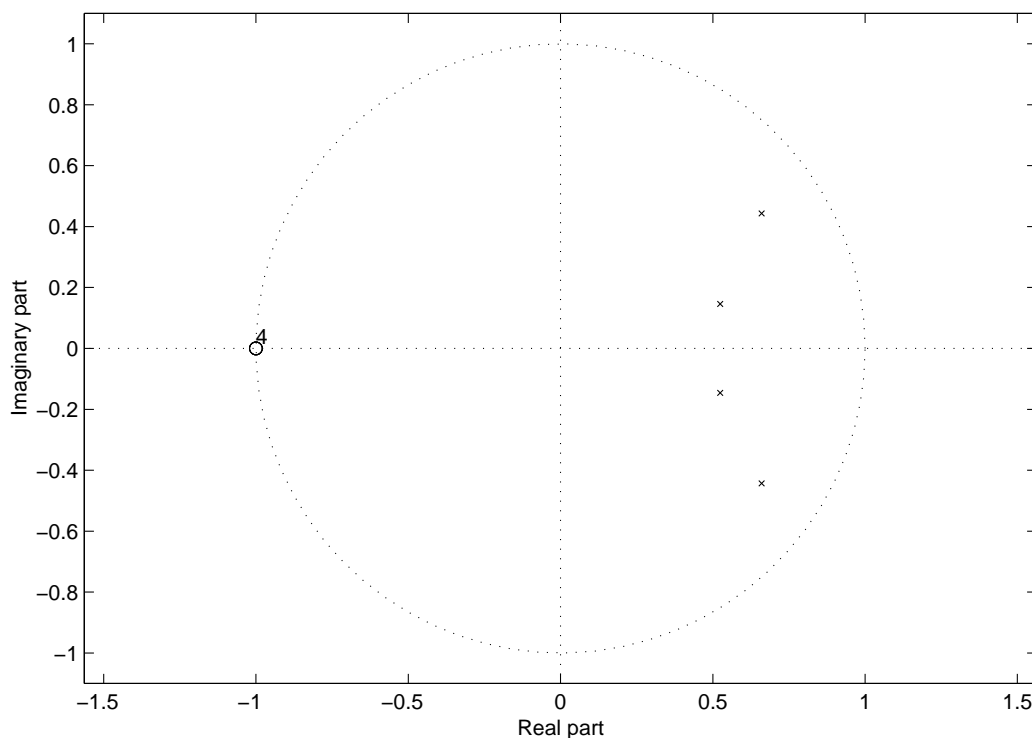


FIG. 1.8 – Carte des pôles et des zéros d'un filtre BUTTERWORTH passe-bas obtenue par la fonction `zplane()` de MATLAB

#### 1.10.4 Réponse en fréquence - Fonction `freqz()`

Nous avons montré que la réponse en fréquence  $H(f)$  d'un filtre **stable** est obtenue en substituant  $z$  par  $e^{j2\pi f}$  dans la fonction de transfert  $H(z)$  du filtre :

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}}.$$

La fonction `freqz()` de MATLAB effectue cette substitution et permet soit d'afficher directement le résultat sur une figure, soit d'enregistrer les valeurs complexes de  $H(f)$  dans un vecteur. Pour effectuer ces calculs, il convient évidemment de s'assurer au préalable que le SLIT est stable.

**Attention, la fonction `freqz()` ne vérifie pas la stabilité du SLIT avant d'effectuer le calcul de la réponse en fréquence  $H(f)$**

z help freqz

FREQZ Z-transform digital filter frequency response.

When N is an integer, [H,W] = FREQZ(B,A,N) returns the N-point frequency vector W in radians and the N-point complex frequency response vector H of the filter B/A:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(nb+1)z^{-nb}}{1 + a(2)z^{-1} + \dots + a(na+1)z^{-na}}$$

given numerator and denominator coefficients in vectors B and A. The frequency response is evaluated at N points equally spaced around the upper half of the unit circle. If N isn't specified, it defaults to 512.

[H,W] = FREQZ(B,A,N,'whole') uses N points around the whole unit circle.

H = FREQZ(B,A,W) returns the frequency response at frequencies designated in vector W, in radians (normally between 0 and pi).

