



中国研究生创新实践系列大赛  
中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生  
数学建模竞赛

学 校 北京理工大学

---

参赛队号 22100070190

---

1.刘沛尧

---

队员姓名 2.王凯飞

---

3.刘嘉琪

---

# 中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生 数学建模竞赛

题 目

移动场景超分辨率定位问题

摘

要：

超分辨率定位技术在移动场景中具有极大的应用价值和广阔的应用前景。本文基于多输入多输出(MIMO)阵列技术与调频连续波雷达 FMCW 系统,针对包含极近邻多个相干信号源的移动定位问题,建立模型以实现移动场景的超分辨率定位。

对于相干信源超分辨率定位问题,我们主要从距离估计与波达方向(DOA)估计两个方面深入分析并获得了关键结论。在距离估计方面,其实是阵列信号频谱成分的估计,我们基于 FFT 谱成份估计方法,分析了当前参数条件下的距离分辨率与数据频谱形态;在 DOA 估计方面,我们发现传统 DOA 估计算法无法对相干信源实现准确估计,因此深入研究了多种相干信源 DOA 估计算法,并结合问题与实际需求对不同算法进行性能评估,从而得到最适合的距离估计与角度估计算法组合,最终实现超分辨率定位。

对于问题一和问题二,其主要目标是使用单周期 chirp 中频信号实现多组相干信源的定位。针对上述问题,我们采用基于 FFT 的距离估计算法;同时,通过比较多种 DOA 估计算法在不同场景和 SNR 情况下的均方根误差,评估不同算法性能,最终选取性能更好的 MTOEP 算法作为 DOA 估计算法。

对于问题三,其主要目标是物体定位与运动轨迹描述,需要使用单帧 chirp 中频信号实现对物体运动轨迹的描述。针对上述问题,我们在原有模型的基础上考虑了天线信号与时间维的联合,通过距离多普勒像实现对目标速度和距离的大致估计,之后采用数据关联实现物体在各个时刻的坐标关联,进而形成运动轨迹。此外我们还提出了一种基于测向交叉定位超分辨率定位算法,该方法舍弃了传统的距离估计方法,通过移动平台的运动和 DOA 估计即可实现对物体的精确定位,具有广阔的应用前景。

对于问题四,其主要目标是考虑因老化而导致天线自身定位误差对物体定位精度的影响,需要我们改进算法来增强鲁棒性。针对上述问题,我们首先结合实际生活场景考虑了老化对天线产生的可能影响,并将基础算法与子阵分解和滑窗方法相结合,通过类平均的方法减弱天线自身结构变化对物体定位产生的负面影响,提升了算法的鲁棒性。

关键词：超分辨率定位；FMCW 雷达；相干信源；DOA 估计；MTOEP 算法

## 目 录

1 问题重述 .....	4
1.1 问题背景 .....	4
1.2 问题描述 .....	4
2 模型假设与符号说明 .....	5
2.1 模型假设 .....	5
2.2 符号说明 .....	5
3 问题分析与求解思路 .....	5
3.1 问题分析 .....	5
3.1.1 问题一 .....	5
3.1.2 问题二 .....	6
3.1.3 问题三 .....	6
3.1.4 问题四 .....	6
3.2 求解思路 .....	7
4 基本模型 .....	7
4.1 信源数估计 .....	7
4.2 距离估计 .....	8
4.3 相干信源的 DOA 估计算法 .....	9
4.3.1 空间平滑算法 .....	9
4.3.2 ESPRIT-like 算法 .....	11
4.3.3 FB-PTMR 算法 .....	13
4.3.4 多重 Toeplitz 矩阵重构 (MTOEP) 算法 .....	13
4.4 DOA 估计方法选择 .....	15
5 问题一分析与求解 .....	18
5.1 问题分析 .....	18
5.2 问题求解 .....	18
6 问题二分析与求解 .....	19
6.1 问题分析 .....	19
6.2 问题求解 .....	19
7 问题三分析与求解 .....	21
7.1 问题分析 .....	21
7.2 计算结果 .....	22
7.3 改进模型 .....	23
7.3.1 模型原理 .....	23
7.3.2 仿真结果 .....	26
8 问题四分析与求解 .....	27
8.1 问题分析 .....	27
8.2 求解结果 .....	27
9 模型评价 .....	27
9.1 优点 .....	27
9.2 缺点 .....	28
9.3 展望 .....	28

参考文献 .....	29
附录 .....	30

公众号关注：建模忠哥  
获取更多资源

## 1 问题重述

### 1.1 问题背景

在日常家庭生活中，人们可能需要花费大量时间去寻找随意摆放在家中某些角落里的小物品，但如果给某些重要物品贴上电路标签，再利用诸如扫地机器人的全屋覆盖能力，就可以精准定位到这些物体，极大地提升人们生活的便利性。而在智能辅助驾驶或者自动驾驶领域，更需要精准探测邻近车辆、行人的位置及速度，来控制车速、转向和刹车等以免发生意外。这些都属于移动场景定位问题。显然，定位的精度越高，应用价值越大，特别是超分辨率定位，具有广阔的应用前景。

现有移动场景定位产品通常采用调频连续波雷达 FMCW (Frequency-modulated Continuous-wave)，通过发射线性增长频率的信号波，以及接收反射回来的信号波来进行定位。由于其不存在测量盲区、距离分辨率高、发射功率小、硬件结构简单等特点，FMCW 技术被广泛应用于定位系统中。FMCW 技术的定位精度取决于其带宽的大小，在大带宽的情况下可以取得很高的定位精度。

当前，多输入多输出 (Multi-input Multi-output, MIMO) 阵列信号处理已经成为通信信号处理中的一大热点，而其中利用超分辨算法对空间的多个信号进行波达方向 (Direction of Arrival, DOA) 估计更是引人注目。DOA 估计的基本问题就是确定同时处于空间某一区域内多个感兴趣的信号的空间位置，其分辨率主要取决于阵列的长度，阵列长度确定后，分辨率也就被确定，称为“瑞利限”。超瑞利限的方法称为超分辨方法<sup>[1]</sup>。

