

# Métaheuristiques Guidées par l'Apprentissage pour la Coloration de Graphe

---

Cyril GRELIER

12 Décembre 2023

Directeur	Jin-Kao HAO	Rapporteur	Tristan CAZENAVE
Encadrant	Olivier GOUDET	Rapporteur	Sébastien VEREL
		Examinateur	Nicolas DURAND
		Examinateuse	Béatrice DUVAL
		Invité	Daniel PORUMBEL

# Sommaire

Problèmes Étudiés

État de l'Art

Réduction de Sommets

Bornes Supérieures sur le Score et le Nombre de Couleurs pour le WVCP

Arbre de Recherche de Monte Carlo - MCTS

... et Algorithmes Gloutons

... et Recherches Locales

... et Hyperheuristiques

Algorithmes Mémétiques - AHEAD

Conclusion & Perspectives

## Problèmes Étudiés

---

# GCP - Graph Coloring Problem

## La Coloration de Graphe

Objectif : trouver une coloration légale minimisant le nombre de couleurs

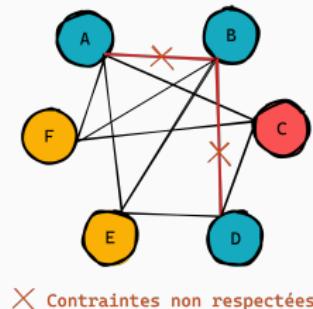
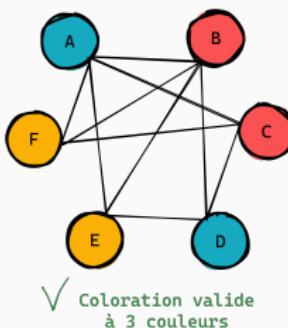
Score :

- Nombre de couleurs  $k$  (légale)
- Nombre de conflits  $|C|$  (illégale)
- Nombre de sommets non colorés  $|U|$  (partiellement légale)

Problème NP-difficile

Applications :

- Gestion d'emplois du temps
- Affectation de fréquences
- Sudoku



# GCP - Sudoku

1			9	2		7	4
9	2	4	1		5	3	
	3	5	6			2	
6		4	7			8	
	2		5	4	6	7	
5		8	6		9		
	6		8	7			
5	9		3			1	
4		6	1	3		9	

1	6	5	3	9	2	8	7	4
9	2	4	1	7	8	5	3	6
7	8	3	5	6	4	9	1	2
6	9	1	4	3	7	2	5	8
8	3	2	9	5	1	4	6	7
5	4	7	8	2	6	1	9	3
3	1	6	2	8	9	7	4	5
2	5	9	7	4	3	6	8	1
4	7	8	6	1	5	3	2	9

# WVCP - Weighted Vertex Coloring Problem

## La Coloration de Graphe Pondérée

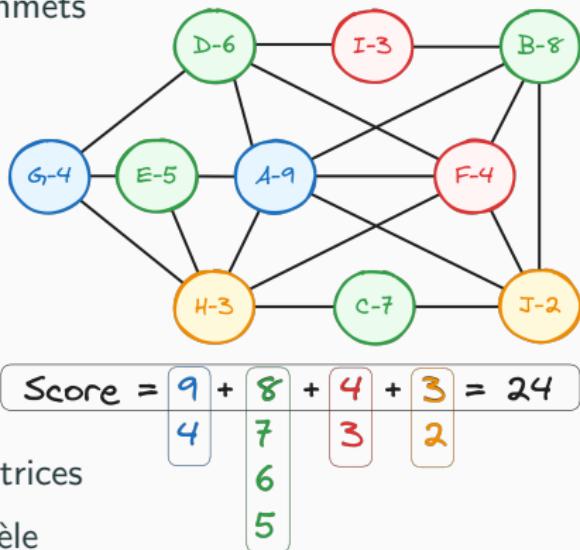
Objectif : trouver une coloration légale minimisant la somme des poids des sommets les plus lourds de chaque couleur

Score :  $\sum_{i=1}^k \max_{v \in V_i} w(v)$

Problème NP-difficile

Applications :

- Gestion de traffic dans des communications satellites
- Problème de décomposition de matrices
- Gestion de tâches par lot en parallèle



# WVCP - Gestion de Tâches par Lots en Parallèle

<p>8 Tâches</p> <p>J1 - 9s J2 - 8s J3 - 8s J4 - 6s J5 - 5s J6 - 5s J7 - 4s J8 - 2s</p> <p>1 - Préparation des tâches dans un graphe biparti (tâches - ressources)</p>	<p>3 Ressources</p>	<p>2 - Projection du graphe biparti sur les ressources pour obtenir un graphe de besoins mutuels</p>															
<p>score optimal = <math>9 + 8 + 6 + 2 = 25</math></p> <p>4 - Résolution du problème en minimisant la somme des poids les plus lourds de chaque couleur</p>	<p>4 Lots</p> <p>8 Tâches</p> <p>3 Ressources</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>L1 - 9s</td> <td>L2 - 8s</td> <td>L3 - 6s</td> <td>L4 - 2s</td> <td>Total : 25s</td> </tr> <tr> <td>J1 - 9s J3 - 8s J5 - 5s</td> <td>J2 - 8s</td> <td>J4 - 6s J6 - 5s J7 - 4s</td> <td>J8 - 2s</td> <td>R1 R2 R3</td> </tr> <tr> <td>R1 R2 R3</td> <td>R1 R2 R3</td> <td>R1 R2 R3</td> <td>R1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>5 - Préparation des lots en fonction de la couleur des tâches</p>	L1 - 9s	L2 - 8s	L3 - 6s	L4 - 2s	Total : 25s	J1 - 9s J3 - 8s J5 - 5s	J2 - 8s	J4 - 6s J6 - 5s J7 - 4s	J8 - 2s	R1 R2 R3	R1 R2 R3	R1 R2 R3	R1 R2 R3	R1		
L1 - 9s	L2 - 8s	L3 - 6s	L4 - 2s	Total : 25s													
J1 - 9s J3 - 8s J5 - 5s	J2 - 8s	J4 - 6s J6 - 5s J7 - 4s	J8 - 2s	R1 R2 R3													
R1 R2 R3	R1 R2 R3	R1 R2 R3	R1														

## Etat de l'Art

---

# État de l'Art et Contributions - GCP

- Recherches locales :
  - **TabuCol** Hertz et Werra [1987] : illégal, one-move
  - **PartialCol** Blöchliger et Zufferey [2008] : partiellement-légal, grenade
  - **TabuEdges** [en cours] (Chap 8)
- Algorithmes mémétiques :
  - **HEA** Galinier et Hao [1999] : GPX, TabuCol
  - **Evo-Div** Porumbel *et al.* [2010] : croisement multi-parents, distances
  - **MACOL** Lü et Hao [2010] : croisement multi-parents, distances
  - **HEAD** Moalic et Gondran [2018] : 2 individus, GPX, TabuCol
  - **DLMCOL** Goudet *et al.* [2022] : +20 000, NN choix croisement
  - **AHEAD** Grelier *et al.* [soumis] (Chap 8)
  - **EvoWeight** Grelier *et al.* [en cours] (Chap 8)
- Apprentissage :
  - **PLSCOL** Zhou *et al.* [2018] : renforcement
  - **TensCol** Goudet *et al.* [2021] : descente de gradient, tenseurs
  - **NRPA** Cazenave *et al.* [2021] : séquences, descente de gradient
  - **MCTS + Glouton** (Chap 5)

# État de l'Art et Contributions - WVCP

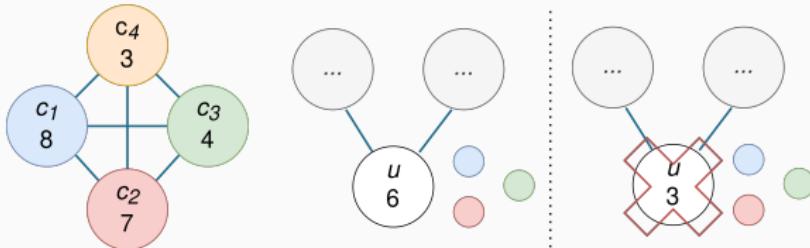
- Apprentissage :
  - **MCTS + Recherche Locale** Grelier *et al.* [2022] (Chap 5,6)
  - **MCTS + Hyperheuristiques** Grelier *et al.* [2023] (Chap 7)
- Algorithmes mémétiques :
  - **DLMCOL** Goudet *et al.* [2022] : +20000, NN choix croisement
  - **AHEAD** Grelier *et al.* [soumis] (Chap 8)
- Recherches locales :
  - **AFISA** Sun *et al.* [2018] : illégal, one-move, coeff adaptatif
  - **RedLS** Wang *et al.* [2020] : illégal, poids arêtes, perturbations
  - **ILS-TS** Nogueira *et al.* [2021] : p-légal, 6 voisnages, perturbations
  - **TabuWeight** Grelier *et al.* [2022] (Chap 6)
- Méthodes exactes :
  - **2-Phase** Malaguti *et al.* [2009] : génération de colonnes, ILP
  - **MWSS** Cornaz *et al.* [2017] : MIP, ensemble indépendants
  - **CP** Goudet *et al.* [2023] : 3 modèles PPC (+ Chap 3,4)

## Réduction de Sommets

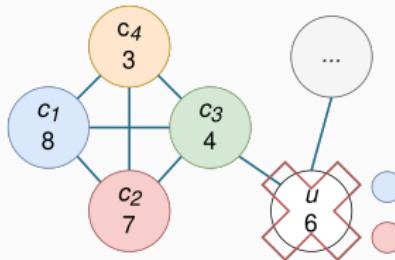
---

# Réduction - Règle R0 et R1

- Règle de Réduction R0 Wang et al. [2020] :

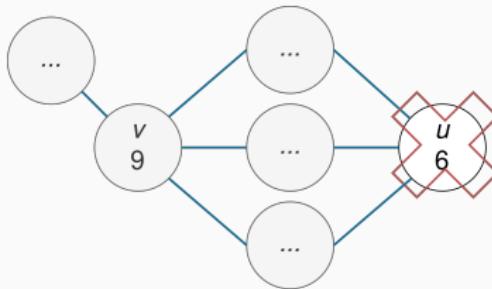


- Règle de Réduction R1, prend en compte les voisins de  $u$  dans  $C$  :



# Réduction - Règle R2 et Procédure Itérative

- Règle de Réduction R2 adaptée de Cheeseman *et al.* [1991] (GCP) :



- Procédure de Réduction Itérative : demo<sup>1</sup>
  1. Calcul d'une clique par sommet avec FastWClq de Cai et Lin [2016]
  2. Tri des sommets par ordre de poids puis degré
  3. Application de R1 et R2 sur chaque sommet
  4. Recommencer tant que des sommets sont supprimés
  5. Le graphe réduit est prêt !

---

1. <https://tinyurl.com/gc-reduction>

## Réduction - En pratique

$\# RI$  : nombre d'instances réduites

$\% RV$  : pourcentage de réduction

$\# RV$  : nombre de sommets réduits

$t(s)$  : temps moyen en secondes

GCP - /244	$\# RI$	$\# RV$ avg	$\# RV$ max	$\% RV$ avg	$\% RV$ max	t(s) avg
R0	132	80.2	1199	26.3	87.7	16.3
R1	132	80.2	1199	26.3	87.7	16.3
R1+R2	146	115.4	1960	29.6	87.7	78.1
Iterative	146	182.5	4033	58.5	97.7	96.7

WVCP - /188	$\# RI$	$\# RV$ avg	$\# RV$ max	$\% RV$ avg	$\% RV$ max	t(s) avg
R0	82	34.2	469	13.4	65	2.6
R1	84	39.5	574	14.7	66.4	3.8
R1+R2	85	41.7	596	15.4	69	4.1
Iterative	85	54.3	683	23.3	80.9	9.8

# Réduction - Conclusion

Fonctionne généralement mieux quand :

- Graphe peu dense
- Existence de grandes cliques (et lourdes pour le WVCP)
- Structure dans le graphe (graphes géométriques, graphes de type réseaux sociaux/livres/wap, ...)