[H,F] = FREQZ(B,A,N,Fs) and [H,F] = FREQZ(B,A,N,'whole',Fs) given a sampling freq Fs in Hz return a frequency vector F in Hz.

H = FREQZ(B,A,F,Fs) given sampling frequency Fs in Hz returns the complex frequency response at the frequencies designated in vector F, also in Hz.

FREQZ(B,A,...) with no output arguments plots the magnitude and unwrapped phase of B/A in the current figure window.

See also FILTER, FFT, INVREQZ, FREQS and GRPDELAY.

Pour l'exemple du filtre passe-bas présenté en introduction, la réponse en fréquence que nous donnons sur la FIGURE 1.9 est obtenue par les commandes MATLAB suivantes

#### Exemple d'utilisation en MATLAB

```
z [H,w] = freqz(b,a);    % Le vecteur H contient la réponse en fréquence complexe
                        % pour les pulsations réduites w en radians

z freqz(b,a)             % Cette commande permet de représenter le module et
                        % l'argument de H. L'axe des fréquences correspond au
                        % double des fréquences réduites utilisées dans ce cours
```

Fin de l'exemple

### 1.10.5 Réponse impulsionnelle - Fonction impz ( )

Nous avons vu dans les paragraphes précédents qu'une équation aux différences reliant les signaux d'entrée et de sortie d'un SLIT ne définit pas d'une manière unique une réponse impulsionnelle, sauf si l'on fait l'hypothèse complémentaire de la causalité du filtre. La fonction `impz ( )` de MATLAB calcule la réponse impulsionnelle  $h(k)$  d'un filtre supposé causal. Elle permet

- soit d'afficher directement le résultat sur une figure,
- soit d'enregistrer les valeurs de  $h(k)$  dans un vecteur.

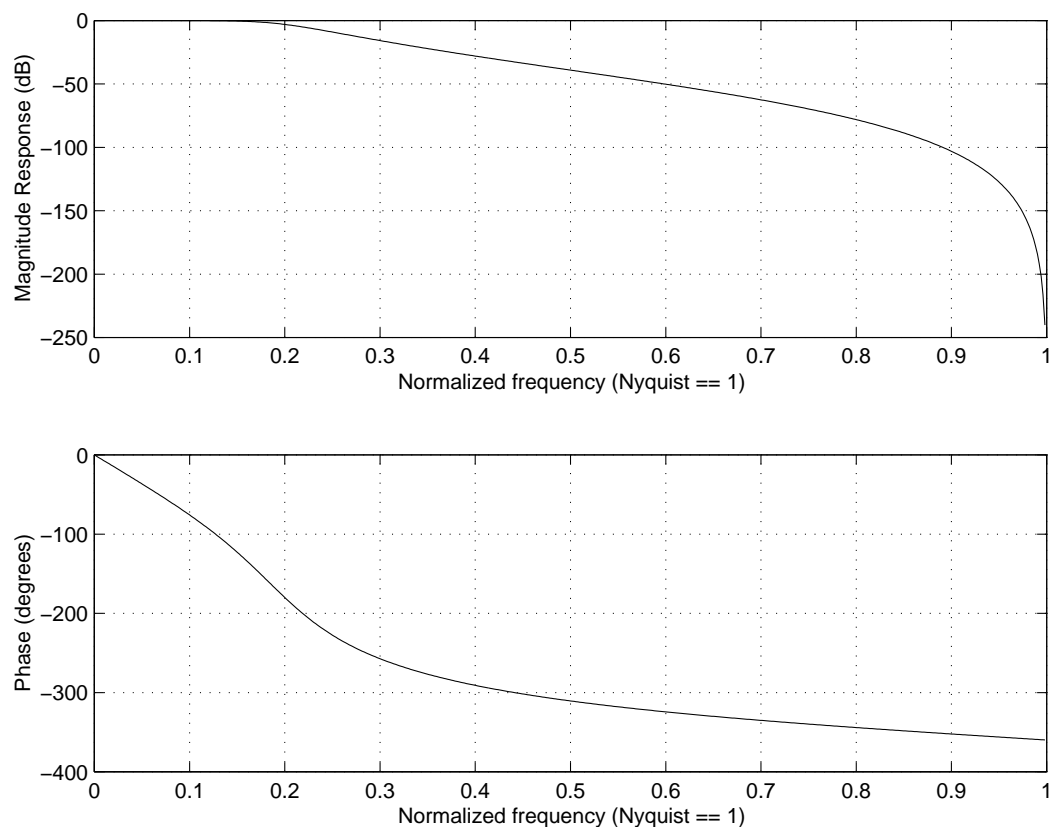


FIG. 1.9 – Réponse en fréquence d'un filtre BUTTERWORTH passe-bas obtenue par la fonction `freqz()` de MATLAB