目前使用最广泛也是最早的对波达方向进行超分辨估计的算法主要是多重信号分类 (MUSIC) 方法和旋转不变技术 (ESPRIT) 方法。但是，以上算法均假设信源之间相互独立、互不干扰，在此假设下，DOA 估计算法具有良好的估计性能。而实际应用场景中，信号的传输相对复杂，入射到阵元上的信号之间一般会存在相干关系。在雷达信号处理中，大量的相干源信号会导致信号在恒虚警处理时出现干扰，进而导致信号的 DOA 估计不准确。

除此之外，现有移动场景定位产品大多采用基线算法，其得到的分辨率较低，不能满足日益增长的超分辨率定位需求。因此，亟需通过建模以及设计对应算法来提高分辨率，以提升产品竞争力。

### 1.2 问题描述

基于上述研究背景，题目提供了移动平台在不同场景下采集的 FMCW 雷达中频信号数据，围绕移动场景超分辨率定位问题，本文将解决以下四个问题：

1. 针对提供的无噪声仿真数据，建立定位模型，计算出物体相对位置，并以二维极坐标图（横坐标表示距离，纵坐标表示角度）展示。
2. 针对提供的高斯噪声仿真数据，利用一个 chirp 周期内的 IF 信号，设计超分辨算法精确定位多个物体。
3. 设计在线低复杂度算法，利用一帧中频信号来超分辨定位，并且通过数值实验验证算法性能。针对提供的一帧数据，计算出物体相对运动轨迹，并以二维图（横坐标表示距离，纵坐标表示角度）展示。
4. 考虑实际场景中由于老化等原因，天线阵列对于自身的定位也会有误差。针对提供的仿真数据，设计提升定位算法的鲁棒性的改进算法。

## 2 模型假设与符号说明

### 2.1 模型假设

1. 在各个场景下，均假设有  $K$ （需要确定）个物体在雷达的探测范围内（以原点为中心半径 10 米以内、开口向上张开圆心角为  $100^\circ$  的扇形区域）；
2. 调制好电磁波的波形后， $N_{TX}$  个发射天线依次进行发射， $N_{RX}$  个接收天线也依次接收到回波。由于此周期极短，等效成  $N_{TX} \times N_{RX}$  个天线同时发射接收；
3. 由于 chirp 周期（~50 微秒）内时间极短，认为此周期内物体静止不变。在一帧时间内，物体的相对位置有明显的移动；
4. 当信号峰值位于同一个分辨单元内时，假设其为同一个信号。

### 2.2 符号说明

符号	含义
$T_s$	雷达采样间隔
$F_s$	雷达采样频率
$T$	chirp 周期
$N_f$	一帧中频信号的 chirp 数
$L$	天线孔径
$\gamma$	调频斜率
$N_a$	天线阵列个数
$f_0$	载频
$N$	单 chirp 周期内采样点数
$\Delta R$	距离分辨率
$B$	调频带宽
$f_{IF}$	中频信号频率

## 3 问题分析与求解思路

### 3.1 问题分析

#### 3.1.1 问题一

问题一要求针对提供的无噪声仿真数据，建立定位模型，计算出物体相对位置。

物体相对位置的求解是一个二维估计问题，变量分别为距离和角度。对于距离维求解可以使用 FMCW 中频信号本身的特性进行计算，对于角度维求解则是一个阵列波达方向（DOA）估计问题。传统的 DOA 估计方法直接使用波束形成来实现，但是这种方法无法分辨出两个角度差小于波束宽度的目标，存在分辨率上限，即瑞利限。问题中的超分辨算



法则是突破了瑞利限的 DOA 估计算法。

在信源信号相互独立的情况下，经典 DOA 估计算法已经能够得到较高精度的估计结果，如 MUSIC 算法利用信号子空间和噪声子空间之间的正交性进行 DOA 估计，基于旋转不变技术信号参数估计（ESPRIT）方法则是将天线阵列划分成大小相同的两个子阵，利用两个子阵之间的关系进行 DOA 估计。但 DOA 估计实际技术应用场景通常很复杂，阵列接收信号间很少存在完全独立、互不相关的情况，如本题场景中不同物体的回波信号间存在相干关系时，信号子空间与噪声子空间不完全正交，使得经典的 DOA 估计算法失效。

因此，针对相干信源的超分辨 DOA 估计技术是本问题研究的重点，即如何有效实现解相干。实现解相干一般分为降维和非降维处理，降维处理通过牺牲阵列自由度来达到解相干的目的，非降维处理对信号协方差矩阵进行特定的变换，没有损失阵列孔径，但是由于实施了某种变换，所以会造成 DOA 估计精度的损失。另外的如基于稀疏恢复/压缩感知的 DOA 估计，通过构造信号稀疏矩阵，通过求解凸函数进行 DOA 估计，其优点是对信噪比不敏感，能够处理相关信号，角度分辨率高，缺点是计算量会比较大。但对于移动场景的超分辨问题，算法的实时性与低复杂度应该是首要考虑的。

### 3.1.2 问题二

问题二要求针对提供的高斯噪声仿真数据，设计超分辨算法精确定位多个物体。

在本问题中，距离估计通过对中频信号的 FFT 实现距离压缩，达到测距的目的。角度估计首先使用波束形成方法大致估算信源方向，然后使用盖尔圆法进行信源数估计。之后通过数值实验，比较几种超分辨 DOA 估计方法在不同场景的性能对比，根据均方根误差结果选择最适合本场景的方法。相比问题一，问题二在信号数据中加入了高斯噪声，因此在问题的处理过程中要注意考虑噪声对于信号处理的影响。

### 3.1.3 问题三

问题三提供一帧中频信号，要求我们设计在线低复杂度算法，计算出物体相对运动轨迹。

问题三是问题一、二的延伸，相比于前两个问题，问题三提供了多个 chirp 周期的数据。单 chirp 周期内认为物体静止不变，而在一帧时间内物体的相对位置有明显的移动。可利用一帧中频信号进行方位向 FFT 估计目标速度；进行距离维 FFT 估计目标距离；依据几种不同 DOA 估计算法的性能对比结果，选择最适合本场景的角度估计方法。同时，在此基础上对模型进行改进，比如结合移动平台在不同观测位置的坐标以及 DOA 估计值，采用测向交叉定位等方法，实现对多个物体的精确定位。

