



中国研究生创新实践系列大赛  
“华为杯”第十六届中国研究生  
数学建模竞赛

学 校

南京理工大学

参赛队号

19102880053

队员姓名

1.邓致远

2.马文鑫

3.连小勇

**中国研究生创新实践系列大赛**  
**“华为杯”第十六届中国研究生**  
**数学建模竞赛**

题 目

天文导航中的星图识别

**摘 要：**

本文对不同情况下确定星敏感器方向确定问题和星图识别问题进行了建模研究。

通过对不同坐标系关系、星表和星图的分析，确定了天球坐标系、星敏感器坐标系和图像坐标系三者之间的关联，通过建立姿态坐标转换方程模型以及矩阵变换以及根据其光学特性建立几何方程模型，解决了在问题一中的星敏感器方向问题，并针对模型分析其误差，优化基准星选择方法。在星图识别问题中在以角距特征为代表的传统星图识别的方法上优化建立星模式识别特征提取模型，对提高星图识别算法的实时性和降低误匹配率有实际工程参考意义。

针对问题一的第一问，分析星敏感器的成像原理：主要包括恒星从天球坐标系到性敏感坐标系的旋转变换以及星敏感器坐标系到图像坐标系的透视投影变换。通过建立转换矩阵，求出 3 颗恒星在天球坐标系下的方向矢量，通过透视投影法将其与星敏感器坐标系的方向矢量结合，建立数学模型，联立求解出光轴与天球面交点的姿态。

针对问题一的第二问，在不利用光学系统焦距信息的条件下，将天球坐标系转化为空间直角坐标系，从几何学角度建立数学几何模型，通过三颗恒星在空间直角坐标系下的方向向量与光轴夹角的正切值成比例的关系，联立方程求解。

针对问题一的第三问，对第一问的数学模型进行分析，保证求解算法的可行性，得出所选取的星敏感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像的几何位置不能同时位于以  $O'$  为圆心的圆上。对第二问的数学模型进行分析，为了保证光轴与天球面交点的姿态有唯一可行解，所选取的星敏感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像的几何位置不能同时在一条任意方向的直线上。最后考虑光学镜头成像的畸变等原因，通过模型分析得出选取的星敏感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像的几何位置应尽可能分布在感光面中心位置，能有效减小模型的径向畸变，减小误差。

针对问题二，对基于角距矩阵匹配模型和基于径向特征的星图识别模型两个模型对比分析，分析简易星表的信息，利用八幅星图的星敏感器视场和像素数等数据，根据几何方法求解出光学焦距，建立以角距为特征的特征提取方法，通过对星表与星图特征矩阵的对比，在星表中选取最符合特征的恒星并验证。为提高星图识别算法的实时性和降低误匹配率，构建更高层次的特征，采用星模式的星图识别方法，构建径向特征的星图识别模型，通过确定主星、径向模式半径得出伴星数量，建立不同夹角下的伴星模型进行先验筛选，避免对简易星表遍历产生的大量时间消耗，大大加快星图匹配的速度。通过模型的建立、计算、识别和对比，模型的识别算法的识别时间以及存储容量有了显著提升，在鲁棒性，即对存在干扰星以及噪声干扰下的识别率也可保证性能，对实际工程应用有一定的参考价值。

**关键词：** 旋转变换；透视投影变换；角距；星模式；径向特征

## 目录

一、问题重述.....	1
二、模型假设.....	2
三、符号说明.....	2
四、问题分析.....	3
五、问题一模型的建立与求解 .....	3
5.1 根据问题分析建立如下模型： .....	3
5.2 根据问题分析建立如下模型 .....	5
5.3 讨论如何提高解算精度 .....	6
六、问题二模型的建立与求解 .....	10
6.1 基于角距矩阵匹配模型 .....	10
6.2 基于径向特征的星图识别模型 .....	13
6.3 模型一与模型二解算结果对比 .....	19
七、模型的评价 .....	20
7.1 问题一模型评价 .....	20
7.2 问题二模型评价 .....	20
八、参考文献.....	21

## 一、问题重述

天文导航是基于天体已知的坐标位置和运动规律，应用观测天体的天文坐标值来确定航行体的空间位置等导航参数。航行体通过星敏感器观测太空中的恒星来实现高精度姿态测量。恒星是用于天文导航最重要的一类天体。借助天球坐标系，可用赤经与赤纬来描述恒星在某一时刻位置信息，将恒星的位置与星等编成简易星表。星图识别是将星敏感器当前视场中的恒星（星图）与导航星库中的参考星进行对应匹配，以完成视场中恒星的识别。导航数据库一般包括两部分：导航星表和导航星特征数据库。星敏感器提取出观测星的特征后，寻找特征类似的导航星进行匹配。匹配识别过程和提取特征的方法紧密相关<sup>[1]</sup>。

在星图识别中定义以下三个坐标系：天球坐标系，星敏感器坐标系和图像坐标系<sup>[2]</sup>。在此基础上解决如下问题。

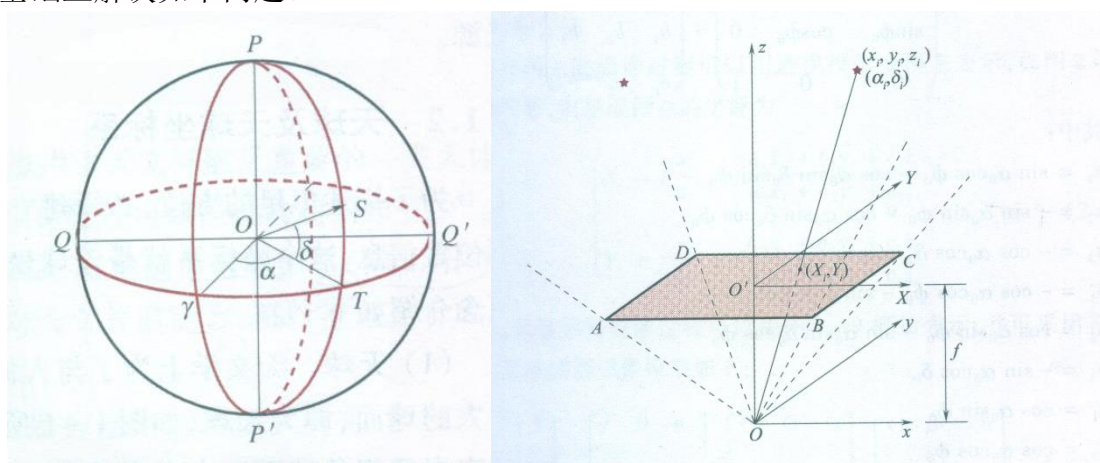


图 1 三个坐标系示意图

问题一：

$P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  是 3 颗已知位置的恒星，即它们在天球坐标系下的赤经和赤纬  $((\alpha_i, \delta_i), i=1,2,3)$  已知。利用已知条件解决：

(1) 建立数学模型解算光轴与天球面交点的天球坐标系坐标；

(2) 不利用  $f$  值，建立数学模型求解  $D$  点天球系坐标；

(3) 讨论如何选择不同几何位置的三颗星，提高解算点在天球坐标系中的位置信息的精度，并分析相应的误差。

问题二：

基于本题提供的简易星表信息，构建相应的特征提取模型，设计对应的星图识别算法，确定出题目给出的 8 幅星图中每一个星像点对应的恒星编号，并对算法的性能进行评价。

## 二、模型假设

假设一：假设恒星投影到图像坐标系为一个质点，即不考虑质心提取问题

假设二：假设光轴经过天球质心，即光轴上所有点赤经、赤纬均相等

假设三：建立问题一模型时，假设不考虑光学镜头畸变问题

## 三、符号说明

符号	注释
$O$	投影中心
$O'$	感光面中心
$(\alpha_i, \delta_i)$	第 $i$ 个恒星天球坐标系坐标， $\alpha_i$ 为赤经， $\delta_i$ 为赤纬，单位为度，下同
$(x'_i, y'_i, z'_i)$	第 $i$ 个恒星在天球坐标系下的方向矢量
$(x_i, y_i, z_i)$	第 $i$ 个恒星星敏器坐标系坐标
$(X_i, Y_i)$	第 $i$ 个恒星在图像坐标系上投影坐标
$Q_i$	第 $i$ 个恒星在图像坐标系上投影点
$a_i$	第 $i$ 个投影点到感光面中心距离
$f$	投影中心到感光面距离，即焦距
$D$	光轴与天球坐标系交点
$(\alpha_D, \delta_D, \varphi_D)$	光轴与天球坐标系交点坐标， $\alpha_D$ 为赤经， $\delta_D$ 为赤纬， $\varphi_D$ 为滚转角
$R$	星敏器坐标系到天球坐标系的旋转矩阵
$S$	导航星角距矩阵
$S'$	星图角距矩阵
$P$	判断矩阵

