



中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第十六届中国研究生
数学建模竞赛

学 校	航天工程大学
参赛队号	19910360003
队员姓名	1.张海涛
	2.于金龙
	3.张建伟

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第十六届中国研究生

数学建模竞赛

题 目

天文导航中的星图识别

摘 要：

本文主要以天文导航中的星图识别问题为研究对象，研究了星敏感器的姿态确定、焦距标定以及定姿误差传播等问题。针对星敏感器的初始姿态捕获问题，综合考虑实效性、存储容量和鲁棒性等性能指标，建立了改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型，完成了 8 幅星图识别，并对模型做出评价。

本文的主要创新点：

- 1、利用球面三角形解算星敏感器光轴（D 点）的指向，避免了复杂运算；
- 2、构建了改进的匹配组星图识别模型，能够有效的提高搜索效率和鲁棒性；
- 3、提出了添加补偿码的径向伴星-环向特征提取模型：在径向特征算法构建特征提取模型的基础上，引入了环向特征模式，同时将伴星间的角距信息以及位置噪声的补偿信息添加到径向伴星特征向量，将位置噪声的补偿信息添加到环形特征向量；在上述特征提取模型的基础上，提出了添加补偿码的径向伴星-环向星图识别算法，计算星敏感器观测到的观测星特征向量与特征库中导航星特征向量的最小相似差时，引入了环向特征模式，采用最小相似差法得到候选星，然后根据视场内各星点位置信息的相关性进行筛选，唯一识别观测星。

本文完成的主要工作总结如下：

针对问题一第 1 问，用坐标变换和解球面三角形两种方法求解问题。方法一：计算 3 个恒星在天球坐标系和星敏感器坐标系中的方向矢量，用天球坐标系到星敏感器坐标系的坐标变换矩阵建立两者之间的联系，然后在 z 轴方向列方程组（超静定方程组），用 `mathematics` 解方程，得到 D 点在天球坐标系中的赤经和赤纬。方法二：由于恒星与天球系的原点 O_s 连线的角距和恒星与星敏感坐标系原点 O 连线的角距相等，在天球坐标系原点与恒星、D 点和北天极构成的球面三角形中，利用球面三角形边的余弦公式，解算 D 点在天球坐标系的位置信息。

针对问题一第 2 问， f 为未知量，由于天球坐标系到星敏感器坐标系的坐标变换矩阵为正交矩阵，其第三行行向量的模值为 1，在第 1 问基础上加上此条件，即可得到解算 f 值和 D 点在天球坐标系的位置信息的完备方程组，求解 f 的问题转换成求解函数 0 点的问题。以星敏感器的理论焦距作为初值，运用牛顿迭代法可求解 f 的值，进而解算 D 点在天球坐标系的位置信息。

针对问题一第 3 问，可抽象为在单个恒星相同位置误差水平下，分析 3 个恒星的几何构型对解算 D 点位置精度的影响。构建 3 个恒星位置误差到 D 点位置（赤经，赤纬）的误差传递函数。假设各恒星位置精度为相同的常数，误差传递函数变为对 3 个恒星的几何构型的函数。通过分析误差传递函数得出结论：三个恒星的单位方向矢量构成的空间四面体

的体积越大，解算出的 D 点的位置误差越小。

针对问题二，为解决传统星图识别方法识别率偏低的问题，构建了改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型。改进的匹配组星图识别模型的思路是：根据问题二所给星敏感器视场范围，合理划分构建导航星库，避免冗余星对，能够在不影响识别率的前提下有效减小数据库的规模。同时，为了避免匹配搜索量较大的问题，采用了一种基于状态标识的算法，能够有效的提高搜索效率。针对干扰星的影响以及匹配星对不唯一等降低匹配率的问题，采用三角形算法进行匹配验证，能够有效的提高模型的鲁棒性。添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型的思路是：建立径向、环向特征向量，并考虑伴星位置误差问题添加补偿码，修正径、环向特征向量，计算星敏感器观测到的星图的特征向量与特征库中导航星特征向量的最小相似差，得到唯一的星图识别结果。

通过对附件 3 给出 8 幅图的识别，对比改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型的性能。结果表明：添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型抗位置误差干扰能力更强；改进的匹配组星图识别模型抗“缺失”星干扰能力更强。

关键词：星图识别，三角形匹配，星敏感器，导航星库

目 录

1	问题背景.....	5
1.1	问题重述	5
1.2	国内外研究现状	6
2	问题假设.....	7
3	符号说明.....	7
4	问题一模型的建立与求解.....	8
4.1	问题 1	8
4.1.1	问题分析.....	8
4.1.2	方法一模型的推导与求解.....	8
4.1.3	方法二模型的推导与求解.....	11
4.2	问题 2	12
4.2.1	问题分析.....	12
4.2.2	模型推导.....	12
4.2.3	对模型的评价与扩展探索.....	13
4.3	问题 3	13
4.3.1	问题分析.....	13
4.3.2	误差传递通用模型的建立与求解.....	14
4.3.3	3 星观测条件下天文定姿误差传递模型.....	16
5	问题二模型的建立与求解.....	18
5.1	问题分析	18
5.2	改进的匹配组星图识别模型	18
5.2.1	匹配组算法的基本思想.....	18
5.2.2	导航星角距计算.....	19
5.2.3	观测星角距计算.....	20
5.2.4	星图特征提取.....	20
5.2.5	星对识别.....	21
5.2.6	验证过程.....	22
5.3	添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型.....	23
5.3.1	径向伴星特征模式的构建.....	23
5.3.2	观测星环向特征模式的构建.....	25
5.3.3	基于补偿码的径向伴星-环向特征模式构建	25
5.3.4	添加补偿码的径向伴星-环向星图识别算法	26
5.4	星图识别结果及模型对比	27
5.4.1	星图 1 的识别结果.....	27
5.4.2	星图 2 的识别结果.....	28
5.4.3	星图 3 的识别结果.....	29
5.4.4	星图 4 的识别结果.....	30
5.4.5	星图 5 的识别结果.....	31
5.4.6	星图 6 的识别结果.....	32
5.4.7	星图 7 的识别结果.....	33

5.4.8 星图 8 的识别结果.....35

6 结论.....38

参考文献39

1 问题背景

1.1 问题重述

星敏感器是实现航行体自主姿态测量的核心部件。针对星敏感器对航天器的定姿问题，重点研究两方面的内容：第一、研究星敏感器的定姿原理，根据实测数据对星敏感器进行标定；第二、在星图识别中，构建特征提取模型，识别星图，实现初始姿态捕获。具体来讲有下述两个问题。

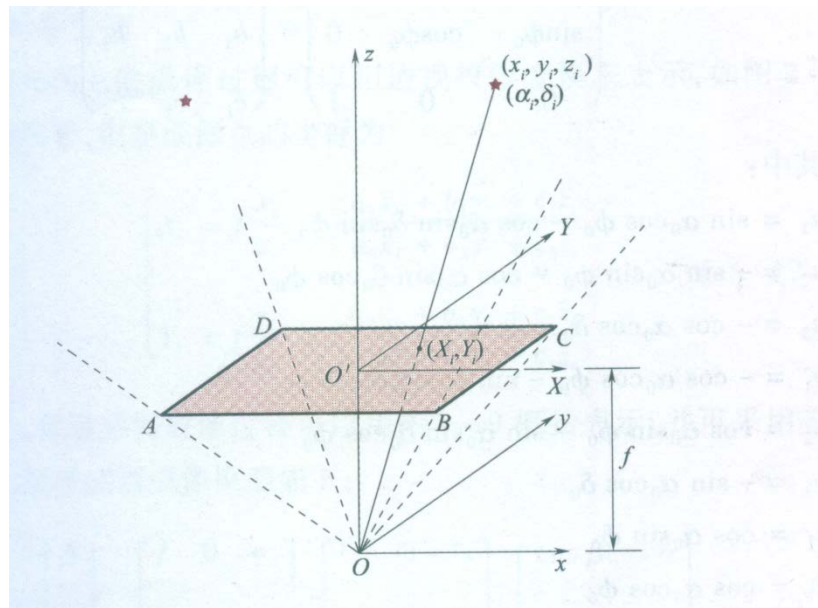


图 1-1 坐标系示意图

问题一：如图 1-1 所示 P_1 、 P_2 、 P_3 是 3 颗已知位置的恒星，即它们在天球坐标系下的赤经和赤纬 $((\alpha_i, \delta_i), i=1,2,3)$ 已知； Q_1 、 Q_2 、 Q_3 是来自恒星 P_1 、 P_2 、 P_3 的平行光经过星敏感器光学系统成像在感光面上的星像点质心中心位置；记 $O'Q_1 = a_1$ ， $O'Q_2 = a_2$ ， $O'Q_3 = a_3$ ， $OO' = f$ 。

(1) 建立由 f ， a_i ， (α_i, δ_i) ($i=1,2,3$) 等参数解算 D 点在天球坐标系的位置信息的数学模型，并给出具体的求解算法；

(2) 若不利用 f 值的信息，试建立由 a_i ， (α_i, δ_i) ($i=1,2,3$) 等参数求解 D 点在天球坐标系中的位置信息的数学模型，并给出具体的求解算法；

(3) 一般来说，星敏感器视场内的恒星数量多于 3 颗，讨论如何选择不同几何位置的三颗星，提高解算 D 点在天球坐标系中的位置信息的精度，并分析相应的误差。

问题二：基于附件 2 提供的简易星表信息，通过对星图中的星点信息进行更为精细的

特征提取，构建相应的特征提取模型，设计对应的星图识别算法，确定出附件 3 给出的 8 幅星图中每一个星像点所对应的恒星编号，并对算法的性能进行评估。

1.2 国内外研究现状

星敏传感器作为目前最精确的空间姿态测量设备，其能完成包括星图获取、质心提取、星模式识别和姿态确定等工作，对于航天设备和利用天文星光导航的设备起着至关重要的作用。^[1]目前面向星敏传感器提出的星模式识别算法主要包括三角形角距匹配算法、主星识别法^[2-3]、概率统计法^[4]、多边形角距匹配算法^[5]、栅格算法^[6-7]等，其中三角形算法好主星识别法使用最为广泛^[8-9]，三角形算法虽然实现起来较为容易，但由于存在星点角距计算量大、角距冗余匹配次数多等缺点，诸多学者提出了改进的两个主要方向，一是提高识别成功率；二是减少识别时间以满足实时性。改进的方法中包括各种改进的三角形算法^[10-11]、四边形算法^[12]、栅格算法^[13]、KMP 算法^[14]、连通聚类星识别算法、基于字符匹配的算法^[15]等。为了减少匹配次数，提出了 K 矢量法^[16]，P 矢量法等星库搜索算法，可以提高三角形算法的搜索效率^[17]。

文献[18]通过构建二维链表数组将三角形的星对角距及角距容差集合保存下来，避免了星对角距重复计算和重复查找过程；通过构建哈希表，改变星对角距匹配方式，减少星对角距匹配次数，使三角形星图识别的时间复杂度大幅降低。

文献[19]提出了一种基于星三角形的星图识别算法。根据星三角形构造其对应的模式向量，按照三角形周长进行升序排列，并构造辅助索引向量，提高搜索效率。

文献[20]提出了一种不依赖星等信息的全天球自主快速三角形识别算法。通过构建三角形最大内角及其两边作为匹配特征三角形，建立了全天球导航特征库，对生成的特征库按最大内角值构造散列函数，并分块存储。

这些新的改进方法在星点位置噪声和星等（亮度）噪声条件下，识别成功率均有所提高。在导航星库的构建上，减少了数据容量，加快了识别时间。

2 问题假设

假设 1：恒星与地球的距离远大于近地空间尺寸，因此假设恒星距离地球无穷远处，恒星与天球坐标系原点连线的角距等于恒星与星敏感器坐标系原点连线的角距；

假设 2：近地空间，观察恒星的张角远小于 1° ，因此假设恒星是点光源。

假设 3：在分析 3 个恒星的几何构型对解算点 D 位置的误差相同。

3 符号说明

符号	符号含义
α_i	赤经
δ_i	赤纬
f	投影中心到感光面中心的真实距离
f_0	投影中心到感光面中心的理论距离
a_i	星像点质心到感光面中心的距离
M	坐标转换矩阵
P_i	代表第 i 颗恒星
D	像面尺寸大小
a°	视场角