### 3.1.4 问题四

问题四考虑到实际场景中天线老化等原因对于天线阵列定位误差的影响，对一个 chirp 周期内的中频信号进行处理。

问题四是前三个问题在实际应用中可能面临的情况。因此，对于这一问题的处理，可以在前三个问题的模型基础上进行改进，增加天线阵列阵元位置偏差等对于信号处理结果影响的考量。在实际情况中，若天线老化程度极其恶劣，超出模型稳定度范围，用户可能会直接将其舍弃。因此算法所关注的老化程度更应该刚刚开始老化的时候。在前三个问题的基础上，将基础算法与子阵分解和滑窗方法相结合，通过类平均的方法等减弱天线自身结构变化对物体定位产生的负面影响。

### 3.2 求解思路

针对上述问题的整体求解思路如下图所示：

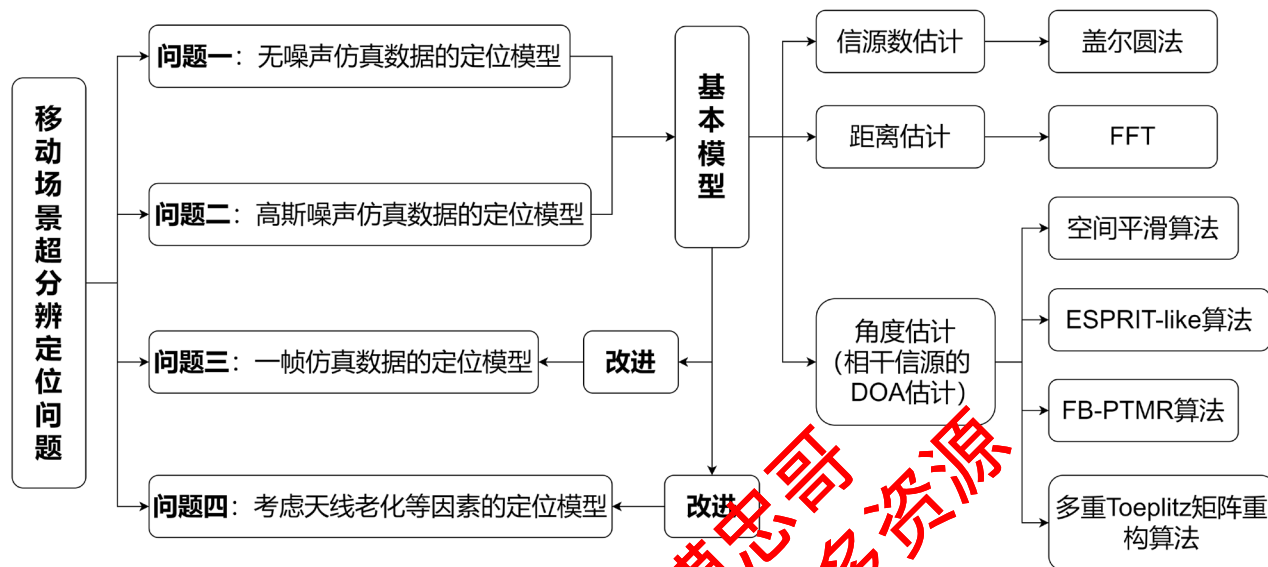


图 3-1 问题求解思路示意图

## 4 基本模型

### 4.1 信源数估计

信源数估计是空间谱估计中一项十分关键的技术，它直接影响到信号检测、参数估计、波形恢复的精度和准确度。对于大部分的超分辨率算法来说，都需要已知空间中的信源数目，如在雷达信号处理中广泛采用的 MUSIC、ESPRIT 等，算法的性能直接依赖于源数目的准确估计，源数目过估计或欠估计的情况下，算法性能会受到很大影响<sup>[2]</sup>。

H T Wu 等提出了一种与信号模型无关的盖尔圆法<sup>[3]</sup>(Gerschgorin disk estimation, GDE)，该方法综合利用观测信号协方差矩阵的特征值和特征向量信息，在白噪声及有色噪声情况下都适用。

盖尔圆法利用观测信号协方差矩阵的盖尔圆半径的大小实现源数目估计。通常协方差矩阵的信号盖尔圆和噪声盖尔圆没有明显区别，需要依据盖尔圆定理对协方差矩阵进行一定转换，使得转换后的协方差矩阵的信号盖尔圆半径明显大于噪声盖尔圆半径，即变换后协方差矩阵的盖尔圆盘被划分成半径大小不同的两部分，半径大的一部分是信号盖尔圆，半径小的一部分是噪声盖尔圆，这样才能依据盖尔圆半径实现对源信号数目的可靠估计。盖尔圆法的基本原理如下：

求阵列接收信号的协方差矩阵  $R$ ，并对  $R$  进行分块

$$R = \begin{bmatrix} R' & r \\ r^H & r_{MM} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

其中， $R'$  为  $R$  前  $M-1$  行和前  $M-1$  列构成的矩阵。

对  $R'$  做特征值分解，并将特征值从大到小排序，与其对应的特征向量  $V$  也按顺序重排。



使用  $V$  构造酉矩阵：

$$T = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

利用酉矩阵对协方差矩阵  $R$  做酉变换：

$$R_T = T^H R T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \rho_1 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & \rho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{M-1} & \rho_{M-1} \\ \rho_1^* & \rho_2^* & \dots & \rho_{M-1}^* & r_{MM} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

基本盖尔圆法的准则公式定义如下：

$$GDE(k) = \rho_k - \frac{D(N)}{M-1} \sum_{i=1}^M \rho_i \quad (4-4)$$

其中， $D(N)$  为调整因子，与快拍数负相关。

若当第  $d$  个特征值代入时，该式出现负值，则信源个数为  $k = d - 1$ 。

## 4.2 距离估计

FMCW 雷达发射信号的频率及发射波信号可分别表示为：

$$f(t) = f_0 + \gamma t, 0 \leq t < T \quad (4-5)$$

$$s_{TX} = A_{TX} \exp\left(j2\pi\left(f_0 t + \frac{\gamma}{2} t^2\right)\right), 0 \leq t < T \quad (4-6)$$

其中， $A_{TX}$  为信号发射功率， $f_0$  为载频， $\gamma$  为调频斜率， $T$  为 chirp 周期， $j$  为虚数单位。

则雷达经过距离为  $R_0$  的物体反射后的接收信号为：

$$s_{RX}(\tau) = A_{RX} \exp\left(j2\pi\left(f_0 \tau + \frac{\gamma}{2} (\tau)^2\right)\right), \tau \leq t < T \quad (4-7)$$