## 四、问题分析

**问题一第一小问**中已知 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三恒星在天球坐标系的坐标和图像坐标系的投影点。同时已知光轴在图像坐标系的坐标（即原点 $O'$ ）。欲求光轴与天球交点 $D$ 坐标，需建立天球坐标系与图像坐标系坐标变换关系模型。求解思路如下：建立恒星从天球坐标系到性敏感坐标系的旋转变换矩阵以及星敏感器坐标系到图像坐标系的透视投影变换方程。结合已知的光学系统焦距和感光面投影点到图像坐标系原点距离等信息，建立数学模型，联立求解出光轴与天球面交点的姿态，即 $D$ 点在天球坐标系的坐标。

**问题一第二小问**，在不使用焦距信息的情况下，对光轴与天球面交点的姿态进行求解。求解思路如下：从几何学角度出发，通过连接星敏感器坐标系远点以及3颗恒星在感光面上的投影点，构建三棱锥几何模型，通过三颗恒星在空间直角坐标系下的方向向量与光轴之间的夹角正切值的比例关系，建立四元方程组，联立求解出光轴与天球面交点的姿态，即 $D$ 点在天球坐标系的坐标。

**问题一第三小问**，在星敏感器视场内的恒星数量多于3颗的情况下，选择不同几何位置的三颗星来提高解算点在天球坐标系中的位置信息的精度。分析思路如下：对第一小问建立的数学模型进行分析，通过保证求解算法的可行性得出所选取的星敏感器视场内的3颗恒星在感光面上成像的几何位置的限制。同理对第二小问建立的数学模型进行分析，在保证光轴与天球面交点的姿态有唯一可行解的前提下，对选取的星敏感器视场内的3颗恒星在感光面上成像的几何位置做出限制。最后考虑光学镜头成像的畸变，通过建立模型1.3分析得出选取的星敏感器视场内的3颗恒星在感光面上成像的最优几何位置。

**问题二**需对星图中的星点信息进行更为精细的特征提取，构建更高层次的特征来提高星图识别算法的实时性和降低误匹配率。求解思路如下：选择建立两种数学模型进行对比，首先建立传统以角距为特征的星图识别模型，通过计算简易星表中任意两颗恒星的角距，并按照角距大小对星对信息进行存储（星对数据库构建时只选取角距值在 $0^\circ - 12^\circ$ 之间的星对）。随后计算附件三8幅星图的星象点两两之间的角距大小，对存储的简易星表的星对角距信息进行遍历匹配。然后在传统角距识别的基础上建立径向-角距特征星图识别模型，通过确定简易星表中的主星、径向模式半径得出伴星数量，沿径向方向将以主星为中心，以径向模式半径为半径的邻域分为间隔 $1^\circ$ 的3个环带，对简易星表的每个恒星都进行径向特征采集，建立径向特征查找表。然后对8幅星图中的恒星进行径向特征提取，与径向特征查询表进行特征匹配，寻找出的匹配星可能不止一个，然后再运用角距特征进一步识别，得出准确匹配星。

## 五、问题一模型的建立与求解

### 5.1 根据问题分析建立如下模型：

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \cos \delta_i \\ \sin \alpha_i \cos \delta_i \\ \sin \delta_i \end{pmatrix} \quad (5-1, \text{天球坐标系坐标矢量化})$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} \quad (5-2, \text{天球坐标系与星敏感器坐标系变换})$$



$$\begin{cases} X_i = f \frac{x_i}{z_i} \\ Y_i = f \frac{y_i}{z_i} \end{cases} \quad (5-3, \text{星敏感器坐标系与图像坐标系变换})$$

$$X_i^2 + Y_i^2 = a_i^2 \quad (5-4, \text{图像坐标系坐标与距离关系})$$

模型说明：

A) 式 1-1<sup>[4]</sup>为恒星在天球坐标系下的方向矢量表达式，其中*i*取值为 1, 2, 3，下同；

B) 式 1-2<sup>[5]</sup>将天球坐标系下坐标转化为星敏感系坐标，其中  $R^T$  为旋转矩阵的转置。旋转矩阵建立如下：

设要求点 D 的姿态角为  $(\alpha_D, \delta_D, \varphi_D)$ ，其中  $\alpha_D$  为赤经， $\delta_D$  为赤纬， $\varphi_D$  为滚转角。

通过查阅相关资料，星敏感器坐标系到天球坐标系的旋转矩阵  $R$ <sup>[6]</sup>为：

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_D - \pi/2) & -\sin(\alpha_D - \pi/2) & 0 \\ \sin(\alpha_D - \pi/2) & \cos(\alpha_D - \pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta_D + \pi/2) & -\sin(\delta_D + \pi/2) \\ 0 & \sin(\delta_D + \pi/2) & \cos(\delta_D + \pi/2) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos \varphi_D & -\sin \varphi_D & 0 \\ \sin \varphi_D & \cos \varphi_D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5-5, \text{旋转矩阵})$$

其中：

$$a_1 = \sin \alpha_D \cos \varphi_D - \cos \alpha_D \sin \delta_D \sin \varphi_D$$

$$a_2 = -\sin \alpha_D \sin \varphi_D - \cos \alpha_D \sin \delta_D \cos \varphi_D$$

$$a_3 = -\cos \alpha_D \cos \delta_D$$

$$b_1 = -\cos \alpha_D \cos \varphi_D - \sin \alpha_D \sin \delta_D \sin \varphi_D$$

$$b_2 = \cos \alpha_D \sin \varphi_D - \sin \alpha_D \sin \delta_D \cos \varphi_D$$

$$b_3 = -\sin \alpha_D \cos \delta_D$$

$$c_1 = \cos \alpha_D \sin \varphi_D$$

$$c_2 = \cos \alpha_D \cos \varphi_D$$

$$c_3 = -\sin \delta_D$$

经计算可得  $R$  为正交矩阵，故天球坐标系到星敏感器坐标系的旋转矩阵可以表示为  $R^{-1} = R^T$ 。利用该矩阵可以将某恒星天球坐标系坐标转换到星敏感器坐标系中<sup>[3]</sup>；

C) 式 5-3 将星敏感器坐标系坐标转化为图像坐标系坐标。式中  $(x_i, y_i, z_i)$  为某恒星星敏感器坐标， $(X_i, Y_i)$  为某恒星在图像坐标系中投影。实现基本思想是透视投影变换<sup>[7]</sup>；

D) 上式中虽然可以实现坐标变换，但题目中未给出恒星投影坐标，已知条件为投影点  $Q_i$  到原点  $O'$  的距离。由式 5-4 将距离与坐标联系起来，联立求解出  $D$  的天球坐标系坐标。

