

Analyse Spectrale et Corrélations Temporelles

GUY PLANTIER - ESEO-TECH
guy.plantier@eseo.fr

14 mai 2021

Travail personnel à me rendre fin-mai 2021

Guy PLANTIER répondra collectivement par mail et organisera des réunions téléphoniques ou vidéoconférences si le besoin est exprimé

Destinataires : Élèves de l'option DSMT

Attention : Dans tout l'énoncé de ce devoir, je mentionne MATLAB comme outil de simulation. Si vous avez une licence étudiant de ce logiciel, vous pouvez l'utiliser. Dans le cas contraire, vous devez utiliser le logiciel libre **GNU Octave** qui a exactement la même syntaxe que MATLAB et que vous pouvez télécharger à

<https://www.gnu.org/software/octave/>

En lisant MATLAB vous devez comprendre MATLAB ou GNU Octave

Table des matières

1	Introduction	3
2	Travail demandé	4
2.1	Travail préparatoire sur papier et avec MATLAB	4
2.2	Analyse spectrale par périodogramme moyenné fenêtré (méthode de WELCH)	5
2.2.1	Rappels	5
2.2.2	Travail à faire : écriture d'une fonctions d'estimation de DSP avec MATLAB	5
2.2.3	Travail à faire : test de la fonction <code>Estim_DSP_per_moy()</code>	6
2.3	Estimation des interspectres de puissance	6
2.3.1	Rappels théoriques	6
2.3.2	Travail à faire : Estimation d'un interspectre par la méthode de WELCH	7
2.3.3	Travail à faire : écriture d'une fonction d'estimation d'interspectre avec MATLAB	8
2.3.4	Travail à faire : test de la fonction <code>Estim_CPSD_per_moy()</code>	8
2.4	Utilisation de l'analyse spectrale pour estimer la réponse en fréquence d'un SLIT	9
2.4.1	Travail à faire dans le cas d'un bruit de sortie nul $b(k) = 0$ soit $z(k) = y(k)$	9
2.4.2	Travail à faire dans le cas d'un bruit de sortie non nul - Notion de cohérence fréquentielle	9
2.5	Estimation de la réponse impulsionnelle d'un SLIT à partir des corrélations et dans le domaine temporel	10
3	Équations de convolution pour la corrélation	11
3.1	Introduction	11
3.2	Cas général pour les signaux à énergie finie	11
3.3	Cas général pour les signaux à puissance moyenne finie	12
3.4	Formulation matricielle des équations de convolution pour la corrélation - Cas où le SLIT est causal et RIF	13

Table des figures

1	Les deux situations étudiées dans ce problème. Dans le premier cas le SLIT est excité par un bruit blanc $x(k)$. Dans le deuxième cas le bruit d'excitation n'est plus un bruit blanc (bruit coloré). Le signal de sortie du SLIT est $y(k)$. Ce signal pourra éventuellement être perturbé par un bruit blanc additif $b(k)$ pour donner naissance au signal de sortie $z(k)$. Les coefficients b_i pour le numérateur et a_i pour le dénominateur du SLIT, avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$, sont donnés dans le TABLEAU 1	4
----------	--	----------

Liste des tableaux

1	Valeurs des différents coefficients du numérateur b_i et du dénominateur a_i de l'opérateur de transfert définissant le SLIT de la FIGURE 1 avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$.	3
----------	---	----------

1 Introduction

Dans ce deuxième devoir, nous souhaitons vous faire travailler pour maîtriser les grands résultats généraux de l'**Analyse Spectrale** et des **Corrélations Temporelles**. Ces outils sont universels en traitement du signal, analyse des séries temporelles stationnaires et identifications des Systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (SLIT). Nous les abordons dans ce qui suit, tant

- dans le domaine fréquentiel, en estimant la réponse en fréquence de ce SLIT,
- que dans le domaine temporel, en estimant la réponse impulsionnelle.

Vous devez être vraiment conscients que les notions que vous allez travailler sont fondamentales et s'appliquent à de très nombreux domaines : de la physique, à l'économie, en passant, par le traitement des images, l'instrumentation, les télécommunications et les analyseurs de spectre, dont vous avez plusieurs modèles disponibles à l'ESEO et qui couvrent le domaine fréquentiel de 0 Hz à 65 GHz.

Plus précisément, à la fin de ce travail vous aurez utilisé et vous maîtriserez à peu près toutes les notions que nous avons vues et qui sont :

- la convolution et le filtrage (fonctions `conv()` et `filter()` de MATLAB)
- la réponse en fréquence d'un système (fonctions `freqz()` et `fft()` de la réponse impulsionnelle de MATLAB)
- la transformée de FOURIER discrète (fonction `fft()` de MATLAB)
- les corrélations temporelles (fonction `xcorr()` de MATLAB)
- les densités spectrale et interspectrale de puissance (fonctions `pwelch()` et `cpsd()` de MATLAB)
- la notion d'estimation de réponse en fréquence de SLIT (fonction `tfestimate()` de MATLAB)
- la notion de cohérence fréquentielle des signaux entrée et sortie d'un SLIT (fonction `mscohere()` de MATLAB).

Toutes ces notions ont été vues en cours et sont décrites dans les polycopiés que je vous ai distribués. Mais ce présent devoir met l'accent sur les résultats fondamentaux présentés dans le polycopié *Corrélations Temporelles* et en particulier le paragraphe 1.12 : *Équations de convolution pour la corrélation* que je redonne au § 3 de ce présent document à partir de la page 11.