其中， $A_{RX}$  为表示信号接收功率， $\tau = 2R_0/c$  为接收时延， $c$  为光速。

发射信号和接收信号在  $[\tau, T]$  上有重叠，将这两个信号输入混频器，即可得到中频 (IF) 信号：

$$s_{IF}(t) = s_{TX}(t) s_{RX}^*(t) = A_{TX} A_{RX} \exp(j2\pi(\gamma \tau t + f_0 \tau)), \tau \leq t < T \quad (4-8)$$

式中忽略  $\tau^2$  ( $\tau \ll 1$ ) 项。由于中频信号的频率为  $f_{IF} = \gamma \tau$ ，故物体的位置：

$$R_0 = \frac{c}{2\gamma} f_{IF} \quad (4-9)$$

上述处理过程称为去斜 (Dechirp)，发射信号和接收信号的 Dechirp 结果为与目标位置有关的单频信号。在本题目中，由于一个 chirp 周期 ( $T = 32\mu s$ ) 时间极短，在此周期内可认为物体静止不变，此时，目标的中频信号对应为一个频率恒定的正弦信号，信号的频率随物体相对雷达的远近而变化，如图 4-1 所示。利用快速傅里叶变换 (FFT) 实现信号相干积累，完成脉冲压缩，实现距离向高分辨。由式(4-9)计算目标的距离。

线性调频连续波雷达的距离分辨率  $\Delta R$  取决于雷达信号的调频带宽  $B$ ，调频带宽  $B$  确定最大距离分辨率：

$$\Delta R = \frac{c}{2B} \quad (4-10)$$

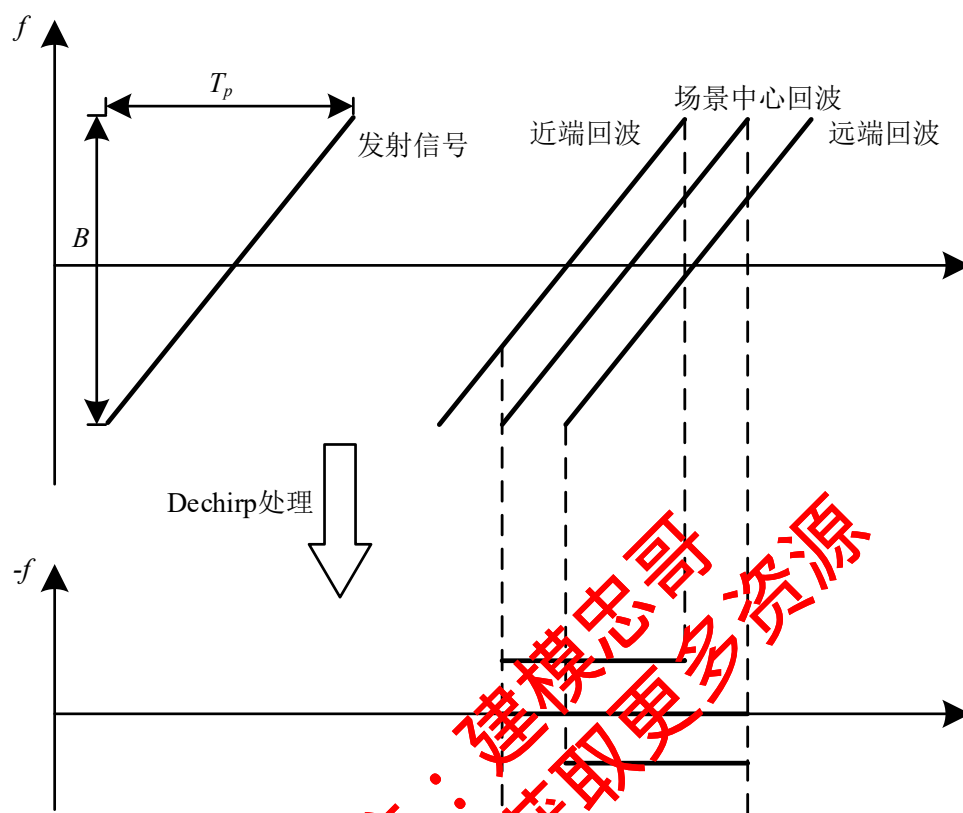


图 4-1 Dechirp 原理

### 4.3 相干信源的 DOA 估计算法

由于现实场景中信号的传输相对复杂，一般入射到阵元上的信号之间会存在相干关系。在雷达的信号处理中，大量的相干源信号会导致信号在恒虚警处理时出现干扰，进而使得信号的 DOA 估计不准确。

传统阵列信号处理中的 DOA 估计方法并不能有效地分辨相干信源的 DOA，如多重信号分类（MUSIC）方法和旋转不变技术（ESPRIT）等，其数学模型都是在非相干的基础上建立的，但当环境中存在相干或高度相关的信号时，由于协方差矩阵的秩损失，算法的性能会严重下降。因此，相干信源的处理是高精 DOA 估计的重点。

针对相干信源的 DOA 估计，许多解相干算法被相继提出。本节介绍四种解相干算法：空间平滑算法、ESPRIT-like 算法、FB-PTMR 算法和多重 Toeplitz 矩阵重构算法，三种算法都能够对相干信源起到很好的解相干作用，实现相干信源的 DOA 估计。

#### 4.3.1 空间平滑算法

空间平滑算法是解相干算法中最常见的算法之一。该算法的解相干原理是将均匀线阵划分成相互重叠的  $p$  个子阵列，每个子阵列包括  $m$  个阵元，然后将  $m$  个子阵的协方差矩阵平均处理得到新的协方差矩阵，解决了信源相干时的信号协方差矩阵降秩导致 DOA 估计失效的情况<sup>[5]</sup>。

### ● 前向空间平滑算法

前向空间平滑算法原理如图 4-2 所示，将  $M$  元均匀矩形阵列划分成  $p$  个子阵列，每个子阵列包括  $m$  个阵元， $m$  和  $p$  满足  $m + p - 1 = M$ ，得到的子阵为  $X_1^f(t)$  到  $X_p^f(t)$ ，信源数为  $Q$ 。