## 5.2 根据问题分析建立如下模型

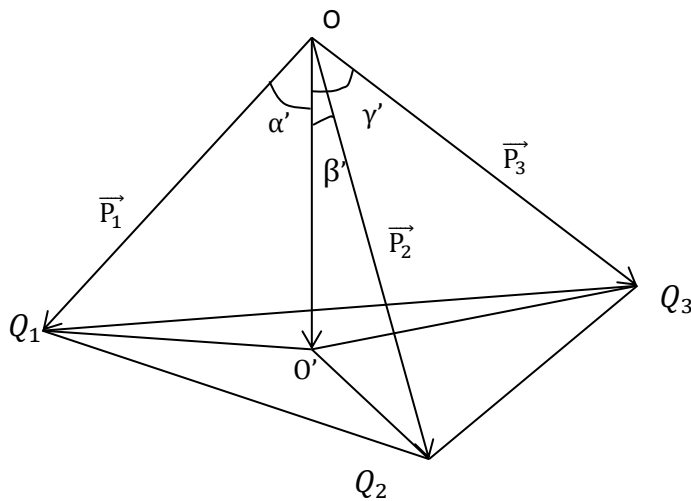


图 2 问题二模型示意图

建立几何模型如下：

现已知条件  $OO'$  垂直于平面  $Q_1Q_2Q_3$ ，三条棱方向向量已知，求  $OO'$  方向向量。设  $OO'$  方向向量为  $\vec{P} = (x, y, z)$ ， $OO'$  长度为  $f$ 。则有：

$$\begin{cases} \tan \alpha' = \frac{a_1}{f} \\ \tan \beta' = \frac{a_2}{f} \\ \tan \gamma' = \frac{a_3}{f} \end{cases} \quad (5-6)$$

令  $t = \frac{1}{f}$ ，则有：

$$\begin{cases} \tan \alpha' = a_1 t \\ \tan \beta' = a_2 t \\ \tan \gamma' = a_3 t \end{cases} \quad (5-7)$$



可知，三条棱与高的夹角的正切值成比例，有：

$$\begin{cases} \cos \alpha' = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}}{|\vec{P}_1| \cdot |\vec{P}|} \\ \cos \beta' = \frac{\vec{P}_2 \cdot \vec{P}}{|\vec{P}_2| \cdot |\vec{P}|} \\ \cos \gamma' = \frac{\vec{P}_3 \cdot \vec{P}}{|\vec{P}_3| \cdot |\vec{P}|} \end{cases} \quad (5-8)$$

根据上述向量全为方向向量，向量的模为 1，可联立方程组

$$\begin{cases} \vec{P}_1 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_1 t)) \\ \vec{P}_2 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_2 t)) \\ \vec{P}_3 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_3 t)) \\ |\vec{P}| = 1 \end{cases} \quad (5-9)$$

方程组有四个子式，含有四个未知数  $(x, y, z, t)$ ，对方程进行求解；

首先建立非齐次方程组

$$\begin{cases} \vec{P}_1 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_1 t)) \\ \vec{P}_2 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_2 t)) \\ \vec{P}_3 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_3 t)) \end{cases} \quad (5-10)$$

展开得

$$\begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tan^{-1}(a_1 t)) \\ \cos(\tan^{-1}(a_2 t)) \\ \cos(\tan^{-1}(a_3 t)) \end{pmatrix}$$

由方程可知若使方程只有唯一非零解，则需系数矩阵的秩  $r = 3$ ，即三恒星的方向向量不共面，即可求出一特解：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

根据  $|\vec{P}| = 1$ ，有

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1 \quad (5-12)$$

即可解出方程，则 D 点在天球坐标系中的位置为

$$(\alpha, \delta) = (\tan^{-1} \frac{y}{x}, \sin^{-1} z) \quad (5-13)$$

### 5.3 讨论如何提高解算精度

#### (1) 针对问题一第三小问的讨论与分析。

第一小问建立的求解 D 点在天球坐标系的坐标的数学模型如下所示：

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} \quad (5-14)$$

$$\begin{cases} X_i = f \frac{x_i}{z_i} \\ Y_i = f \frac{y_i}{z_i} \end{cases} \quad (5-15)$$

$$X_i^2 + Y_i^2 = a_i^2 \quad (5-16)$$

在具体求解过程中，各个恒星在图像坐标系的坐标  $(X_i, Y_i)$  属于中间变量，将用式 1-4 中的  $X_i^2 + Y_i^2 = a_i^2$  消去式 1-3 中的  $X_i$  和  $Y_i$ （其中  $i=1, 2, 3$ ）。因为有三颗已知恒星 P1、P2、P3，故可根据式 1-3 和式 1-4 联立列出三个方程，即可求解 D 点的姿态角  $(\alpha_D, \delta_D, \varphi_D)$ 。

若选取的星敏传感器视场内的 3 颗恒星在感光面上几何位置如下图所示：

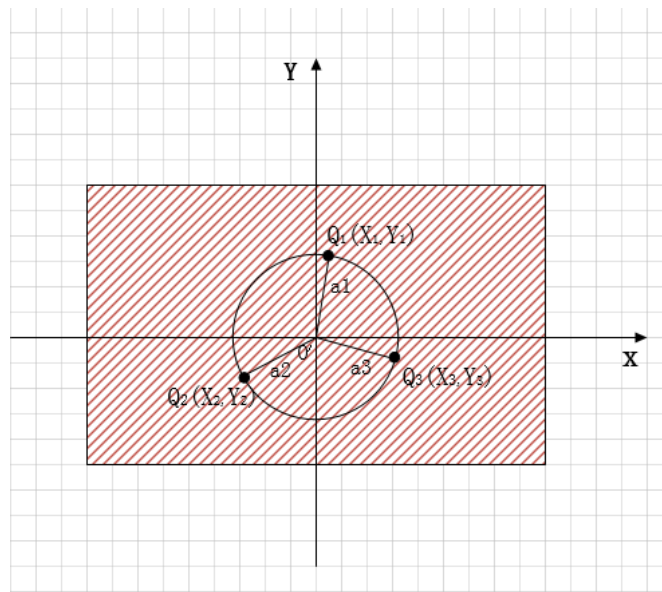


图 3 恒星选择位置图

若选取的 3 颗恒星 P1、P2 和 P3 在感光面上成像的几何位置均在以  $O'$  为圆心， $R$  为半径（ $R \leq$  感光面半径）的圆上，即

$$a1 = a2 = a3 = R \quad (5-17)$$

此时式 5-3 和式 5-4 联立的三个方程将转化为一个方程，无法求解出 D 点姿态角  $(\alpha_D, \delta_D, \varphi_D)$  中的三个未知数。

因此针对于问题一第一小问所建立数学模型，所选取的星敏传感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像的几何位置不能同时位于以  $O'$  为圆心， $R$  为半径的圆上。选取不同时在（有且仅有一个）该系列圆上的投影点，能有效提升 D 点位置的求解精度。

（2）第二小问中，建立的几何数学模型如下所示：

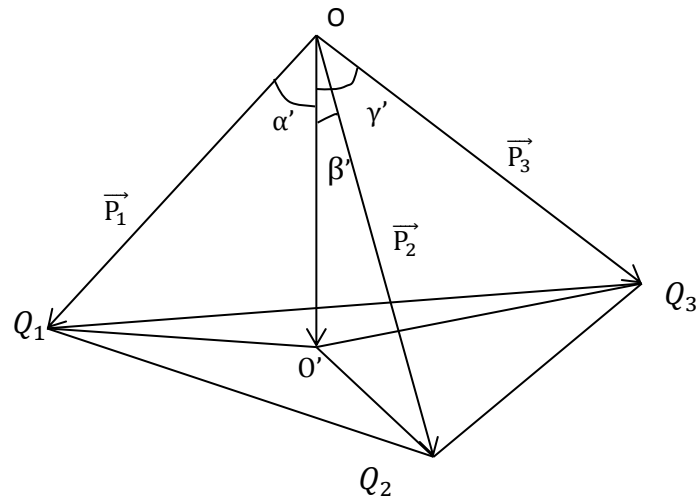


图 4 问题二模型示意图

然而当星敏感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成直线分布时，其建立的几何模型将转化为如下图所示：