4 问题一模型的建立与求解

4.1 问题 1

4.1.1 问题分析

对问题（1），要求解算 D 点在天球坐标系的位置信息。已知条件为：

①已知三颗恒星在天球坐标系的位置，即 $((\alpha_i, \delta_i), i = 1, 2, 3)$

②已知恒星 P_1 、 P_2 、 P_3 发射的平行光在星敏感器感光面上的星像点质心位置 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 之间的距离，即 $O'Q_1 = a_1$ ， $O'Q_2 = a_2$ ， $O'Q_3 = a_3$ ， O' 为感光面的中心；

③投影中心 O 与感光面中心 O' 之间的距离 $OO' = f$

方法一：已知恒星在天球坐标系中的赤经和赤纬，可计算天球坐标系下原点到恒星的方向矢量；通过 f 和 $O'Q_i$ 的距离，可计算恒星在星敏感器坐标系下的单位方向矢量在 z 轴方向的分量；以天球坐标系到星敏感坐标系的坐标变换矩阵为桥梁，构建恒星天球坐标与星敏感器坐标之间的数学关系；利用 3 个恒星方位矢量方程在 z 轴方向的分量，可解算 D 点的位置。

方法二：由于恒星与天球系的原点 O_s 连线的角距与恒星与星敏感坐标系原点 O 连线的角距相等，运用球面三角形边的余弦公式，可解算 D 点在天球坐标系的位置信息。

4.1.2 方法一模型的推导与求解

星敏感器坐标系可通过天球坐标系的旋转和平移得到。设星敏感器的姿态角为 $(\alpha_0, \delta_0, \varphi_0)$ ，光轴 OO' 与天球面的交点记为 D 点，其中： α_0 为 \overrightarrow{OD} 方向的赤经，为 δ_0 为 \overrightarrow{OD} 方向的赤纬，为 φ_0 为沿 \overrightarrow{OD} 方向的滚转角，如图 4-1 所示。

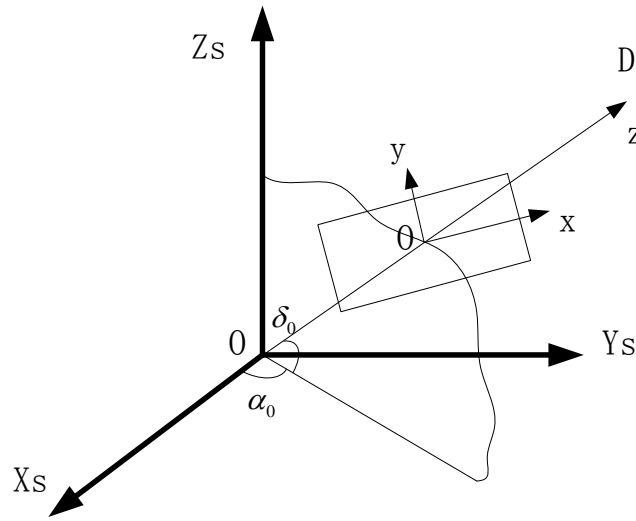


图 4-1 星敏感器坐标系与天球坐标系之间的转换

天球坐标系到星敏感器坐标系对应的坐标变换矩阵为 M ，其中 M 为正交矩阵，即 $M=M^T$ 。用 m_{ij} 表示矩阵 M 第 i 行，第 j 列的元素。 \overrightarrow{OD} 在星敏感器坐标系下的方向向量为 $[0, 0, 1]^T$ ，设 \overrightarrow{OD} 在天球坐标系下的方向向量为： $[e_{xs}, e_{ys}, e_{zs}]^T$ ，则：

$$\begin{bmatrix} e_{xs} \\ e_{ys} \\ e_{zs} \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

即：

$$\begin{bmatrix} e_{xs} \\ e_{ys} \\ e_{zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_0 \cdot \cos \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \cdot \sin \alpha_0 \\ \sin \delta_0 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

恒星 $P_i (i=1,2,3)$ 在天球坐标系下位置的方向矢量为：

$$r_i^s = \begin{bmatrix} \cos \delta_i \cdot \cos \alpha_i \\ \cos \delta_i \cdot \sin \alpha_i \\ \sin \delta_i \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

恒星 $P_i (i=1,2,3)$ 在星敏感器坐标系下位置的方向矢量为：

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{f^2 + a_i^2}} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ f \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

又由于：

$$r_i = M \cdot r_i^s = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \delta_i \cdot \cos \alpha_i \\ \cos \delta_i \cdot \sin \alpha_i \\ \sin \delta_i \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

故：

$$\frac{f}{\sqrt{f^2 + a_i^2}} = \cos \delta_i \cdot \cos \alpha_i \cdot m_{31} + \cos \delta_i \cdot \sin \alpha_i \cdot m_{32} + \sin \delta_i \cdot m_{33} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-6)$$

上式为含 m_{31}, m_{32}, m_{33} 三个未知量的方程组，用 **mathematics** 求解方程组（4-6）得：

$$m_{31} = \left\{ \begin{aligned} & \cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) [k_2 \sin(\delta_1) - k_1 \sin(\delta_2)] + \\ & \cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) [k_3 \sin(\delta_1) - k_1 \sin(\delta_3)] + \\ & \cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) [k_2 \sin(\delta_3) - k_3 \sin(\delta_2)] \end{aligned} \right\} /$$

$$\left\{ \cos(\alpha_3) \cos(\delta_3) \left[\frac{\cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_1) - \cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_2)}{\cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_2)} \right] + \right.$$

$$\left. \cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) \left[\frac{\cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_3) - \cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_1)}{\cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_1)} \right] + \right.$$

$$\left. \cos(\alpha_1) \cos(\delta_1) \left[\frac{\cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_2) - \cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_3)}{\cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_3)} \right] \right\} \quad (4-7)$$

$$m_{32} = \{ -\cos(\alpha_3) \cos(\delta_3) [k_2 \sin(\delta_1) - k_1 \sin(\delta_2)] +$$

$$\cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) [k_3 \sin(\delta_1) - k_1 \sin(\delta_3)] +$$

$$\cos(\alpha_1) \cos(\delta_1) [k_2 \sin(\delta_3) - k_3 \sin(\delta_2)] \} /$$

$$\{ \cos(\alpha_3) \cos(\delta_3) \left[\frac{\cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_2) - \cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_1)}{\cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_1)} \right] +$$

$$\cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) \left[\frac{\cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_1) - \cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_3)}{\cos(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_3)} \right] +$$

$$\cos(\alpha_1) \cos(\delta_1) \left[\frac{\cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_3) - \cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_2)}{\cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_2)} \right] \} \quad (4-8)$$

$$m_{33} = \{ \cos(\alpha_3) \cos(\delta_3) [-k_2 \cot(\delta_1) \sin(\alpha_1) + k_1 \cot(\delta_2) \csc(\delta_1) \sin(\alpha_2)] +$$

$$\cos(\alpha_1) \cot(\delta_1) [k_2 \cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) - k_3 \cos(\delta_2) \sin(\alpha_2)] +$$

$$\cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) [k_3 \cot(\delta_1) \sin(\alpha_1) - k_1 \cot(\delta_3) \csc(\delta_1) \sin(\alpha_3)] \} /$$

$$\{ \cos(\alpha_3) \cos(\delta_3) [\cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) - \cot(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_2)] +$$

$$\cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) [\cot(\delta_1) \sin(\alpha_1) \sin(\delta_3) - \cos(\delta_3) \sin(\alpha_3)] +$$

$$\cos(\alpha_1) \cot(\delta_1) [\cos(\delta_3) \sin(\alpha_3) \sin(\delta_2) - \cos(\delta_2) \sin(\alpha_2) \sin(\delta_3)] \} \quad (4-9)$$

其中， $k_i = \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + f^2}} (i=1,2,3)$ 。

由式 (4-6)、(4-7) 和 (4-9) 得到 D 点的赤经赤纬为：

$$\begin{cases} \sin \delta_0 = m_{33} \\ \cos \alpha_0 = \frac{m_{31}}{\sqrt{1-m_{33}^2}} \end{cases} \quad (4-10)$$

由于 $\delta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\delta_0 = \arcsin(m_{33})$ 。 α_0 的取值需要根据具体情况确定，即：

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{m_{31}}{\sqrt{1-m_{33}^2}}\right) \text{ 或 } \alpha_0 = \arccos\left(\frac{m_{31}}{\sqrt{1-m_{33}^2}}\right) + \pi \quad (4-11)$$

4.1.3 方法二模型的推导与求解

通过星敏感器光轴的方向相对恒星位置的空间几何构型关系，从空间几何上列方程，解算 D 点位置。在恒星为无穷远处的点光源的假设下，恒星与天球系的原点 O_s 连线的角距与恒星与星敏感坐标系原点 O 连线的角距相等， $\angle POD = \angle P_i O_s D_s$ ，如图 4-2 所示。

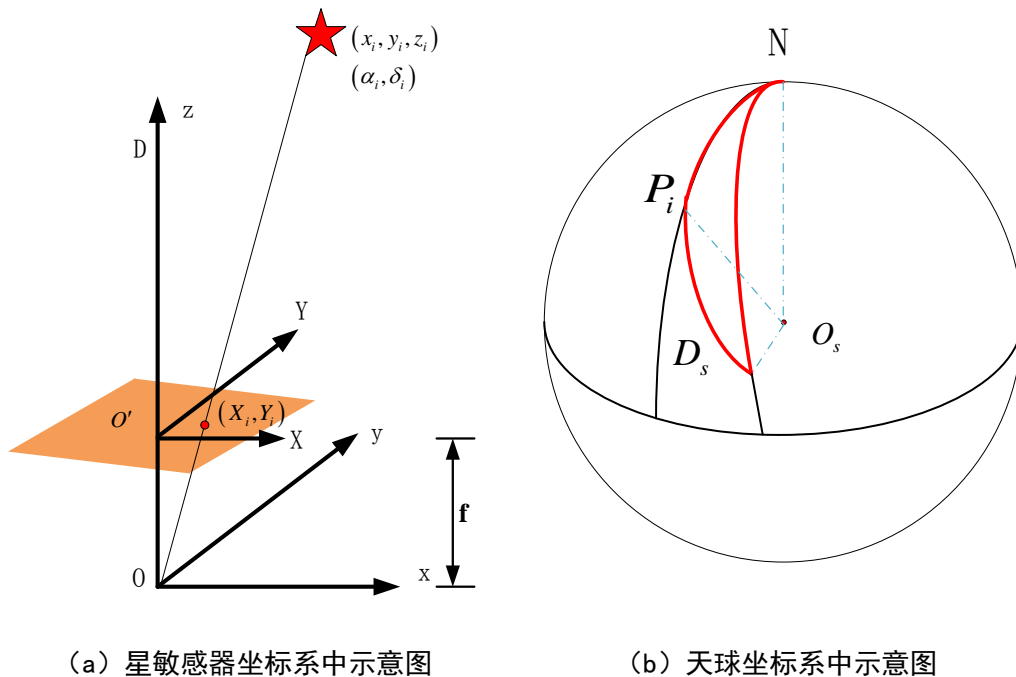


图 4-2 坐标系示意图

其中： $O_s D_s \parallel OD$ ，显然 $O_s D_s$ 与 OD 具有相同的赤经和赤纬。D 点在天球坐标系中位置的问题转换成 D_s 点在天球坐标系中位置的问题。在图 4-2 (b) 所示球面三角形 $D_s P_i N$ 中，运用球面三角形边的余弦公式可得：

$$\cos \widehat{D_s P_i} = \cos \widehat{D_s N} \cdot \cos \widehat{P_i N} + \sin \widehat{D_s N} \cdot \sin \widehat{P_i N} \cdot \cos \angle N, i=1,2,3 \quad (4-12)$$