Le problème que nous nous proposons d'étudier est décrit sur la FIGURE 1 qui présente un SLIT dans deux situations différentes que nous étudierons tour à tour :

- Dans le **CAS 1** le signal d'excitation du SLIT $x(k)$ est un bruit blanc de variance σ_x^2 . Nous étudierons le signal de sortie $y(k)$ et la version bruitée de ce signal de sortie donnée par $z(k) = y(k) + b(k)$, où $b(k)$ est un bruit blanc de variance σ_b^2 . $x(k)$ et $b(k)$ sont non corrélés.
- Dans le **CAS 2** nous reprenons la situation décrite au **CAS 1** mais avec cette fois un signal d'excitation $x(k)$ qui n'est plus un bruit blanc, puisqu'il est le résultat du filtrage d'un nouveau bruit blanc $n(k)$ de variance σ_n^2 , par un filtre causal caractérisé par l'opérateur de transfert $\frac{1}{1-\alpha q^{-1}}$, avec $|\alpha| < 1$ pour assurer sa stabilité. Nous avons également ici aussi une non corrélation entre $n(k)$ et $b(k)$ donc $x(k)$ et $b(k)$.

Le SLIT est un filtre IIR d'ordre 4 caractérisé par deux polynômes en q^{-1} de coefficients b_i pour le numérateur et a_i pour le dénominateur avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$ donnés dans le TABLEAU 1.

i	b_i	a_i
0	2.655423483244744	1.000000000000000
1	-2.314904045920626	-1.067061965329481
2	0.676024048681239	0.472135954999580
3	-0.693727631714796	-0.437253873488230
4	0.353208194390678	0.370191908158750

TABLE 1 – Valeurs des différents coefficients du numérateur b_i et du dénominateur a_i de l'opérateur de transfert définissant le SLIT de la FIGURE 1 avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

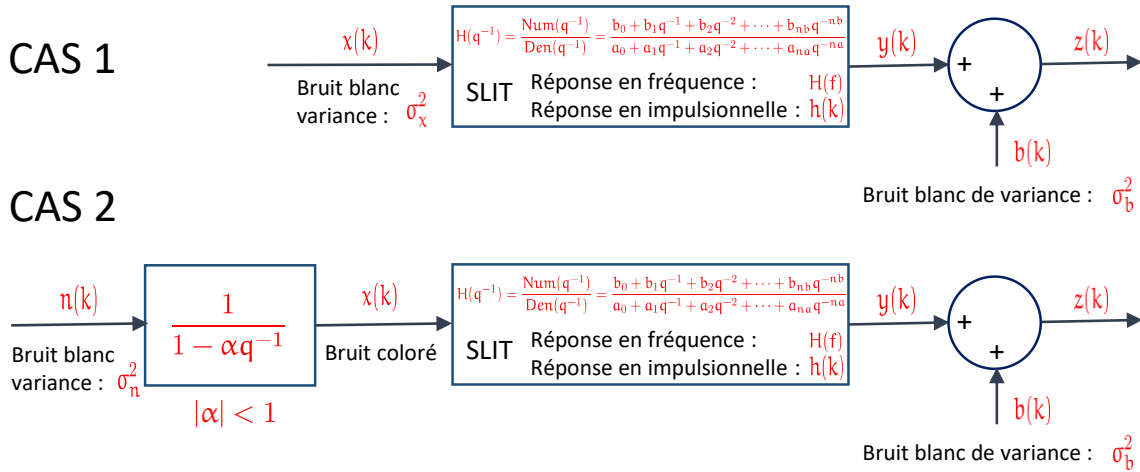


FIGURE 1 – Les deux situations étudiées dans ce problème. Dans le premier cas le SLIT est excité par un bruit blanc $x(k)$. Dans le deuxième cas le bruit d'excitation n'est plus un bruit blanc (bruit coloré). Le signal de sortie du SLIT est $y(k)$. Ce signal pourra éventuellement être perturbé par un bruit blanc additif $b(k)$ pour donner naissance au signal de sortie $z(k)$. Les coefficients b_i pour le numérateur et a_i pour le dénominateur du SLIT, avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$, sont donnés dans le TABLEAU 1

2 Travail demandé

2.1 Travail préparatoire sur papier et avec MATLAB

En reprenant tous vos cours, et en lisant très attentivement le polycopié sur les corrélations temporelles, et en particulier le paragraphe 1.12 : *Équations de convolution pour la corrélation* que je redonne au § 3 page 11 de ce document

1. Donnez l'expression théorique de l'autocorrélation des bruits blancs $x(k)$ dans le **CAS 1**, $n(k)$ et $b(k)$. Donnez également des expressions théoriques des Densités Spectrales de Puissance de ces bruits blancs $\Phi_{xx}(f)$, $\Phi_{nn}(f)$ et $\Phi_{bb}(f)$ respectivement.
2. En choisissant des variances de ces bruits σ_x^2 , σ_n^2 et σ_b^2 différentes de 1, et un très grand nombre de points (10^6 ou 10^7) pour générer ces signaux aléatoires, écrivez un programme MATLAB très bien commenté présentant les autocorrélation $\varphi_{xx}(k)$, $\varphi_{nn}(k)$ et $\varphi_{bb}(k)$ pour $k \in [-200, 200]$. A ce sujet, pour ne calculer l'autocorrélation que pour des retards (lags) allant d'une valeur min à une valeur max, nous ne sommes pas obligés de calculer l'intégralité de la corrélation pour des décalages allant de $-\text{length}(x)$ à $+\text{length}(x)$. On peut utiliser un argument supplémentaire de la fonction `xcorr()` de MATLAB. Référez-vous à la documentation MATLAB de la fonction `xcorr()`. Vous pourrez publier ce programme en pdf, mais MATLAB peut également générer du Word de Microsoft® que vous pouvez ensuite modifier et compléter de commentaires, pour enfin en générer un pdf.
3. Continuez ce programme en calculant toutes les combinaisons d'intercorrélations entre $x(k)$, $n(k)$ et $b(k)$ pour vous assurer que ces signaux sont bien non corrélés deux à deux. On devrait avoir $\varphi_{xn}(k) = \varphi_{xb}(k) = \varphi_{nb}(k) = 0$, que l'on soit d'ailleurs dans le **CAS 1** ou dans le **CAS 2**. Vous pourrez tester ce deuxième CAS avec $\alpha = 0.9$ par exemple. Pour les représentations de ces intercorrélations, vous choisirez la même échelle que celle utilisée pour présenter les autocorrélations. Vous visualiserez ainsi des valeurs relatives de ces intercorrélations très faibles par rapport aux autocorrélations, ce qui démontrera les non corrélations entre $x(k)$, $n(k)$ et $b(k)$.
4. En utilisant la fonction `pwelch()` de MATLAB, représentez les trois estimations des DSP