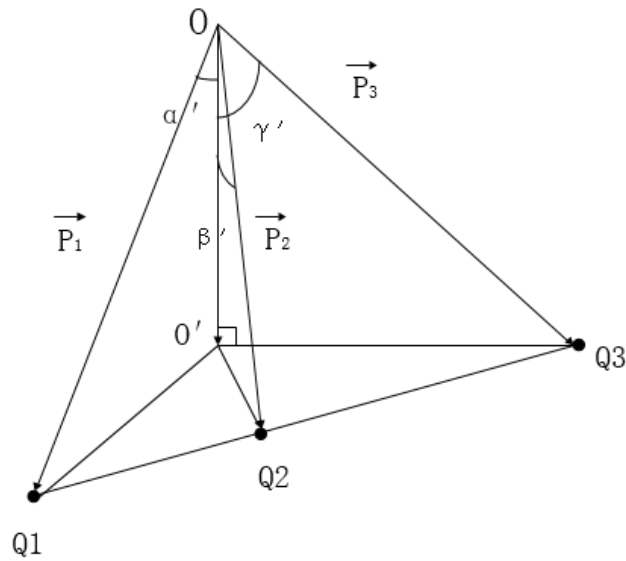


图 5 模型特殊位置示意图

设  $OO'$  方向向量  $\vec{P} = (x, y, z)$  为， $OO'$  长度为  $f$

由第二问的求解算法可得最终求解模型如下：

$$\begin{cases} \vec{P}_1 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_1 t)) \\ \vec{P}_2 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_2 t)) \\ \vec{P}_3 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_3 t)) \\ |\vec{P}| = 1 \end{cases} \quad (5-18)$$

方程组有四个子式，含有四个未知数  $(x, y, z, t)$ ，对方程进行求解；

首先建立非齐次方程组

$$\begin{cases} \vec{P}_1 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_1 t)) \\ \vec{P}_2 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_2 t)) \\ \vec{P}_3 \cdot \vec{P} = \cos(\tan^{-1}(a_3 t)) \end{cases} \quad (5-19)$$

展开得

$$\begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tan^{-1}(a_1 t)) \\ \cos(\tan^{-1}(a_2 t)) \\ \cos(\tan^{-1}(a_3 t)) \end{pmatrix}$$

由方程可知若使方程只有唯一非零解（特解），则需系数矩阵的秩为 3，因此三恒星的方向向量**必须不共面**，即星敏传感器视场内的 3 颗恒星在感光面上**不能够成直线**，否则该模型不存在唯一非零解，即 D 的姿态角将无法依据此模型求解。

故针对第一问中第二小问建立的数学模型，所选取的星敏传感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像的几何位置不能为一条任意方向的直线。选取不在同一直线的三个恒星投影点，能有效提升 D 点位置的求解精度。

### （3）对求解模型的线性畸变分析：

在第一问前两小问求解过程中，对于星敏传感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像均默认为理想透视成像。但是对于真实的光学镜头并没办法达到理想透视成像，而是带有不同程度的畸变<sup>[3]</sup>，使得在感光面上所成像的点并非准确落在线性模型所描述的位置（ $X_i$ ，

$Y_i$ ），而是在受到光学镜头失真影响而偏移的实际图像坐标系的平面坐标（ $X'_i$ ， $Y'_i$ ）：

$$\begin{cases} X'_i = X_i + dx_i \\ Y'_i = Y_i + dy_i \end{cases} \quad (5-20)$$

其中  $dx$  和  $dy$  为非线性畸变值，它与三颗恒星在感光面成像的位置有关。在实际情况下，光学镜头会同时存在径向畸变和切向畸变，如下图所示：

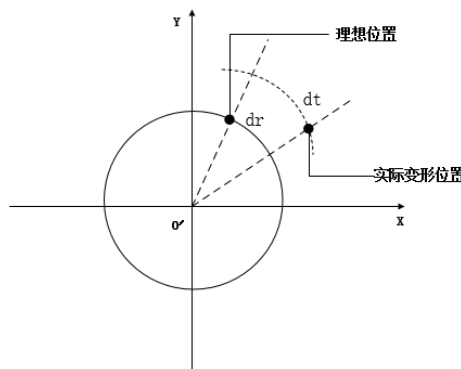


图 6 镜头畸变示意图

一般情况下，非线性模型中的径向畸变已经足够描述非线性畸变，Tsai 指出，由于在考虑非线性畸变时需要使用非线性优化算法，引入过多的非线性参数往往不仅不能提高精度，反而引起解的不稳定<sup>[6]</sup>。

故本次建立的非线性模型仅考虑光学镜头的径向畸变。

由于透镜曲面的工艺缺陷，图像会产生下图所示桶形畸变(A)和枕形畸变(B)。这些畸变相对于光心是对称的，可以建立如下数学模型来表示径向误差：

$$d_{\rho_i} = k_1 \rho_i^3 + k_2 \rho_i^5 + k_3 \rho_i^7 + \dots \quad (5-21)$$

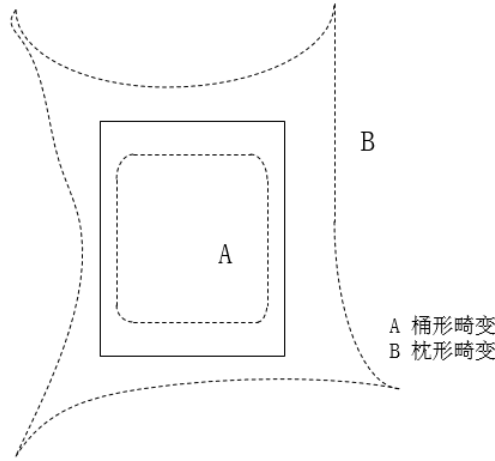


图 7 不同畸变类型

$\rho_i$  是图像点到光心的径向距离  $\rho_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$ ， $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  是径向畸变系数，则：

$$\begin{cases} X_i = \rho_i \cos \theta \\ Y_i = \rho_i \sin \theta \end{cases} \quad (5-22)$$

$$\begin{cases} dx_i = d\rho_i \cos \theta = k_1 X_i (X_i^2 + Y_i^2) + O[(X_i, Y_i)] \\ dy_i = d\rho_i \sin \theta = k_2 Y_i (X_i^2 + Y_i^2) + O[(X_i, Y_i)] \end{cases} \quad (5-23)$$

所以在仅考虑径向畸变的前提下：

$$\begin{cases} X_i' = X_i (1 + k_1 \rho_i^2) \\ Y_i' = Y_i (1 + k_2 \rho_i^2) \end{cases} \quad (5-24)$$

式表明 X 方向与 Y 方向的畸变相对值与径向半径的平方成正比，即在感光面边缘处的畸变较大。

故所选取的星敏感器视场内的 3 颗恒星在感光面上成像的几何位置应尽可能分布在感光面中心位置，能有效减小模型的径向畸变，从而提升 D 点位置的求解精度，减小误差。

## 六、问题二模型的建立与求解

本题构建了两个模型进行求解。模型一是基于角距传统算法优化的矩阵特征匹配模型；模型二在基于星模式的星图识别思想下建立多径向星图识别算法模型。下面分别介绍两种模型实现过程，并对比两种模型的实用性等性能。

### 6.1 基于角距矩阵匹配模型

构建模型如下：

首先构建如下三个矩阵：

$$S = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & \cdots & \cdots & \theta_{1,4908} \\ \theta_{2,1} & \theta_{2,2} & \cdots & \cdots & \theta_{2,4908} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \theta_{4908,1} & \theta_{4908,2} & \cdots & \cdots & \theta_{4908,4908} \end{pmatrix} \quad (6-1, \text{导航星角距库矩阵})$$

$$S' = (\theta'_{1,1} \quad \theta'_{1,2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \theta'_{1,n}) \quad (6-2, \text{某星图角距矩阵})$$

$$P = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad p_{4096}) \quad (6-3, \text{判断矩阵})$$