Autres points :

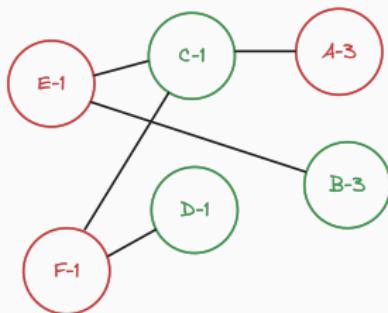
- 67 instances sur 244 du GCP ne gardent plus qu'une clique.
- Aide pour les méthodes de résolution exactes et approchées
- Aide pour le calcul des bornes

# **Bornes Supérieures sur le Score et le Nombre de Couleurs pour le WVCP**

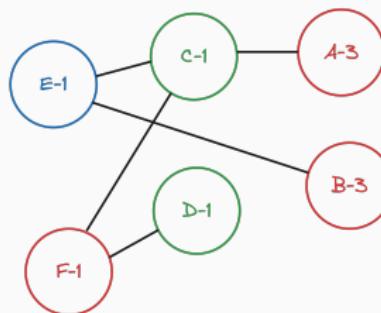
---

## Pourquoi ?

- Pas de limite de nombre de couleurs
- Nécessaire pour les méthodes exactes
- Réduire l'espace de recherche



$$\begin{array}{r} \text{Score} = 3 + 3 = 6 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \text{Score} = 3 + 1 + 1 = 5 \\ \begin{array}{r} 3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} 1 \end{array} \end{array}$$

## Nombre de couleurs

- Borne inférieure : taille de la plus grande clique
- Borne supérieure :  $k \leq \Delta(G) + 1$   
Brooks [1941] GCP, Demange *et al.* [2007] WVCP

## Score

- Borne inférieure : poids de la clique la plus lourde
- Borne supérieure : somme des poids des sommets, BKS<sup>2</sup>

---

## 2. Best Known Score - Meilleur Score Connus dans l'état de l'art

## Bornes WVCP - Contributions

Nouvelles bornes - voir Théorème dans GouDET et al. [2023]

Soit une instance du WVCP  $G = (V, E, w)$  et une solution optimale  $S^*$  possédant  $k$  groupes de couleurs. Alors les bornes supérieures sont :

- sur le nombre de couleurs :

$$k \leq \sum_{w \in W} \chi_{G_w}$$

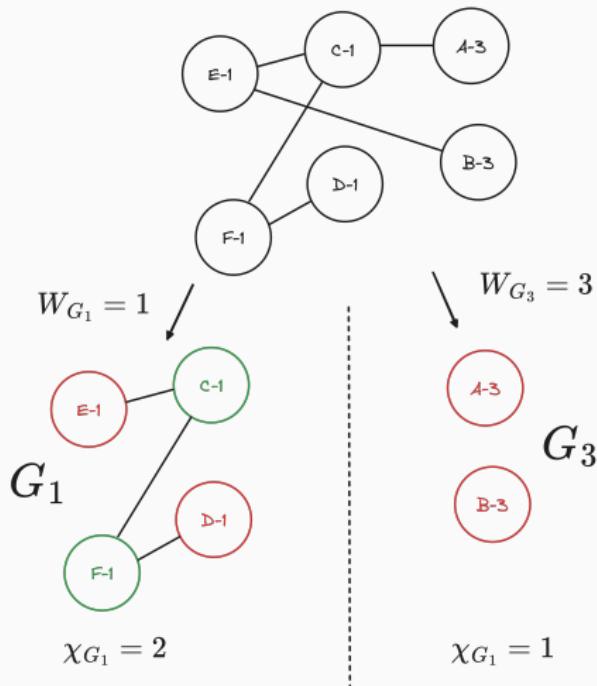
- sur le score :

$$f(S^*) \leq \sum_{w \in W} w \times \chi_{G_w}$$

avec :

- $W = \{w(v) \mid v \in V\}$  l'ensemble des valeurs de poids de  $G$ .
- $G_w = (V_w, E_w)$  le sous-graphe de  $G$  induit par le poids  $w$ .
- $\chi_{G_w}$  le nombre chromatique de  $G_w$ .

# Bornes WVCP - Exemple



Borne supérieure sur le nombre de couleurs :

$$k \leq \sum_{w \in W} \chi_{G_w}$$

$$k \leq \chi_{G_1} + \chi_{G_3}$$

$$k \leq 2 + 1$$

$$k \leq 3$$

Borne supérieure sur le score :

$$f(S^*) \leq \sum_{w \in W} w \times \chi_{G_w}$$

$$f(S^*) \leq W_{G_1} \times \chi_{G_1} + W_{G_3} \times \chi_{G_3}$$

$$f(S^*) \leq 1 \times 2 + 3 \times 1$$

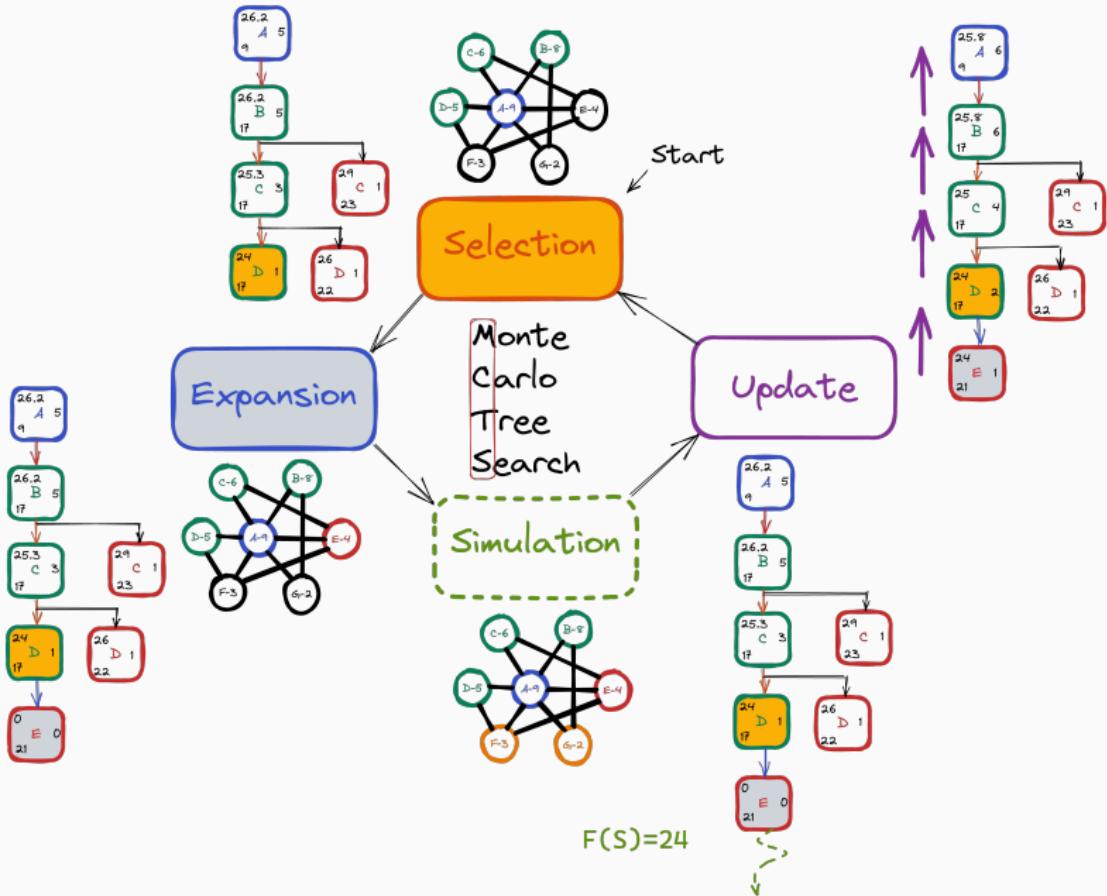
$$f(S^*) \leq 5$$

- 88/188 instances avec une meilleure borne supérieure sur le nombre de couleurs comparé à  $\Delta(G) + 1$   
↪ En moyenne 13 couleurs de moins
- En pratique :
  - Meilleurs résultats avec un modèle PPC Goudet *et al.* [2023]  
↪ 95 optimalités prouvées contre 72 sans les bornes
  - Impact faible sur un MCTS

# **Arbre de Recherche de Monte Carlo - MCTS**

---

# MCTS - Arbre de Recherche de Monte Carlo



# MCTS - Pourquoi ?

## Particularités du WVCP

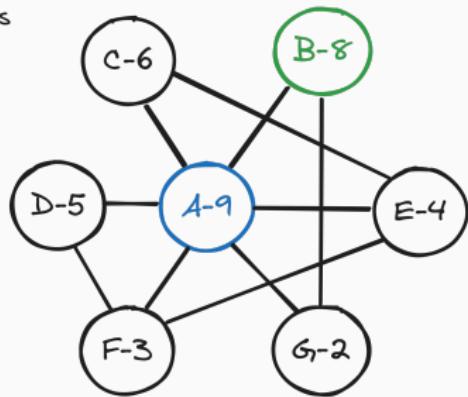
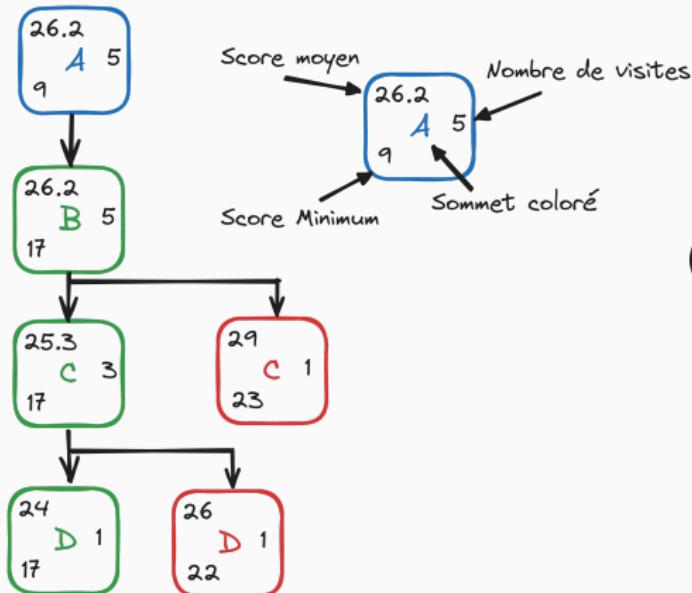
- Certains sommets sont plus importants (poids, degré)
- Seul le sommet le plus lourd d'une couleur a un impact sur le score

## Pourquoi un MCTS ?

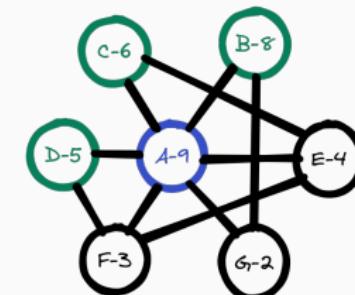
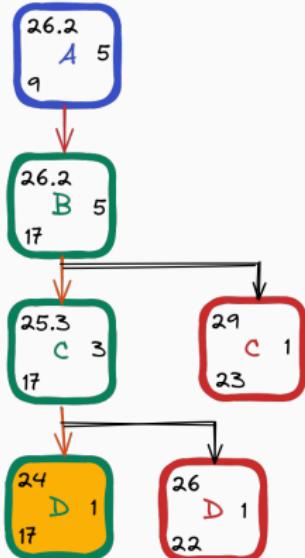
- Bien placer les sommets lourds
- Explorer de nouvelles zones de l'espace de recherche
- Couper les symétries et bien élaguer pour prouver l'optimalité
- Hybridation avec autres méthodes (Glouton, Recherches Locales, . . . )

# MCTS - Un Arbre et un Graphe

Arbre de Recherche



# MCTS - Phase 1 : La Sélection



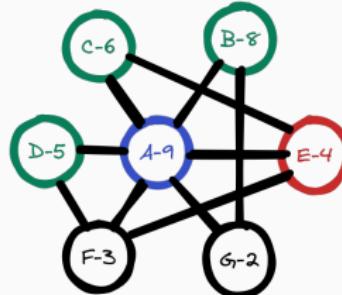
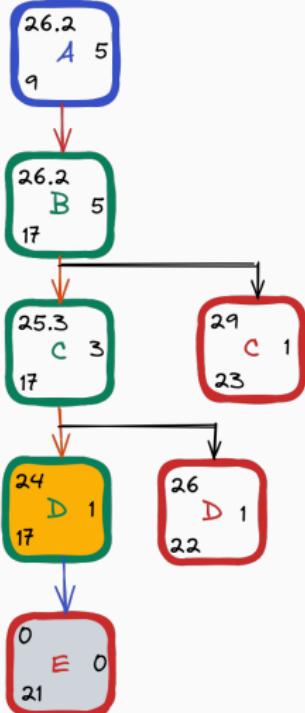
Selection

Choix avec score UCB (Jooken et al. [2023])

Exploitation + coefficient \* Exploration

$$\frac{\text{rank}(C_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^I \text{rank}(C_{t+1}^i)} + c \times \sqrt{\frac{2 * \ln(\text{nb\_visits}(C_t))}{\text{nb\_visits}(C_{t+1}^i)}}$$

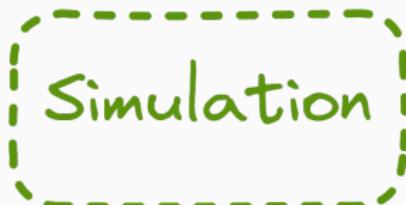
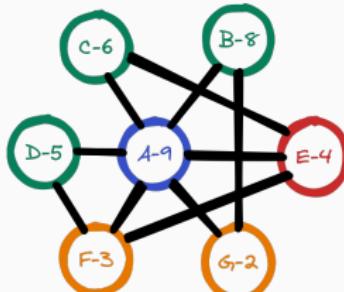
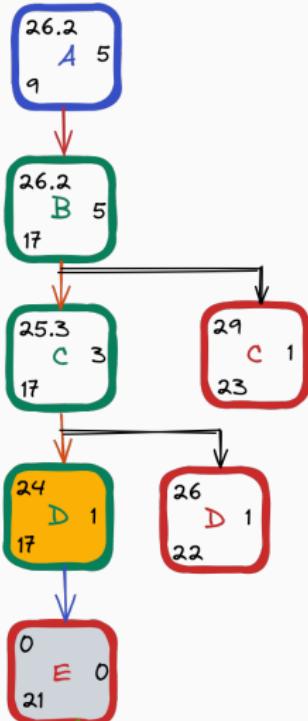
## MCTS - Phase 2 : L'Expansion



Ouvrir un nouveau nœud :