$\Phi_{xx}(f)$, $\Phi_{nn}(f)$ et $\Phi_{bb}(f)$ pour $f \in [-1/2, 1/2]$. Vous utiliserez également la fonction `fftshift()`.

2.2 Analyse spectrale par périodogramme moyenné fenêtré (méthode de WELCH)

2.2.1 Rappels

Nous rappelons que le périodogramme est un estimateur **non consistant** de la DSP. Voir les photocopies distribuées et également https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Welch Pour résoudre ce problème on utilise classiquement l'une des deux méthodes suivantes :

- périodogramme moyenné
- périodogramme moyenné modifié

Les différentes étapes de l'estimation sont les suivantes (voir le cours sur les l'analyse spectrale)

1. Division d'une réalisation de K points du signal à analyser $x(k)$ en L tranches $x_l(k)$ de N points avec $l = 0, 1, \dots, L-1$
2. Pour chacune des L tranches, calcul d'une estimation du périodogramme $\hat{\Phi}_{xl}(f, N)$ qui représente le module au carré de la transformée de FOURIER de la tranche que l'on fenêtré préalablement dans le cas du périodogramme moyenné modifié. Nous avons alors les formules suivantes :
 - **Périodogramme**

$$\hat{\Phi}_{xl}(f, N) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_l(k) \exp(-j2\pi f k) \right|^2$$

- **Périodogramme modifié**

$$\hat{\Phi}_{xl}(f, N) = \frac{1}{NP} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_l(k) w(k) \exp(-j2\pi f k) \right|^2$$

où

$$P = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^2(k)$$

P est un facteur de normalisation nécessaire pour que l'estimateur soit asymptotiquement non biaisé. $w(k)$ est une des fenêtres utilisées classiquement en traitement du signal (HANNING, HAMMING, etc.)

Il est à noter que le calcul des transformées de FOURIER intervenant dans ces estimations de périodogramme peut se faire très efficacement par FFT et "zero padding".

3. Calcul des moyennes des périodogrammes des L tranches :

$$\hat{\Phi}_x^{PM}(f, N, L) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{\Phi}_{xl}(f, N).$$

2.2.2 Travail à faire : écriture d'une fonctions d'estimation de DSP avec MATLAB

Écrivez une fonctions que vous appellerez `Estim_DSP_per_moy()` permettant d'estimer la DSP d'un signal. L'appel de cette fonction se fera de la façon suivante :

```
[PHI, f] = Estim_DSP_per_moy(x, NFFT, N, w);
```

où

- PHI est un vecteur contenant l'estimation de la DSP,

- f est un vecteur contenant les fréquences pour lesquelles a été calculée la DSP,
- x est un vecteur de K points contenant la réalisation du processus $x(k)$,
- $NFFT$ est le nombre de points utilisé pour calculer les FFT,
- N est le nombre de points des tranches,
- w est un vecteur de N points contenant les échantillons de la fenêtre utilisée. Pour le périodogramme simple, utiliser la fenêtre rectangulaire.

2.2.3 Travail à faire : test de la fonction `Estim_DSP_per_moy()`

1. Dans le **CAS 1**, écrivez une suite à votre programme MATLAB qui teste votre fonction en la comparant avec la fonction `pwelch()` de MATLAB. Pour cela,
 - (a) générez un bruit blanc $x(k)$, le bruit filtré $y(k)$ et sa version bruitée $z(k)$,
 - (b) présentez sur une même figure les DSP de ces trois signaux, respectivement $\Phi_{xx}(f)$, $\Phi_{yy}(f)$ et $\Phi_{zz}(f)$ pour $f \in [-1/2, 1/2]$ obtenues par votre fonction et `pwelch()`,
 - (c) présentez sur une autre figure la DSP estimée $\Phi_{yy}(f)$ et la DSP théorique donnée par la relation fondamentale reliant les DSP entrée-sortie d'un SLIT de réponse en fréquence $H(f)$

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2.$$

Vous calculerez bien sûr $H(f)$ avec la fonction `freqz()` de MATLAB.

2. Dans le **CAS 2**, reprenez les trois précédentes étapes. Le programme est quasiment identique si ce n'est que pour générer $x(k)$, vous devez filtrer le bruit blanc $n(k)$ par un filtre d'opérateur de transfert $\frac{1}{1-\alpha q^{-1}}$, avec $|\alpha| < 1$.