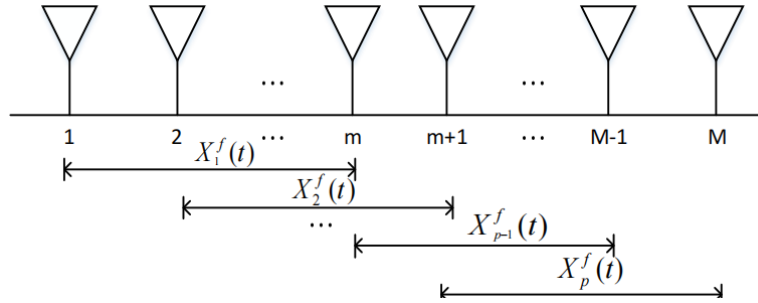


图 4-2 前向空间平滑算法原理图

设第  $k$  个阵元上接收到的信号数据为  $x_k$ ，取左边第一个子阵列  $X_1^f(t)$  作为参考子阵。因此， $p$  个子阵列的输出数据矢量  $X_1^f(t)$  到  $X_p^f(t)$  分别为

$$\begin{cases} X_1^f = [x_1, x_2, \dots, x_m] \\ X_2^f = [x_2, x_3, \dots, x_{m+1}] \\ \dots \\ X_p^f = [x_p, x_{p+1}, \dots, x_{M+1}] \end{cases} \quad (4-11)$$

因此，第  $k$  个子阵可以表示为：

$$X_k^f = [x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = A_m D^{(k-1)} s(t) + n_k(t), 1 \leq k \leq p \quad (4-12)$$

其中， $D$  如式(4-13)所示：

$$D = \begin{bmatrix} e^{j2\pi d \sin(\theta_1)/\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j2\pi d \sin(\theta_2)/\lambda} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j2\pi d \sin(\theta_Q)/\lambda} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

那么，第  $k$  个子阵  $X_k^f$  的协方差矩阵可以表示为：

$$R_{KK} = A_m(\theta) D^{(k-1)} R_s (A_m(\theta) D^{(k-1)})^H + \alpha^2 I \quad (4-14)$$

其中， $R_s$  为信号协方差矩阵，且  $R_s = E[ss^H]$ ， $A_m(\theta)$  是以第一个子阵作为参考子阵的方向矩阵：

$$A_m(\theta) = [\alpha_m(\theta_1), \alpha_m(\theta_2), \dots, \alpha_m(\theta_Q)] \quad (4-15)$$

其中，方向向量为  $\alpha_m(\theta_k) = [1, e^{j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi d (M-1) \sin(\theta_k)/\lambda}]$ 。

因此，得到经过前向空间平滑后的协方差矩阵  $R^f$  为：

$$R^f = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p R_{kk} \quad (4-16)$$

且当满足条件  $m > M$  且  $p > M$  时，得到新的协方差矩阵  $R^f$  是满秩的。此时，恢复了噪声子空间和信号子空间的正交性，可以通过对  $R^f$  进行特征值分解得到噪声子空间和信号子空间，然后构建空间谱函数来进行有效 DOA 估计，即实现了前向空间平滑算法的解相干处理。

### ● 后向空间平滑算法

后向空间平滑算法是在前向空间平滑的基础上反向划分子阵，平滑原理与前向空间平滑算法原理相同。首先，将最后一个阵元作为参考阵元，向前取  $m$  个阵元作为第一个子阵，依次向前平滑得到  $p$  个子阵，得到  $p$  个子阵的输出数据矢量：

$$\begin{cases} X_1^b = [x_M, x_{M-1}, \dots, x_{M-m+1}] \\ X_2^b = [x_{M-1}, x_{M-2}, \dots, x_{M-m}] \\ \dots \\ X_p^b = [x_m, x_{m-1}, \dots, x_1] \end{cases} \quad (4-17)$$

因此，第  $k$  个子阵可以表示为：

$$X_k^b = [x_{M-k+1}, x_{M-k}, \dots, x_{M-k-m+1}] \quad (4-18)$$

根据划分子阵的方法比较可知，后向平滑算法中第  $p-k+1$  个子阵可以利用前向平滑算法中第  $k$  个子阵表示出：

$$X_{p-k+1}^b = J(X_k^f(t))^* = JA_m^* S^*(t) + Jn_k(t) \quad (4-19)$$

其中， $J$  为交换矩阵， $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。所以，后向平滑第  $p-k+1$  个子阵的协方差矩阵

为：

$$R_{p-k+1}^b = JA_m^*(\theta) D^{-(k-1)} R_s^* (D^{-(k-1)})^H (A_m^H(\theta) J)^* + \alpha^2 I \quad (4-20)$$

因此，通过后向空间平滑算法得到的协方差矩阵  $R^b$  为：

$$R^b = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p R_{p-k+1}^b \quad (4-21)$$

同样，当满足条件  $m > M$  且  $p > M$  时，得到的新的协方差矩阵  $R^b$  也是满秩的，可以直接利用特征值分解后得到的噪声子空间构建空间谱，最终实现解相干。

### ● 前后向空间平滑算法

双向空间平滑算法将前向空间平滑算法与后向空间平滑算法结合起来，将前向平滑后的协方差矩阵和后向平滑后的协方差矩阵求平均值，得到前后向空间平滑的协方差矩阵：

$$R^b = \frac{R^f + R^b}{2} \quad (4-22)$$

### 4.3.2 ESPRIT-like 算法

ESPRIT-like<sup>[6]</sup>算法是在 ESPRIT 的基础上，将信号矩阵重构成一个 Toeplitz 矩阵，让矩阵的秩只与信号的波达方向有关，与相干信号无关，进而达到去相干。基于 Toeplitz 矩阵重构的 ESPRIT-like 方法能够很好地解决一维阵列的解相干问题，同时也不牺牲阵列维数，其基本原理如下：