设 D_s 的位置为 (α_0, δ_0) , 显然: $\widehat{P_i N} = \frac{\pi}{2} - \delta_i$, $\widehat{D_s N} = \frac{\pi}{2} - \delta_0$, $\angle N = \alpha_0 - \alpha_i$ 。据图 4-2(a)

可知:

$$\cos \widehat{D_s P_i} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + a_i^2}} \quad (4-13)$$

联立式 (4-12) 和 (4-13), 得:

$$\frac{f}{\sqrt{f^2 + a_i^2}} = \sin \delta_0 \cdot \sin \delta_i + \cos \delta_0 \cdot \cos \delta_i \cdot \cos(\alpha_0 - \alpha_i), i = 1, 2, 3 \quad (4-14)$$

对式 (4-14) 化简整理, 其与方法一中的式 (4-7)、(4-8) 和 (4-9) 等价, 方法二相对方法一, 物理意义更加明显, 方程形式更加简洁, 并且与方法一相互验证, 验证了结果的正确性。解析表达式同 4.1.2 方法一中式 (4-10)。

4.2 问题 2

4.2.1 问题分析

对问题 (2), f 为未知量, 解算 D 点在天球坐标系的位置信息。已知条件为:

① 已知三个恒星在天球坐标系的位置, 即 $((\alpha_i, \delta_i), i = 1, 2, 3)$

② 已知恒星 P_1 、 P_2 、 P_3 发射的平行光在星敏感器感光面上的星像点质心位置 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 之间的距离, 即 $O'Q_1 = a_1$, $O'Q_2 = a_2$, $O'Q_3 = a_3$, O' 为感光面的中心;

此题与第一问的区别在于缺少 f 值的信息, 其实在问题一中, 式 (4-7)、(4-8) 和 (4-9) 并不独立, 因为天球坐标系到星敏感器坐标系的坐标变换矩阵 \mathbf{M} 为正交矩阵, 因此, 其第三行行向量的模值为 1, 在第一问基础上加上此条件, 即可得到解算 f 值和 D 点在天球坐标系的位置信息的完备方程组。

4.2.2 模型推导

由问题 1 可知, m_{31} 、 m_{32} 和 m_{33} 包含 f 的信息。当 f 值未知时, m_{31} 、 m_{32} 和 m_{33} 为 f 的函数, 因为坐标变换矩阵 \mathbf{M} 为正交矩阵, 根据正交矩阵的性质可得

$$m_{31}^2 + m_{32}^2 + m_{33}^2 = 1 \quad (4-15)$$

当光学系统结构确定后, 焦距理论值 f_0 可根据像面尺寸大小 D 和使用视场角 $a^\circ \times a^\circ$ 给出

$$f_0 = \frac{D}{2 \tan\left(\frac{a^\circ}{2}\right)} \quad (4-16)$$

由于光学系统结构存在多种误差源，包括透镜畸变误差、像平面移位误差等传感器器件误差，真实的 f 值会偏离理论值 f_0 ，若用 f_0 的值作为真值 f 来解算 D 点在天球坐标系的位置信息，势必会造成额外的定姿误差，因此求解真实的 f 值对提高定姿精度至关重要。

式 (4-15) 为关于 f 的隐函数方程，无法得到 f 的解析解；数值方法普适灵活，可通过数值方法求解 f 的真实值。可使用牛顿迭代法解决 f 的零点问题，首先需要给定 f 一个合适的初值，由于 f 不会偏离 f_0 太大，故可将 f_0 作为 f 的迭代初值，继而通过牛顿迭代法求得 f 的真实值。

4.2.3 对模型的评价与扩展探索

在不知道主距 f 的值时，如上文所述，可通过 $a_i, (\alpha_i, \delta_i)$ ($i=1,2,3$) 等参数求解 D 点在天球坐标系中的位置。不足在于：式 (4-15) 为超越方程，求解 0 点计算复杂，不利于对星敏感器主距 f 的快速标定。工程中，既然已知 a_i ($i=1,2,3$)，想必星图中星像点在图像坐标系中的坐标 (X_i, Y_i) 也已知，或者如果能通过某种途径获知 (X_i, Y_i) ，则可以大大减小计算量，而且只需知道两个星像点，就可确定主距。

国防科技大学的刘海波^[21]利用星角距不变性给出了计算 f 的方法，并且是利用 0° 附近对变化更敏感的正弦函数值建立观测方程，且给出了视场中如果有两颗以上恒星时对焦距进行优化的方法，另外李学夔^[22]等人也给出了具体的算法，在此不再赘述。

4.3 问题 3

4.3.1 问题分析

据原题附件 1 材料所述，导致 D 点的位置出现误差的因素有星点位置误差和星等误差，显然问题 3 中的误差来源是恒星位置误差。问题 3 可抽象为：在单个恒星相同位置误差水平下，分析 3 个恒星的几何构型对解算 D 点位置的精度的影响，也即：构建 3 个恒星位置误差到 D 点位置（赤经，赤纬）的误差传递函数。然后，把单个恒星位置精度作为常数，误差传递函数变成对 3 个恒星的几何构型的函数。

对于恒星位置误差问题。据附件 1 所述，恒星位置误差主要来源于星敏感器的校准误差（如焦距测量误差、镜头畸变、光轴偏移误差等），在分析 3 个恒星的几何构型对解算 D 点位置的精度的影响时，假设 3 个恒星的位置误差相同。

对问题 3，星敏感器视场内有多于 3 颗的恒星可供选择，以解算 D 点在天球坐标系中的位置信息，为明确 3 恒星的几何分布对解算 D 点在天球坐标系中位置信息精度的影响，

视场内恒星的方向矢量包含着恒星的几何分布信息，因此可归结为构建 D 点的姿态误差与 3 颗恒星方向矢量之间存在的数学关系问题。

4.3.2 误差传递通用模型的建立与求解

对于 $n(n \geq 3)$ 个恒星的几何构型对解算 D 点位置的精度问题。借鉴问题 (1) 方法一中通过坐标变换解算 D 点位置算法的思路。设恒星在星敏感器坐标系 b 下的三维坐标为

$r_{bi} = [x_{bi} \ y_{bi} \ z_{bi}]^T (i=1,2,\dots,n)$ ，在天球三维坐标系 s 下的三维坐标为 $r_{si} = [x_{si} \ y_{si} \ z_{si}]^T (i=1,2,\dots,n)$ ，则：

$$r_{si} = A \cdot r_{bi} \quad (4-17)$$

其中： $A = M^{-1}$ ， M 与问题 1 方法一中的定义相同，是天球坐标系到星敏感器坐标系的坐标变换矩阵，即 A 是星敏感器坐标系到天球坐标系的坐标变换矩阵。记 $R_b = [r_{b1} \ r_{b2} \ \dots \ r_{bn}]$ ， $R_s = [r_{s1} \ r_{s2} \ \dots \ r_{sn}]$ ，依据上式可知

$$R_{si} = M^{-1} \cdot R_{bi} \quad (4-18)$$

星敏感器视场中恒星数量大于等于 3 时，用最小二乘法求坐标变换矩阵，即：

$$A = (R_s^T R_s)^{-1} R_s^T R_b = Q R_b \quad (4-19)$$

其中： $Q = (R_s^T R_s)^{-1} R_s^T$ 。

设由于焦距测量误差、镜头畸变、光轴偏移等误差导致恒星的实际观测值为 $\tilde{R}_b = R_b + \Delta R_b$ ，其中 ΔR_b 为测量误差。则

$$\tilde{A} = Q \tilde{R}_b = Q R_b + Q \Delta R_b = A + \Delta A \quad (4-20)$$

在星敏感器坐标系下，记单颗恒星的误差为 $\delta\varphi = [\delta\varphi_1 \ \delta\varphi_2 \ \delta\varphi_3]^T$ ，显然 $\delta\varphi$ 是小量，

\tilde{A} 可表示为

$$\tilde{A} = A + \Delta A = AC \quad (4-21)$$

式中 $C = \begin{bmatrix} 1 & \delta\varphi_3 & -\delta\varphi_2 \\ -\delta\varphi_3 & 1 & \delta\varphi_1 \\ \delta\varphi_2 & -\delta\varphi_1 & 1 \end{bmatrix}$ ，据式 (4-20) 和 (4-21) 可得

$$\Delta A = \tilde{A} - A = A \begin{bmatrix} 0 & \delta\varphi_3 & -\delta\varphi_2 \\ -\delta\varphi_3 & 0 & \delta\varphi_1 \\ \delta\varphi_2 & -\delta\varphi_1 & 0 \end{bmatrix} = AN \quad (4-22)$$

式中： $N = \begin{bmatrix} 0 & \delta\varphi_3 & -\delta\varphi_2 \\ -\delta\varphi_3 & 0 & \delta\varphi_1 \\ \delta\varphi_2 & -\delta\varphi_1 & 0 \end{bmatrix} = A\Delta A$ ，记 N 的协方差矩阵为 P_N ，误差矩阵 ΔA 的协方

差矩阵为 P_Δ ， $\delta\varphi$ 的协方差矩阵为 P_φ 。

$$\begin{aligned} P_N &= NN^T = (A\Delta A)(A\Delta A)^T = A \cdot P_\Delta \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} (\delta\varphi_2)^2 + (\delta\varphi_3)^2 & -\delta\varphi_1\delta\varphi_2 & -\delta\varphi_1\delta\varphi_3 \\ -\delta\varphi_1\delta\varphi_2 & (\delta\varphi_1)^2 + (\delta\varphi_3)^2 & -\delta\varphi_2\delta\varphi_3 \\ -\delta\varphi_1\delta\varphi_3 & -\delta\varphi_2\delta\varphi_3 & (\delta\varphi_1)^2 + (\delta\varphi_2)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-23)$$

$$P_\varphi = \delta\varphi(\delta\varphi)^T = \begin{bmatrix} (\delta\varphi_1)^2 & \delta\varphi_1\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1\delta\varphi_3 \\ \delta\varphi_1\delta\varphi_2 & (\delta\varphi_2)^2 & \delta\varphi_2\delta\varphi_3 \\ \delta\varphi_1\delta\varphi_3 & \delta\varphi_2\delta\varphi_3 & (\delta\varphi_3)^2 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

由式 (4-23) 和 (4-24) 可知

$$\begin{aligned} \text{tr}P_\varphi &= (\delta\varphi_1)^2 + (\delta\varphi_2)^2 + (\delta\varphi_3)^2 = \frac{1}{2}\text{tr}P_N \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}(AP_\Delta A) = \frac{1}{2}\text{tr}(P_\Delta AA) = \frac{1}{2}\text{tr}(P_\Delta) \end{aligned} \quad (4-25)$$

在该模型中，假设各颗恒星的测量误差相同，故： ΔR_b 一定，其方差记为 σ^2 。由式 0、1 和式 5，得：

$$\begin{aligned} P_\Delta &= E(\Delta A \cdot (\Delta A)^T) = E(Q \cdot \Delta R_b (Q \Delta R_b)^T) \\ &= Q \cdot E(\Delta R_b (\Delta R_b)^T) Q^T = QQ^T \sigma^2 = (R_s^T R_s)^{-1} \sigma^2 \end{aligned} \quad (4-26)$$

由式 (4-25) 和 (4-26) 可知

$$\text{tr}P_\varphi = \frac{1}{2}\text{tr}(P_\Delta) = \frac{\text{tr}((R_s^T R_s)^{-1})}{2} \sigma_w^2 = \frac{\text{tr}((R_s^T R_s)^*)}{2 \det(R_s^T R_s)} \sigma_w^2 = \frac{\text{tr}(B)}{2 \det(R_s^T R_s)} \sigma^2 = K^2 \sigma^2 \quad (4-27)$$