2.3 Estimation des interspectres de puissance

2.3.1 Rappels théoriques

Vous devez lire en détail le paragraphe **1.8 Estimation pratique des corrélations pour des signaux numériques déterministes et à puissance moyenne finie** de votre polycopié sur les corrélations temporelles. Le petit résumé ci-dessous est très rapide et permet de présenter la méthode d'estimation d'un interspectre par la méthode de WELCH. L'interspectre $\Phi_{xy}(f)$ de deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ à puissance moyenne finie est défini comme la transformée de FOURIER de l'intercorrrelation $\varphi_{xy}(k)$:

$$\varphi_{xy}(k) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} \Phi_{xy}(f). \quad (1)$$

Si $x(k)$ et $y(k)$ sont des signaux à puissance moyenne finie, l'intercorrrelation entre ces deux signaux est définie par :

$$\varphi_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(l+k). \quad (2)$$

La formule présentée ici semble différente de celle qui vous est donnée dans le polycopié :

$$\varphi_{xy}(k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M-1} \sum_{l=-M}^M x(l)y(l+k).$$

mais il n'en est rien. On sait en effet qu'une simple translation de l'origine des temps sur $x(k)$ et $y(k)$ ne change pas la valeur de l'auto et de l'intercorrrelation. On peut donc toujours se ramener à la situation où l'on considère que le premier point de la tranche de N ou de $2M-1$ points prélevée correspond au temps $k=0$.

Pour estimer l'intercorrrelation $\varphi_{xy}(k)$ on utilise donc l'expression (2) en considérant que N est "grand" et en prélevant une tranche de N points de ces deux signaux $x(k)$ et $y(k)$, ce signifie que l'on

considère qu'en dehors de cette tranche le signal est nul. On effectue là un fenêtrage très brutal sur $x(k)$ et $y(k)$ qui donne naissance à deux nouveaux signaux, appelés signaux tranche $x_{tr}(k)$ et $y_{tr}(k)$, et définis par :

$$x_{tr}(k) = \begin{cases} x(k) & \forall k \in [0, N-1] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad y_{tr}(k) = \begin{cases} y(k) & \forall k \in [0, N-1] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad (3)$$

L'estimation de $\varphi_{xy}(k)$ à partir de N points, que l'on notera $\hat{\varphi}_{xy}(k, N)$, est alors donnée en considérant N grand et en travaillant sur les signaux tranche $x_{tr}(k)$ et $y_{tr}(k)$ au lieu des signaux d'origine $x(k)$ et $y(k)$

$$\hat{\varphi}_{xy}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_{tr}(l) y_{tr}(l+k) = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_{tr}(l) y_{tr}(l+k) = \frac{x_{tr}(-k) * y_{tr}(k)}{N} \quad (4)$$

On voit donc qu'une estimation de l'intercorrélation peut être exprimée par le produit de convolution du signal tranche $x_{tr}(k)$ retourné dans le temps, par le signal tranche $y_{tr}(k)$.

La transformée de FOURIER de $\hat{\varphi}_{xy}(k, N)$ définit l'estimation de l'interspectre par **Périodogramme**

$$\hat{\Phi}_{xy}^{\text{PER}}(f, N) = \mathcal{F}[\hat{\varphi}_{xy}(k, N)] = \frac{X_{tr}^*(f) Y_{tr}(f)}{N} \quad (5)$$

On voit bien sûr qu'en remplaçant $y(k)$ par $x(k)$ dans ces calculs, on retrouve l'interspectre entre $x(k)$ et $x(k)$, qui est également l'autospectre de $x(k)$, qui est encore la Densité spectrale de puissance de $x(k)$ estimée par périodogramme

$$\hat{\Phi}_{xx}^{\text{PER}}(f, N) = \mathcal{F}[\hat{\varphi}_{xx}(k, N)] = \frac{X_{tr}^*(f) X_{tr}(f)}{N} = \frac{|X_{tr}(f)|^2}{N}. \quad (6)$$

2.3.2 Travail à faire : Estimation d'un interspectre par la méthode de WELCH

On reprend ici, mais pour le cas de l'interspectre, la suite des étapes présentées au § 2.2.1 à la page 5 de ce document.

1. Division des signaux de K points $x(k)$ et $y(k)$ en L tranches $x_l(k)$ et $y_l(k)$ de N points avec $l = 0, 1, \dots, L-1$
2. Pour chacune des L tranches, calcul d'une estimation du périodogramme $\hat{\Phi}_{xy,l}^{\text{PER}}(f, N)$ à l'aide de l'expression (5). On pourra ici utiliser des fenêtres plus douces $w(k)$ dans le cas du périodogramme moyenné modifié. Nous avons alors les formules suivantes :

– **Périodogramme**

$$\hat{\Phi}_{xy,l}^{\text{PER}}(f, N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_l(k) \exp(+j2\pi f k) \sum_{k=0}^{N-1} y_l(k) \exp(-j2\pi f k)$$

– **Périodogramme modifié**

$$\hat{\Phi}_{xy,l}^{\text{PER}}(f, w, N) = \frac{1}{NP} \sum_{k=0}^{N-1} x_l(k) w(k) \exp(+j2\pi f k) \sum_{k=0}^{N-1} y_l(k) w(k) \exp(-j2\pi f k)$$

où

$$P = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^2(k)$$

P est un facteur de normalisation nécessaire pour que l'estimateur soit asymptotiquement non biaisé. $w(k)$ est une des fenêtres utilisées classiquement en traitement du signal (HANNING, HAMMING, etc.)

Il est à noter que le calcul des transformées de FOURIER intervenant dans ces estimations de périodogramme peut se faire très efficacement par FFT et "zero padding".