z help impz

IMPZ Impulse response of digital filter

`[H,T] = IMPZ(B,A)` computes the impulse response of the filter `B/A` choosing the number of samples for you, and returns the response in column vector `H` and a vector of times (or sample intervals) in `T` (`T = [0 1 2 ...]'`).

`[H,T] = IMPZ(B,A,N)` computes `N` samples of the impulse response. If `N` is a vector of integers, the impulse response is computed only at those integer values (0 is the origin).

`[H,T] = IMPZ(B,A,N,Fs)` computes `N` samples and scales `T` so that samples are spaced `1/Fs` units apart. `Fs` is 1 by default.

`[H,T] = IMPZ(B,A,[],Fs)` chooses the number of samples for you and scales `T` so that samples are spaced `1/Fs` units apart.

IMPZ with no output arguments plots the impulse response using `STEM(T,H)` in the current figure window.

See also `IMPULSE` in the Controls Toolbox for continuous systems.

Pour l'exemple du filtre passe-bas présenté en introduction, la réponse impulsionnelle est donnée sur la FIGURE 1.9. Ce résultat est obtenu par les commandes MATLAB suivantes

**Exemple d'utilisation en MATLAB**

```

% [h,k] = impz(b,a,100); % Le vecteur h contient les 100 premières valeurs de la
                        % réponse impulsionnelle. Le vecteur des temps k est un
                        % vecteur colonne donné par k = (0:99)'

% impz(b,a) % Permet de représenter la réponse impulsionnelle h(k)

```

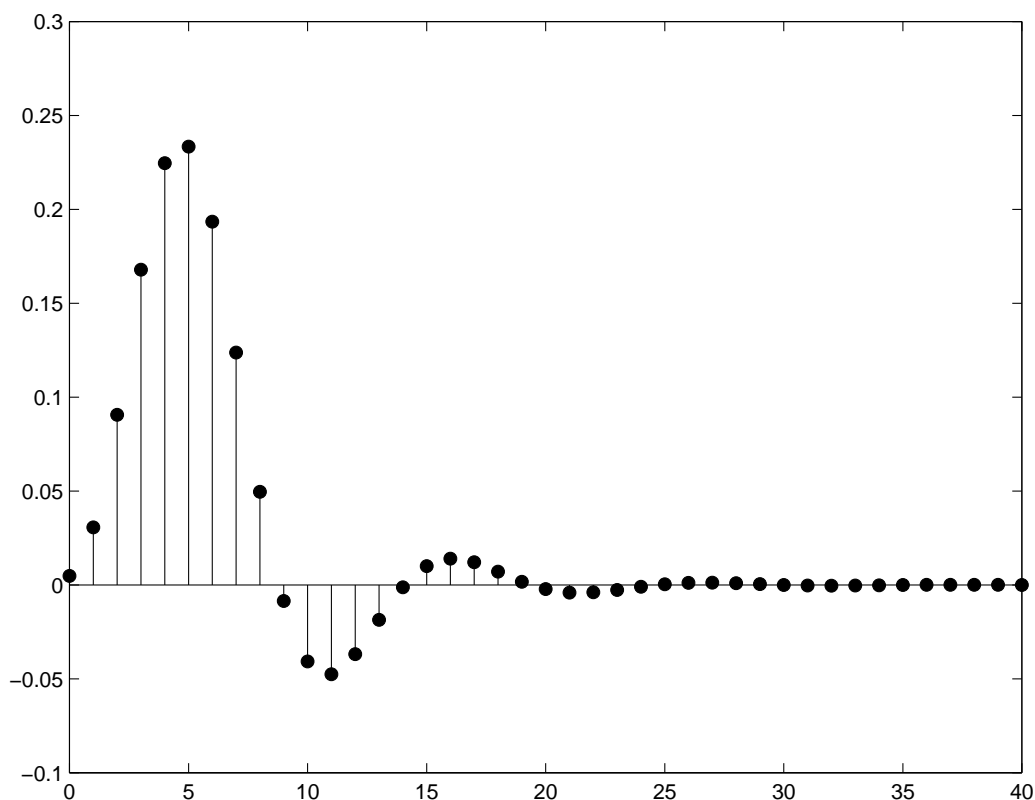
**Fin de l'exemple**

FIG. 1.10 – Réponse impulsionnelle d'un filtre BUTTERWORTH passe-bas obtenue par la fonction `impz()` de MATLAB