其中 $B = (R_s^T R_s)^*$ ，是矩阵 $R_s^T R_s$ 的伴随矩阵； $K = \sqrt{\frac{\text{tr}(B)}{2 \det(R_s^T R_s)}}$ 为由天文测量误差到

D 位置解算误差的传递函数。据式 (4-27) 可得： D 位置解算误差取决于以下两个因素：

(1)单颗恒星的观测误差。 σ^2 越大， D 位置解算误差；

(2)恒星的几何构型。这是本题重点关注的因素，误差权系数 K 完全取决于矩阵 R_s ，即：误差权系数取决于恒星在天球坐标系中的方向矢量（恒星的赤经、赤纬），所以，恒星的空间几何构型会影响 D 点的位置解算误差。

4.3.3 3星观测条件下天文定姿误差传递模型

当采用3个恒星解算 D 点位置时，即通用模型中的 $n=3$ ，（4-27）式可写为：

$$(\delta\varphi_1)^2 + (\delta\varphi_2)^2 + (\delta\varphi_3)^2 = \frac{\text{tr}(B)}{2\det(R_s^T R_s)} \sigma^2 \quad (4-28)$$

此时，矩阵 $R_s = [r_{s1} \ r_{s2} \ r_{s3}]$ ， r_{s1} 、 r_{s2} 和 r_{s3} 为3颗恒星相对于天球三维坐标系的单位矢量， R_s 表征恒星的空间几何构型。

以天球坐标系原点 O_s 为顶点，3颗恒星相对天球坐标系的单位矢量 r_{s1} 、 r_{s2} 和 r_{s3} 为棱线，构建恒星4面体，如图4-3所示。

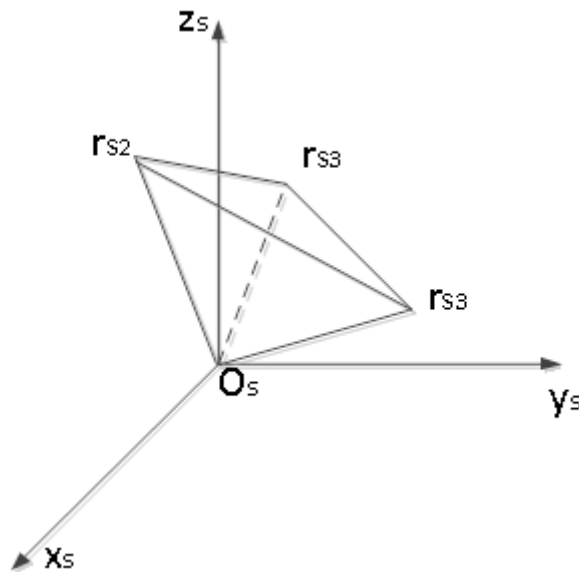


图 4-3 恒星 4 面体示意图

根据4面体体积计算公式可得该恒星4面体 $O_s v_1 v_2 v_3$ 的体积为

$$V_s = \frac{1}{6} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \det(\mathbf{V}) \quad (4-29)$$

将式（4-29）带入式（4-28）可得

$$(\delta\varphi_1)^2 + (\delta\varphi_2)^2 + (\delta\varphi_3)^2 = \frac{\text{tr}(B)}{72V_s^2} \sigma^2 \quad (4-30)$$

从式(4-30)中可知，在3星定姿条件下，当观测误差 σ^2 一定时，天文定姿误差方差主要取决于恒星矢量构成的4面体以及矩阵 B 的迹。当3个恒星中两两间的角距接近 0° 或 180° 时，解算出的 D 点位置误差迅速增大；当两两间的角距取表4-1所示值时，误差最小。

表 4-1 误差取最小值时，恒星间的角距

恒星方位角跨度/ $^\circ$	$\langle r_{s1}, r_{s2} \rangle$	$\langle r_{s1}, r_{s2} \rangle$	$\langle r_{s1}, r_{s2} \rangle$
<180	60	120	60
<180	300	60	-240
<180	120	60	-60
<180	300	240	-60
<180	240	300	60
<180	60	300	240
>180	240	120	-120
>180	120	240	120

5 问题二模型的建立与求解

5.1 问题分析

对问题二，要求构建相应的特征提取模型，设计对应的星图识别算法，确定出附件 3 给出的 8 幅星图中每一个星像点所对应附件 2 中的恒星编号，并对算法的性能进行评估。

已知条件为：

- ①已经过筛选和数据预处理的简易星表
- ②8 幅星图的星像点坐标

③星敏感器视场为 $12^\circ \times 12^\circ$ ，像素数为 512×512 ，星敏感器视场为 $20^\circ \times 20^\circ$ ，像素数为 1024×1024 。

求解方法：根据星敏感器视场及像素数，利用公式（4-16）求解焦距，在得到焦距后可以求出观测星角距，构建观测星对，利用简易星表构建导航星库，可采用匹配组算法、三角形算法、栅格法对观测星与导航星库进行匹配识别求解出恒星编号。考虑到星图识别算法的识别时间、存储容量和鲁棒性等主要性能指标，需根据题设中所给星敏感器视场特点，合理构建导航星库、观测星对，并对匹配组算法、三角形算法等经典星图识别算法进行改进，提高算法的匹配效率、降低对存储空间的要求，使所建模型鲁棒性较强。本文构建了改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型，对 8 幅星图进行识别，并对比其性能。

5.2 改进的匹配组星图识别模型

5.2.1 匹配组算法的基本思想

在观测星图中选取一颗为主星，其余为伴星。这样每一颗伴星都与主星构成一个星对，用 d_m^{ln} 表示，按照多边形角距匹配的原则在导航星中寻找符合匹配条件的匹配星对， d_m^{ln} 对应导航星星对的集合为 $C(d_m^{ln})$ ，这样与所选主星对应的导航星为在这些集合的交集 $\bigcap C(d_m^{ln})$ ($n = 2, \dots, N$) 出现次数最多的导航星。

然而匹配组算法也存在数据量大，匹配率受干扰星影响较大等问题。基于此，根据问题二所给星敏感器视场范围，合理构建导航星库，避免冗余星对，能够在不影响识别率的前提下有效减小数据库的规模。同时，为了避免匹配搜索量较大的问题，采用了一种基于状态标识的改进匹配组算法，能够有效的提高搜索效率^[23]。

针对干扰星的影响以及匹配星对不唯一等降低匹配率的问题，采用三角形算法进行模型验证，能够有效的提高模型的鲁棒性。

算法的基本流程如图 5-1 所示：

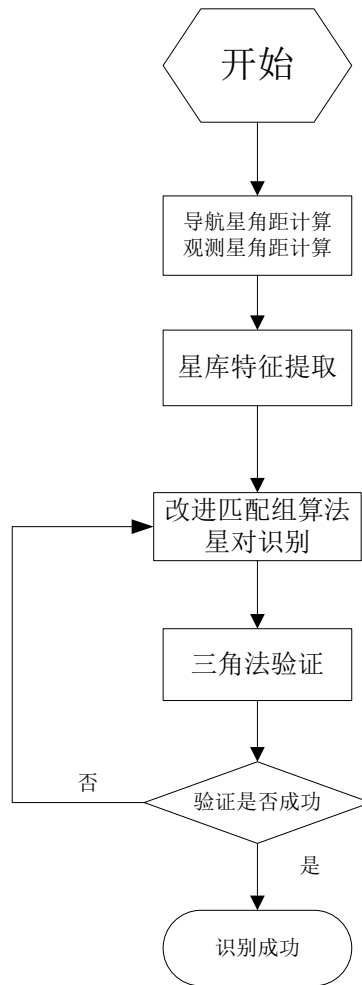


图 5-1 改进匹配组星图识别算法流程图

5.2.2 导航星角距计算

通过角距信息可以来识别两颗星，设导航星 i, j 的赤经赤纬的坐标分别为 (α_i, δ_i) 和 (α_j, δ_j) 则其在天球坐标系下的角距为：

$$d_m^{ij} = \arccos \left(\frac{s_i \cdot s_j}{|s_i| \cdot |s_j|} \right) \quad (5-1)$$

其中， s_i, s_j 分别为导航星 i, j 的方向矢量：

$$s_i = \begin{pmatrix} \cos \delta_i \cos \alpha_i \\ \cos \delta_i \sin \alpha_i \\ \sin \delta_i \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

$$s_j = \begin{pmatrix} \cos \delta_j \cos \alpha_j \\ \cos \delta_j \sin \alpha_j \\ \sin \delta_j \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

5.2.3 观测星角距计算

同导航星角距计算公式，设观测星在感光面坐标 (X_1, Y_1) ， (X_2, Y_2) ，则其在星敏感器下的角距如下式所示：

$$\begin{cases} d_m^{12} = \arccos\left(\frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| \cdot |s_2|}\right) \\ s_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + f^2}} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ -f \end{pmatrix} \\ s_2 = \frac{1}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + f^2}} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ -f \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5-4)$$

s_1, s_2 分别为导航星 1,2 在星敏感坐标系下的方向矢量，如果导航星与观测星能匹配，则需满足：

$$|d(i, j) - d_m^{12}| \leq \varepsilon \quad (5-5)$$

然而满足上式的导航星对并不唯一，这时就需要依靠其他导航星提供的有效信息来确定导航星。对于三角形算法

$$\begin{cases} |d(i, j) - d_m^{12}| \leq \varepsilon \\ |d(j, k) - d_m^{23}| \leq \varepsilon \\ |d(i, k) - d_m^{13}| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5-6)$$

其中 ε 为角距测量不确定度。

5.2.4 星图特征提取

5.2.4.1 生成导航星对

理论上来说，在不考虑视场限制情况下 N 颗导航星可以组成 $N(N-1)/2$ 个导航星对、 $N(N-1)(N-2)/6$ 个导航三角形，虽然加上视场的限制可以去掉很多的导航星对，但剩余导航星对的数目仍然非常庞大。过多的导航星对一方面使得导航星库变得很大，另一方面增加了星对冗余匹配的可能性，限制了匹配组算法的使用。

星对的生成方法：对筛选后的导航星表进行扫描，若存在角距小于 d 的两颗星，则记录这两颗星的序号（星对）及角距。其中 d 为视场的对角距。例如，当视场为 $12^\circ \times 12^\circ$

时，取 $d=16.968^\circ$ 。

星对的存储按照角距由小至大进行排列。为了方便对星对角距进行匹配搜索，将所有的角距分成很多的区间段，每个区间段所代表的角距间隔 $\lambda=0.01^\circ$ 。这样，计算出两颗观测星的角距就能很快地找到其角距对应的区间选取该区间的星对即得到可能与其匹配的导航星星对。

图 5-2 为简易星表（附件二）区间星对数目随角距值变化曲线。从图中可以看出，星对数据库区间内星对数目随着角距线性增加，角距小于 12° 的星对有 149423 个，角距小于 17° 的有 294833 个。虽然角距大于 12° 的星对数量较大，但由于受到视场范围的限制，在视场中出现的概率很小，所以在构建导航星库时只选取角距 $0^\circ \sim 12^\circ$ 的星对，采用这种处理方式可以在不影响识别效率的前提下有效降低数据库规模。

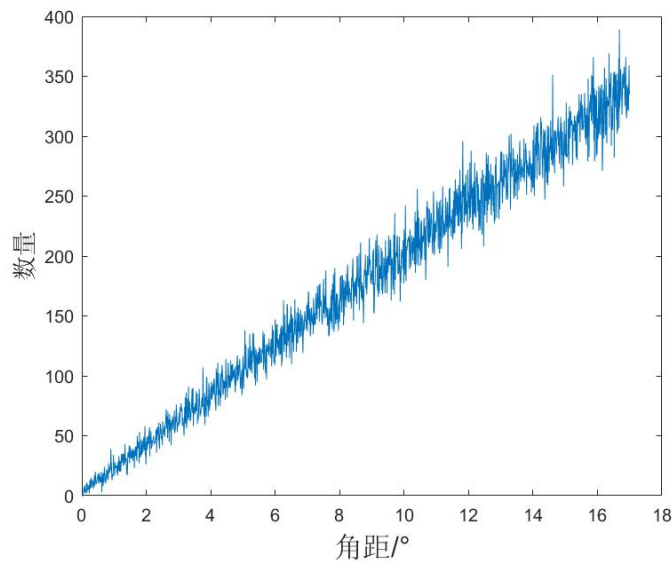


图 5-2 星对数据库区间星对数目随角距值变化曲线

5.2.4.2 生成观测星对

由图 5-2 可以看出，随着角距增大，相应区间的星数量越多，冗余匹配难度更大，所以优先选择角距较小的星构成匹配星对。之后将该主星的观测星对按照角距从小到大依次排序，排序靠前的观测星对将优先选择用来识别，若未识别出结果则按顺序对后面的观测星对进行识别。