实现的简易流程图如下：

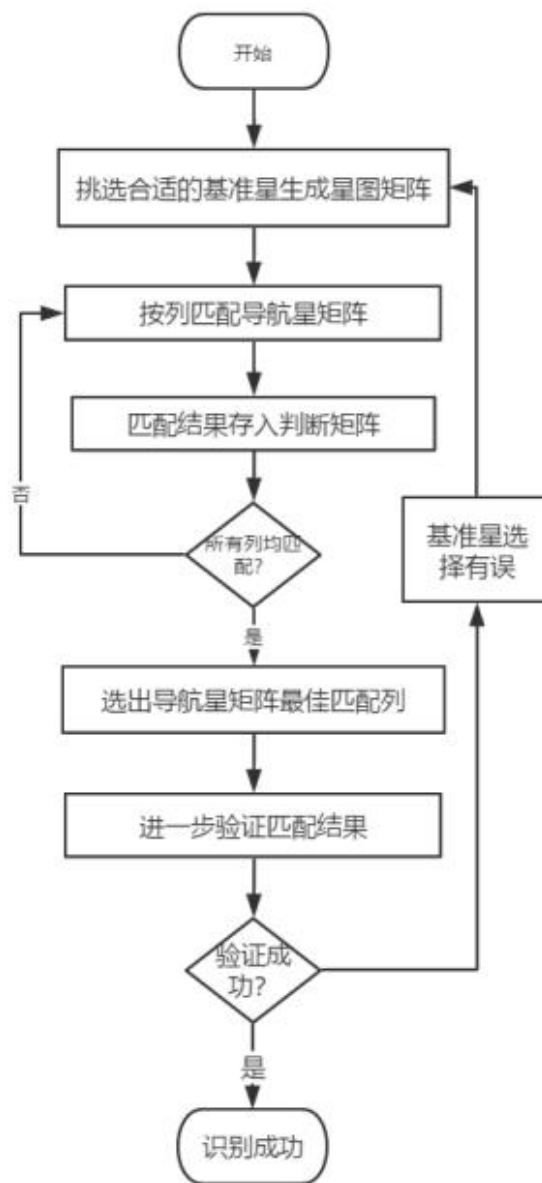


图 8 实现流程图

模型说明：

A) 本模型基于角距矩阵匹配算法，在传统子图同构类算法的基础上进行改进与优化。



应用 MATLAB 软件进行模拟仿真，具体实现过程如下：

B) 根据已知的简易导航星表,在 MATLAB 软件中构建所有导航星天球坐标系方向矢量,然后计算第  $j$  颗星与第  $i$  颗星角距  $\theta_{i,j}$  ( $i$  和  $j$  取  $1, 2, 3 \dots 4096$ )，由此可以得到导航星角距库矩阵  $S$ ，后续将该矩阵作为匹配库；

C) 建立星图角距矩阵。建立过程如下：

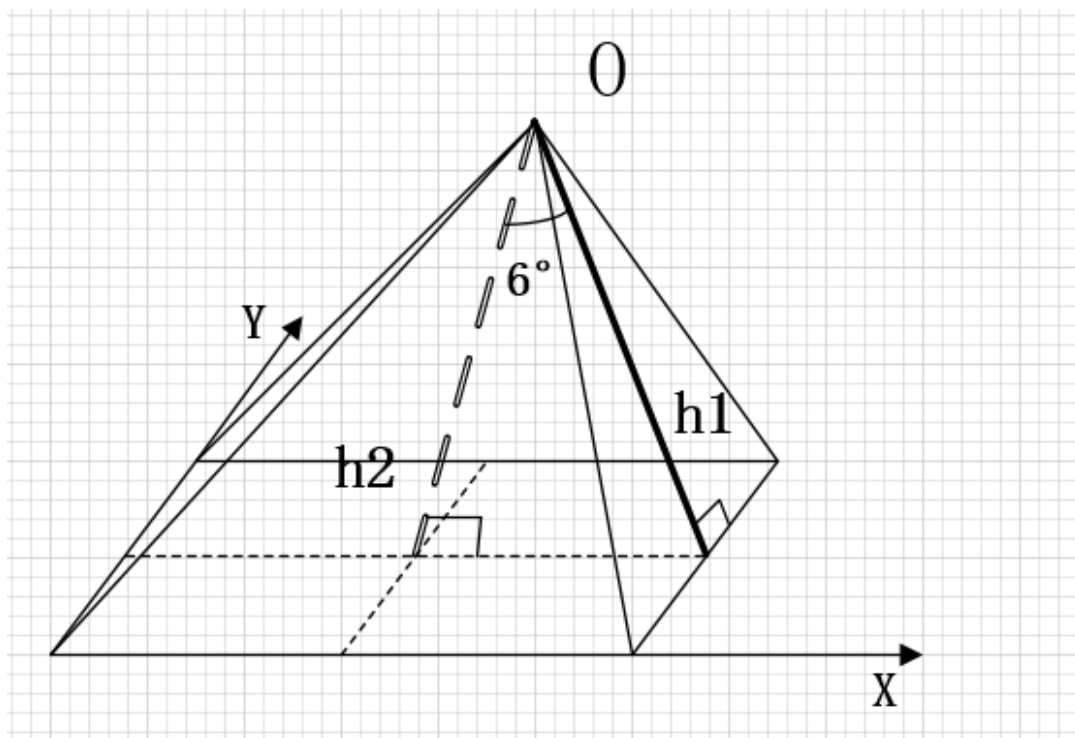


图 9 视场与像素坐标系

以星图 1 为例：如上图所示，已知视场为  $12^\circ \times 12^\circ$ ，星图大小为  $512 \times 512$ ，由此可以得出  $h_2$ 。以  $O$  为原点建立星敏感器坐标系可以得到该星图任一恒星在该坐标系下矢量，根据该矢量可计算任意两个恒星角距。选择合适的恒星作为基准星计算其与星图中其他恒星角距得到该星图角距矩阵；

D) 基准星选择依据如下：①在不影响匹配的条件下，尽量选择靠近星图边缘位置的恒星。目的是边缘恒星与其他星夹角较大，可以有效提高区分度增加匹配成功率；②基准星与其他星角距应尽量不同以提高匹配成功率；

E) 以上几点为建立匹配母数据库与子数据库。下面说明实现流程：

①取星图角距矩阵首个元素与导航星角距矩阵第一列元素依次匹配，若匹配到角距相等或近似的元素，判断矩阵首个元素数值加 1；

②取星图角距矩阵第  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 个元素，重复第①步操作；

③若星图矩阵所有元素均完成匹配，则取导航星矩阵第  $j$  ( $j = 2, 3, \dots, 4908$ ) 列元素重复第①、②步操作；

④取判断矩阵最大元素所在列（记为  $\chi$ ）作为基准星编号  $\chi$ ；

⑤继续匹配导航星矩阵第  $\chi$  列，确定星图其他恒星编号。

## 6.2 基于径向特征的星图识别模型

模型示意图如下：

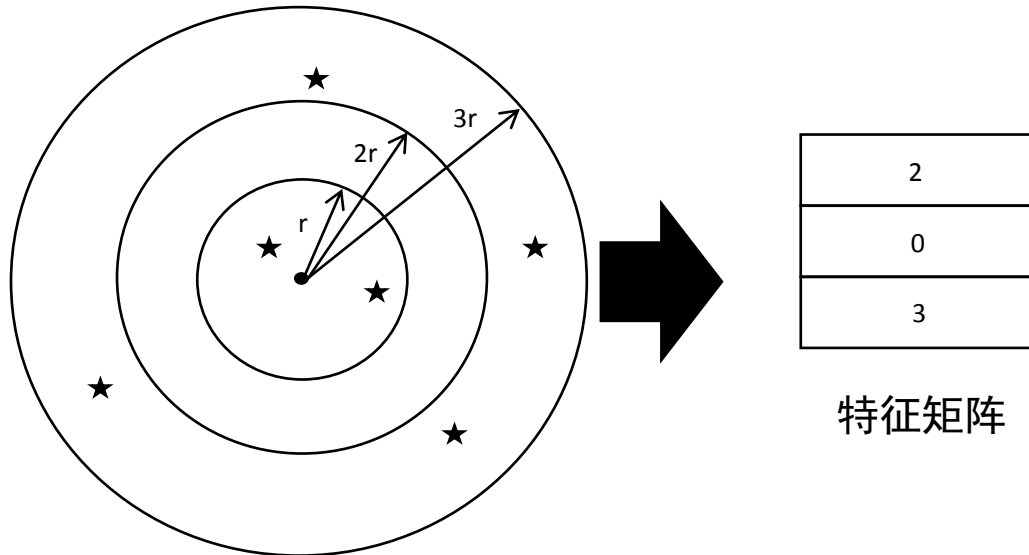


图 10 径向特征提取

模型说明：

A) 在基于角距矩阵匹配模型中，由于简易星表中一共有 4908 颗星，则构建的遍历矩阵的数据量较为庞大，如果在实际工程中，则数据量的量级则更加高，则会导致运算匹配速度过慢，实时性较差的情况，因此在其基础上提取更加简单的特征矩阵来使得遍历次数大量减少，从而在保证一定识别精度的情况下使算法的实时性有明显提升。