- 1 - Utiliser une couleur déjà utilisée dans la branche
- 2 - Ouvrir une nouvelle couleur (limite bornes)

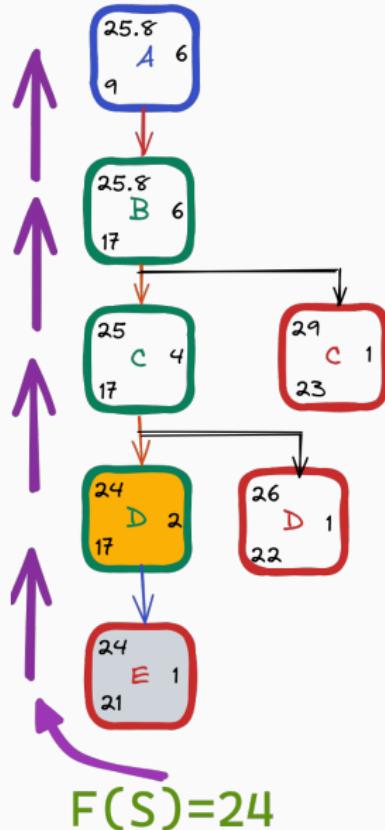
# MCTS - Phase 3 : La Simulation



Compléter la solution

- 0 - Choix purement aléatoire
- 1 - Algorithme Glouton
- 2 - Recherche Locale
- 3 - Hyperheuristiques

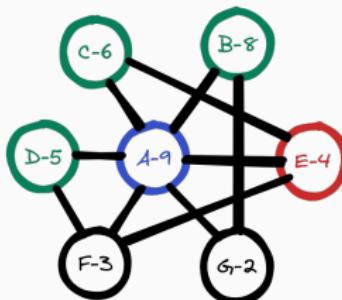
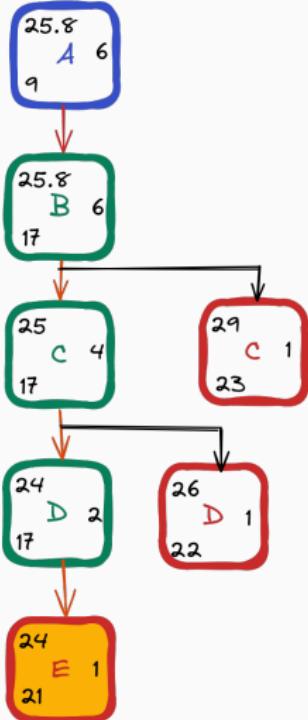
# MCTS - Phase 4 : La Rétropropagation



Mise à jour :

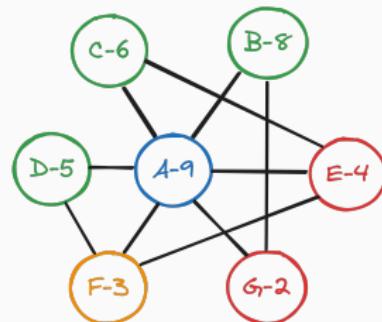
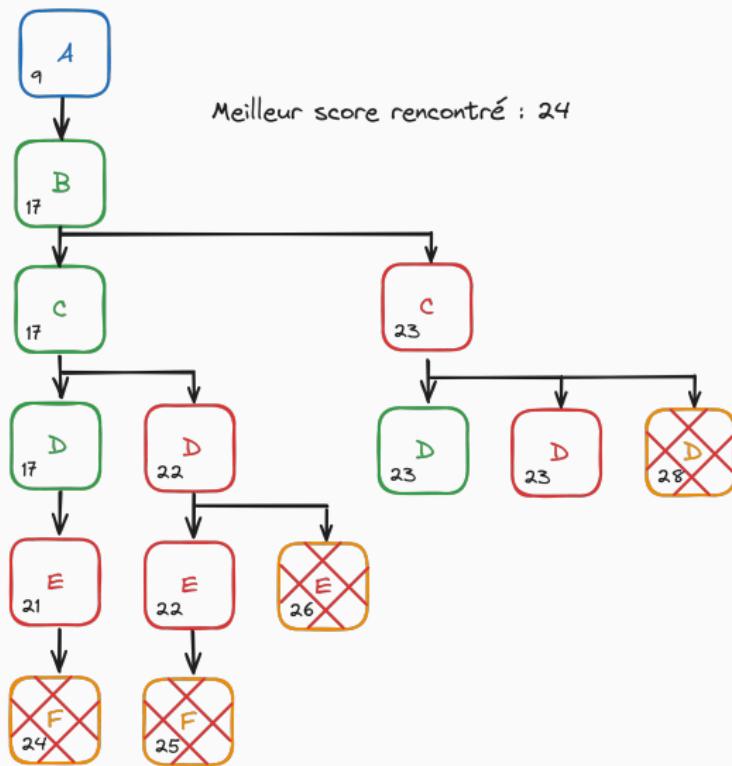
- Moyenne
- Nombre de visites

# MCTS - Phase 1 : La Sélection...

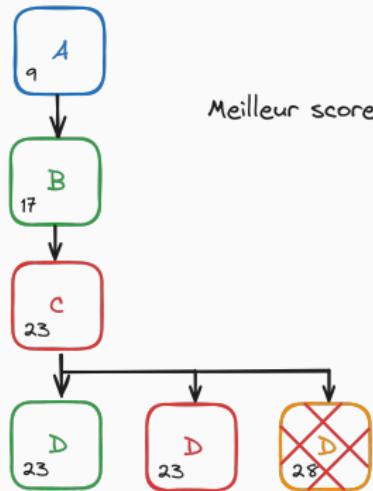


Nouvelle Itération...

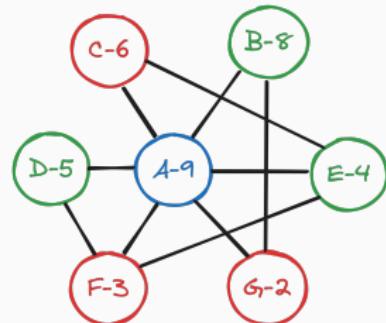
MCTS - Élagage 1



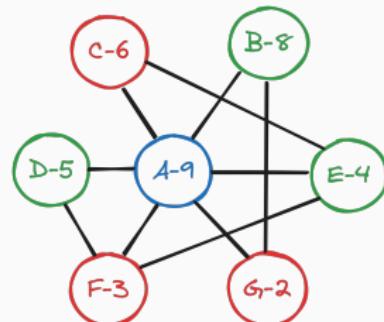
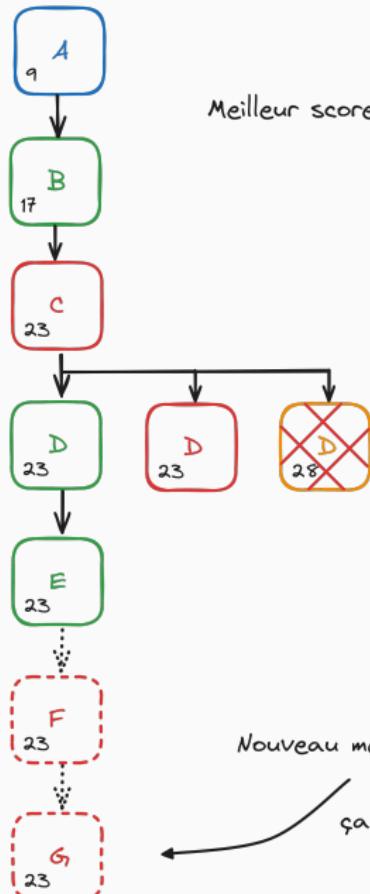
# MCTS - Élagage 2



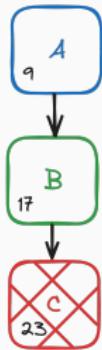
Meilleur score rencontré : 24



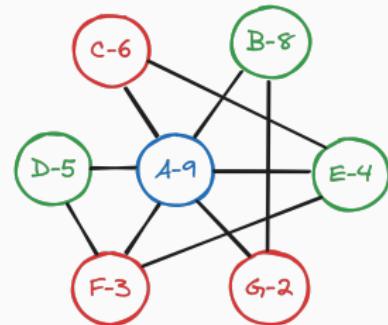
# MCTS - Élagage 3



# MCTS - Élagage 4



Meilleur score rencontré : 23



## Pourquoi l'utilisation de glouton pendant la simulation ?

- Simulation aléatoire pas assez performante

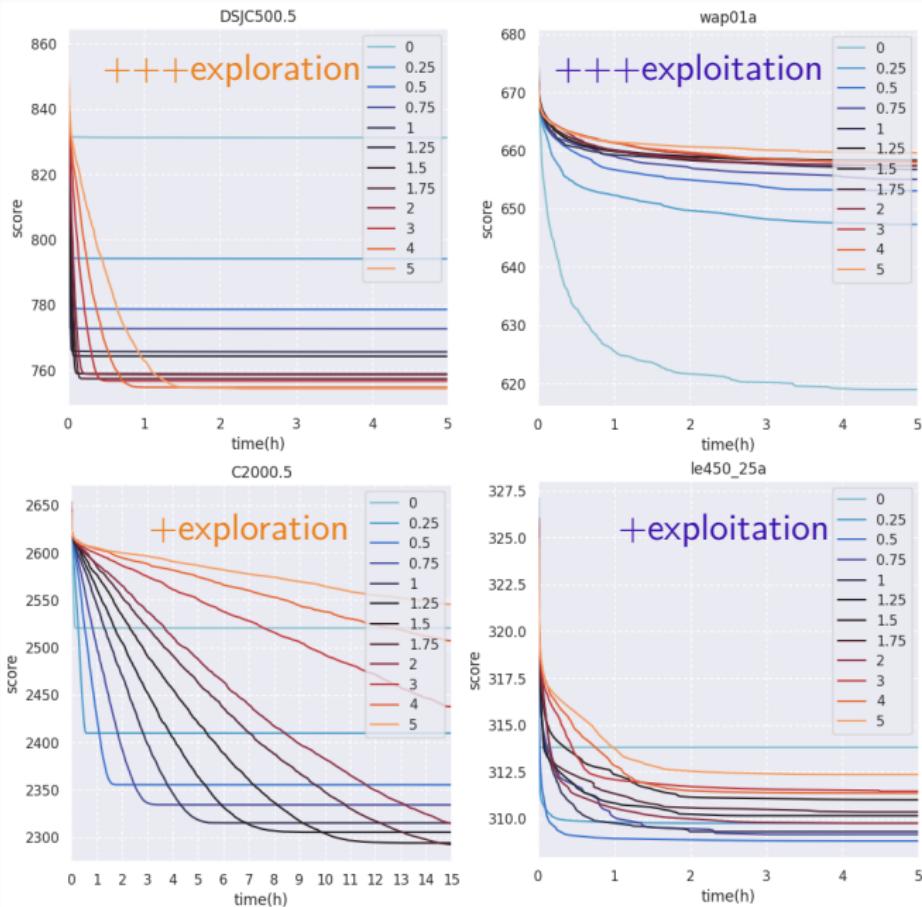
## Algorithmes Gloutons

- **R** :<sup>3</sup> Aléatoire (choix aléatoire des couleurs + une nouvelle couleur)
- **C** :<sup>3</sup> Constraint (choix aléatoire des couleurs)
- **D** :<sup>3</sup> Déterministe (première couleur disponible)
- **DSatur** : Brélaz [1979] (choix du sommet le plus saturé)
- **RLF** : Leighton [1979] (construction de grandes stables)

---

3. Welsh et Powell [1967]

# MCTS + Glouton - Coefficient Exploration VS Exploitation



# MCTS + Glouton - Résultats

## Sur le GCP

- Face à NRPA (Cazenave *et al.* [2021]) :
  - NRPA atteint plus de meilleurs score
  - NRPA meilleur sur les instances géométriques ou avec patterns
  - MCTS obtient de meilleures moyennes
  - MCTS meilleur sur les instances aléatoires, plus denses/grandes
- Face à TabuCol (Hertz et Werra [1987]<sup>4</sup>) :
  - TabuCol reste meilleur de manière générale

## Sur le WVCP

- Face à AFISA (Sun *et al.* [2018]) et RedLS (Wang *et al.* [2020]) :
  - MCTS meilleur sur les instances petites/moyennes
- Face à ILS-TS (Nogueira *et al.* [2021]) :
  - ILS-TS reste meilleur de manière générale

---

4. optimisé par Moalic et Gondran [2018]

## Pour résumer

- MCTS prouve une 100aine d'optimalités sur le **GCP** et une 50aine pour le **WVCP**
- MCTS est très bon sur les petites instances et quelques moyennes
- Moins performant sur les plus grandes instances

## Si après le glouton, on lançait une recherche locale ?

- Explorer le voisinage en améliorant la solution du glouton
- Améliorer les résultats sur les instances moyennes/grandes
- Chercher un bon point de départ pour la recherche locale

## Pour résumer - GCP

- Recherche locale seule plus efficace
- Besoin en diversification différent

## Pour résumer - WVCP

- Améliore les résultats de plusieurs recherches locales
- Résultats différents en fonction de l'instance et de la recherche locale

## Pourquoi ?

- **Pas de meilleure recherche locale :**
  - Aucune ne domine les autres totalement
- **Adaptation :**
  - Choisir le bon opérateur sans connaissances a priori

## Comment ?

- **Critère de Sélection :**
  - Entraînement d'un critère pour choisir les opérateurs
- **Récompense :**
  - Score de la solution après la recherche locale
- **Fenêtre glissante :**
  - Normalisation des scores des ws dernières itérations