由于附件三中所给星图数据未给出星等信息，无法利用星等构建特征观测星对。若在星等已知的情况下。由于星等较低的导航星能够提供较可靠的信息，参考 Quine 改进三角形算法中观测三角形选取的原则，优先选取星等较低的 N 颗导航星作为主星，视场范围内的其他星作为伴星构成观测星对。

5.2.5 星对识别

观测星对的角距分别为 d_m^{12} 、 d_m^{13} 、 \dots 、 d_m^{1n} (n 为观测星图中星的总数)，满足式(5-3)导航星对集合为 $C(d_m^{12})$ 、 $C(d_m^{13})$ 、 \dots 、 $C(d_m^{1n})$ ，集合中的导航星对个数为

$N(d_m^{12})$ 、 $N(d_m^{13})$ 、 \dots 、 $N(d_m^{2n})$ ，采用遍历组合法对观测星对进行全局匹配搜索需要进行 $N(d_m^{12}) \times N(d_m^{13}) \times \dots \times N(d_m^{1n})$ 次运算，若 $N=100$ 左右， $n=6$ ，星图中则需要进行 10^{12} 次比较运算，需要消耗大量的时间，所以通常初始选取较少的星对组合进行初始匹配，当 $n=3$ 时，即初始选择三组观测星对进行全局匹配仍需要进行 10^6 运算，运算量仍过大，采用状态标识的方法对匹配组算法进行改进，可以有效的减少运算量而进行快速搜索，具体步骤如下：

- 1) 对导航星表所有的星进行状态标识初始化，设其初始状态为 0；
- 2) 搜索 $C(d_m^{12})$ ，将其中的所有导航星状态标为 1；
- 3) 搜索 $C(d_m^{13})$ ，如果该集合的导航星之前状态已置为 1，则置为 2，否则置为 1；
- 4) 依此类推直至搜索至 $C(d_m^{1n})$ ，状态标识数字最高的即为观测星 1 对应的导航星。

采用该状态标识算法，搜索次数仅为 $N(d_m^{12}) + N(d_m^{13}) + \dots + N(d_m^{1n})$ 即可确定观测星 1 对应的导航星，查询 $C(d_m^{12})$ 、 $C(d_m^{13})$ 、 \dots 、 $C(d_m^{1n})$ 中与观测星 1 所组成星对的另一颗星编号则可以确定，运算次数大大减少，采用同样方法可以依次确定各观测星所对应的导航星。星对识别过程如图 5-3 所示。

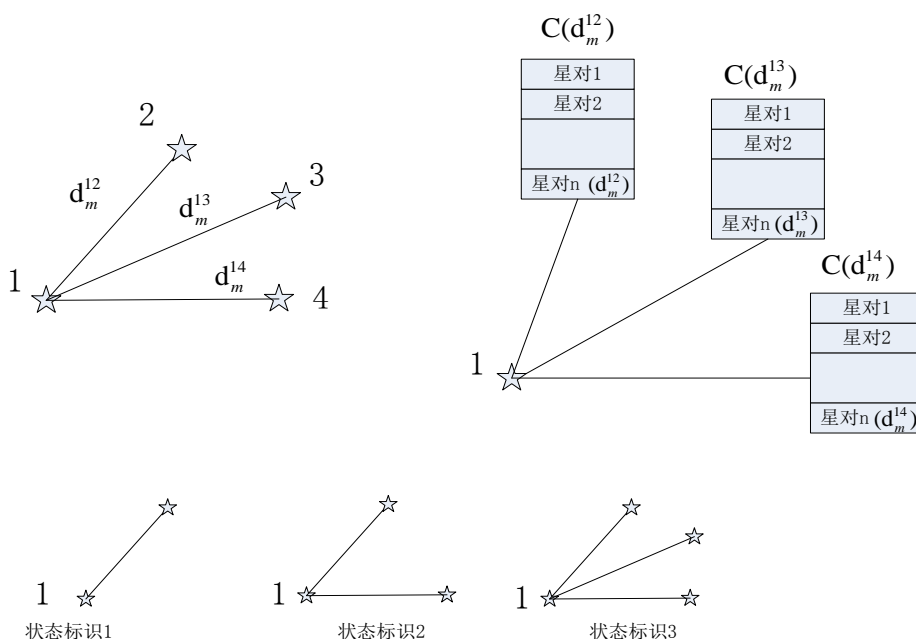


图 5-3 星对识别过程

5.2.6 验证过程

通过以上匹配搜索可能存在不同星对状态标识相近，导致所匹配的观测星并不唯一，这需要采用其他方法进行筛选，因此引入验证环节，筛选出错误的匹配。验证环节主要借鉴三角形算法。三角形匹配的过程实质上是寻找三颗导航星

$p_1 \in C(d_m^{12})$, $p_2 \in C(d_m^{23})$, $p_3 \in C(d_m^{13})$, 且 p_1, p_2, p_3 满足首尾相接的条件，两两之间共有一颗导

航星。若通过匹配搜索找到导航星 p_1, p_a 状态标识相近，无法进一步进行筛选，此时可通过验证 $p_1, p_2, p_3, p_a, p_b, p_c$ 是否满足三角形匹配的条件筛选条件从而筛选出错误的匹配。

5.3 添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型

改进的匹配组星图识别模型在遇到由位置噪声引起的误差问题时，星图识别的效率较低，匹配速度慢，且会存在一定的误判率。针对该问题，构建了添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型。该模型采用比特向量的形式表示导航星的特征向量。该特征向量共由观测星的径向特征、观测星的环向特征和观测星的伴星位置特征三部分组成。

5.3.1 径向伴星特征模式的构建

径向特征构成方法如下：以观测星 S 为中心，做以 R_r 为半径圆形邻域，沿径向将 S 的邻域划分成 N_{\max} 个环带， N_{\max} 即为径向特征向量的有效位数，径向特征示意图如图 5-4 所示。

$$N_{\max} = \frac{R_r}{e} \quad (5-7)$$

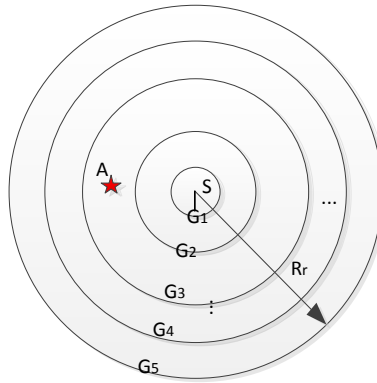


图 5-4 径向特征示意图

S 与 A 间的角距记为 v_{sa} ，将角距信息离散化，其离散值记为 v_{sa}^* 则有：

$$v_{sa}^* = \frac{v_{sa}}{e} + 1 \quad (5-8)$$

依据角距信息的离散值，由式 (5-9) 可以确定观测星径向特征向量中第 $[v_{sa}]$ 位置为 1。

例如：星对 SA 的角距离散值为 27.25，则将观测径向特征向量中的第 27 位置为 1。径向特征模式的构建示意图如图 5-5 所示。

$$V_{sa} = \text{floor}(v_{sa}^*) \quad (5-9)$$

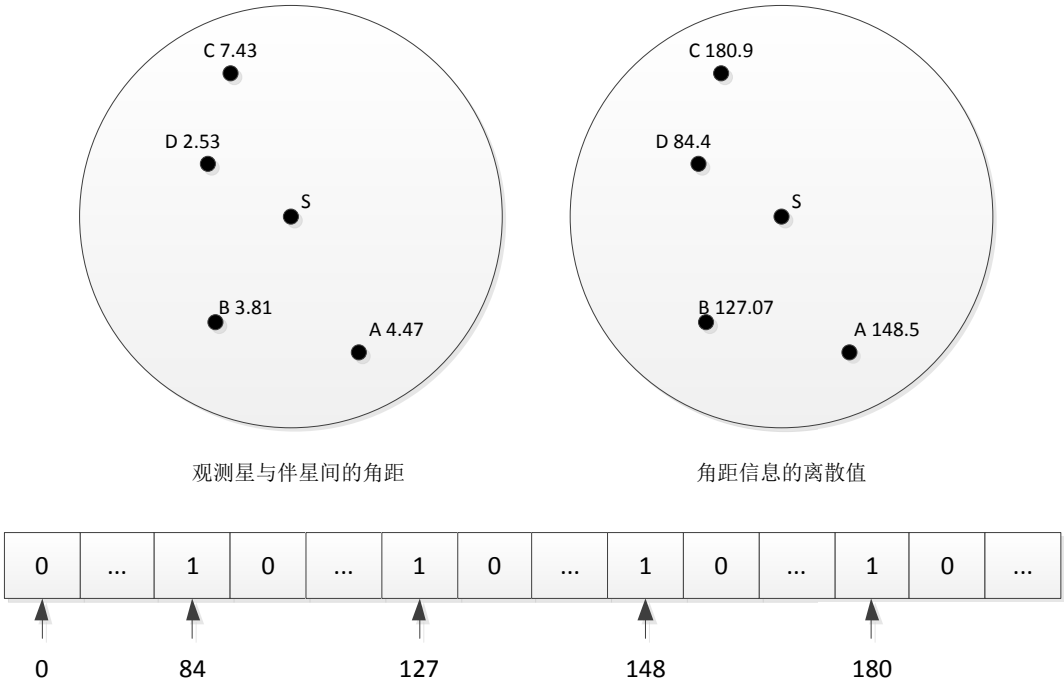


图 5-5 观测星径向特征模式构建示意图

依据相同的原理，根据观测星邻域内伴星与伴星间的空间分布关系，可得伴星 A 与伴星 B 间角距，其离散值 v_{ab}^* 为

$$v_{ab}^* = \frac{v_{ab}}{2e} + 1 \tag{5-10}$$

则根据（5-9）式可以确定观测星伴星特征向量中置 1 的位。由图 5-5 可得伴星间的角距最大为 $2R_r$ ，将（5-10）式中的除数设置为 $2e$ ，保证了观测星径向特征向量与伴星特征向量位数相同。观测星伴星特征向量构造方法如图 5-6 所示。