因此，如何提取较为有效的特征矩阵对算法整体的计算难度，计算速度包括特征矩阵的有效性都有较大影响，由于在简易星表中提供的参数有赤经、赤纬和星等信息，而在 8 幅星图中只有星象点质心的坐标，因此，选取的特征必定与赤经、赤纬两个参数有直接或间接的联系，也必定无法单纯跳过角度问题的挑选其它特征进行星图对比。

因此，在基于角距矩阵匹配模型中加入了基于径向特征的星图识别模型进行初步筛选，从而使得算法能够更加快速地遍历至目标星点。

B) 径向特征构建方法下：

首先，依据星敏感器的视场对所构建特征矩阵的半径特征进行确定，半径特征为

$$r = \frac{r_1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \quad (6-4)$$

其中， $r_1$  为正方形星敏感器视场角度， $n$  为所需构建特征矩阵的阶数

其次，在导航星角距库矩阵的基础下，对 4908 颗恒星的特征矩阵进行计算，得到距基准星不同半径内的其余临星的个数，并将其作为特征矩阵进行对比。

在构建完成 4908 个特征后，再对 8 幅星图的数据进行处理，此时，基准星的选取极为重要，为了保证所选取的基准星的特征矩阵具有真实性，需要使得基准星的位置较为靠近星图中央防止特征圆的边缘伸出星图外造成特征矩阵的获取错误，其次，为了使筛选效果

更佳明显，所选取的基准星应拥有一定数量的临星以获得较为独特的特征向量。

在获得星图特征向量后，将其与星表特征向量进行比对，找出符合特征的所有恒星，再以筛选出的恒星为提取星表使用基于角距矩阵匹配模型对目标进行最终筛选。

为了观察镜像特征改进方法的效果，分别对两种特征提取及处理方法进行建模，从提取结果、处理速度等方面分析改进方法的优势与不足。

首先，对附件中的简易星表数据进行处理，将天球坐标系下的 4908 颗星的方向坐标转化为空间直角坐标系中的方向向量并绘制，观察简易星表。

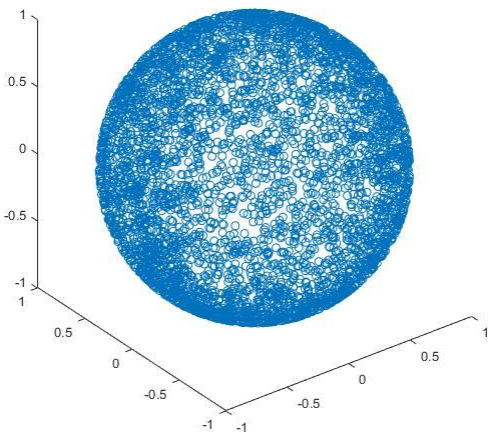


图 11 简易星表向量图

如图，为简易星表中所有恒星的方向向量所绘制出的星表图，从图中可以看出，所有恒星在各个方向上的分布式较为均匀的。

使用计算得到的直角坐标系下的方向向量求出每两颗恒星的夹角，得到基础特征向量。

P x														
4908x4908 double														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0.9996	0.8808	-0.3426	0.6974	0.7338	0.2437	0.9450	0.5403	-0.4212	0.8528	-0.3600	0.8454	0.78
2	0.9996	1	0.8932	-0.3675	0.6780	0.7154	0.2178	0.9360	0.5177	-0.4452	0.8386	-0.3847	0.8309	0.76
3	0.8808	0.8932	1	-0.7465	0.2750	0.3247	-0.2444	0.6776	0.0776	-0.8004	0.5041	-0.7588	0.4919	0.39
4	-0.3426	-0.3675	-0.7465	1	0.4344	0.3869	0.8277	-0.0165	0.6055	0.9964	0.1983	0.9998	0.2121	0.31
5	0.6974	0.6780	0.2750	0.4344	1	0.9986	0.8651	0.8934	0.9799	0.3563	0.9690	0.4176	0.9723	0.99
6	0.7338	0.7154	0.3247	0.3869	0.9986	1	0.8378	0.9156	0.9682	0.3071	0.9805	0.3697	0.9832	0.99
7	0.2437	0.2178	-0.2444	0.8277	0.8651	0.8378	1	0.5475	0.9478	0.7770	0.7142	0.8171	0.7240	0.79
8	0.9450	0.9360	0.6776	-0.0165	0.8934	0.9156	0.5475	1	0.7858	-0.1014	0.9767	-0.0351	0.9736	0.94
9	0.5403	0.5177	0.0776	0.6055	0.9799	0.9682	0.9478	0.7858	1	0.5356	0.9001	0.5906	0.9062	0.94
10	-0.4212	-0.4452	-0.8004	0.9964	0.3563	0.3071	0.7770	-0.1014	0.5356	1	0.1143	0.9978	0.1283	0.23
11	0.8528	0.8386	0.5041	0.1983	0.9690	0.9805	0.7142	0.9767	0.9001	0.1143	1	0.1801	0.9999	0.99
12	-0.3600	-0.3847	-0.7588	0.9998	0.4176	0.3697	0.8171	-0.0351	0.5906	0.9978	0.1801	1	0.1940	0.29
13	0.8454	0.8309	0.4919	0.2121	0.9723	0.9832	0.7240	0.9736	0.9062	0.1283	0.9999	0.1940	1	0.99
14	0.7847	0.7679	0.3978	0.3134	0.9914	0.9969	0.7923	0.9443	0.9455	0.2316	0.9929	0.2958	0.9945	
15	0.9230	0.9329	0.9952	-0.6777	0.3680	0.4159	-0.1482	0.7464	0.1750	-0.7377	0.5864	-0.6912	0.5749	0.48
16	-0.4380	-0.4618	-0.8114	0.9946	0.3388	0.2893	0.7651	-0.1199	0.5198	0.9998	0.0958	0.9964	0.1098	0.21
17	-0.3441	-0.3690	-0.7476	1.0000	0.4330	0.3854	0.8267	-0.0181	0.6042	0.9965	0.1968	0.9999	0.2106	0.31
18	0.7300	0.7116	0.3196	0.3918	0.9988	0.9999	0.8406	0.9134	0.9694	0.3122	0.9795	0.3747	0.9822	0.99
19	0.4662	0.4424	-0.0081	0.6713	0.9591	0.9430	0.9715	0.7299	0.9962	0.6059	0.8595	0.6575	0.8667	0.91
20	0.9999	0.9997	0.8830	-0.3470	0.6939	0.7305	0.2392	0.9434	0.5363	-0.4254	0.8504	-0.3643	0.8429	0.78
21	-0.3909	-0.4153	-0.7800	0.9986	0.3871	0.3385	0.7974	-0.0684	0.5633	0.9994	0.1472	0.9994	0.1612	0.26

图 12 简易星表特征值提取

根据基于角距矩阵匹配模型的方法，分别在 8 幅星图中选取基准星，8 幅星图选取的基准星如下：

表 1 各星图基准星编号

xingtu01	xingtu02	xingtu03	xingtu04	xingtu05	xingtu06	xingtu07	xingtu08
A12	B10	C03	D06	E06	F09	G32	H26

以基准星为基准，计算其与星图中其余恒星的夹角，得到 8 幅星图的特征矩阵，并将其与星表特征向量进行比对，从而得到计算结果。

表 2 星图 1 计算结果

星像点编号	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09
恒星编号	1670	1477	1502	1631	1603	1453	1432	1432	1576
星像点编号	A10	A11	A12	A13	A14	A15			
恒星编号	1648	1646	1566	1688	1655	1505			