### 1.10.6 Filtrage causal - Fonction `filter()`

Le signal de sortie  $y(k)$  d'un filtre supposé causal et excité par le signal  $x(k)$ , est obtenu en calculant récursivement la solution de l'équation aux différences associée au SLIT. Nous avons

$$y(k) = \frac{1}{a_0} [b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_n x(k-n) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_m y(k-m)] .$$

La fonction `filter` de MATLAB met en œuvre un algorithme optimisé pour effectuer ce calcul.

```

% help filter

```

`FILTER` One-dimensional digital filter.

`Y = FILTER(B,A,X)` filters the data in vector `X` with the filter described by vectors `A` and `B` to create the filtered

data Y. The filter is a "Direct Form II Transposed" implementation of the standard difference equation:

$$a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \dots + b(nb+1)*x(n-nb) - a(2)*y(n-1) - \dots - a(na+1)*y(n-na)$$

If  $a(1)$  is not equal to 1, FILTER normalizes the filter coefficients by  $a(1)$ .

When X is a matrix, FILTER operates on the columns of X. When X is an N-D array, FILTER operates along the first non-singleton dimension.

$[Y,Zf] = \text{FILTER}(B,A,X,Zi)$  gives access to initial and final conditions, Zi and Zf, of the delays. Zi is a vector of length  $\text{MAX}(\text{LENGTH}(A), \text{LENGTH}(B))-1$  or an array of such vectors, one for each column of X.

$\text{FILTER}(B,A,X,[],\text{DIM})$  or  $\text{FILTER}(B,A,X,Zi,\text{DIM})$  operates along the dimension DIM.

See also FILTER2, FILTFILT (in the Signal Processing Toolbox).

Nous donnons ci-dessous un exemple d'utilisation de cette fonction. Le signal  $x(k)$  est une suite de valeurs d'amplitude 1 suivie par une suite de valeurs d'amplitude nulle. Ce signal est bruité par un signal aléatoire blanc, gaussien et centré, calculé par la fonction `randn()` de MATLAB. Le résultat de ce calcul présenté sur la FIGURE 1.11 met en évidence

1. la causalité du filtre : le SLIT "répond" après la transition de 1 à 0 du signal  $x(k)$ ,
2. l'effet de filtrage : le SLIT atténue l'amplitude du signal perturbateur.