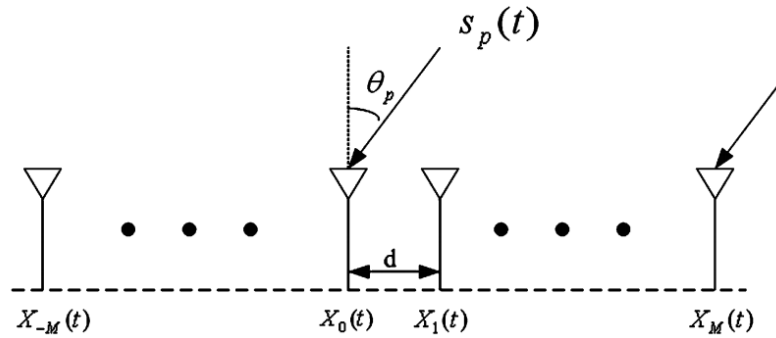


图 4-3 均匀线阵

如图 4-3 所示，由  $2M+1$  个阵元构成均匀线阵，阵元间距为  $d$ ，假设中心阵元为参考原点，有  $K$  个信号 ( $K \leq M$ ) 入射到该系统上，其中前  $Q$  个为相干信号，后  $K-Q$  个为独立的信号，第  $i$  个信号波达角为  $\theta_i$ 。

那么第  $m$  个阵元的接收信号为：

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{i=1}^K s_i(t) e^{-j2\pi d k \sin \theta_i / \lambda} + n_k(t) \\ &= \sum_{i=1}^Q s_i(t) e^{-j2\pi d k \sin \theta_i / \lambda} + \sum_{i=Q+1}^K \beta_i s_i(t) e^{-j2\pi d k \sin \theta_i / \lambda} + n_k(t) \end{aligned} \quad (4-23)$$

其中， $s_i(t)$  为第  $i$  个信号， $n_k(t)$  为高斯白噪声， $\beta_i$  为相干系数。

接收阵列可表示为：

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_{-M}(t), \dots, x_0(t), \dots, x_M(t)]^T \\ &= AS(t) + N(t) \end{aligned} \quad (4-24)$$

其中， $S(t) = [s_1(t), \dots, s_K(t)]^T$  为  $K$  个目标的接收信号， $A = [a(\theta_1), \dots, a(\theta_K)]$  为导向矢量阵。

阵列的协方差矩阵  $R_{XX} = E[XX^H]$ ，而协方差矩阵中的任一元素可表示为：

$$r(m, n) = \sum_{i=1}^K d_{m,i} e^{\frac{j2\pi d n \sin \theta_i}{\lambda}} + \sigma_n^2 \delta_{m,n} \quad (m, n = -M, \dots, 0, \dots, M) \quad (4-25)$$

其中， $d_{m,i}$  的定义为：

$$d_{m,i} = \begin{cases} P_{1,i} \beta_i^* \sum_{l=1}^Q \beta_l(t) e^{\frac{j2\pi d m \sin \theta_l}{\lambda}}, & i = 1, \dots, Q \\ P_{i,i} e^{\frac{j2\pi d m \sin \theta_i}{\lambda}}, & i = Q+1, \dots, K \end{cases} \quad (4-26)$$

式中， $P_{l,i} = E[s_l(t) s_i^*(t)]$  ( $l, i = 1, Q+1, \dots, K$ )， $\sigma_n^2$  为噪声功率。

构建 Toeplitz 矩阵如下：

$$R(m) = \begin{bmatrix} r(m, 0) & r(m, 1) & \dots & r(m, M) \\ r(m, -1) & r(m, 0) & \dots & r(m, M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(m, -M) & r(m, -M+1) & \dots & r(m, 0) \end{bmatrix} = A_r D(m) A_r^H + N_{mx} \quad (4-27)$$

其中,  $a_r(\theta_k) = \left[ 1, e^{-\frac{j2\pi d \sin \theta_k}{\lambda}}, \dots, e^{-\frac{j2\pi d M \sin \theta_k}{\lambda}} \right]$ ,  $D(m) = \text{diag} \{d_{m,1}, d_{m,2}, \dots, d_{m,K}\} \in C^{K \times K}$ ,

$A_r = [a_r(\theta_1), a_r(\theta_2), \dots, a_r(\theta_K)] \in C^{M+1 \times K}$  为导向向量。

对 Toeplitz 矩阵  $R(m)$  进行特征值分解, 得到  $K$  个相对较大的特征值和  $M-K+1$  个较小特征值, 其中较大特征值对应的大特征向量构成信号子空间, 较小的特征向量构成噪声子空间。此时使用子空间类算法对来波方向进行估计, 得到 DOA 的估计值<sup>[7]</sup>。

### 4.3.3 FB-PTMR 算法

由于相位差不影响相干信号之间的相干性, 大多数算法并没有讨论相位差, 或只将其设置为固定值。然而, ESPRIT-like 算法的估计性能与相位差和信号角度有关, 在某些情况下, 该算法的性能会急剧下降甚至失效。除此之外, ESPRIT-like 算法只是简单地应用样本协方差矩阵的单个行向量, 可能导致信息利用的不完全和估计精度的降低。

为了克服 ESPRIT-like 算法上述缺点, 提出一种基于前向和后向部分 Toeplitz 矩阵重构的改进方法, 称为 FB-PTMR<sup>[8]</sup>。FB-PTMR 算法利用样本协方差矩阵的一半行向量重构部分 Toeplitz 矩阵, 应用基于子空间的方法来识别相干信号。该方法不受相位差和信号角度的影响, 能够提高 DOA 估计精度和分辨成功率。

由式(4-27)可知, 消除噪声影响后, Toeplitz 矩阵  $R(m)$  可以描述为:

$$R(m) = A_r D(m) A_r^H = \sum_{i=1}^K a_{r,i}(\theta_i) a_{r,i}^H(\theta_i), \forall m \quad (4-28)$$

由于  $R(-m) = R^*(m)J$ , 意味着  $R(m)$  包含着和  $R(-m)$  一样的信息。因此, 可以利用样本协方差矩阵中  $i \in [0, M]$  的一半行向量来构造部分 Toeplitz 矩阵。等效样本协方差矩阵为:

$$R = \sum_{m=0}^M R_m R_m^H = A_r \sum_{m=0}^M D_m A_r^H A_r D_m^H A_r^H = A_r R_S A_r^H \quad (4-29)$$