## Quel critère de sélection ?

- **Random** Choix aléatoire uniforme
- **Deleteur** Supprime les opérateurs  $o$  les moins performants
- **Roulette** Goëffon *et al.* [2016] Choix aléatoire pondéré par les récompenses ( $r$ )

$$proba[o] = p_{min} + (1 - |O| * p_{min}) * \frac{r[o]}{\sum r}$$

- **Pursuit** Goëffon *et al.* [2016] Sélection en faveur du meilleur opérateur ( $b$ )

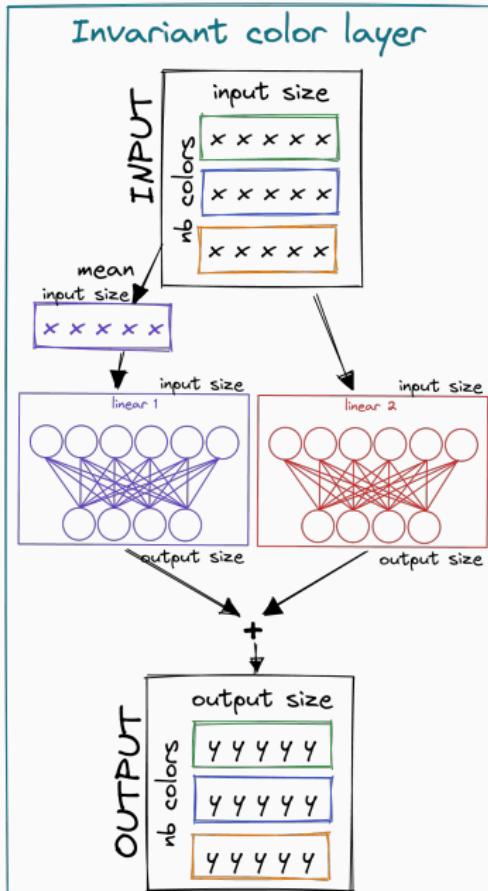
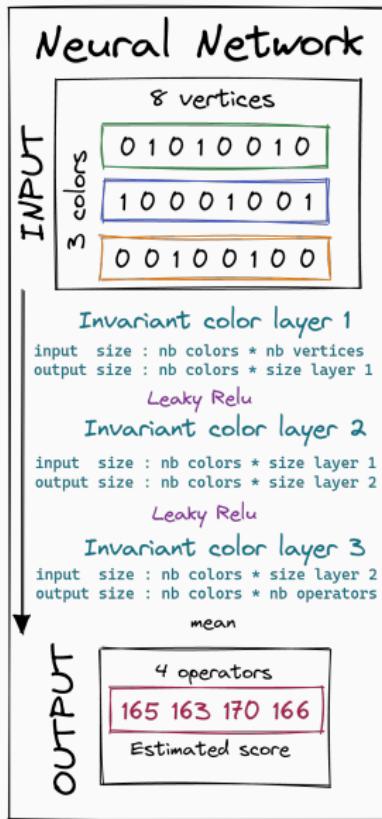
$$\begin{cases} proba[b] = proba[b] + \beta(p\_max - proba[b]) \\ proba[o] = proba[o] + \beta(p\_min - proba[o]) \end{cases}$$

- **UCB** : Préférer les meilleurs en encourageant l'exploration

$$score[o] = r[o] + c * \sqrt{2 * \frac{\log(\sum visits)}{visits[o]}}$$

- **NN** : Recommendation d'un réseau de neurones sur une solution brute avec des Deep Sets (Zaheer *et al.* [2017])

# Réseau de Neurones - NN - Deep sets



## Quels opérateurs de recherche locale ? - WVCP

- **AFISA** : Sun *et al.* [2018]
- **RedLS** : Wang *et al.* [2020]
- **ILS-TS** : Nogueira *et al.* [2021]
- **TabuWeight (TW)** : Grelier *et al.* [2022]

## Fonctionnement :

1. Compléter la solution avec un glouton
2. Demander au critère quelle recherche locale utiliser
3. Lancer la recherche locale
4. Mettre à jour le critère avec le score obtenu

# MCTS + Hyperheuristiques - Résultats WVCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/188	AFISA	MCTS+AFISA	TW	MCTS+TW	RedLS	MCTS+RedLS	ILS-TS	MCTS+ILS-TS	Random	Deleter	Roulette	UCB	Pursuit	NN	#BKS	#Best	#Best Avg
AFISA	-	35	<b>49</b>	17	<b>53</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	114	114	45
MCTS+AFISA	<b>40</b>	-	<b>73</b>	10	<b>86</b>	0	1	0	0	0	0	0	0	0	115	115	97
TW	40	40	-	25	<b>48</b>	1	0	3	2	2	2	2	1	2	99	99	53
MCTS+TW	<b>74</b>	<b>73</b>	<b>78</b>	-	<b>101</b>	5	1	0	0	0	0	0	0	0	132	132	98
RedLS	41	35	47	29	-	11	14	15	12	11	12	13	11	11	112	127	44
MCTS+RedLS	<b>103</b>	<b>82</b>	<b>107</b>	<b>72</b>	<b>102</b>	-	<b>20</b>	<b>28</b>	5	5	4	3	2	4	152	153	142
ILS-TS	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>106</b>	<b>75</b>	<b>96</b>	19	-	<b>18</b>	10	11	10	9	11	11	<b>159</b>	<b>164</b>	<b>159</b>
MCTS+ILS-TS	<b>102</b>	<b>82</b>	<b>103</b>	<b>73</b>	<b>92</b>	15	2	-	0	1	0	1	1	1	155	155	152
Random	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>108</b>	<b>75</b>	<b>98</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>25</b>	-	2	0	0	<b>1</b>	1	156	158	151
Deleter	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>108</b>	<b>75</b>	<b>99</b>	<b>14</b>	<b>17</b>	<b>23</b>	<b>5</b>	-	0	0	0	1	156	161	156
Roulette	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>107</b>	<b>75</b>	<b>101</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>25</b>	0	<b>1</b>	-	0	1	2	156	158	151
UCB	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>107</b>	<b>75</b>	<b>101</b>	<b>15</b>	<b>17</b>	<b>25</b>	0	<b>1</b>	0	-	<b>2</b>	<b>2</b>	156	158	152
Pursuit	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>107</b>	<b>75</b>	<b>102</b>	<b>15</b>	<b>17</b>	<b>26</b>	0	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	-	<b>1</b>	156	161	153
NN	<b>104</b>	<b>82</b>	<b>107</b>	<b>75</b>	<b>101</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>26</b>	4	1	0	1	0	-	157	160	153

## Sélection des opérateurs de Recherche Locale

- Choix des critères ont du sens
- Généralement un ou deux bons opérateurs par instance
- Importance d'avoir des opérateurs complémentaires
- Pas d'alternances dans les choix d'opérateurs

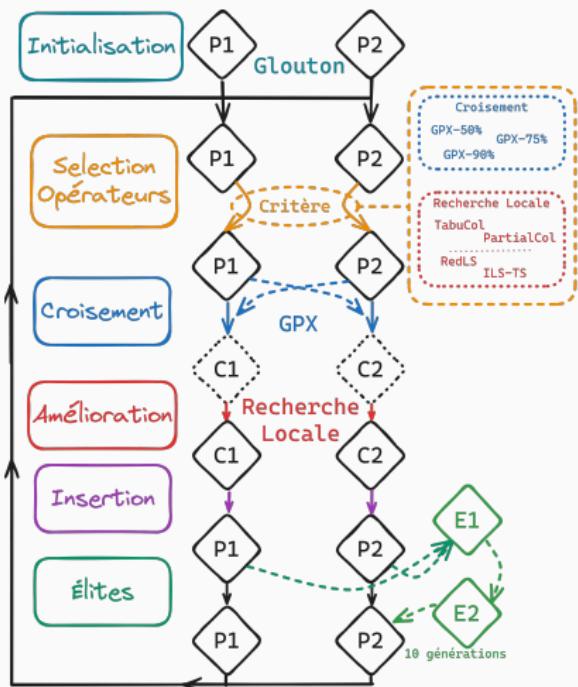
## Pour résumer

- MCTS rattrape ILS-TS sur une 15aine d'instances
- RedLS et ILS-TS restent meilleurs une 12aine d'instances où le MCTS n'intensifie pas assez

# Algorithmes Mémétiques - AHEAD

---

# AHEAD - Adaptive HEAD



## Pourquoi ?

- On veut de l'intensification !

## Comment ?

- Algorithme mémétique :**
  - basé sur HEAD de Moalic et Gondran [2018]
- Adaptatif :**
  - Critères de sélection pour s'adapter à l'instance
- Croisement :**
  - GPX avec 3 niveau de conservation
- Recherches Locales :**
  - 2 suffisamment différentes

# AHEAD - Opérateurs

## Croisement

- **GPX-50%** : 1 couleur P1 pour 1 couleur P2
- **GPX-75%** : 3 couleur P1 pour 1 couleur P2
- **GPX-90%** : 9 couleur P1 pour 1 couleur P2

## Recherche Locale - GCP

- **TabuCol** : Hertz et Werra [1987]
- **PartialCol** : Blöchliger et Zufferey [2008]
- **TabuEdges** : Grelier *et al.* [en cours]

## Recherche Locale - WVCP

- **RedLS** : Wang *et al.* [2020]
- **ILS-TS** : Nogueira *et al.* [2021]

## Critères

- Mêmes que pour le MCTS :
  - Random, Deleter, Roulette, Pursuit, UCB, NN
- Choix d'une paire d'opérateurs <croisement, recherche locale>
- Exception pour NN :
  - Génère tous les croisements puis sélectionne le plus prometteur

# AHEAD - Résultats WVCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/48	MCTS+UCB	RedLS	ILS-TS	HEAD+RedLS	HEAD+ILS-TS	Random	Roulette	Delete	UCB	Pursuit	NN	# BKS	# Best	# Best Avg
												MCTS+UCB	RedLS	ILS-TS
MCTS+UCB	-	<b>25</b>	<b>15</b>	3	<b>20</b>	0	0	0	0	0	0	20	19	15
RedLS	11	-	10	9	14	9	9	9	9	9	9	15	24	11
ILS-TS	10	<b>27</b>	-	8	<b>19</b>	3	6	5	4	1	3	23	25	21
HEAD+RedLS	<b>16</b>	<b>26</b>	<b>15</b>	-	<b>25</b>	1	1	0	0	1	0	19	19	11
HEAD+ILS-TS	5	<b>20</b>	6	5	-	0	0	0	0	0	0	18	19	13
Random	<b>19</b>	<b>27</b>	<b>20</b>	<b>10</b>	<b>25</b>	-	0	0	0	0	0	21	22	19
Roulette	<b>17</b>	<b>26</b>	<b>20</b>	<b>9</b>	<b>26</b>	0	-	0	0	0	0	22	22	17
Delete	<b>20</b>	<b>26</b>	<b>19</b>	<b>9</b>	<b>26</b>	<b>3</b>	0	-	0	0	0	<b>24</b>	<b>28</b>	19
UCB	<b>20</b>	<b>26</b>	<b>20</b>	<b>9</b>	<b>26</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	0	-	0	0	23	23	19
Pursuit	<b>19</b>	<b>26</b>	<b>23</b>	<b>11</b>	<b>26</b>	<b>1</b>	0	0	0	-	0	<b>24</b>	26	<b>22</b>
NN	<b>20</b>	<b>27</b>	<b>21</b>	<b>10</b>	<b>27</b>	0	<b>1</b>	0	0	0	-	21	23	19

# AHEAD - Résultats GCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/31	PartialCol	TabuCol	HEAD+PC	HEAD+TC	Random	Roulette	Deleter	UCB	Pursuit	NN	# BKS	# Best	# Best Avg
PartialCol	-	2	3	2	1	2	1	2	2	2	5	8	11
TabuCol	<b>14</b>	-	<b>11</b>	2	2	1	0	2	0	1	8	14	7
HEAD+PC	<b>8</b>	6	-	1	0	0	1	0	0	0	6	10	7
HEAD+TC	<b>18</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	-	<b>4</b>	<b>2</b>	1	<b>2</b>	2	2	7	17	15
Random	<b>17</b>	<b>11</b>	<b>19</b>	1	-	0	1	1	0	0	9	17	9
Roulette	<b>17</b>	<b>11</b>	<b>19</b>	1	0	-	0	0	0	0	11	19	12
Deleter	<b>19</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>3</b>	-	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>13</b>	<b>24</b>	<b>20</b>
UCB	<b>19</b>	<b>11</b>	<b>20</b>	1	1	0	0	-	0	0	10	18	10
Pursuit	<b>19</b>	<b>13</b>	<b>20</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	0	<b>1</b>	-	0	11	20	14
NN	<b>19</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	2	<b>4</b>	0	0	0	0	-	12	23	16

## À propos des Sélections

- Pas d'alternances dans les sélections
- Croisement GPX plus conservatifs généralement préférés mais sans très grandes différences

## Pour résumer

- Recherches locales gardent quelques instances avec de meilleurs résultats
- Meilleurs résultats que les autres méthodes en général
- Delete généralement bon avec de nouveaux meilleurs scores

## Conclusion & Perspectives

---

# Conclusion & Perspectives

- Contributions théoriques
  - Réduction de sommets
    - ★ Nouvelles règles
  - Bornes supérieures sur le nombre de couleur et score
- Méthodes implémentées
  - MCTS + Glouton
    - ★ Adapter coefficient exploration vs exploitation pendant la recherche
    - ★ DSatur lors de la construction de l'arbre
    - ★ BeamSearch
  - MCTS + Recherche Locale
  - MCTS + Hyperheuristiques
    - ★ Recherche Locale non systématique
  - DLMCOL
  - AHEAD
  - Modèles de programmation par contraintes
    - ★ EvoWeight
    - ★ LNS

# Merci pour votre attention !

## Questions ?

Code source, tableaux de résultats, articles :



<https://cyril-grelier.github.io/>

## Références

---

- Ivo Blöchliger and Nicolas Zufferey. A graph coloring heuristic using partial solutions and a reactive tabu scheme. *Computers & Operations Research*, 35(3) :960–975, 2008.
- Daniel Brélaz. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4) :251–256, 1979.
- Rowland Leonard Brooks. On colouring the nodes of a network. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 37, pages 194–197. Cambridge University Press, 1941.
- Shaowei Cai and Jinkun Lin. Fast solving maximum weight clique problem in massive graphs. In *IJCAI*, pages 568–574, 2016.