3. Calcul des moyennes des périodogrammes des L tranches :

$$\hat{\Phi}_{xy}^{\text{WELCH}}(f, w, N, L) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{\Phi}_{xy,l}^{\text{PER}}(f, w, N) . \quad (7)$$

2.3.3 Travail à faire : écriture d'une fonction d'estimation d'interspectre avec MATLAB

En notant que les initiales CPSD signifient en anglais Cross Power Spectral Density, écrivez une fonction que vous appellerez `Estim_CPSD_per_moy()` permettant d'estimer l'interspectre de deux signaux $x(k)$ et $y(k)$. L'appel de cette fonction se fera de la façon suivante :

```
[PHI_xy, f] = Estim_CPSD_per_moy(x, y, NFFT, N, w);
```

où

- `PHI_xy` est un vecteur contenant l'estimation de l'interspectre,
- `f` est un vecteur contenant les fréquences pour lesquelles a été calculée l'interspectre,
- `x` est un vecteur de K points contenant les échantillons du signal $x(k)$,
- `y` est un vecteur de K points contenant les échantillons du signal $y(k)$,
- `NFFT` est le nombre de points utilisé pour calculer les FFT,
- `N` est le nombre de points des tranches,
- `w` est un vecteur de N points contenant les échantillons de la fenêtre utilisée. Pour le périodogramme simple, utiliser la fenêtre rectangulaire.

2.3.4 Travail à faire : test de la fonction `Estim_CPSD_per_moy()`

1. Dans le **CAS 1**, écrivez une suite à votre programme MATLAB qui teste votre fonction en la comparant avec la fonction `cpsd()` de MATLAB .

Mais attention : comme la fonction `xcorr()`, si vous voulez calculer l'interspectre entre $x(k)$ et $y(k)$ vous devez utiliser la commande `cpsd(y, x, ...)` au lieu de `cpsd(x, y, ...)`. Ceci est lié au fait que les intercorrélations et les interspectres entre deux signaux ne sont pas commutatifs.

- (a) générez un bruit blanc $x(k)$ et le bruit filtré $y(k)$,
- (b) présentez sur une même figure pour $f \in [-1/2, 1/2]$ les module des DSP et interspectre de ces signaux, respectivement $\hat{\Phi}_{xx}^{\text{WELCH}}(f, w, N, L)$, $\hat{\Phi}_{xy}^{\text{WELCH}}(f, w, N, L)$ et $\hat{\Phi}_{yy}^{\text{WELCH}}(f, w, N, L)$, obtenues par votre fonction, `pwelch()` et `cpsd()`.
- (c) présentez sur une autre figure la DSP estimée $\Phi_{yy}(f)$ et la DSP théorique donnée par la relation fondamentale reliant les DSP entrée-sortie d'un SLIT de réponse en fréquence $H(f)$

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2 . \quad (8)$$

Vous calculerez bien sûr $H(f)$ avec la fonction `freqz()` de MATLAB .

- (d) présentez sur une autre figure la CPSD estimée $\Phi_{xy}(f)$ et la CPSD théorique donnée par la relation fondamentale reliant les DSP entrée-sortie d'un SLIT de réponse en fréquence $H(f)$

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot H(f) . \quad (9)$$

Vous calculerez bien sûr $H(f)$ avec la fonction `freqz()` de MATLAB .

2. Dans le **CAS 2**, reprenez les trois précédentes étapes. Le programme est quasiment identique si ce n'est que pour générer $x(k)$, vous devez filtrer le bruit blanc $n(k)$ par un filtre d'opérateur de transfert $\frac{1}{1-\alpha q^{-1}}$, avec $|\alpha| < 1$.

2.4 Utilisation de l'analyse spectrale pour estimer la réponse en fréquence d'un SLIT

2.4.1 Travail à faire dans le cas d'un bruit de sortie nul $b(k) = 0$ soit $z(k) = y(k)$

1. Démontrez que la réponse en fréquence d'un SLIT peut être obtenue à partir d'une analyse spectrale et inter-spectrale des signaux d'entrée et de sortie du SLIT, respectivement $x(k)$ et $z(k) = y(k)$, par les deux relations

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{\Phi_{yy}(f)}{\Phi_{xx}(f)}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Expression ne permettant pas de connaître} \\ \text{la réponse en phase du SLIT (analyseur scalaire)} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$H(f) = \frac{\Phi_{xy}(f)}{\Phi_{xx}(f)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Expression permettant de connaître} \\ \text{la réponse en phase du SLIT (analyseur vectoriel)} \end{array} \right. \quad (11)$$

2. Complétez votre programme MATLAB et vérifiez que pour le **CAS 1** et pour le **CAS 2** on peut bien remonter à réponse en fréquence avec les PSD et les CPSD.

2.4.2 Travail à faire dans le cas d'un bruit de sortie non nul - Notion de cohérence fréquentielle

En pratique il est très fréquent que la mesure de la sortie du filtre soit perturbée par un bruit additif $b(k) \neq 0$ soit $z(k) \neq y(k)$. L'utilisateur ne dispose donc que de $z(k)$ mais pas de $y(k)$ pour estimer la réponse en fréquence du système. Pour le **CAS 1** et pour le **CAS 2**, et en utilisant les fonctions `pwelch()` et `cpsd()`, maintenant que vous connaissez parfaitement les méthodes d'estimation des PSD et CPSD, complétez votre programme pour estimer

1. le module de la réponse en fréquence du système entre $f \in [-1/2, 1/2]$ et montrez sur une figure que

$$|H(f)| \neq \sqrt{\frac{\Phi_{zz}(f)}{\Phi_{xx}(f)}} \quad (12)$$

2. le module et l'argument de la réponse en fréquence du système entre $f \in [-1/2, 1/2]$ et montrez sur une figure que

$$H(f) \neq \frac{\Phi_{xz}(f)}{\Phi_{xx}(f)} \quad (13)$$

Cependant, l'utilisateur peut toujours calculer $\sqrt{\Phi_{zz}(f)/\Phi_{xx}(f)}$ et $\Phi_{xz}(f)/\Phi_{xx}(f)$ sans savoir si l'estimation de $|H(f)|$ ou $H(f)$ est correcte ou pas, ce qui veut dire également que l'utilisateur ne sait pas a priori si le bruit additif $b(k)$ est important ou pas.