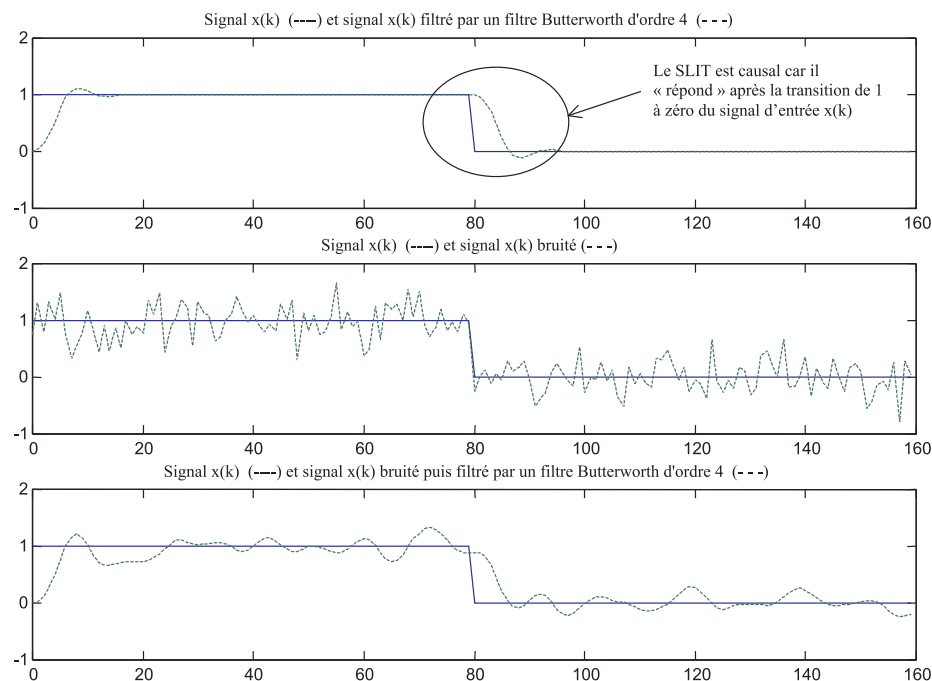


FIG. 1.11 – Exemple de calcul du signal de sortie d'un filtre BUTTERWORTH passe-bas à l'aide de la fonction `filter()` de MATLAB

**Exemple d'utilisation en MATLAB**

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Essai de la fonction filter() de Matlab
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

N = 80;

[b,a] = butter(4,2*0.1);          % Les fréquences MATLAB sont les doubles des
                                   % fréquences réduites utilisées dans ce cours

k = (0:2*N-1)';                  % Vecteur des temps

x = [ones(N,1) ; zeros(N,1)];    % Création du signal x(k)
y = filter(b,a,x);               % Le signal x(k) est filtré à l'aide de la fonction filter()

xb = x+0.3*randn(size(x));        % Calcul d'une version bruitée de x(k)
yb = filter(b,a,xb);              % Le signal x(k) bruité est filtré à l'aide de la fonction filter()

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Présentation des résultats
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(1)
clf
subplot(311)
plot(k,x,'-',k,y,'--');
axis([0 2*N -1 2])
title('Signal x(k) (----) et signal x(k) filtré par un filtre Butterworth d\'ordre 4 (- - -)')
subplot(312)
plot(k,x,'-',k,xb,'--');
axis([0 2*N -1 2])
title('Signal x(k) (----) et signal x(k) bruité (- - -)')
subplot(313)
plot(k,x,'-',k,yb,'--');
axis([0 2*N -1 2])
title('Signal x(k) (----) et signal x(k) bruité puis filtré par un filtre Butterworth d\'ordre 4 (- - -)')

```

**Fin de l'exemple****1.10.7 Filtrage non causal - Fonction `filtfilt()`**

La fonction `filter()` décrite au paragraphe précédent effectue un filtrage causal à l'aide d'un jeu de coefficients caractérisant un SLIT. La FIGURE 1.11 illustre une propriété fondamentale et incontournable de tout filtre physiquement réalisable : le signal de sortie est retardé par rapport au signal d'entrée. Cette fonction `filter()` est un outil très important de MATLAB et constitue souvent le cœur d'un programme simulant le comportement d'un système de traitement du signal en temps réel (donc obligatoirement causal).

Cependant il arrive fréquemment que le traitement du signal puisse être fait en temps différé. Dans ce cas, il peut être intéressant d'utiliser un algorithme de filtrage qui ne retarde pas le signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Le filtre ainsi obtenu est obligatoirement non causal. La fonction `filtfilt()` de MATLAB permet d'utiliser les mêmes coefficients de filtres que ceux utilisés par `filter()`, mais délivre en sortie un signal qui n'est pas retardé par rapport au signal d'entrée. La description succincte de cet algorithme est donnée ci-dessous.