## Bibliographie ii

- Tristan Cazenave, Benjamin Negrevergne, and Florian Sikora. Monte carlo graph coloring. In *Monte Carlo Search : First Workshop, MCS 2020, Held in Conjunction with IJCAI 2020, Virtual Event, January 7, 2021, Proceedings 1*, pages 100–115. Springer, 2021.
- Peter C Cheeseman, Bob Kanefsky, William M Taylor, et al. Where the really hard problems are. In *IJCAI*, volume 91, pages 331–337, 1991.
- Denis Cornaz, Fabio Furini, and Enrico Malaguti. Solving vertex coloring problems as maximum weight stable set problems. *Discrete Applied Mathematics*, 217 :151–162, 2017.
- Marc Demange, D de Werra, Jérôme Monnot, and V Th Paschos. Time slot scheduling of compatible jobs. *Journal of Scheduling*, 10(2) :111–127, 2007.

## Bibliographie iii

- Philippe Galinier and Jin-Kao Hao. Hybrid evolutionary algorithms for graph coloring. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3 :379–397, 1999.
- Adrien Goëffon, Frédéric Lardeux, and Frédéric Saubion. Simulating non-stationary operators in search algorithms. *Applied Soft Computing*, 38 :257–268, 2016.
- Olivier Goudet, Béatrice Duval, and Jin-Kao Hao. Population-based gradient descent weight learning for graph coloring problems. *Knowledge-Based Systems*, 212 :106581, 2021.
- Olivier Goudet, Cyril Grelier, and Jin-Kao Hao. A deep learning guided memetic framework for graph coloring problems. *Knowledge-Based Systems*, 258 :109986, 2022.

## Bibliographie iv

Olivier Goudet, Cyril Grelier, and David Lesaint. New bounds and constraint programming models for the weighted vertex coloring problem. *Proceedings of the Thirty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 2023, 19th-25th August 2023, Macao, SAR, China*, pages 1927–1934, 2023.

Cyril Grelier, Olivier Goudet, and Jin-Kao Hao. On monte carlo tree search for weighted vertex coloring. In *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization : 22nd European Conference, EvoCOP 2022, Held as Part of EvoStar 2022, Madrid, Spain, April 20–22, 2022, Proceedings*, pages 1–16. Springer, 2022.

## Bibliographie v

Cyril Grelier, Olivier Goudet, and Jin-Kao Hao. Monte carlo tree search with adaptive simulation : A case study on weighted vertex coloring. In *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization : 23rd European Conference, EvoCOP 2023, Held as Part of EvoStar 2023, Brno, Czech Republic, April 12–14, 2023, Proceedings*, pages 98–113. Springer, 2023.

Alain Hertz and D de Werra. Using tabu search techniques for graph coloring. *Computing*, 39(4) :345–351, 1987.

Jorik Jooken, Pieter Leyman, Tony Wauters, and Patrick De Causmaecker. Exploring search space trees using an adapted version of monte carlo tree search for combinatorial optimization problems. *Computers & Operations Research*, 150 :106070, 2023.

## Bibliographie vi

- Frank Thomson Leighton. A graph coloring algorithm for large scheduling problems. *Journal of research of the national bureau of standards*, 84(6) :489, 1979.
- Zhipeng Lü and Jin-Kao Hao. A memetic algorithm for graph coloring. *European Journal of Operational Research*, 203(1) :241–250, 2010.
- Enrico Malaguti, Michele Monaci, and Paolo Toth. Models and heuristic algorithms for a weighted vertex coloring problem. *Journal of Heuristics*, 15 :503–526, 2009.
- Laurent Moalic and Alexandre Gondran. Variations on memetic algorithms for graph coloring problems. *Journal of Heuristics*, 24 :1–24, 2018.
- Bruno Nogueira, Eduardo Tavares, and Paulo Maciel. Iterated local search with tabu search for the weighted vertex coloring problem. *Computers & Operations Research*, 125 :105087, 2021.

## Bibliographie vii

- Daniel Cosmin Porumbel, Jin-Kao Hao, and Pascale Kuntz. A search space “cartography” for guiding graph coloring heuristics. *Computers & Operations Research*, 37(4) :769–778, 2010.
- Wen Sun, Jin-Kao Hao, Xiangjing Lai, and Qinghua Wu. Adaptive feasible and infeasible tabu search for weighted vertex coloring. *Information Sciences*, 466 :203–219, 2018.
- Yiyuan Wang, Shaowei Cai, Shiwei Pan, Ximing Li, and Monghao Yin. Reduction and local search for weighted graph coloring problem. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 34, pages 2433–2441, 2020.
- Dominic JA Welsh and Martin B Powell. An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *The Computer Journal*, 10(1) :85–86, 1967.

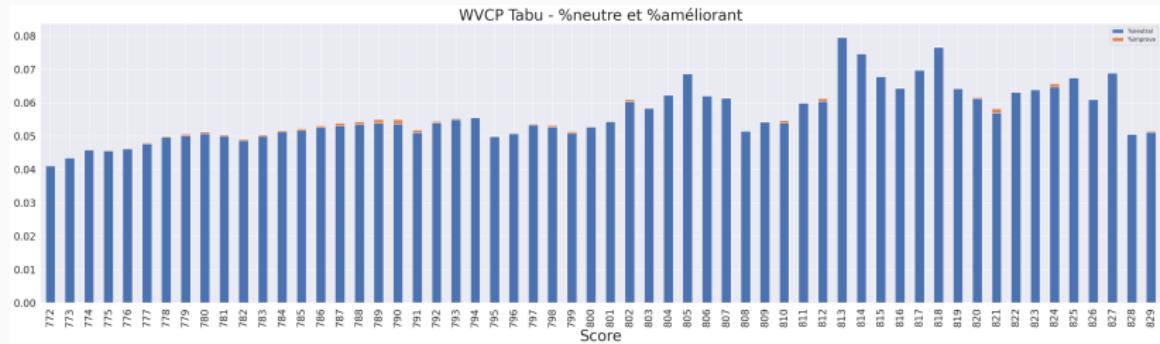
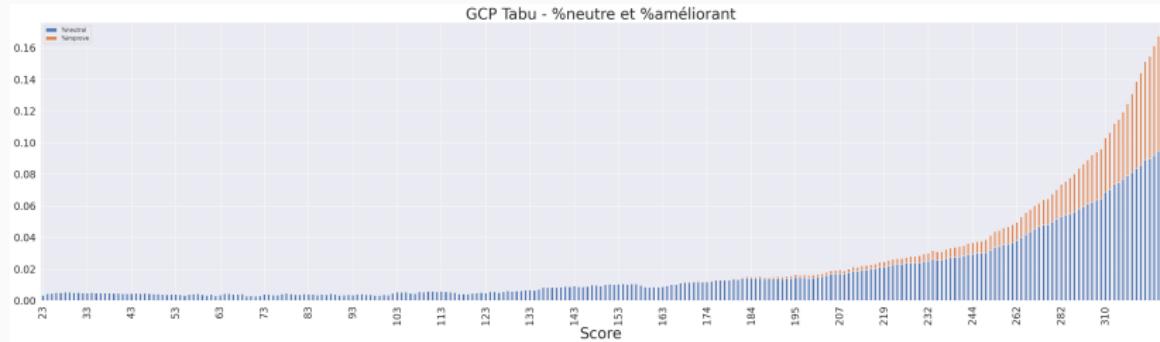
## Bibliographie viii

- Manzil Zaheer, Satwik Kottur, Siamak Ravanbakhsh, Barnabas Poczos, Russ R Salakhutdinov, and Alexander J Smola. Deep sets. *Advances in neural information processing systems*, 30, 2017.
- Yangming Zhou, Béatrice Duval, and Jin-Kao Hao. Improving probability learning based local search for graph coloring. *Applied Soft Computing*, 65 :542–553, 2018.

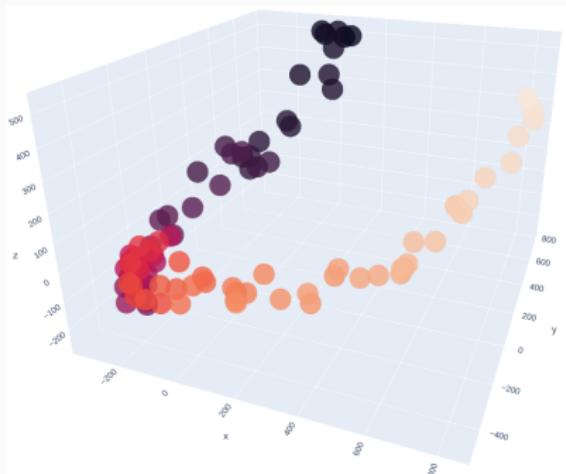
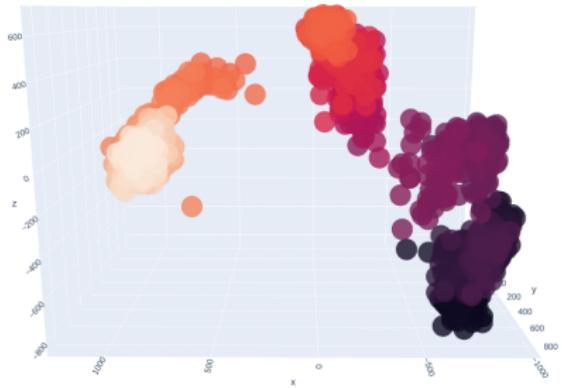
# Introduction

---

# WVCP - GCP - Voisinage



# WVCP - GCP - Exploration



[https://cyril-grelier.github.io/assets/html/search\\_path\\_wvcp.html](https://cyril-grelier.github.io/assets/html/search_path_wvcp.html)

[https://cyril-grelier.github.io/assets/html/search\\_path\\_gcp.html](https://cyril-grelier.github.io/assets/html/search_path_gcp.html)

## Réduction

---

# Réduction - Résultats WVCP

instance	V	density	R0	R1	R1+R2	Iterated	time(s)
DSJC125.1g	125	0.1	0	0	0	0	0
DSJC125.5g	125	0.5	0	0	0	0	0
DSJC125.9g	125	0.9	0	0	0	0	3
DSJR500.1	500	0.0	78	80	80	<b>256</b>	1
GEOM110	110	0.1	6	9	9	<b>23</b>	0
inithx.i.1	864	0.1	469	574	596	<b>683</b>	19
le450_15a	450	0.1	28	28	28	<b>30</b>	1
le450_25b	450	0.1	90	90	90	<b>105</b>	2
mulsol.i.5	186	0.2	28	53	75	<b>82</b>	1
queen10_10	100	0.6	0	0	0	0	0
p42	138	0.1	1	1	1	<b>3</b>	0
r30	301	0.1	0	0	0	0	0
wap02a	2464	0.0	161	165	165	<b>249</b>	168
wap04a	5231	0.0	244	244	244	<b>321</b>	527

## Réduction - Résultats GCP

instance	V	density	R0	R1	R1+R2	Iterated	time(s)
DSJC125.1	125	0.1	0	0	0	0	0
DSJC125.5	125	0.5	0	0	0	0	0
DSJC125.9	125	0.9	0	0	0	0	1
DSJR500.1	500	0.1	150	150	151	<b>488</b>	0
GEOM110	110	0.1	17	17	17	<b>101</b>	0
inithx.i.1	864	0.1	705	705	709	<b>769</b>	4
le450_15a	450	0.1	41	41	41	<b>43</b>	0
le450_25b	450	0.1	131	131	131	<b>156</b>	0
mulsol.i.5	186	0.2	106	106	108	<b>114</b>	0
queen10_10	100	0.3	0	0	0	0	0
p42	138	0.1	10	10	10	<b>124</b>	0
r30	301	0.1	0	0	0	0	0
r1000.1	1000	0.1	99	99	99	<b>954</b>	0
wap04a	5231	0.0	1199	1199	1199	1199	26