Pour donner une certaine confiance (ou pas) dans ces estimations de réponse en fréquence, il est indispensable de calculer la **fonction de cohérence** $\Gamma_{xz}(f)$ des deux signaux $x(k)$ et $z(k)$. Cette fonction est une fonction de la fréquence f qui est définie en fonction de l'interspectre $\Phi_{xz}(f)$ et des deux DSP de $x(k)$ et $z(k)$. Nous avons :

$$\Gamma_{xz}(f) = \frac{|\Phi_{xz}(f)|^2}{\Phi_{xx}(f)\Phi_{zz}(f)} \quad \text{avec obligatoirement} \quad 0 \leq \Gamma_{xz}(f) \leq 1. \quad (14)$$

La condition $0 \leq \Gamma_{xz}(f) \leq 1$ vient de l'inégalité de SCHWARTZ.

Cette fonction de cohérence joue, dans le domaine fréquentiel, un rôle analogue à celui du coefficient de corrélation dans le domaine temporel : les signaux $x(k)$ et $z(k)$ sont dits incohérents, c'est à dire non corrélés à la fréquence f_1 , si $\Gamma_{xz}(f_1) = 0$. Si $\Gamma_{xz}(f) = 1$ pour tout f , les signaux sont parfaitement cohérents. Cette fonction de cohérence est toujours égale à 1 si $z(t)$ résulte du filtrage de $x(t)$ par un filtre quelconque (ou l'inverse) et si aucun bruit additif ne vient perturber un des signaux. $\Gamma_{xz}(f)$ permet également de contrôler s'il existe une relation linéaire entre $x(k)$ et $z(k)$. Tout comportement non linéaire abaisse $\Gamma_{xz}(f)$. Une fonction de cohérence inférieure à 1 indique donc

- soit la présence d'un bruit perturbateur additif en sortie du système,

- soit une relations non linéaire entre $x(k)$ et $z(k)$,
 - soit que $z(k)$ ne dépend pas uniquement de $x(k)$,
 - soit une combinaison de ces trois phénomènes.
1. Dans le cas où $b(k) = 0$ soit $z(k) = y(k)$, et en utilisant (8) et (9), démontrez théoriquement que $\Gamma_{xz}(f) = 1 \quad \forall f$
 2. En utilisant vos fonctions d'estimation de PSD et de CPSD et la fonction MATLAB `mscohere()` représentez sur une figure et pour $f \in [-1/2, 1/2]$ l'estimation de la fonction de cohérence $\Gamma_{xy}(f) = \Gamma_{xz}(f)$ si le bruit additif de sortie est nul $b(k) = 0$.
 3. en choisissant $b(k) \neq 0$, mais d'amplitude "raisonnable" par rapport à celle de $y(k)$, représentez sur une figure l'estimation de $\sqrt{\Phi_{zz}(f)/\Phi_{xx}(f)}$ et $\Phi_{xz}(f)/\Phi_{xx}(f)$ avec la réponse en fréquence théorique $H(f)$ (module et argument). Remarquez que ces estimations ne correspondent pas à $H(f)$ dans certains domaines de fréquence. Sur une autre figure, et toujours pour le même $b(k) \neq 0$, présentez $\Gamma_{xz}(f)$ et remarquez que, quand la cohérence entre $x(k)$ et $z(k)$ est faible, l'estimation de $H(f)$ est moins bonne. Commentez.

2.5 Estimation de la réponse impulsionnelle d'un SLIT à partir des corrélations et dans le domaine temporel

1. Rappelez la relation liant $\varphi_{xx}(k)$, $\varphi_{xy}(k)$ et la réponse impulsionnelle du filtre $h(k)$.
2. Donnez la relation reliant $\varphi_{xy}(k)$ et $\varphi_{xz}(k)$ et expliquez pourquoi l'utilisation des auto et inter corrélations permet théoriquement de s'affranchir totalement du bruit perturbateur $b(k)$. Illustrez ce résultat avec un programme MATLAB et en estimant les corrélations par la méthode biaisée et la fonction `xcorr(..., 'biased')`.
3. Dans le **CAS 1** qui correspond au cas où $x(k)$ est un bruit blanc de variance σ_x^2 , montrez qu'une estimation de $h(k)$ peut être obtenue par

$$\hat{h}(k) = \frac{\hat{\varphi}_{xy}(k)}{\sigma_x^2} = \frac{\hat{\varphi}_{xz}(k)}{\sigma_x^2}. \quad (15)$$

4. Complétez votre programme MATLAB pour comparer cette estimation $\hat{h}(k)$ de la réponse impulsionnelle avec la réponse impulsionnelle théorique que vous aurez calculée en filtrant une impulsion unité avec la fonction `filter()` de MATLAB. Notez la durée N_h de la réponse impulsionnelle au delà de laquelle $h(k) \approx 0$.
5. Dans le **CAS 2** où $x(k)$ n'est plus un bruit blanc, expliquez pourquoi la relation (15) n'est plus valable.
6. Lisez très attentivement le § 3.4 à la page 13 de ce document.
7. Pour le **CAS 2**, complétez votre programme MATLAB pour calculer $2N_h + 1$ points de l'auto-corrélation $\hat{\varphi}_{xx}(k)$. Sélectionnez les $N_h + 1$ points de $\hat{\varphi}_{xx}(k)$ pour $k \in [0, N_h]$ et construisez la matrice d'autocorrélation de $x(k)$. Cette matrice a une forme particulière puisqu'elle s'exprime avec les $N_h + 1$ points de $\hat{\varphi}_{xx}(k)$ que l'on arrange par permutations circulaires en utilisant en plus le fait que la fonction d'autocorrélation est paire : $\hat{\varphi}_{xx}(k) = \hat{\varphi}_{xx}(-k)$. Cette matrice est une matrice de TOEPLITZ et peut être construite avec la fonction `toeplitz()` de MATLAB.
8. Calculez $\hat{\varphi}_{xz}(k)$ et sélectionnez-en les $N_h + 1$ points pour $k \in [0, N_h]$.
9. Calculez une estimation de $h(k)$ en utilisant l'opérateur `\` de MATLAB pour résoudre le système à $N_h + 1$ équations et $N_h + 1$ inconnues donné au § 3.4. Ce travail est l'équivalent dans le domaine temporel à ce qui est pratiqué à (11) dans le domaine fréquentiel.