```

> help firlfilt

```

FILTFILT Zero-phase forward and reverse digital filtering.

Y = FILTFILT(B, A, X) filters the data in vector X with the filter described by vectors A and B to create the filtered data Y. The filter is described by the difference equation:

$$y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \dots + b(nb+1)*x(n-nb) \\ - a(2)*y(n-1) - \dots - a(na+1)*y(n-na)$$

After filtering in the forward direction, the filtered sequence is then reversed and run back through the filter; Y is the time reverse of the output of the second filtering operation. The result has precisely zero phase distortion and magnitude modified by the square of the filter's magnitude response. Care is taken to minimize startup and ending transients by matching initial conditions.

The length of the input x must be more than three times the filter order, defined as  $\max(\text{length}(b)-1, \text{length}(a)-1)$ .

Note that `FILTFILT` should not be used with differentiator and Hilbert FIR filters, since the operation of these filters depends heavily on their phase response.

See also `FILTER`.

L'exemple que nous présentons ci-dessous reprend le problème du paragraphe précédent. La FIGURE 1.11 montre clairement que le filtre est non causal puisqu'il "répond" avant d'avoir été excité.

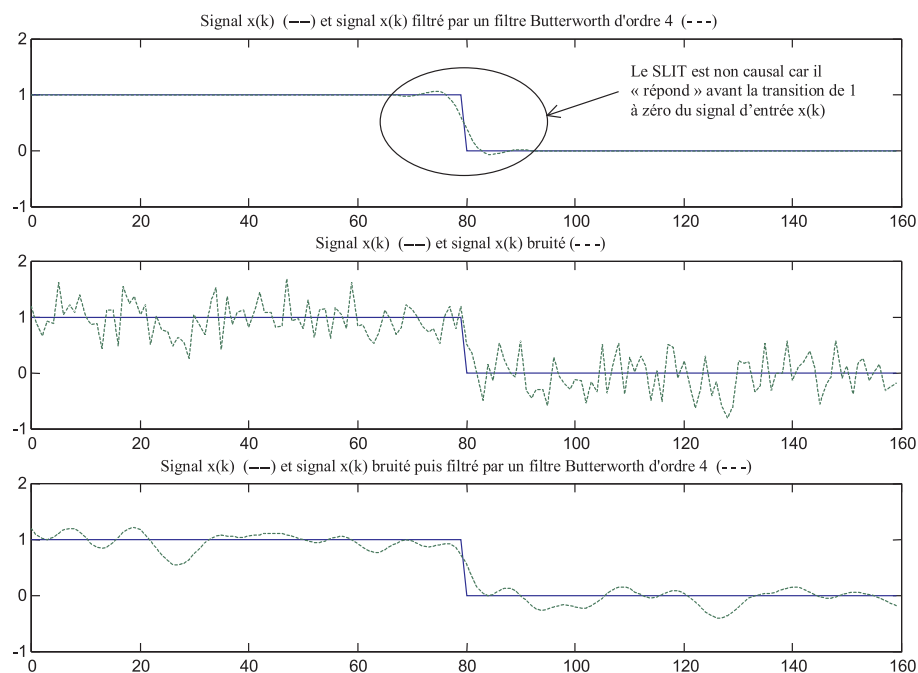


FIG. 1.12 – Exemple de calcul du signal de sortie d'un filtre BUTTERWORTH passe-bas à l'aide de la fonction `filtfilt()` de MATLAB. Le traitement du signal réalisé est non causal.

### Exemple d'utilisation en MATLAB

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Essai de la fonction firlfilt() de Matlab
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

clear all

N = 80;

[b,a] = butter(4,2*0.1);           % Les fréquences MATLAB sont les doubles des
                                   % fréquences réduites utilisées dans ce cours

k = (0:2*N-1)';                   % Vecteur des temps

x = [ones(N,1) ; zeros(N,1)];      % Création du signal x(k)
y = filtfilt(b,a,x);               % Le signal x(k) est filtré à l'aide de la fonction filtfilt()

xb = x+0.3*randn(size(x));          % Calcul d'une version bruitée de x(k)
yb = filtfilt(b,a,xb);              % Le signal x(k) bruité est filtré à l'aide de la fonction filtfilt()

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Présentation des résultats
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(1)
clf
subplot(311)
plot(k,x,'-',k,y,'--');
axis([0 2*N -1 2])
title('Signal x(k) (----) et signal x(k) filtré par un filtre Butterworth d\'ordre 4 (- - -)')
subplot(312)
plot(k,x,'-',k,xb,'--');
axis([0 2*N -1 2])
title('Signal x(k) (----) et signal x(k) bruité (- - -)')
subplot(313)
plot(k,x,'-',k,yb,'--');
axis([0 2*N -1 2])
title('Signal x(k) (----) et signal x(k) bruité puis filtré par un filtre Butterworth d\'ordre 4 (- - -)')

```

Fin de l'exemple

## 1.11 Inversion de la transformation en $z$

### 1.11.1 Inversion par intégration directe dans le plan complexe

L'inversion de la transformée en  $z$  peut être faite en utilisant le théorème de CAUCHY permettant d'intégrer le long d'un contour fermé une fonction d'une variable complexe. Plus précisément, on démontre que :

$$I = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} z^{l-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{pour } l = 0 \\ 0 & \text{pour } l \neq 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $\Gamma$  est un contour fermé qui entoure l'origine du plan des  $z$ .