# Bornes

---

# Bornes WVCP - Résultats

Instance	V'	densité	$h_W$	$\Delta + 1$	bornes couleurs		bornes score	
					lb	ub	lb	ub
DSJC125.1g	125	0.1	0.04	24	4	<b>14</b>	19	42
DSJC125.5g	125	0.5	0.04	76	10	<b>34</b>	42	105
DSJC125.9g	125	0.9	0.04	121	32	<b>72</b>	124	220
DSJR500.1	244	0.03	0.08	26	12	26	166	477
GEOM110	87	0.11	0.11	20	9	20	65	151
inithx.i.1	181	0.05	0.1	169	54	<b>78</b>	569	800
le450_15a	420	0.08	0.05	99	15	<b>61</b>	206	628
le450_25b	345	0.08	0.06	108	25	<b>73</b>	307	735
mulsol.i.5	104	0.23	0.18	88	31	<b>58</b>	367	574
queen10_10	100	0.59	0.19	36	10	36	153	420
p42	135	0.12	0.46	25	14	25	2466	8108
r30	301	0.09	0.76	35	19	35	9816	104285

# Bornes WVCP - Impact sur le Modèle Primal

instance	BKS	primal		primal ub color		primal all bounds	
		score	time(s)	score	time(s)	score	time(s)
DSJC125.1g	23	<u>23*</u>	862	<u>23*</u>	435	<u>23*</u>	451
DSJC125.5g	71	78	tl	78	tl	78	tl
DSJC125.9g	169*	176	tl	176	tl	176	tl
DSJR500.1	169	187	tl	177	tl	169	tl
GEOM110	68*	69	tl	<b>68*</b>	1893	<b>68*</b>	1729
inithx.i.1	569*	569	tl	569	tl	<b>569*</b>	54
le450_15a	212	245	tl	234	tl	234	tl
le450_25b	307	307	tl	307	tl	<b>307*</b>	322
mulsol.i.5	367*	367	tl	367	tl	<b>367*</b>	31
queen10_10	162	170	tl	169	tl	169	tl
p42	2466*	2480	tl	2466	tl	<b>2466*</b>	2908
r30	9816*	9831	tl	9831	tl	9831	tl
#BKS		101/188		105/188		107/188	
#Optimal		72/188		75/188		95/188	

**MCTS**

---

# MCTS + Glouton - Résultats GCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/244 instances	MCTS+R	MCTS+C	MCTS+D	MCTS+DSatur	MCTS+RLF	NRPA	TabuCol	#BKs	#Best	#Best Avg	#Optimal
MCTS+R	-	0	2	0	1	43	9	172	172	151	109
MCTS+C	<b>80</b>	-	20	10	2	45	10	180	181	178	109
MCTS+D	<b>78</b>	<b>24</b>	-	10	0	48	9	178	178	179	<b>110</b>
MCTS+DSatur	<b>81</b>	<b>46</b>	<b>46</b>	-	10	<b>55</b>	12	189	189	189	109
MCTS+RLF	<b>80</b>	<b>55</b>	<b>60</b>	<b>34</b>	-	<b>63</b>	10	190	191	192	<b>110</b>
NRPA	<b>78</b>	<b>53</b>	<b>59</b>	40	28	-	11	202	206	159	0
TabuCol	<b>78</b>	<b>60</b>	<b>64</b>	<b>50</b>	<b>52</b>	<b>46</b>	-	<b>213</b>	<b>235</b>	<b>229</b>	0

NRPA : Cazenave *et al.* [2021] - TabuCol : Hertz et Werra [1987]

# MCTS + Glouton - Résultats GCP

instance	BKS	DSatur		MCTS+DSatur			RLF		MCTS+RLF			NRPA			TabuCol		
		best	time	best	mean	time	best	time	best	time	best	mean	time	best	mean	time	
C2000.5	145	214	0	210	210.7	3569	195	163	192	2482	211	213.1	2596	<b>162</b>	<b>163.2</b>	1802	
C2000.9	408	581	1	565		265	511	343	511	322	587	628.5	3185	<b>412</b>	<b>413</b>	2758	
C4000.5	259	392	3	383	383.1	3342	356	1314	355	2621	397	401.4	2545	<b>304</b>	<b>305.3</b>	2303	
DSJC500.1	12	16	0	14		3084	15	0	14	3	13	13.6	1945	<b>12</b>		77	
DSJC500.5	47	70	0	64		412	61	2	58	22	58	58.9	2372	<b>49</b>		476	
DSJC500.9	126	175	0	159		2917	151	4	148	356	148	149.8	1197	<b>126</b>	<b>126.5</b>	2328	
DSJC1000.1	20	28	0	26		1	24	3	23	1161	24		569	<b>21</b>		0	
DSJC1000.5	82	123	0	116		200	108	19	105	2062	110	112	1414	<b>88</b>	<b>88.1</b>	1321	
DSJC1000.9	222	316	0	303		1579	280	39	273	2188	291	294.9	2821	<b>224</b>	<b>225.1</b>	3181	
DSJR500.1c	85*	97	0	89		48	90	0	87	148	118	123.5	0	106	113.9	0	
DSJR500.1	12*	<b>12</b>	0	<b>12*</b>		0	<b>12</b>	0	<b>12*</b>	0	<b>12</b>	12.2	309	<b>12</b>		0	
GEOM120	11*	<b>11</b>	0	<b>11*</b>		0	<b>11</b>	0	<b>11*</b>	0	<b>11</b>		211	<b>11</b>		0	
latin_square_10	97	151	0	126		96	122	19	122	17	122	124.9	1758	<b>100</b>	<b>101.2</b>	1976	
le450_15c	15*	26	0	22		3272	23	0	22	0	19	19.9	3136	<b>15</b>	<b>15.9</b>	1	
le450_15d	15*	25	0	23		33	23	0	22	5	20	20.5	2266	<b>16</b>	<b>16.1</b>	48	
le450_25c	25*	30	0	27		597	28	0	27	7	<b>26</b>		636	<b>26</b>		0	
le450_25d	25*	30	0	27		201	28	0	27	4	<b>26</b>		958	<b>26</b>		0	
r1000.1c	98	124	0	108		1624	106	10	<b>103</b>	2514	139	171.3	17	134	155.4	86	
r1000.5	234	278	0	246		3080	251	16	247	1674	<b>239</b>	<b>240.4</b>	2276	244	246	3404	
wap01a	41*	54	0	44		3230	47	6	44	567	44	45	2839	<b>42</b>	<b>43.2</b>	1306	
wap02a	40*	48	0	44		6	44	5	43	40	44	44.2	1869	<b>41</b>	<b>41.2</b>	362	
wap03a	43	55	0	51		611	51	41	49	194	54	54.5	1577	<b>44</b>	<b>46.2</b>	1125	
wap04a	41	49	0	46		119	47	40	45	187	48	48.8	1608	<b>42</b>	<b>43.3</b>	2997	
wap06a	40*	45	0	42		529	42	1	42	1	41		880	<b>40</b>	41.5	3318	
wap07a	41	48	0	44		203	46	7	44	144	43	43.4	2148	<b>42</b>	<b>42.6</b>	523	
wap08a	40*	49	0	43		1515	46	7	44	169	42	42.8	1410	<b>41</b>	<b>41.8</b>	1846	
#BKS		148		189		171		190			202				213		
#Best		148		189		171		191			206				235		
#Best Avg		148		189		171		192			159				229		
#Optimal		0		109		0		110			0				0		

# MCTS + Glouton - Résultats WVCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/188 instances	MCTS+R	MCTS+C	MCTS+D	MCTS+DSatur	MCTS+RLF	AFISA	RedLS	ILS-TS	#BKS	#Best	#Best Avg	#Optimal
MCTS+R	-	0	1	1	32	22	46	0	75	75	56	48
MCTS+C	<b>122</b>	-	23	32	<b>92</b>	<b>77</b>	<b>85</b>	0	114	114	75	<b>49</b>
MCTS+D	<b>121</b>	<b>44</b>	-	30	<b>97</b>	<b>98</b>	<b>103</b>	1	92	92	91	48
MCTS+DSatur	<b>121</b>	<b>48</b>	<b>35</b>	-	<b>99</b>	<b>93</b>	<b>107</b>	0	93	93	93	47
MCTS+RLF	<b>87</b>	14	14	14	-	58	79	0	70	70	70	45
AFISA	<b>96</b>	33	46	50	<b>89</b>	-	<b>53</b>	0	114	114	45	0
RedLS	<b>79</b>	51	60	57	<b>88</b>	41	-	14	112	131	47	0
ILS-TS	<b>126</b>	<b>101</b>	<b>94</b>	<b>95</b>	<b>118</b>	<b>104</b>	<b>96</b>	-	<b>159</b>	<b>170</b>	<b>171</b>	0

AFISA : Sun *et al.* [2018] - RedLS : Wang *et al.* [2020] - ILS-TS : Nogueira *et al.* [2021]