3 Équations de convolution pour la corrélation

3.1 Introduction

Soit $x(t$ ou $k)$ le signal d'entrée à énergie finie ou infinie d'un filtre stable, de réponse impulsionnelle $h(t$ ou $k)$, qui délivre en sortie le signal $y(t$ ou $k)$.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les relations qui existent entre les fonctions d'auto- et d'intercorrélation des signaux d'entrée et de sortie d'un SLIT. Les démonstrations sont faites pour les signaux à temps discret, mais la transposition au cas des signaux à temps continu est immédiate. **Notons pour terminer que ces relations sont différentes selon que les signaux sont à énergie ou à puissance moyenne finie.**

3.2 Cas général pour les signaux à énergie finie

En utilisant les relations existant entre convolution et corrélation de signaux à énergie finie, et le fait que

$$y(k) = x(k) \star h(k) ,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(k) &= x^*(-k) * y(k) \\ &= x^*(-k) * x(k) \star h(k) \\ &= \overset{\circ}{\varphi}_{xx}(k) * h(k) \end{aligned}$$

Dans le domaine fréquentiel, cette relation s'écrit :

$$\overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f) = H(f) \overset{\circ}{\Phi}_x(f) .$$

Par ailleurs, l'autocorrélation du signal de sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_{yy}(k) &= y(-k) * y(k) \\ &= y(-k) * x(k) \star h(k) \\ &= \overset{\circ}{\varphi}_{yx}(k) * h(k) \\ &= x(-k) * h(-k) * x(k) \star h(k) \\ &= \overset{\circ}{\varphi}_{xx}(k) * \overset{\circ}{\varphi}_{hh}(k) \end{aligned}$$

Dans le domaine fréquentiel, cette relation s'écrit :

$$\overset{\circ}{\Phi}_y(f) = \overset{\circ}{\Phi}_x(f) |H(f)|^2 .$$

Ces différents résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Équations de convolution pour la corrélation cas des signaux à énergie finie			
	Temps continu	Temps discret	
Domaine temporel	$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) &= \overset{\circ}{\varphi}_{xx}(\tau) * h(\tau) \\ \overset{\circ}{\varphi}_{yy}(\tau) &= \overset{\circ}{\varphi}_{yx}(\tau) * h(\tau) \\ &= \overset{\circ}{\varphi}_{xx}(\tau) * \overset{\circ}{\varphi}_{hh}(\tau) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(k) &= \overset{\circ}{\varphi}_{xx}(k) * h(k) \\ \overset{\circ}{\varphi}_{yy}(k) &= \overset{\circ}{\varphi}_{yx}(k) * h(k) \\ &= \overset{\circ}{\varphi}_{xx}(k) * \overset{\circ}{\varphi}_{hh}(k) \end{aligned}$	(16)
Domaine fréquentiel	$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Phi}_{xy}(F) &= \overset{\circ}{\Phi}_{xx}(F) H(F) \\ \overset{\circ}{\Phi}_{yy}(F) &= \overset{\circ}{\Phi}_{yx}(F) H(F) \\ &= \overset{\circ}{\Phi}_{xx}(F) H(F) ^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f) &= \overset{\circ}{\Phi}_{xx}(f) H(f) \\ \overset{\circ}{\Phi}_{yy}(f) &= \overset{\circ}{\Phi}_{yx}(f) H(f) \\ &= \overset{\circ}{\Phi}_{xx}(f) H(f) ^2 \end{aligned}$	

3.3 Cas général pour les signaux à puissance moyenne finie

Soit $x(t$ ou $k)$ le signal d'entrée à puissance moyenne finie d'un filtre stable, de réponse impulsionnelle $h(t$ ou $k)$. Ce filtre délivre en sortie le signal $y(t$ ou $k)$ qui est lui aussi à puissance moyenne finie. Nous avons :

$$y(m) = x(m) * h(m) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)x(m-l) .$$

En multipliant les deux membres de cette relation par $x^*(m-k)$, puis en sommant sur m de $-M$ à M on obtient :

$$\sum_{m=-M}^M x^*(m-k)y(m) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) \sum_{m=-M}^M x^*(m-k)x(m-l) .$$

En divisant les deux membres de cette relation par $2M+1$ et en calculant la limite du résultat obtenu quand $M \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\underbrace{\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M x^*(m-k)y(m)}_{\varphi_{xy}(k)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \underbrace{\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M x^*(m-k)x(m-l)}_{\varphi_{xx}(k-l)} ,$$

soit :

$$\varphi_{xy}(k) = h(k) * \varphi_{xx}(k) .$$

Par ailleurs, en multipliant $y(m) = h(m) * x(m)$ par $y^*(m-k)$ et en effectuant les mêmes calculs que ci-dessus, on obtient :

$$\varphi_y(k) = h(k) * \varphi_{yx}(k) .$$

En utilisant la propriété

$$\varphi_{yx}(k) = \varphi_{xy}^*(-k)$$

On obtient :

$$\varphi_{yx}(k) = \varphi_{xy}^*(-k) = h^*(-k) * \underbrace{\varphi_{xx}^*(-k)}_{\varphi_{xx}(k)} .$$