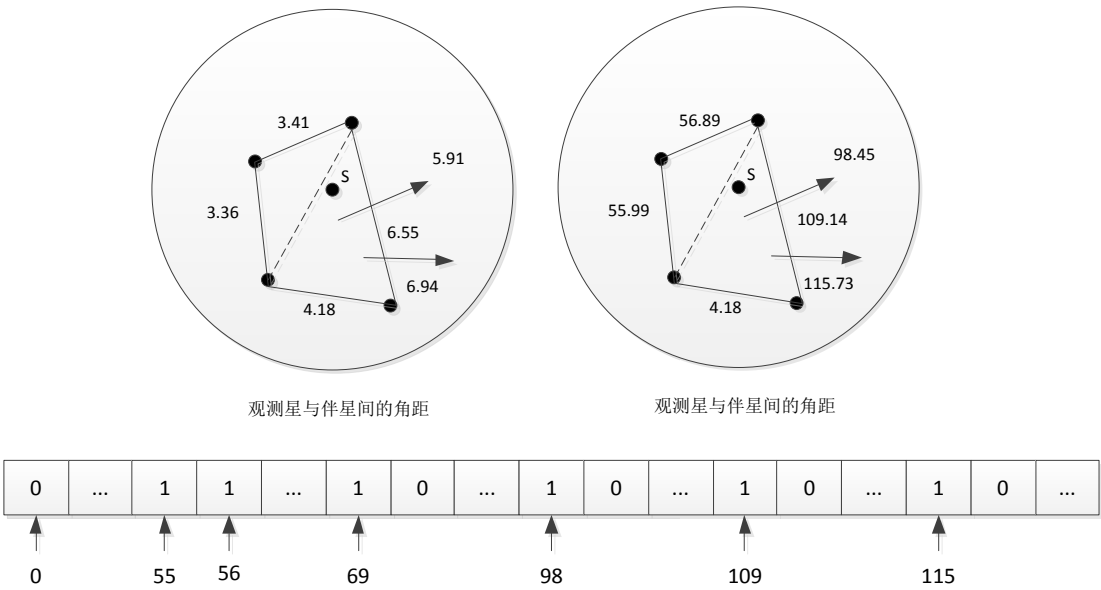


图 5-6 观测星伴星特征向量构造方法

5.3.2 观测星环向特征模式的构建

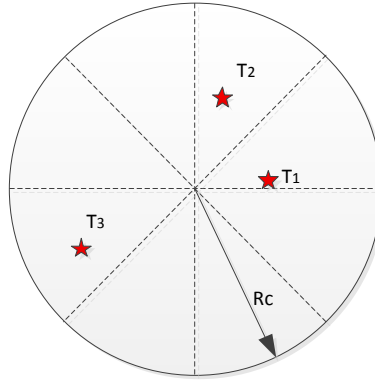


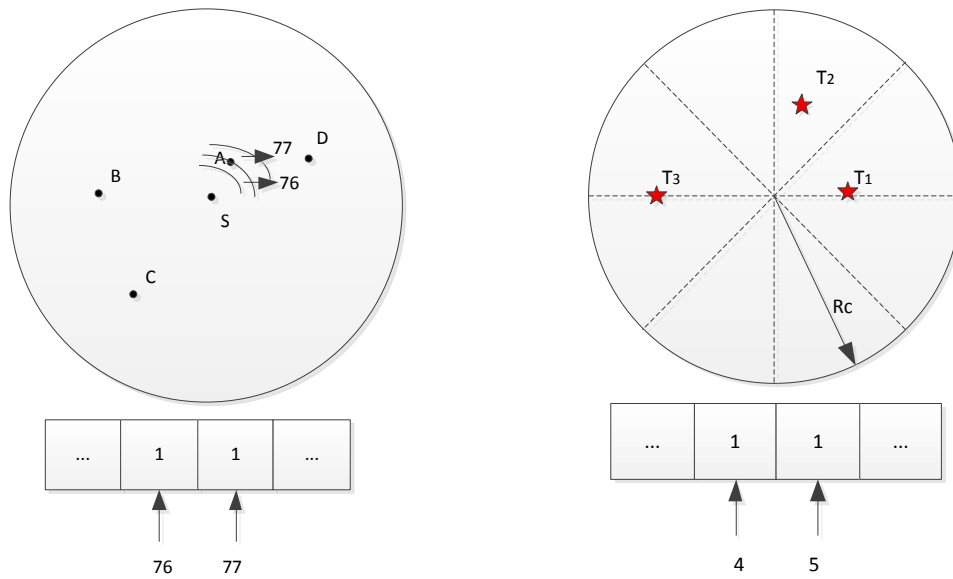
图 5-7 观测星环向特征模式构建示意图

观测星环向特征模式构建如图 5-7 所示，构造方式如下：

- (1) 如图所示，以 S 为主星确定半径 R_c 的环向模式（本文以 T_1, T_2, T_3 为伴星做举例说明）；
- (2) 以主星 S 为中心，分别计算伴星之间的夹角 $\angle T_1ST_2, \angle T_2ST_3, \angle T_3ST_1$ ；
- (3) 以最小伴星夹角的一边（ ST_1 ）为起始边，环向划分圆形邻域，将圆周等分成 8 个象限。
- (4) 根据各象限上伴星的分布情况，按逆时针方向组成一个 8 位的向量 \mathbf{v} 。如图所示 $\mathbf{v} = [11001000]$ ， S 的环向分布特征即为向量 \mathbf{v} 。

5.3.3 基于补偿码的径向伴星-环向特征模式构建

在径向伴星特征模式的基础上^[24]，引入了环向特征模式，虽然能很好地描述星点更为精细的特征分布关系，但位置噪声依然易于干扰此特征。本文在径向伴星-环向特征模式加入了位置噪声补偿码，补偿因为位置噪声导致的伴星漂移问题。由图 5-8(a)可见观测星 S 与伴星 A 角距的离散值在 76 环和 77 环的边界处。为了补偿位置噪声对识别造成的不利影响，可假设伴星 A 同时也在第 76 环和第 77 环内。为了控制添加补偿码的数量，可设置阈值 $\delta_L = 0.3, \delta_H = 0.7$ 。只有当 S 与 A 的角距离散值的小数小于 σ_L 或者大于 σ_H 时，在特征向量的第 $[v_{sa}] - 1$ 位或第 $[v_{sa}] + 1$ 位添加补偿码（置 1）。



(a) 添加补偿码的径向伴星特征模式

(b) 添加补偿码的观测星环向特征模式

图 5-8 添加补偿码的径-环向伴星特征模式

5.3.4 添加补偿码的径向伴星-环向星图识别算法

在基于补偿码的径向伴星-环向星图识别过程中，利用径向伴星特征完成初始匹配，缩小搜索范围，然后根据视场内各星点位置信息的相关性进行筛选，唯一识别观测星。

定义 T_f 为特征库中导航星特征向量与观测星特征向量的最小相似差，最小相似差不大于阈值 F 的观测星被选作候选星。

$$f_T = \left[T_s - \sum_{i=1}^{N_{\max}} S'(i) \right]^2 + \left[T_a - \sum_{j=1}^{N_{\max}} C'(j) \right]^2 + \left[T_v - \sum_{k=1}^8 V'(k) \right]^2 \quad (5-11)$$

$$\begin{cases} T_s = \sum_{i=1}^{N_{\max}} S(i) \& S'(i) \\ T_a = \sum_{j=1}^{N_{\max}} C(j) \& C'(j) \\ T_v = \sum_{k=1}^8 V(k) \& V'(k) \end{cases} \quad (5-12)$$

其中， $S(i)$ 表示观测星径向特征向量的第 i 位， $S'(i)$ 表示导航星库中径向特征向量的第 i 位， $C(j)$ 表示观测星伴星特征向量的第 j 位， $C'(j)$ 表示导航星库中伴星特征向量的第 j 位， $V(k)$ 表示观测星环向特征的第 k 位， $V'(k)$ 表示导航星库中环向特征向量的第 k 位。候选星由公式 (5-13) 确定：

$$f_T \leq F \quad (5-13)$$

利用最小相似差法得到候选星，同时还要考虑其他约束，比如星角距小于视场角等。具体方法如下：对预处理过的星图进行筛查，配合调整阈值 F 。如果筛选得到的候选星唯一，则唯一匹配了候选星，完成星图识别；如果筛选得到的候选星不唯一，需要减小 F 的值进行筛选；如果筛选得不到候选星，则需要增大 F 的值，并重复上面的流程，唯一匹配候选星。

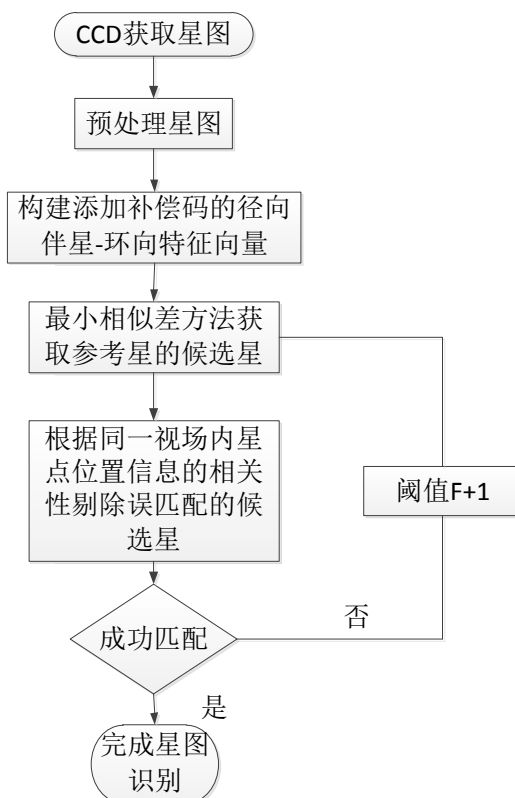


图 5-9 基于补偿码的径向伴星-环向特征模式星图识别流程

5.4 星图识别结果及模型对比

5.4.1 星图 1 的识别结果

对星图 1 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-1 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 1 视场中所有恒星，如图 5-10 所示，用“*”表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。显然，每个恒星与星敏感器感光层上的星像点一一对应，改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型均具有较好的识别效果。

表 5-1 星图 1 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
A01	1670	A09	1488
A02	1477	A10	1648
A03	1502	A11	1646
A04	1631	A12	1566
A05	1603	A13	1688
A06	1453	A14	1655
A07	1432	A15	1505
A08	1492		

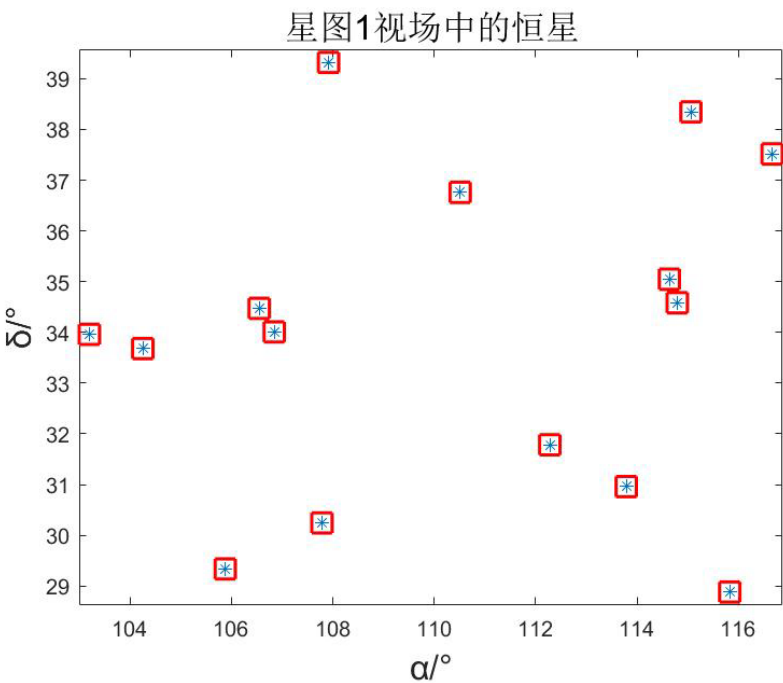


图 5-10 星图 1 视场中的恒星

5.4.2 星图 2 的识别结果

对星图 2 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-2 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 2 视场中所有恒星，如图 5-11 所示，用 “*” 表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。439、545 号恒星未出现在视场中，这两颗恒星即为 “缺失” 星。两种模型在该星图识别种均具有较好的识别效果。

表 5-2 星图 2 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
B01	518	B09	478
B02	472	B10	499
B03	537	B11	547
B04	428	B12	460
B05	491	B13	507
B06	469	B14	556
B07	482	B15	447
B08	503	B16	479