表 3 星图 2 计算结果

星像点编号	B01	B02	B03	B04	B05	B06	B07	B08	B09
恒星编号	518	472	537	428	491	469	482	503	478
星像点编号	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16		
恒星编号	499	547	460	507	556	447	479		

表 4 星图 3 计算结果

星像点编号	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07		
恒星编号	无解	1915	1823	1823	无解	1827	无解		

表 5 星图 4 计算结果

星像点编号	D01	D02	D03	D04	D05	D06	D07	D08	D09
恒星编号	3249	3346	3364	3275	3421	3319	3283	3370	3265
星像点编号	D10	D11	D12						
恒星编号	3261	3321	3309						

表 6 星图 5 计算结果

星像点编号	E01	E02	E03	E04	E05	E06	E07	E08	E09
恒星编号	1230	1150	1017	1033	1014	1223	1008	1208	1201

表 7 星图 6 计算结果

星像点编号	F01	F02	F03	F04	F05	F06	F07	F08	F09
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

恒星编号	1670	无解	1502	1631	无解	1692	1492	无解	1646
星像点编号	F10	F11	F12						
恒星编号	1566	1655	1505						

表 8 星图 7 计算结果

星像点编号	G01	G02	G03	G04	G05	G06	G07	G08	G09
恒星编号	1909	1572	1443	1748	1780	1675	1780	1503	1634
星像点编号	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16	G17	G18
恒星编号	1577	1757	1586	1536	1610	1681	1606	1670	1477
星像点编号	G19	G20	G21	G22	G23	G24	G25	G26	G27
恒星编号	1790	1502	1631	1603	1415	1692	1453	1432	1492
星像点编号	G28	G29	G30	G31	G32	G33	G34	G35	G36
恒星编号	1488	1648	1646	1566	1688	1655	1505	1373	无解
星像点编号	G37	G38	G39	G40	G41				
恒星编号	1545	1424	1375	1825	1401				

表 9 星图 8 计算结果

星像点编号	H01	H02	H03	H04	H05	H06	H07	H08	H09
恒星编号	1572	1387	1675	1634	1586	1610	1354	1681	1606
星像点编号	H10	H11	H12	H13	H14	H15	H16	H17	H18
恒星编号	1670	1655	1502	1631	1603	1692	1432	1488	1648
星像点编号	H19	H20	H21	H22	H23	H24	H25	H26	H27
恒星编号	1646	1566	1688	1688	无解	1373	1576	1944	1375
星像点编号	H28	H29							
恒星编号	1401	1385							