Ainsi, l'autocorrélation du signal de sortie $y(k)$ s'écrit :

$$\varphi_y(k) = \underbrace{h(k) * h^*(-k)}_{\overset{\circ}{\varphi}_h(k) = \text{autocorrélation du signal à énergie finie } h(k)} * \varphi_x(k) ,$$

qui peut encore s'écrire :

$$\varphi_y(k) = \overset{\circ}{\varphi}_h(k) * \varphi_x(k) .$$

La transformée de Fourier de cette relation donne :

$$\begin{aligned} \Phi_y(f) &= \overset{\circ}{\Phi}_h(f) \cdot \Phi_x(f) \\ &= |H(f)|^2 \cdot \Phi_x(f) \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des résultats obtenus.

Équations de convolution pour la corrélation cas des signaux à puissance moyenne finie		
	Temps continu	Temps discret
Domaine temporel	$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * h(\tau)$ $\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{yx}(\tau) * h(\tau)$ $= \varphi_{xx}(\tau) * \overset{\circ}{\varphi}_{hh}(\tau)$	$\varphi_{xy}(k) = \varphi_{xx}(k) * h(k)$ $\varphi_{yy}(k) = \varphi_{yx}(k) * h(k)$ $= \varphi_{xx}(k) * \overset{\circ}{\varphi}_{hh}(k)$
Domaine fréquentiel	$\Phi_{xy}(F) = \Phi_{xx}(F)H(F)$ $\Phi_{yy}(F) = \Phi_{yx}(F)H(F)$ $= \Phi_{xx}(F) H(F) ^2$	$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{xx}(f)H(f)$ $\Phi_{yy}(f) = \Phi_{yx}(f)H(f)$ $= \Phi_{xx}(f) H(f) ^2$

(17)

3.4 Formulation matricielle des équations de convolution pour la corrélation - Cas où le SLIT est causal et RIF

Dans ce paragraphe nous considérons le cas particulier d'un SLIT à temps discret **causal** ayant une réponse impulsionnelle $h(k)$ de durée N **finie**. Ce filtre est excité par un signal $x(k)$ à puissance moyenne finie et délivre en sortie $y(k)$. Nous pouvons alors écrire N fois l'équation de convolution pour la corrélation

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xy}(k) &= h(k) * \varphi_{xx}(k) \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(k-l) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} h(l)x(k-l)
 \end{aligned}$$

Pour $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ et en utilisant la propriété de symétrie $\varphi_{xx}^*(-k) = \varphi_{xx}(k)$, ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xy}(0) &= h(0)\varphi_{xx}(0) + h(1)\varphi_{xx}(-1) + h(2)\varphi_{xx}(-2) + \dots h(N-1)\varphi_{xx}(-N+1) \\
 \varphi_{xy}(1) &= h(0)\varphi_{xx}(1) + h(1)\varphi_{xx}(0) + h(2)\varphi_{xx}(-1) + \dots h(N-1)\varphi_{xx}(-N+2) \\
 &\vdots \\
 \varphi_{xy}(N-1) &= h(0)\varphi_{xx}(N-1) + h(1)\varphi_{xx}(N-2) + h(2)\varphi_{xx}(N-3) + \dots h(N-1)\varphi_{xx}(0)
 \end{aligned}$$

Cette relation peut encore s'écrire sous la forme matricielle suivante :

Formulation matricielle des équations de convolution pour la corrélation		
$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{xy}(0) \\ \varphi_{xy}(1) \\ \varphi_{xy}(2) \\ \vdots \\ \varphi_{xy}(N-1) \end{pmatrix}}_{\varphi_{\mathbf{xy}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{xx}(0) & \varphi_{xx}^*(1) & \varphi_{xx}^*(2) & \dots & \varphi_{xx}^*(N-1) \\ \varphi_{xx}(1) & \varphi_{xx}(0) & \varphi_{xx}^*(1) & \dots & \varphi_{xx}^*(N-2) \\ \varphi_{xx}(2) & \varphi_{xx}(1) & \varphi_{xx}(0) & \dots & \varphi_{xx}^*(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{xx}(N-1) & \varphi_{xx}(N-2) & \varphi_{xx}(N-3) & \dots & \varphi_{xx}(0) \end{pmatrix}}_{\varphi_{\mathbf{xx}}} \underbrace{\begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}}$		
$\varphi_{\mathbf{xy}} = \varphi_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{h}$		

(18)

Dans cette relation,

- $\varphi_{\mathbf{xy}}$ est le vecteur d'intercorrélation,
- $\varphi_{\mathbf{xx}}$ est appelée matrice d'autocorrélation. C'est une matrice de TOEPLITZ car elle présente une symétrie hermitienne : $\varphi_x = \varphi_x^T$ où l'opérateur T désigne l'opérateur de transposition et conjugaison.
- \mathbf{h} est le vecteur colonne des N coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre.

Avec cette formule, il est possible par exemple, comme nous le montrons au paragraphe consacré aux applications des corrélations :

1. d'estimer les N premiers points de l'intercorrélation entrée-sortie d'un filtre linéaire si l'on connaît les N premiers points de $\varphi_x(k)$ et de $h(k)$,
2. d'estimer les N premiers points de la réponse impulsionnelle $h(k)$ si l'on connaît (ou mesure) $\varphi_{xx}(k)$ et $\varphi_{xy}(k)$. Ce problème est un problème **d'identification**.