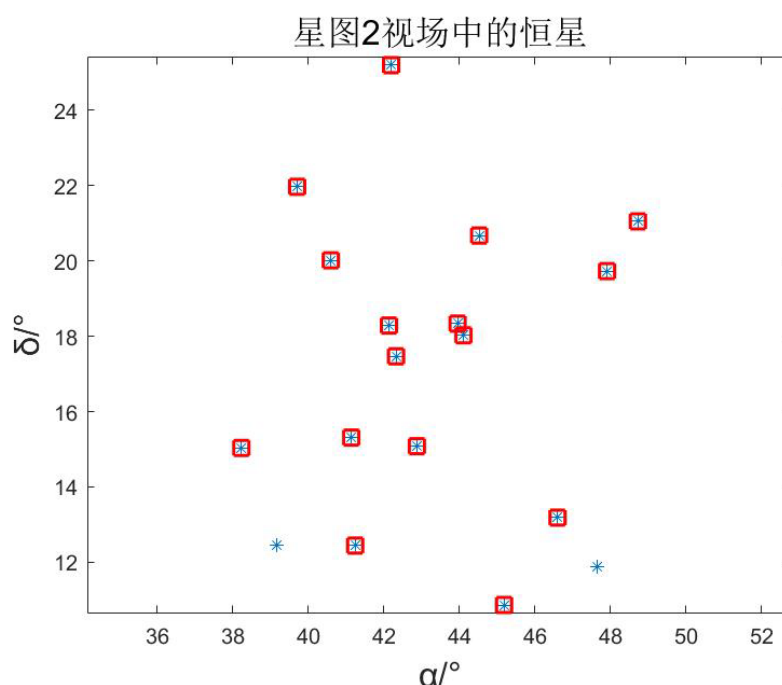


图 5-11 星图 2 视场中的恒星

5.4.3 星图 3 的识别结果

对星图 3 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-3 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 2 视场中所有恒星，如图 5-12 所示，用“*”表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。虽然每个恒星与星敏感器感光层上的星像点一一对应，但在识别的过程中发现 1942、1941 和 1900 号恒星位置与星像点间的误差较大，判断此 3 颗星存在星点位置噪声。添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型较好的完成了对星图 3 的识别，改进的匹配组星图识别模型未能识别星图 3。说明 添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型抗位置干扰噪声的能力较强。

表 5-3 星图 3 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
C01	1864	C05	1943
C02	1942	C06	1900
C03	1825	C07	1722
C04	1941		

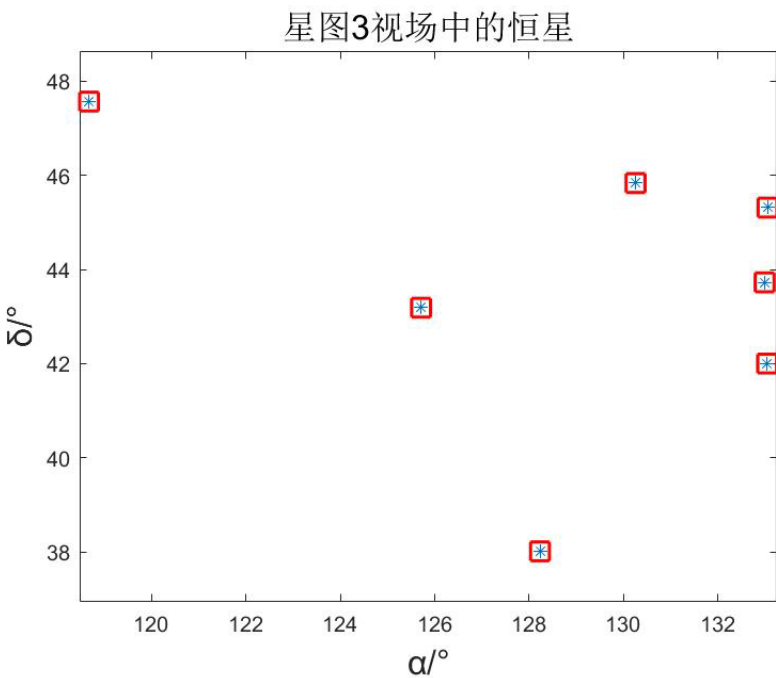


图 5-12 星图 3 视场中的恒星

5.4.4 星图 4 的识别结果

对星图 4 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-4 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 2 视场中所有恒星，如图 5-13 所示，用“*”表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。此星图中存在大量“缺失星”。较好的完成了对星图 4 的识别，添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型未能识别星图 4。说明改进的匹配组星图识别模型抗“缺失”星干扰的能力较强，当“缺失”星干扰达到一定程度时，添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型无法完成星图识别。

表 5-4 星图 4 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
D01	3249	D07	3283
D02	3346	D08	3370
D03	3364	D09	3265
D04	3275	D10	3261
D05	3421	D11	3321
D06	3319	D12	3309

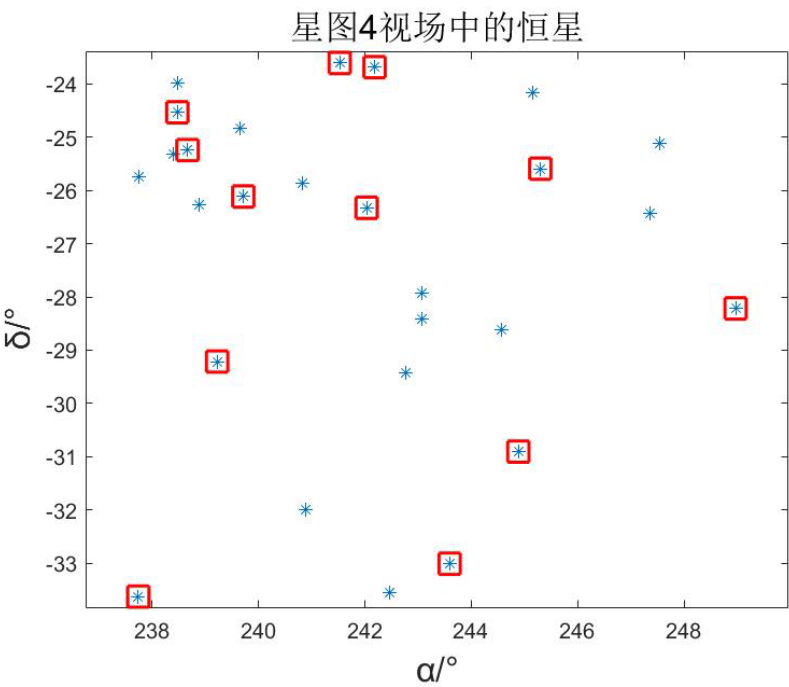


图 5-13 星图 4 视场中的恒星

5.4.5 星图 5 的识别结果

对星图 5 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-5 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 2 视场中所有恒星，如图 5-14 所示，用“*”表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。此星图中存在大量“缺失星”。进一步验证了在对星图 4 进行识别时得到的结论。改进的匹配组星图识别模型抗“缺失”星干扰的能力较强，当“缺失”星干扰达到一定程度时，会导致添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型无法完成星图识别。

表 5-5 星图 5 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
E01	1230	E06	1223
E02	1150	E07	1008
E03	1017	E08	1208
E04	1033	E09	1201
E05	1014		

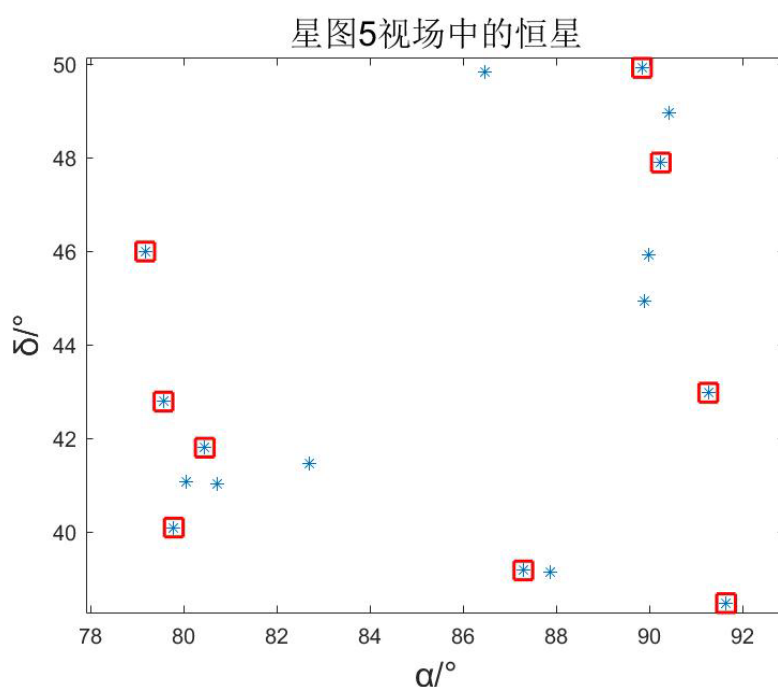


图 5-14 星图 5 视场中的恒星

5.4.6 星图 6 的识别结果

对星图 6 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-6 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 2 视场中所有恒星，如图 5-15 所示，用“*”表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。从图 5-15 中可以看出，有 2 颗恒星没有出现在视场中，这两颗星的编号是 1688 和 1648 号恒星，1688 号恒星缺失的原因可能是航天器姿态绕星敏感器光轴方向发生了滚转或者 1688 号恒星为题目附件一中提到的“缺失星”。1648 号恒星为“缺失星”。

在识别的过程中发现 1477、1603 和 1488 号恒星位置与星像点间的误差较大，判断此 3 颗星存在星点位置噪声。添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型较好的完成了对星图 6 的识别，改进的匹配组星图识别模型未能识别星图 6。说明添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型抗干扰噪声的能力较强，进一步验证了在对星图 3 进行识别时得到的结论。

表 5-6 星图 6 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
F01	1670	F07	1492
F02	1477	F08	1488
F03	1502	F09	1646
F04	1631	F10	1566
F05	1603	F11	1655
F06	1692	F12	1505

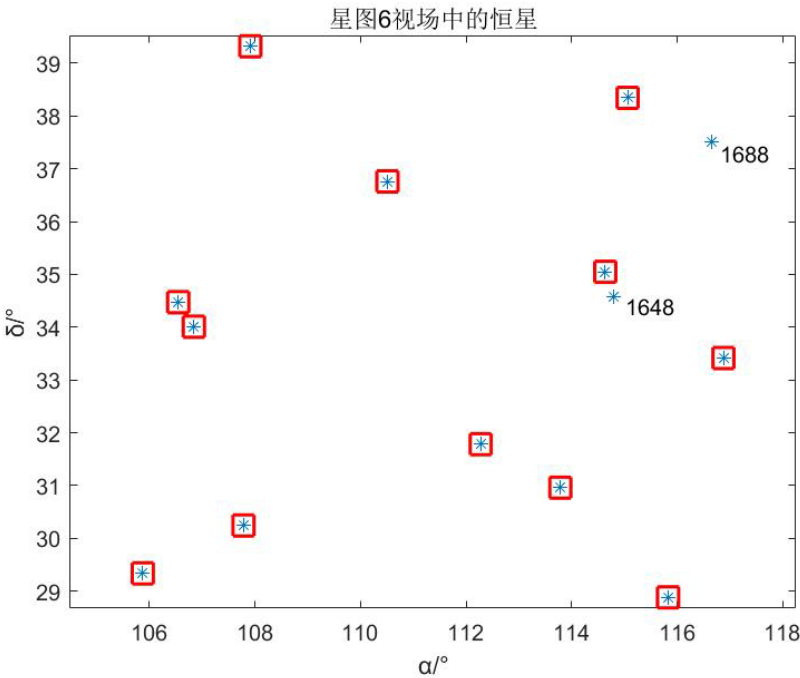


图 5-15 星图 6 视场中的恒星

5.4.7 星图 7 的识别结果

对星图 7 进行识别，星像点与恒星对应的编号如表 5-7 所示。设航天器姿态未沿星敏感器光轴的方向发生滚转，从附件 2 的恒星库中搜索星图 1 视场中所有恒星，如图 5-16 所示，用“*”表示，视场中出现在星图中的恒星用红色方框标记。

从图 中可以看出，有 3 颗恒星没有出现在视场中，从图中可以看出，这 3 颗恒星在视场的边缘，分析没有出现在视场中的原因是：航天器的姿态发生了绕星敏感器光轴方向的滚转，使得本应出现在视场边缘的恒星无法进入视场。两个模型均较好的完成识别，对比发现，在对大视场多星像点匹配问题中，添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型计算效率更高。