En multipliant les deux membres de la TZ d'un signal  $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

par  $z^{l-1}/2j\pi$  et en intégrant le résultat le long d'un contour contenant l'origine et contenu dans la région de convergence, on obtient :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z)z^{l-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{l-k-1} \right] dz .$$

L'intégrale étant calculée dans la RDC de  $X(z)$ , on peut intervertir l'intégration et la sommation. Il vient :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z)z^{l-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_{\Gamma} z^{l-k-1} dz .$$



En utilisant le résultat donné par l'égalité (1.33) il vient :

<b>Définition de la transformée en <math>z</math> inverse de <math>X(z)</math></b>
$x(k) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz$
<p><b><math>\Gamma</math> est un contour fermé orienté dans le sens trigonométrique.</b></p> <p><b>Il entoure l'origine du plan des <math>z</math> et appartient à la RDC de <math>X(z)</math>.</b></p>

(1.34)

Cette intégrale peut se calculer par la méthode des résidus par exemple.

### 1.11.2 Inversion par consultation d'une table

Nous avons donné au TABLEAU 1.1 quelques paires de transformées en  $z$  usuelles. Une méthode très utilisée en pratique pour inverser une TZ  $X(z)$  consiste à reconnaître dans le TABLEAU 1.1 une forme identique à celle de  $X(z)$ . La détermination de la TZ inverse  $x(k)$  est alors immédiate.

### 1.11.3 Inversion par division de polynômes

Pour le cas très fréquent où  $X(z)$  est de la forme

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}},$$

il est possible de calculer directement  $x(k)$  en effectuant la division du polynôme en  $z^{-1}$   $b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}$  par le polynôme  $a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}$ . Selon que la séquence  $x(k)$  est à droite ou à gauche, cette division peut être faite selon les puissances croissantes ou décroissantes de  $z$ . Le résultat de la division est une série de puissances en  $z$  positives ou négatives. En comparant ce résultat avec la définition de  $X(z)$

$$X(z) = \dots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

et en identifiant les coefficients correspondants, on obtient les échantillons  $x(k)$ .

Considérons par exemple le cas où  $X(z)$  est donné par :

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = -\frac{z}{a - z}.$$

#### Premier cas : le signal est une séquence à droite

Dans ce cas, la RDC de  $X(z)$  est donnée par  $RDC = \{z \mid |z| > |a|\}$ . Pour trouver  $x(k)$ , nous effectuons la division suivante :

1	1 - az <sup>-1</sup>
1 - az <sup>-1</sup>	1 + az <sup>-1</sup> + a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup> + a <sup>3</sup> z <sup>-3</sup> ...
+ az <sup>-1</sup>	
+ az <sup>-1</sup> - a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup>	
+ a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup>	
+ a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup> - a <sup>3</sup> z <sup>-3</sup>	
+ a <sup>3</sup> z <sup>-3</sup>	
...	

Cette division montre que :

$$X(z) = \cdots + \underbrace{0}_{x(-2)} z^2 + \underbrace{0}_{x(-1)} z^1 + \underbrace{1}_{x(0)} z^0 + \underbrace{a}_{x(1)} z^{-1} + \underbrace{a^2}_{x(2)} z^{-2} + \underbrace{a^3}_{x(3)} z^{-3} + \cdots$$

Nous en déduisons

$$x(k) = \epsilon(k) a^k,$$

ce qui correspond bien au résultat donné au TABLEAU 1.1.