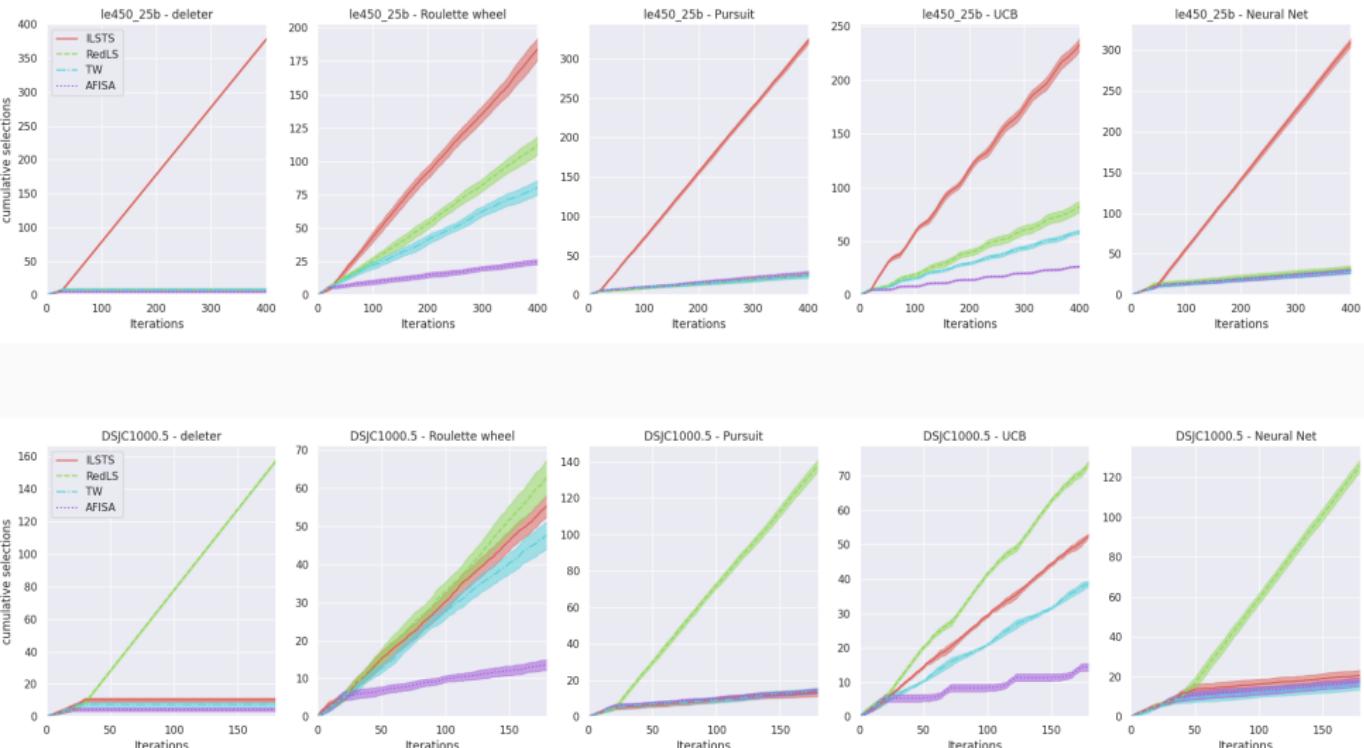
# MCTS + Glouton - Résultats WVCP

instance	BKS	MCTS+GR			MCTS+G			MCTS+DSatur			AFISA			RedLS			ILS-TS		
		best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	2144	2505	2537.7	3422	2385	1685	2397	2398.8	3390	2384	2403.4	3601	<b>2167</b>	<b>2193.8</b>	2403	2237	2266.4	3498	
C2000.9	5477	6233	6272.9	3575	6125	6147.8	3238	6275	163	6582	6650.1	0	<b>5502</b>	<b>5528.1</b>	3303	5910	5969.9	3587	
DSJC125.1g	23*	25	25.4	22	25	0	25	0	23	24.4	13	<b>23</b>	23.4	0	<b>23</b>	2			
DSJC125.5g	71	74	75.3	52	77	0	74	67	<b>71</b>	72.2	1360	72		257	<b>71</b>		126		
DSJC125.9g	169*	170	172.7	25	171	1630	171	21	170	174.1	2	<b>169</b>	0	<b>169</b>	0	169	182		
DSJC250.1	127	134	141.4	13	141	4	139	1151	129	133.6	3294	130	131.6	1	<b>127</b>	<b>127.8</b>	1608		
DSJC250.5	392	422	429.4	14	427	92	421	705	411	424.2	541	398	401.2	103	<b>393</b>	<b>397.6</b>	2567		
DSJC250.9	934*	973	988.7	2793	986	16	984	559	949	976.1	232	<b>934</b>	<b>935.6</b>	718	936	942.1	3053		
DSJC500.1	184	203	208.3	148	203	638	203	2943	198	201.5	1817	<b>187</b>	201.9	537	188	<b>188.8</b>	1744		
DSJC500.5	685	754	765.6	136	755	635	775	780.9	3542	762	778.1	1307	<b>706</b>	<b>716.1</b>	2840	724	735.5	1744	
DSJC500.9	1662	1771	1787.4	113	1794	171	1795	1797.1	3453	1744	1775.5	652	<b>1670</b>	<b>1675.1</b>	945	1720	1742	3039	
DSJC1000.1	300	334	337.4	1618	333	2823	340	2474	319	325	2182	<b>305</b>	<b>307.2</b>	1235	<b>305</b>	307.4	1574		
DSJC1000.5	1185	1271	1293.6	1668	1318	1437	1338	203	1308	1330	3531	<b>1198</b>	<b>1213.7</b>	2381	1245	1269.2	231		
DSJC1000.9	2836	3040	3070.4	978	3078	2863	3172	3338	3066	3107	3101	2860	<b>2858.5</b>	2953	3026	3066.8	3580		
DSJR500.1	169*	<b>169</b>	46	177	0	176	21	<b>169</b>	54	171	184.5	0	<b>169</b>	0					
flat1000_50_0	924	1236	1255.8	1452	1251	1251.1	3037	1303	1843	1267	1293.3	2736	<b>1155</b>	<b>1173.8</b>	3238	1222	1235	1712	
flat1000_60_0	1162	1275	1295.8	1478	1260	1260.7	3424	1343	311	1309	1323.2	3584	<b>1191</b>	<b>1205.7</b>	1080	1250	1270	125	
flat1000_76_0	1165	1252	1269.7	1477	1244	1248.2	3557	1313	1798	1288	1304.4	3278	<b>1176</b>	<b>1194</b>	1107	1232	1247.5	1198	
GEOM120a	105*	106	106.6	330	<b>105</b>	1129	109	5	<b>105</b>	106.6	136	<b>105</b>	109.2	9	<b>105</b>	0			
GEOM120b	35*	37	0	37	498	37	110	<b>35</b>	36.2	422	<b>35</b>	35.5	0	<b>35</b>	0				
GEOM120	72*	<b>72</b>	73	0	<b>72</b>	0	72	36	<b>72</b>	73	0	<b>72</b>	75.2	0	<b>72</b>	0			
latin_square_10	1480	1721	1757.1	966	1726	1726.8	3418	1805	2360	1607	1652.4	2257	<b>1505</b>	<b>1523</b>	2369	1559	1581.2	1368	
le450_25a	306	307	310	3364	312	5	310	1919	311	316.3	2699	<b>306</b>	307.4	503	<b>306</b>	174			
le450_25b	307*	309	309.1	993	309	0	309	224	308	312.6	1891	<b>307</b>	313.4	56	<b>307</b>	10			
le450_25c	342	365	372.7	2844	369	950	376	1572	355	364.4	3436	351	354.8	43	<b>348</b>	<b>351.8</b>	3207		
le450_25d	330	354	358.8	2802	364	1657	369	1411	351	357.8	1630	<b>332</b>	<b>338.9</b>	154	339	342.5	1999		
queen11_10	162	165	169.1	986	171	0	169	8	165	166.9	524	<b>162</b>	166.2	504	<b>162</b>	13			
queen11_11	172	178	180.4	941	180	80	179	50	179	181.1	722	174	177.1	761	<b>172</b>	<b>172.6</b>	1820		
wap01a	545	657	659.8	2965	599	3272	595	2904	653	664.5	3413	563	688.4	252	<b>548</b>	<b>552</b>	3263		
wap02a	538	645	648.7	1301	588	3265	590	262	658	666.2	3416	552	586.5	589	<b>540</b>	<b>542.7</b>	2658		
wap03a	562	746	749	803	653	1096	647	1805	767	788	0	<b>569</b>	<b>573.1</b>	2893	576	578.6	3102		
wap04a	563	755	757.8	3085	649	603	643	828	773	792.9	0	<b>564</b>	<b>572.5</b>	3280	569	574.6	3529		
wap05a	541	583	591.1	1867	566	172	565	2882	563	572.5	3378	543	544.5	970	<b>541</b>	<b>543.4</b>	3306		
p32	2480*	<b>2480*</b>	0	<b>2480*</b>	0	<b>2480*</b>	0	<b>2480</b>	0	<b>2480</b>	2480.5	0	<b>2480</b>	0					
p42	2466*	<b>2466</b>	2466.8	33	<b>2466</b>	0	<b>2466</b>	4	<b>2466</b>	2474.8	1180	<b>2466</b>	2522.5	0	<b>2466</b>	4			
r29	8693*	<b>8693</b>	8695.5	1316	8694	0	8694	3	8715	8799	379	8696	8817.6	0	<b>8693</b>	1			
r30	9816*	<b>9816</b>	9819.6	11	9818	0	9818	0	9826	9960	2378	9836	9988.2	1	<b>9816</b>	5			
#BKS		114			92			93			114			112			159		
#Best		114			92			93			114			131			170		
#Best Avg		75			91			93			45			47			171		
#Optimal		49			48			47			0			0			0		

# MCTS+Hyperheuristiques - Résultats WVCP

instance	BKS	RedLS			MCTS+RedLS			ILS-TS			Random			Deleter			Roulette			UCB			Pursuit			NN				
		best			avg			best			best			best			best			best			best			best				
		best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time		
C2000.5	2144	<b>2167</b>	<b>2193.8</b>	2403	2354	2369	2091	2237	2266.4	3498	2336	2347.1	2870	2331	2342.2	2952	2330	2347.3	1845	2335	2340.8	1558	2332	2340.8	1271	2337	2346.2	6924		
C2000.9	5477	<b>5502</b>	<b>5528.1</b>	3303	6060	6093.6	1107	5010	5069.9	3587	6035	6101.6	1968	6067	6105.4	492	6073	6109.4	2542	6077	6111.4	2952	6069	6103.4	205	6100	6128.5	7363		
DSJC50.1	127	130	131.6	1	127	<b>127.5</b>	1785	127	127.8	1609	127	128.1	1604	127	127.7	2271	127	127.8	2593	127	127.6	2125	127	127.8	1712	127	127.6	2094		
DSJC50.5	392	398	401.2	3	396	397.9	3045	393	397.6	2957	397	399.1	1242	393	<b>397.5</b>	3558	397	398.6	1071	394	398.4	1746	396	397.8	1143	396	398.2	2701		
DSJC50.9	934*	<b>935.6</b>	719	935	939	2406	930	942.1	3053	936	938.4	1933	935	936	2643	935	936	1802	935	936	1802	935	936.2	1804	934	<b>935.6</b>	2451			
DSJC900.1	184	187	201.9	537	187	<b>187.5</b>	1765	188	188.8	1744	186	188.4	2079	186	188.2	3773	187	188.4	2503	187	188.4	3861	187	188.5	2079	187	188.2	3043		
DSJC900.5	685	700	<b>716.1</b>	2840	716	719.2	3234	724	735.5	1744	715	720.2	964	715	719	3234	715	720.2	1045	712	720.6	888	715	719.8	715	713	718.9	631		
DSJC1000.1	305	305	307.2	1235	307	307.9	1799	305	307.4	1575	305	306.2	3570	305	305.8	1190	<b>302</b>	305.6	588	304	305.9	2835	305	305.4	2151	303	<b>305.1</b>	4617		
DSJC1000.5	1185	<b>1198</b>	1217.3	2381	1244	1269.5	1197	1245	1269.2	1231	1245	1251.4	726	1238	1246.6	1428	1241	1251.4	2142	1242	1250	1239	1247.8	1554	1240	1247.6	3159			
DSJC1000.9	2836	<b>2840</b>	<b>2858.5</b>	2953	2974	2992.2	651	3026	3066.8	3580	2982	2995.9	1890	2983	2992.5	3486	2984	2995.2	2982	2983	2995.1	504	2983	2995.2	2058	2976	2993.2	1499		
DSR500.100*	171	184.5	0	<b>169</b>	<b>169</b>	169	169	0	<b>169</b>	<b>169</b>	14	<b>169</b>	<b>169</b>	15	<b>169</b>	<b>169</b>	169	<b>169</b>	<b>169</b>	169	<b>169</b>	<b>169</b>	169	<b>169</b>	<b>169</b>	16				
flu1000_50_0	924	<b>1155</b>	<b>1173.8</b>	3238	1199	1206.2	336	1222	1235	1713	1203	1210.7	3045	1193	1206.2	630	1201	1208.1	945	1205	1210.6	576	1198	1207.8	3654	1196	1204.6	4370		
flu1000_60_0	1162	<b>1191</b>	<b>1205.7</b>	1808	1238	1244.5	1041	1250	1270	125	1238	1249.5	3045	1242	1247.5	525	1241	1248.2	1993	1232	1247.8	882	1239	1245.3	1701	1231	1245.1	1393		
flu1000_70_0	1165	<b>1176</b>	<b>1194</b>	1107	1214	1222	1176	1232	1247.5	1198	1210	1249.2	2951	1217	1221	1470	1211	1223.8	168	1218	1226.2	504	1214	1223	2121	1211	1222.5	4602		
latin_square_10_10	1480	<b>1505</b>	1523	2369	1533	1544.8	1928	1559	1581.2	1369	1546	1552.9	1406	1533	1544.2	1606	1540	1550.6	3268	1522	1546.8	456	1529	1547.2	798	1538	1546.2	4558		
le450_15a	212	214	236.3	218	<b>212</b>	<b>213.7</b>	684	213	214.7	2429	213	214.2	1554	213	215.2	3141	213	214	1022	213	214.2	873	213	213.8	214.2	213	214.2	1530		
le450_15b	216	218	225.6	39	217	<b>217.6</b>	1115	<b>216</b>	217.8	2536	217	217.9	966	217	218.4	2536	217	217.9	873	217	217.9	1022	217	217.7	1130	217	217.8	2540		
le450_15c	261	285	3.4	279	<b>280.8</b>	1415	280	283.7	1678	278	281.0	1910	279	<b>280.8</b>	790	279	281.7	1678	278	281.2	1066	279	281.2	3670	278	281.4	2630			
le450_15d	272	278	281	268	276	<b>277.1</b>	2153	277	279	1445	276	278.3	2950	276	277.4	1480	276	277.9	1620	277	278	1482	275	<b>277.1</b>	275	277	2116	275		
le450_25a	342	351	354.8	44	348	<b>349.4</b>	383	348	351.8	3207	340	350.2	349	<b>347</b>	<b>349.4</b>	247	350	353.9	1543	348	349.8	2054	<b>347</b>	349.5	2889	<b>347</b>	<b>349.4</b>	3388		
le450_25b	330	332	339	154	334	<b>334.9</b>	1349	339	342.5	1999	336	338.6	1403	334	336.1	1393	335	336.1	1572	333	336	2394	335	<b>335.9</b>	1305	336	336	2054		
queen10_10	162	166.2	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	34		
queen11_11	172	174	177.1	762	172	173.2	1935	<b>172</b>	<b>172.6</b>	1821	172	172.9	2111	172	<b>172.8</b>	1952	172	172.8	1960	172	172.8	1933	172	172.8	1972	172	172.7	2632		
queen12_12	185	188	190.2	8	185	<b>186.6</b>	432	<b>185</b>	<b>186.1</b>	161	186	187.7	186	188	186.3	1506	186	186.5	1723	186	186.6	2051	186	186.4	1502	186	186.4	1369		
queen13_13	194	195	198.7	1528	194	194.6	1605	194	195.7	3476	194	194.9	2997	194	194.5	1668	194	194.8	2078	194	194.5	2734	194	194.6	194.3	194	194.3	2140		
R75_1gb	70	78.3	0	70	70	7	70	70	70	0	70	70	5	70	70	70	4	70	70	70	3	70	70	70	3	70	70	4		
R75_1ig	18*	18	19.1	0	18	18	18	4	18	18	0	18	18	3	18	18	18	5	18	18	18	3	18	18	18	5	18	18	5	
R75_5gb	186	192.1	0	186	186	9	186	186	1	186	186	8	186	186	8	186	186	7	186	186	6	186	186	8	186	186	6	186	186	6
R75_5g	51*	51.3	109	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	1	51	51	51	2	51	51	51	1	51	51	51	1	51	51	1	
R75_9gb	396	<b>396</b>	0	396	396	0	396	396	10	396	396	6	396	396	9	396	396	5	396	396	5	396	396	5	396	396	5	396	396	6
R75_9g	110	110	0	110	110	0	110	110	110	0	110	110	1	110	110	1	110	110	1	110	110	0	110	110	1	110	110	1		
R100_1gb	84	84.5	0	81	81	59	81	81	81	2	81	81	13	81	81	10	81	81	10	81	81	12	81	81	10	81	81	11		
R100_1ig	21	21	22.1	0	21	21	53	21	21	8	21	21	19	21	21	24	21	21	21	21	25	21	21	26	21	21	21	21	21	21
R100_5gb	220	220	220.7	87	<b>220</b>	220	33	220	220	6	220	220	19	220	220	22	20	220	19	220	220	16	220	220	22	20	220	17		
R100_5g	59	59	59	17	59	59	6	59	59	0	59	59	5	59	59	4	59	59	5	59	59	5	59	59	5	59	59	4		
R100_9gb	518*	<b>518</b>	0	<b>518</b>	518	1	<b>518</b>	518	518	1	<b>518</b>	518	13	<b>518</b>	518	8	<b>518</b>	518	15	<b>518</b>	518	10	<b>518</b>	518	9	<b>518</b>	518	10		
R100_9g	141	141	0	141	141	0	141	141	608	141	141	8	141	141	11	141	141	12	141	141	13	141	141	13	141	141	13	141	141	18
rap01a	545	563	684.8	252	561	566.6	2860	<b>548</b>	552	563	566	590.3	2996	587	591.6	2420	567	589.6	352	570	591.0	3080	586	591.5	1672	567	589.5	440		
rap02a	538	552	585.6	589	551	556.6	90	<b>540</b>	<b>542.7</b>	2658	552	560.2	1215	554	556	945	551	559.8	945	549	558.5	2520	548	556.5	3105	551	559.1	5815		
rap03a	562	<b>569</b>	<b>573.1</b>	2893	587	588.8	2085	576	578.6	3102	587	589.5	1656	587	589.5	3404	587	589.8	2024	587	589.3	3266	586	588.9	2300	588	589.9	8093		
rap04a	563	<b>564</b>	<b>572.5</b>	3280	581	583.9	1287	569	574.6	3529	583	585.2	1906	583	584.8	2138	582	584.8	2525	582	584.1	2624	581	584.1	2772	581	584.5	1685		
rap05a	541	543	544.5	970	543	544.8	1322	<b>541</b>	<b>543.4</b>	3306	543	545.8	1139	543	545.7	3397	545	545.6	1926	545	545.6	1649								