其中,  $R_S = \sum_{m=0}^M D_m A_r^H A_r D_m^H$  为正定满秩矩阵。

改善估计性能:

$$R' = R + JR^*J \quad (4-30)$$

其中,  $J$  表示交换矩阵。

最后, 结合基于子空间的方法, 如 MUSIC、root-MUSIC 或 ESPRIT, 可以得到 DOA 的估计值。

### 4.3.4 多重 Toeplitz 矩阵重构 (MTOEP) 算法

多重 Toeplitz 矩阵重构算法 (MTOEP)<sup>[9]</sup>能够利用所有阵列输出的完整信息来重构完整的 Toeplitz 矩阵集, 产生更好的协方差矩阵估计, 且该方法不需要辅助阵列或噪声消除, 使得成本降低和估计精度提高。算法基本原理如下:



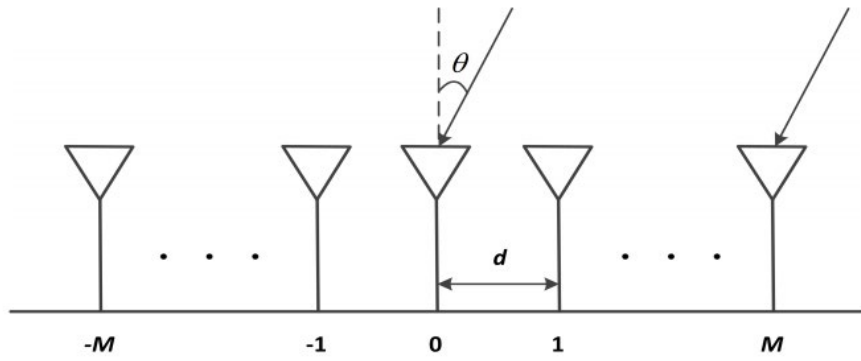


图 4-4 天线阵列模型

由图 4-4 所示，构造  $(M+1) \times (M+1)$  维 Toeplitz 矩阵  $R_X(t)$  和  $R_Y(t)$ ：

$$R_X(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) & x_1(t) & \dots & x_M(t) \\ x_{-1}(t) & x_0(t) & \dots & x_{M-1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{-M}(t) & x_{-M+1}(t) & \dots & x_{-1}(t) \end{bmatrix} = A_r S(t) x(t) \quad (4-31)$$

$$R_Y(t) = \begin{bmatrix} y_0(t) & y_1(t) & \dots & y_M(t) \\ y_{-1}(t) & y_0(t) & \dots & y_{M-1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{-M}(t) & y_{-M+1}(t) & \dots & y_{-1}(t) \end{bmatrix} = R_X(t) + R_N(t) \quad (4-32)$$

其中， $R_X(t)$ 、 $R_N(t)$ 、 $R_Y(t)$  分别表示接收信号、噪声和阵列输出矢量。

$$\begin{aligned} R_{Yi} &= E[R_Y(t) y_i^*(t)] \\ &= E[R_X(t) x_i^*(t)] + E[R_N(t) n_i^*(t)] \\ &= R_{Xi} + \sigma_n^2 I_{(M+1),i} \end{aligned} \quad (4-33)$$

为了避免仅利用阵列输出协方差矩阵的部分信息和抑制噪声过程导致的 DOA 估计性能下降，提出一种新的重构 Toeplitz 矩阵方法。DOA 估计可以通过获得噪声项的对角化结构来实现，而不需要预先进行去噪处理。

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=-M}^M R_{Yi} R_{Yi}^H \\ &= \sum_{i=-M}^M \left( R_{Xi} + \sigma_n^2 I_{(M+1),i} \right) \left( R_{Xi} + \sigma_n^2 I_{(M+1),i} \right)^H \\ &= A R_S A^H + (M+1) \sigma_n^4 I_{(M+1),0} \end{aligned} \quad (4-34)$$

其中， $R_S$  为正定满秩矩阵，且该方法的秩仅与信号的 DOA 相关，而与入射信号的相干性无关。

通过前向/后向平滑技术提高估计性能，如下所示：

$$R_M = R + J R^* J \quad (4-35)$$

其中， $J$  表示交换矩阵。

最后，结合基于子空间的方法得到 DOA 的估计值。

#### 4.4 DOA 估计方法选择

选取不同场景，在不同信噪比下，针对前向空间平滑算法（FOSS）、前后向空间平滑算法（FBSS）、ESPRIT-like 算法、FB-PTMR 算法、MTOEP 算法等五种 DOA 估计算法，进行算法性能评估。

##### ● 场景设置

**场景一：**相干信源适应性。双目标距离都为 7m，角度分别为 $-1^\circ$ 和 $1^\circ$ ，物体反射系数相同，仿真测试算法在一般情况下对相干信号的基础性能。

**场景二：**DOA 估计精度。双目标距离都为 7m，角度分别为 $-0.2^\circ$ 和 $0.2^\circ$ ，物体反射系数相同，仿真测试算法在小角度差的情况下的性能。

**场景三：**弱反射目标可探测性。双目标距离都为 7m，角度分别为 $-0.2^\circ$ 和 $0.2^\circ$ ，物体反射系数为 10:1，仿真测试算法在目标回波幅度差较大，大目标信号和噪声可能“淹没”小目标的情况下的性能。

**场景四：**综合情况场景。双目标距离分别为 6m 和 8m，角度分别为 $0.1^\circ$ 和 $0.1^\circ$ ，物体反射系数相同，仿真测试算法在目标角度差很小，距离差较大的情况下算法的性能。

##### ● 性能评估指标

均方根误差是预测值与真实值偏差的平方与预测次数比值的平方根，衡量的是预测值与真实值之间的偏差，并且对数据中的异常值较为敏感，可以同时兼顾算法的鲁棒性与准确度。

在本评估实验中计算公式如下：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{WP} \sum_{i=1}^P \sum_{w=1}^W \left( \hat{\theta}_{i,w} - \theta \right)^2} \quad (4-36)$$