### Deuxième cas : le signal est une séquence à gauche

Dans ce cas, la RDC de  $X(z)$  est donnée par  $RDC = \{z \mid |z| < |a|\}$ . Pour trouver  $x(k)$ , nous effectuons la division suivante :

$  \begin{array}{r}  z \\  z - a^{-1} z^2 \\  \hline  + a^{-1} z^2 \\  + a^{-1} z^2 - a^{-2} z^3 \\  \hline  \phantom{+} + a^{-2} z^3 \\  + a^{-2} z^3 - a^{-3} z^4 \\  \hline  \phantom{+} + a^{-3} z^4 \\  \phantom{+} \dots  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  -a + z \\  \hline  -a^{-1} z^1 - a^{-2} z^2 - a^{-3} z^3 - a^{-4} z^4 \dots  \end{array}  $
--	--

Cette division montre que :

$$X(z) = \cdots + \underbrace{(-a^{-4})}_{x(-4)} z^4 + \underbrace{(-a^{-3})}_{x(-3)} z^3 + \underbrace{(-a^{-2})}_{x(-2)} z^2 + \underbrace{(-a^{-1})}_{x(-1)} z^1 + \underbrace{0}_{x(0)} z^0 + \underbrace{0}_{x(1)} z^{-1} + \underbrace{0}_{x(2)} z^{-2} + \cdots$$

Nous en déduisons

$$x(k) = -\epsilon(-k-1) a^k,$$

ce qui correspond bien au résultat donné au TABLEAU 1.1.

### 1.11.4 Inversion par développement en fractions partielles

La dernière méthode d'inversion présentée dans ce cours est applicable au cas très fréquent où  $X(z)$  se met sous la forme du rapport de deux polynômes en  $z^{-1}$  :

$$X(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \cdots + B_{N_B} z^{-N_B}}{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots + A_{N_A} z^{-N_A}}$$

où  $B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \cdots + B_{N_B} z^{-N_B}$  et  $A(z^{-1}) = A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots + A_{N_A} z^{-N_A}$ . La méthodologie est la suivante :

1. Si le degré  $N_B$  du numérateur  $B(z^{-1})$  est supérieur à celui  $N_A$  du dénominateur  $A(z^{-1})$ , mettre  $X(z)$  sous la forme

$$X(z) = C(z^{-1}) + \frac{E(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

où  $C(z^{-1})$  est un polynôme en  $z^{-1}$  de degré  $N_C = N_B - N_A$  et où  $E(z^{-1})$  et  $D(z^{-1})$  sont deux polynômes de degrés  $N_E$  et  $N_D$  respectivement avec

$$N_E < N_D.$$

Le polynôme  $C(z^{-1})$  est obtenu par division de  $B(z^{-1})$  par  $A(z^{-1})$ .

2. Rechercher les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  de  $\frac{E(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ . Deux cas peuvent se présenter :

(a) **Les pôles sont tous des pôles simples :** Dans ce cas le rapport des deux polynômes  $E(z^{-1})$  et  $D(z^{-1})$  s'écrit :

$$\frac{E(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \sum_{k=1}^{N_D} \frac{\alpha_k}{1 - p_k z^{-1}} .$$

(b) **Certains pôles de  $X(z)$  qui sont aussi les pôles de  $\frac{E(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  sont des pôles multiples :** Prenons par exemple le cas où le pôle  $p_i$  est multiple d'ordre  $q$ . Dans ce cas le rapport des deux polynômes  $E(z^{-1})$  et  $D(z^{-1})$  s'écrit :

$$\frac{E(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_D} \frac{\alpha_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^q \frac{\beta_l}{(1 - p_i z^{-1})^l} .$$

3. Inverser en s'aidant des tables de TZ et des RDC de  $X(z)$  la somme de fonctions simples de  $z$  ainsi obtenue. Pour résumer, et en supposant que  $X(z)$  n'a qu'un pôle multiple  $p_i$  d'ordre  $q$ , la fonction de  $z$   $X(z)$  peut se mettre sous la forme :

$$X(z) = \sum_{m=0}^{N_B - N_A} C_m z^{-m} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_D} \frac{\alpha_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^q \frac{\beta_l}{(1 - p_i z^{-1})^l} . \quad (1.35)$$

où

- les  $C_m$  sont obtenus par division du polynôme  $B(z^{-1})$  par  $A(z^{-1})$ ,
- $\alpha_k = (1 - p_k z^{-1})X(z)|_{z=p_k}$
- $\beta_l = \frac{1}{(q-l)!(-p_i)^{q-l}} \left\{ \frac{d^{q-l}}{dw^{q-l}} [(1 - p_i w)^l X(w^{-1})] \right\}_{w=p_i^{-1}}$