根据所求解的结果，分别绘制出 8 组结果中的图片，并与原图做对比，以检验算法的计算结果。

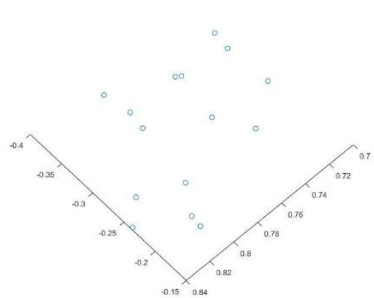


图 13 星图 1 结果

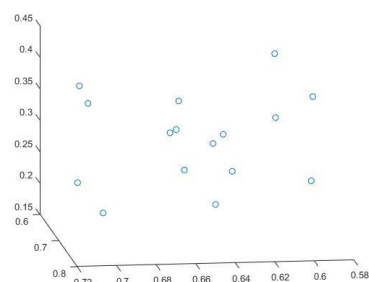


图 14 星图 2 结果

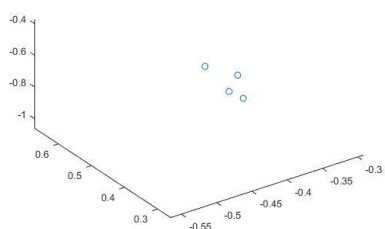


图 15 星图 3 结果

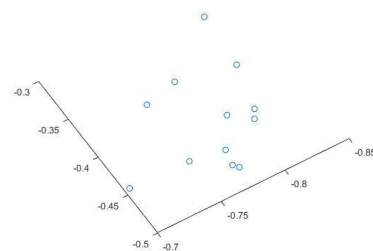


图 16 星图 4 结果

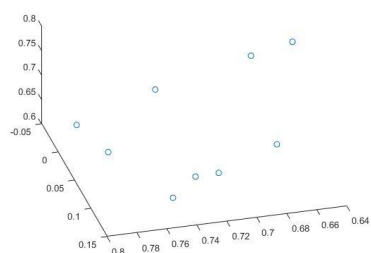


图 17 星图 5 结果

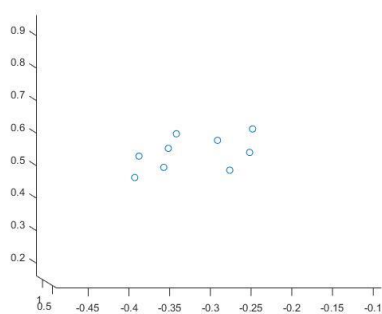


图 18 星图 6 结果

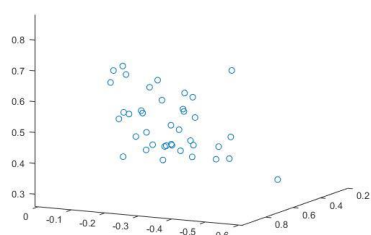


图 18 星图 7 结果

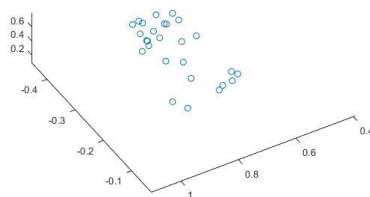


图 19 星图 8 结果



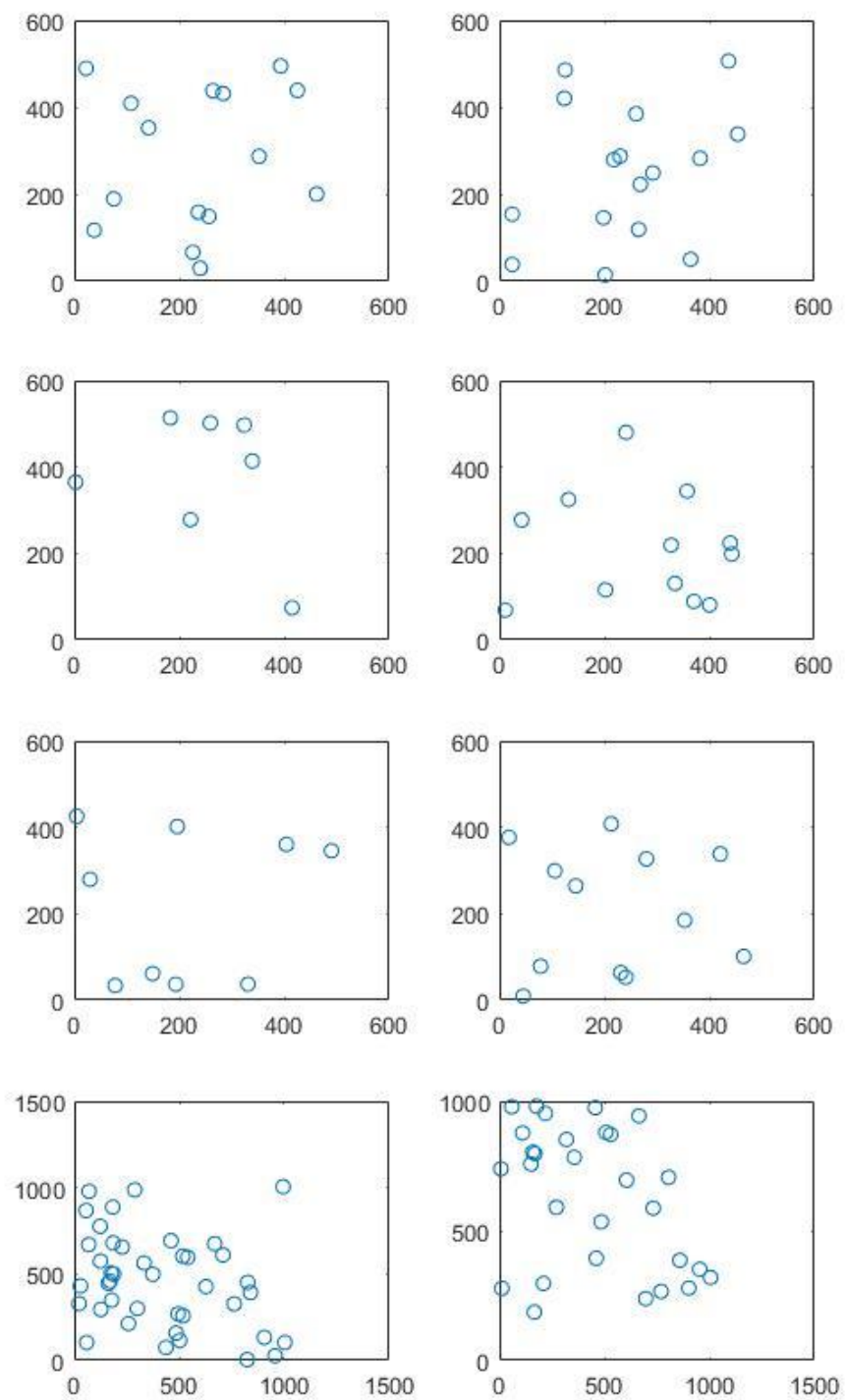


图 20 8 幅星图星敏感器数据

从上图的对比中可以看出，除星图 3、星图 6 外，其余星图中的识别较为完整，且识别正确率也较高，尤其在广角星传感器中的识别更为完整，其中无解部分的原因经过对计算数据的分析，推测是由于在计算中部分数据取无为小数造成的特征向量值的误差，从而使得部分恒星的数据有偏差无法正确识别出。

6.3 模型一与模型二解算结果对比

使用基于径向特征的星图识别模型对特征进行计算，，对基于径向特征的星图识别模型的计算结果与基于角距矩阵匹配模型的结果进行对比，可发现使用径向特征仍可以找到与方法 1 相同的星组，但是部分情况识别出的恒星会出现错误。

12	A12	352.29	287.05	1566	68
9	B09	292.36	249.03	478	478
10	B10	229.82	287.51	499	10
11	B11	123.64	420.49	547	114
6	D06	327.02	219.08	3319	80
26	H26	859.72	386.03	1944	29

图 21 8 幅星图中径向特征识别错误恒星表

同时，在识别过程中，以星图 1 的识别速度作为参考，对识别速度进行分析。

探查摘要

基于21-Sep-2019 15:45:18时间于 performance 生成。

函数名称	调用次数	总时间	自用时间*	总时间图 (深色条带 = 自用时间)
Untitled	1	40.201 s	37.610 s	<div></div>
xlsread	8	2.591 s	0.039 s	<div></div>
iofun\private\xlsreadCOM	8	1.329 s	0.032 s	<div></div>
iofun\private\openExcelWorkbook	8	1.173 s	1.115 s	<div></div>
getExcelInstance	8	1.048 s	0.007 s	<div></div>
actxserver	1	1.036 s	1.036 s	<div></div>

探查摘要

基于22-Sep-2019 09:46:30时间于 performance 生成。

函数名称	调用次数	总时间	自用时间*	总时间图 (深色条带 = 自用时间)
suanfa2	1	4.984 s	3.411 s	<div></div>
xlsread	1	1.573 s	0.021 s	<div></div>
getExcelInstance	1	1.264 s	0.003 s	<div></div>
actxserver	1	1.260 s	1.260 s	<div></div>
iofun\private\xlsreadCOM	1	0.264 s	0.011 s	<div></div>

图 21 模型一与模型二处理速度对比

从图中可以看出，模型一总时间为 40.201s，模型二总时间为 4.984s。相对模型一，模型二拥有更加优秀的时效性，计算速度相差 8 倍，同时模型二也能够找到相应星图，虽在个别恒星的识别中出现了识别错误，但是整体识别视野是正确的，所以在工程使用领域，模型二更具有实际应用价值。

## 七、模型的评价

### 7.1 问题一模型评价

本题第（1）问建立了基于坐标系转化的模型求解未知坐标，核心思想如下：

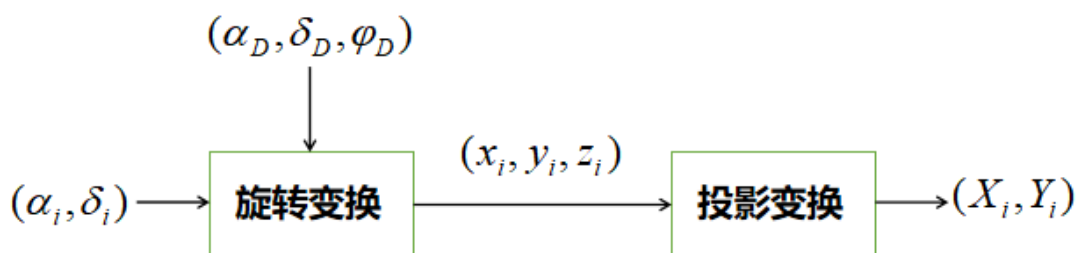


图 10 问题一核心思想示意图

该方法可以利用三个恒星天球坐标系坐标精确解出坐标值。模型比较简单，方便求解。但也存在一些缺点，如恒星点的选取要满足一定几何关系；同时模型应用多元二次方程组求解，运算量较大等。

该方法可以利用天球坐标系与星敏感器坐标系以及图像坐标系的转换关系精确解出坐标值。模型优点在于主要运用矩阵变换等知识，方便求解。但也存在一些缺点，如恒星点的选取的几何位置有一定限制；同时模型应用多元二次方程组求解，人工求解运算量较大，需利用专业软件求解等。

本题第（2）问建立在几何图形转化的三棱锥数学模型求解光轴在天球坐标系的具体姿态。优点在于该几何模型直观表达出恒星位置关系，通过几何学的矢量以及角度关系，有利于在不利用光学焦距  $f$  的前提下进行姿态求解。其缺点是对选取的恒星在感光面成像的几何位置有一定要求，不具有任意性。

### 7.2 问题二模型评价

问题二建立了对比模型，其中传统基于角距特征的星图识别模型经算法证明能够较好识别出星图，但其因为需要多次遍历简易星表，因此识别时间较长，所需的存储容量达到 MB 量级，对于噪声和干扰星也较为敏感。

采用星模式的星图识别方法，构建的径向特征的星图识别模型，采用径向特征做初始匹配，角距特征做后续匹配，经算法运行证明能够有效降低星图识别市建，并将所需的存储容量降到 KB 量级。缺点在于从实验运行结果看来，该模型对降低噪声以及干扰星对识别率的影响帮助有限，后续还需继续改良模型和算法。

## 八、参考文献

- [1] 张广军, 星图识别[M], 北京: 国防工业出版社, 2011
- [2] 孟靖, 大地天文测量星图定位与识别算法的研究[D], 西安电子科技大学, 2010
- [3] 时圣革, 雷肖剑, 于长海, 星图识别三角形算法综述[J], 光电技术应用, 2014. 05
- [4] Kazuhide Noguchi, Koshi Sato, Ryouichi Kasikawa, Naoto Ogura, Keiken Ninomiya, Tatsuaki Hasimoto, Eiji Hirokawa. CCD star tracker for attitude determination and control of a satellite for a space VLBI mission[P]. Optics & Photonics, 1996.
- [5] 王晓光, 无线电电子学、电信技术 T000378 导航与定位, 杨牧之主编, 中国图书年鉴, 湖北人民出版社, 2001, 708, 年鉴
- [6] 赵军阳, 张志利, 刘殿剑, 周召发, 常振军, 一种利用改进径向特征的星图识别方法[J], 系统仿真学报, 2019, 31(04):601-607
- [7] 魏新国, 张广军, 江洁, 利用径向和环向分布特征的星图识别方法[J], 光电工程, 2004(08):4-7