表 5-7 星图 7 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
G01	1525	G22	1603
G02	1572	G23	1415
G03	1443	G24	1692
G04	1748	G25	1453
G05	1780	G26	1432
G06	1675	G27	1492
G07	1720	G28	1488
G08	1503	G29	1648
G09	1634	G30	1646
G10	1577	G31	1566
G11	1757	G32	1688
G12	1586	G33	1655
G13	1536	G34	1505
G14	1610	G35	1373
G15	1681	G36	1576
G16	1606	G37	1545
G17	1670	G38	1424
G18	1477	G39	1375
G19	1790	G40	1825
G20	1502	G41	1401
G21	1631		

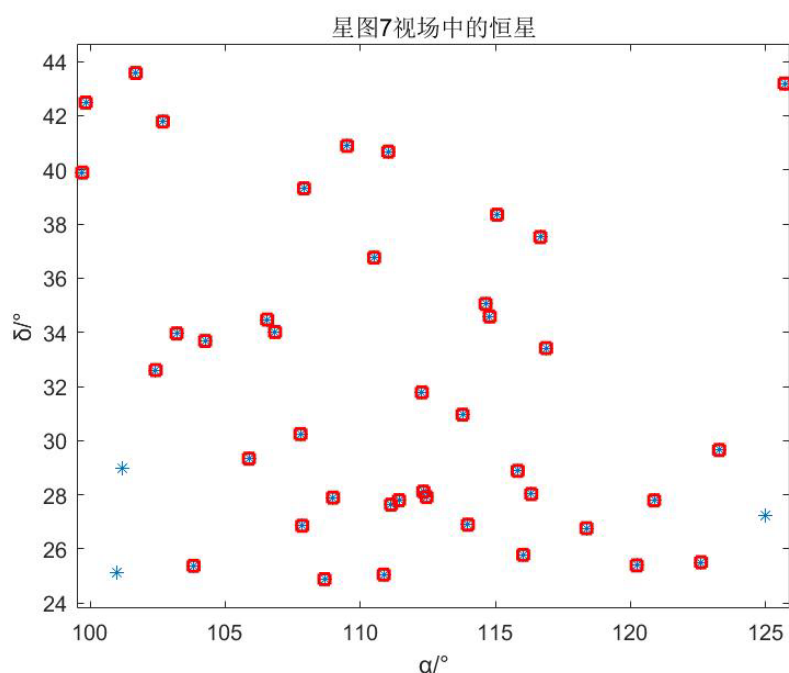


图 5-16 星图 7 视场中的恒星

5.4.8 星图 8 的识别结果

在航天器姿态没有绕星敏感器光轴方向滚转时的视场如图 5-17 所示，据图可知，星图 8 视场中有 12 颗星没有出现在星图中，即表 5-9 中的 1372、1415……1477 号恒星，这 12 个恒星的星等大于 5.58（较暗），而星等小于 5.58（较亮）的均出现在星图中，分析原因是：该星敏感器仅能识别比 5.58 星等更亮的恒星。

添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型较好的完成了对星图 8 的识别，添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型未能识别星图 8。说明改进的匹配组星图识别模型抗“缺失”星干扰的能力较强，当“缺失”星干扰达到一定程度时，添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型无法完成星图识别。进一步验证了对星图 4 进行识别时得到的结论。

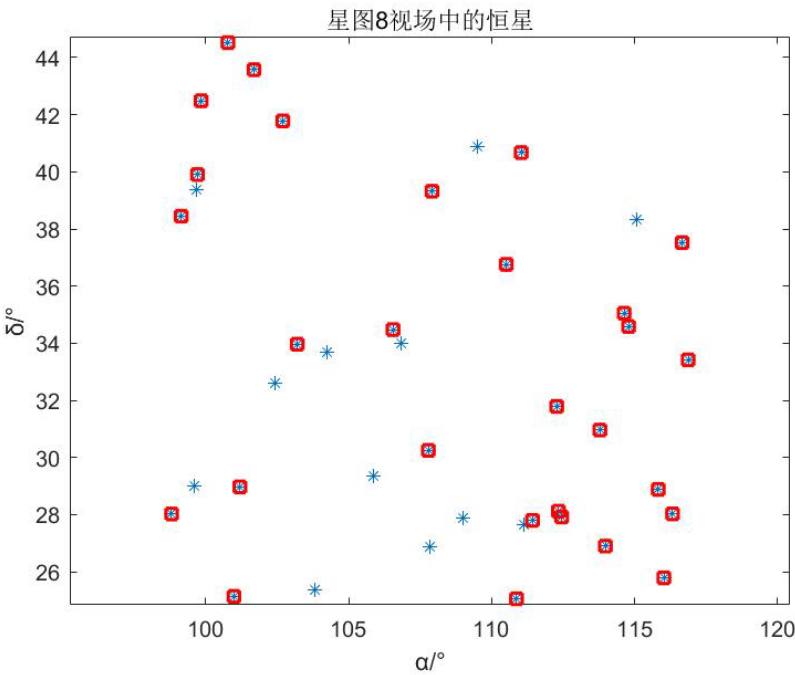


图 5-17 星图 8 视场中的恒星

表 5-8 星图 8 中星像点对应恒星编号

星图星像点编号	恒星编号	星图星像点编号	恒星编号
H01	1572	H16	1432
H02	1387	H17	1488
H03	1675	H18	1648
H04	1634	H19	1646
H05	1586	H20	1566
H06	1610	H21	1688
H07	1354	H22	1359
H08	1681	H23	1505
H09	1606	H24	1373
H10	1670	H25	1576
H11	1390	H26	1424
H12	1502	H27	1375
H13	1631	H28	1401
H14	1603	H29	1385
H15	1692		

表 5-9 星图 8 视场中的恒星编号及星等

恒星编号	星等	恒星编号	星等
1681	1.22	1354	5.27
1387	3.01	1675	5.29
1432	3.61	1631	5.34
1586	3.79	1373	5.35
1634	4.07	1390	5.42
1603	4.18	1359	5.43
1670	4.25	1488	5.55
1502	4.39	1646	5.58
1375	4.79	1372	5.7
1505	4.89	1415	5.72
1648	4.89	1370	5.75
1424	4.98	1443	5.75
1610	5.01	1536	5.75
1385	5.03	1503	5.76
1572	5.03	1655	5.76
1606	5.07	1577	5.78
1566	5.13	1545	5.87
1692	5.14	1453	5.92
1688	5.17	1492	5.92
1576	5.19	1477	5.94
1401	5.25		

6 结论

在已知 3 个恒星的赤经、赤纬和星敏传感器焦距 f 的情况下，采用坐标变换和解球面三角形两种方法可以求解光轴方位（D 点）赤经、赤纬的解析式。在星敏传感器焦距 f 未知的情况下，以星敏传感器的理论焦距作为初值，避免了处置选取的盲目性，运用牛顿迭代法可求解 f 的值，进而解算 D 点在天球坐标系的位置信息。

在单个恒星相同位置误差水平下，分析 3 个恒星的几何构型对解算 D 点位置的精度的影响。构建 3 个恒星位置误差到 D 点位置（赤经，赤纬）的误差传递函数。假设单个恒星位置精度为相同的常数，误差传递函数变成对 3 个恒星的几何构型的函数。通过分析误差传递函数得出结论：三个恒星的单位方向矢量构成的空间四面的体积越大，解算出的 D 点的位置误差越小。

传统的星图识别方法主要是以角距或衍生的形式作为特征，所需数据库较大，搜索时间长，实时性差，初始姿态捕获的实时性不好，普遍识别率较低。为解决这一问题，本文构建了改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型。改进的匹配组星图识别模型根据问题二所给星敏传感器视场范围，合理划分构建导航星库，避免了冗余星对，能够在不影响识别率的前提下有效减小数据库的规模。同时，采用的一种基于状态标识的算法，能够有效的提高搜索效率。针对干扰星的影响以及匹配星对不唯一等降低匹配率的问题，采用三角形算法进行匹配验证，能够有效的提高模型的鲁棒性。添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型存储容量小，速度识别快。

利用建立的模型对附件 3 中 8 幅星图进行识别，对比改进的匹配组星图识别模型和添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型的性能。结果表明：添加补偿码的径向伴星-环向特征星图识别模型抗位置误差干扰能力更强；改进的匹配组星图识别模型抗“缺失”星干扰能力更强。

参考文献

- [1] 时圣革, 雷肖剑, 于长海. 星图识别三角形算法综述[J]. 光电技术应用, 2014, 29(5).
- [2] Bezooijen R W H V . True-sky demonstration of an autonomous star tracker[J]. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1994, 2221:156-168.
- [3] 王海涌, 费峥红, 张超. 改进的基于主星的星图识别算法[J]. 光学精密工程, 2009, 17(1):220-224.
- [4] Mehta D S , Chen S , Low K S . A Rotation-Invariant Additive Vector Sequence Based Star Pattern Recognition[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(2):689-705.
- [5] Wang G , Li J , Wei X . Star Identification Based on Hash Map[J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(4):1591-1599.
- [6] Padgett C , Kreutz-Delgado K . A grid algorithm for autonomous star identification[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(1):202-213.
- [7] 钱华明, 孙龙, 蔡佳楠, et al. 星图识别的一种扩充栅格算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2015, 47(2):110-116.
- [8] Zhu H, Liang B, Tao Z. A robust and fast star identification algorithm based on an ordered set of points pattern[J]. Acta Astronautica, 2018, 148:S0094576517307658.
- [9] Arani M S , Toloei A , Eghbaleh Z . A geometric star identification algorithm based on triple triangle pattern[C]// 2015 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST). IEEE, 2015.
- [10] 吕春红, 周军, 贺元军, et al. 一种改进的快速星图识别算法[J]. 计算机测量与控制, 2010, 18(6):1390-1393.
- [11] 张广军, 魏新国, 江洁. 一种改进的三角形星图识别方法[J]. 航空学报, 2006, 27(6):1150-1154.
- [12] 林涛, 周建林, 张钧萍, et al. 四边形全天自主星图识别算法[J]. 宇航学报, 2000, 21(2):82-85.
- [13] 杨建, 张广军, 江洁. P 向量实现快速星图识别的方法[J]. 航空学报, 2007, 28(4).
- [14] 李葆华, 张迎春, 许士文, et al. 用 KMP 算法进行星敏感器星图识别的改进方法[J]. 光电工程, 2004, 31(2).
- [15] 许士文, 李葆华, 张迎春, et al. 用字符匹配进行星图识别的导航库存储方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(6).
- [16] 邢飞, 尤政, 董瑛. 基于导航星域和 K 矢量的快速星图识别算法[J]. 宇航学报, 2010, 31(10):2302-2308.
- [17] Fan Q , Zhong X . A triangle voting algorithm based on double feature constraints for star sensors[J]. Advances in Space Research, 2017:S0273117717308530.
- [18] 张磊 , 周宇 , 林荣峰, et al. 一种快速三角形星图识别算法[J]. 应用光学, 2018.
- [19] 孙晓雄, 王宏力, 陆敬辉. 一种基于星三角形的星图识别算法[J]. 传感器与微系统, 2009, 28(12):8-10.
- [20] 张同双, 郭敬明, 柏杨, et al. 基于最大内角的三角形星图识别算法[J]. 光学精密工程, 2017(1).
- [21] 刘海波, 王文学, 陈圣义. 利用星角距不变性标定星敏感器内部参数[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36 (6) : 48-52.
- [22] 李学夔, 谭海曙, 李杰. 利用星角距对星敏感器主距进行标定的新方法[J]. 光电技术应用, 2009, 30 (5) : 755-758, 762.
- [23] 张广军. 星图识别[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.08:65-80.
- [24] 高阳. 窄视场天文定位技术研究[D]. 中国科学院大学, 2019:47-51.