# MCTS + Hyperheuristiques - Sélection



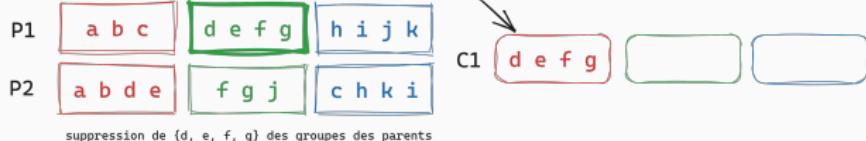
AHEAD

---

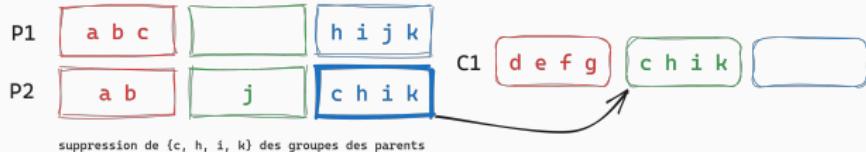
# AHEAD - GPX

## Croisement GPX

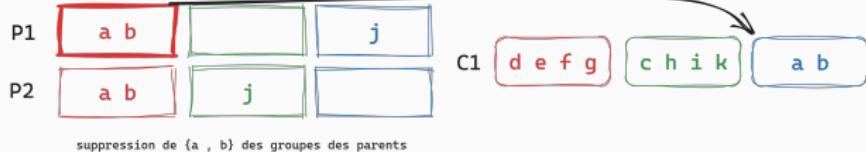
Étape 1



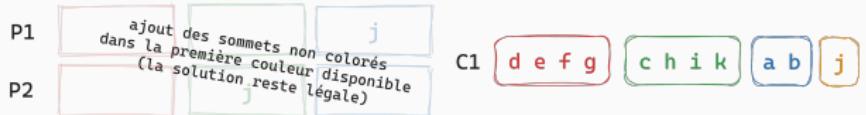
Étape 2



Étape 3



Étape 4  
Cas WVCP



Étape 4  
Cas GCP



# AHEAD - Résultats GCP

instance	BKS	PartialCol			TabuCol			HEAD+TC			AHEAD+Random			AHEAD+Deleter		
		best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	145	164	165.2	5313	162	162.8	4628	<b>148</b>	<b>149.2</b>	3330	150	150.7	3101	149	150.7	3152
C2000.9	408	420	420.8	5171	411	412.5	4786	<u>405</u>	406.4	2328	<u>405</u>	407.7	2956	<b>404</b>	<b>405.6</b>	2988
C4000.5	259	304	305.6	6690	303	304.2	5567	<b>278</b>	<b>279.6</b>	3580	280	281.6	3651	279	280.8	3404
DSJC500.1	12	<b>12</b>	128	<b>12</b>		75		<b>12</b>		86	<b>12</b>		80	<b>12</b>		56
DSJC500.5	47	50	50.1	2227	49		460	<b>48</b>		819	<b>48</b>		1258	<b>48</b>		850
DSJC500.9	126	128		975	<b>126</b>	126.3	2988	<b>126</b>		1027	<b>126</b>	126.1	1379	<b>126</b>		632
DSJC1000.1	20	21		1	21		0	21		0	21		1	<b>20</b>	<b>20.9</b>	2391
DSJC1000.5	82	90	90.5	3516	88		1760	<b>83</b>	<b>83.3</b>	2290	<b>83</b>	83.5	2372	<b>83</b>	83.5	2511
DSJC1000.9	222	227	228.4	3630	224	224.9	3345	<b>223</b>		224	223	224.2	2734	<b>223</b>	<b>223.8</b>	1589
DSJR500.5	122*	125	126.2	1666	124	127	1155	<b>123</b>		124	123	124.2	2245	<b>123</b>	<b>123.8</b>	2289
flat300_28_0	28*	<b>28</b>		896	<b>28</b>	29.5	3220	30	30.8	1916	<b>28</b>	28.5	702	<b>28</b>	30.4	5
flat1000_50_0	50*	<b>50</b>		44	<b>50</b>		69	<b>50</b>		28	<b>50</b>		8	<b>50</b>		8
flat1000_60_0	60*	<b>60</b>		213	<b>60</b>		233	<b>60</b>		54	<b>60</b>		28	<b>60</b>		29
flat1000_76_0	76*	89	89.1	2845	86	87	3096	<b>82</b>	<b>82.3</b>	1905	<b>82</b>	82.8	2775	<b>82</b>	82.8	1969
latin_square_10	97	107	110.2	4875	100	100.8	4377	102	103.7	93	103	103.8	1996	<b>99</b>	<b>100.7</b>	1729
le450_25c	25*	27		69	26		0	26		0	<b>25</b>	25.9	1407	<b>25</b>	<b>25.3</b>	1022
le450_25d	25*	27		50	26		0	26		0	26		0	<b>25</b>	<b>25.3</b>	1537
r250.5	65*	67		134	66	67.2	462	<b>65</b>	66	3378	<b>65</b>	66	1638	66		549
r1000.1c	98	141	149.1	61	134	155.2	77	<b>100</b>	101.6	264	<b>100</b>	101.6	1674	<b>100</b>	101.6	1621
r1000.5	234	247	248.1	5638	<b>244</b>	245.6	3622	246	247.6	1479	246	247.4	2134	245	<b>245.5</b>	2009
wap01a	41*	42		1088	42	43	2160	42		137	42		143	<b>41</b>	<b>42</b>	1958
wap02a	40*	41	41.7	4275	<b>40</b>	41.1	6499	41		15	41		15	<b>40</b>	<b>40.8</b>	1634
wap03a	43	44		91	44	45.9	4342	45		261	45		87	<b>43</b>	44.3	2387
wap04a	41	43		61	<b>42</b>	43.1	4869	43		880	43		1186	43		293
wap06a	40*	41		98	<b>40</b>	41.3	4248	<b>40</b>		909	<b>40</b>	40.8	1549	<b>40</b>		246
wap07a	41	44		41	<b>41</b>	42.3	5046	42	42.1	1771	42	43	2526	42	42.1	494
wap08a	40*	43	43.2	2750	<b>41</b>	<b>41.5</b>	2967	42		48	42		365	<b>41</b>	41.9	2146
#BKS		5/31			8/31			7/31			9/31			13/31		
#Best		8/31			14/31			17/31			17/31			24/31		
#Best Avg		11/31			7/31			15/31			9/31			20/31		

# AHEAD - Résultats WVCP

instance	BKS	RedLS			ILS-TS			HEAD+RedLS			AHEAD+Random			AHEAD+Deleter		
		best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	2144	<b>2131</b>	<b>2155.7</b>	18367	2244	2264.4	6423	2244	2257.9	7453	2220	2236.8	12962	2218	2236.3	1782
C2000.9	5477	<b>5439</b>	<b>5455.1</b>	23137	5847	5910.1	23014	5732	5748.2	12980	5732	5783.9	12491	5717	5758.8	12327
DSJC1000.1	300	303	306.9	5839	305	306.2	5819	304	305.6	7380	302	303.8	9348	<b>300</b>	<b>302.2</b>	12874
DSJC1000.5	1185	<b>1190</b>	<b>1206.9</b>	12204	1241	1267.7	21935	1225	1229.7	7011	1222	1228.2	5371	1224	1230.5	1476
DSJC1000.9	2836	<b>2828</b>	<b>2841.8</b>	22796	3004	3035.9	25345	2909	2926.5	820	2911	2928.7	12633	2907	2926.8	2379
DSJC500.1	184	187	194	702	185	187.3	7107	186	186.9	6594	185	186.5	10290	<b>184</b>	185.9	8022
DSJC500.5	685	707	712.5	27147	711	721.2	9150	709	712.6	2534	<b>706</b>	<b>711.5</b>	12516	709	713.5	5838
DSJC500.9	1662	<b>1667</b>	<b>1671</b>	9925	1709	1725.3	24351	1680	1683.5	4053	1678	1684.2	12644	1676	1682.8	8149
DSJC250.1	127	129	131.4	56	<b>127</b>	127.1	11901	<b>127</b>	4516	<b>127</b>	3729	<b>127</b>	127.2	3235		
DSJC250.5	392	399	400.8	2602	<b>392</b>	<b>393.9</b>	10722	395	396.2	8349	393	395.2	9592	<b>392</b>	396.6	6028
DSJC250.9	934*	<b>934</b>	935	9679	<b>934</b>	935.1	14740	<b>934</b>	935.1	6741	<b>934</b>	<b>934.2</b>	8097	<b>934</b>	935	5011
flat1000_50_0	924	<b>1152</b>	<b>1165.7</b>	6259	1213	1230.5	570	1181	1187.7	7544	1179	1186.3	4428	1180	1186.8	2952
flat1000_60_0	1162	<b>1196</b>	<b>1204.8</b>	1877	1247	1263.8	25765	1216	1227.2	10824	1213	1223.7	11726	1217	1224.5	9840
flat1000_76_0	1165	<b>1163</b>	<b>1183.2</b>	28084	1228	1242.2	16513	1192	1204	2214	1187	1203	10742	1196	1204	8938
latin_square_10	1480	<b>1505</b>	<b>1515.3</b>	14189	1555	1575	18924	1523	1532.5	11286	1510	1526.2	13987	1517	1527.8	8732
le450_15a	212	213	215.4	54	<b>211</b>	213.6	11684	<b>212</b>	212.8	6777	<b>212</b>	212.8	8819	<b>211</b>	<b>212.4</b>	10557
le450_15b	216	218	219.9	41	217	217.1	10346	<b>216</b>	217	3204	<b>216</b>	217.1	2736	<b>215</b>	<b>216.5</b>	11124
le450_15c	275	282	285.4	82	279	281.7	16288	277	279.4	8360	277	<b>278.8</b>	7220	278	279.4	4788
le450_15d	272	277	280.6	325	275	277.6	8456	274	276.1	6004	274	275.6	8759	<b>273</b>	275.2	13299
le450_25a	306	<b>306</b>	306.6	2881	<b>306</b>	306	142	<b>306</b>	161	<b>306</b>	169	<b>306</b>	131			
le450_25b	307*	<b>307</b>	307.6	95	<b>307</b>	307	23	<b>307</b>	53	<b>307</b>	28	<b>307</b>	19			
le450_25c	342	348	352.8	583	348	349.1	16413	347	348.1	180	<b>346</b>	<b>347.8</b>	5652	<b>346</b>	348	588
le450_25d	330	335	339.4	232	337	338.7	14212	333	334.4	5904	333	334.2	6282	333	334.2	9648
wap01a	545	557	577	995	<b>547</b>	<b>550.1</b>	20531	552	559.1	8178	549	553.6	14094	549	552.8	8874
wap02a	538	554	572.1	16183	<b>536</b>	<b>541</b>	21912	550	557.1	13884	541	546.1	7654	541	545.5	12994
wap03a	562	<b>569</b>	575.5	17878	572	575.5	22637	577	579.7	6992	573	576.3	8096	573	575.9	2944
wap04a	563	<b>567</b>	578.9	13939	<b>567</b>	<b>570.5</b>	7346	573	575.6	3152	570	573.2	1970	569	572.5	13790
wap05a	541	<b>542</b>	543.8	7719	<b>542</b>	<b>542.2</b>	11809	<b>542</b>	542.9	4471	<b>542</b>	543	12056	<b>542</b>	543.2	2772
wap06a	516	519	526.1	1575	<b>516</b>	<b>519.5</b>	6264	519	520.7	12180	518	521	9100	520	521.2	5978
wap07a	555	<b>554</b>	573	8460	565	569.2	16299	557	559.4	3360	558	559.8	12040	557	<b>559.2</b>	12460
wap08a	529	<b>536</b>	543.7	19557	543	546.9	19271	539	540.8	7452	539	541.2	1800	538	<b>540.1</b>	10608
#BKS		15/48			23/48			19/48			21/48			24/48		
#Best		24/48			25/48			19/48			22/48			28/48		
#Best Avg		11/48			21/48			11/48			19/48			19/48		

# AHEAD GCP - Sélections