其中， $W$  为蒙特卡洛次数， $P$  为信源数。

##### ● 实验设计与结果

在不同场景，不同信噪比下，进行蒙特卡洛次数  $W=100$  次的性能评估实验，并以均方根误差作为性能评估指标评估 5 种 DOA 估计算法。

**场景 1：**双目标距离都为 7m，角度分别为 $-1^\circ$ 和 $1^\circ$ ，物体反射系数相同，结果图如下：

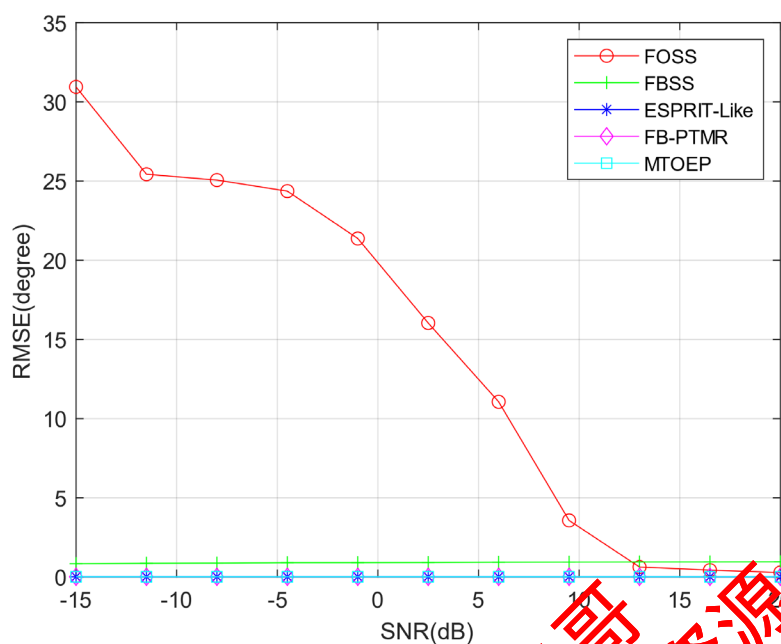


图 4-5 场景 1 性能评估结果

该场景实验结果说明，除 FOSS 方法外其他 4 种方法在不同信噪比下均可正确求得结果。因 FOSS 算法对相干信源 DOA 估计性能不佳，进行剔除。

**场景 2：**双目标距离都为 7m，角度分别为  $-0.2^\circ$  和  $0.2^\circ$ ，物体反射系数相同，结果图如下：

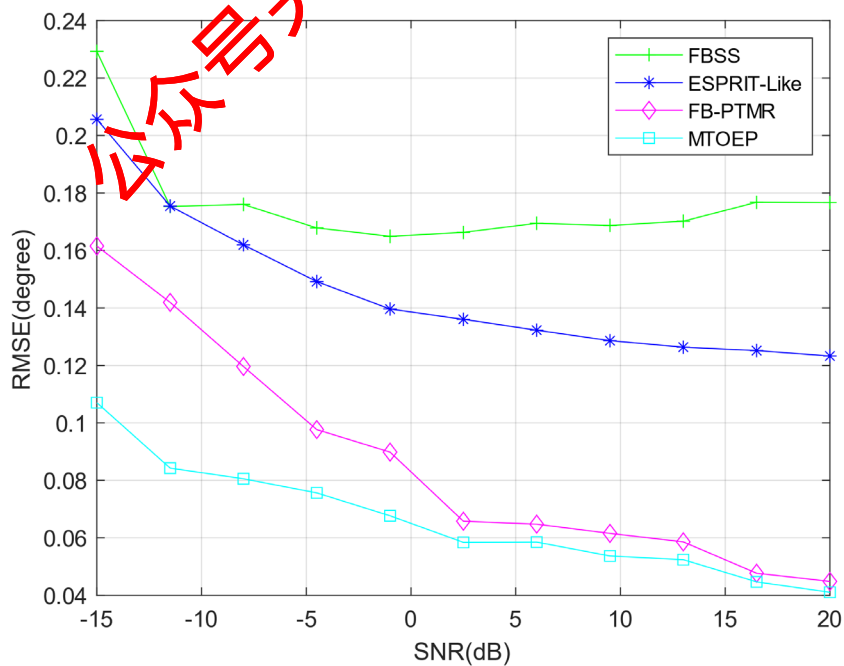


图 4-6 场景 2 性能评估结果

该场景实验结果说明，MTOEP 方法在各个信噪比情况下都优于其他算法，并且在低信噪比情况下误差在  $0.1^\circ$  内。

**场景 3：**双目标距离都为 7m，角度分别为 $-0.2^\circ$  和  $0.2^\circ$ ，物体反射系数为 10: 1，结果图如下：

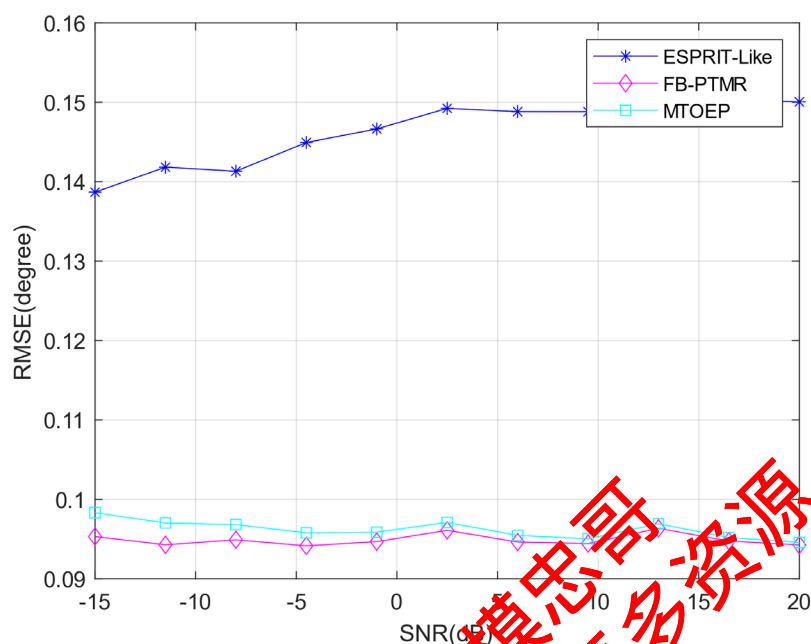


图 4-7 场景 3 性能评估结果

该场景实验结果说明，FB-PTMR 方法与 MTOEP 方法性能接近，误差在  $0.1^\circ$  内，且结果随信噪比变化不大，可能的原因是目标信号间的幅度差影响了小目标的角度估计结果。FBSS 对目标反射系数较为敏感，鲁棒性较差，进行剔除。

**场景 4：**双目标距离分别为 6m 和 8m，角度分别为 $-0.1^\circ$  和  $0.1^\circ$ ，物体反射系数相同，仿真测试算法在目标角度差很小，距离差较大的情况下算法的性能，结果图如下：

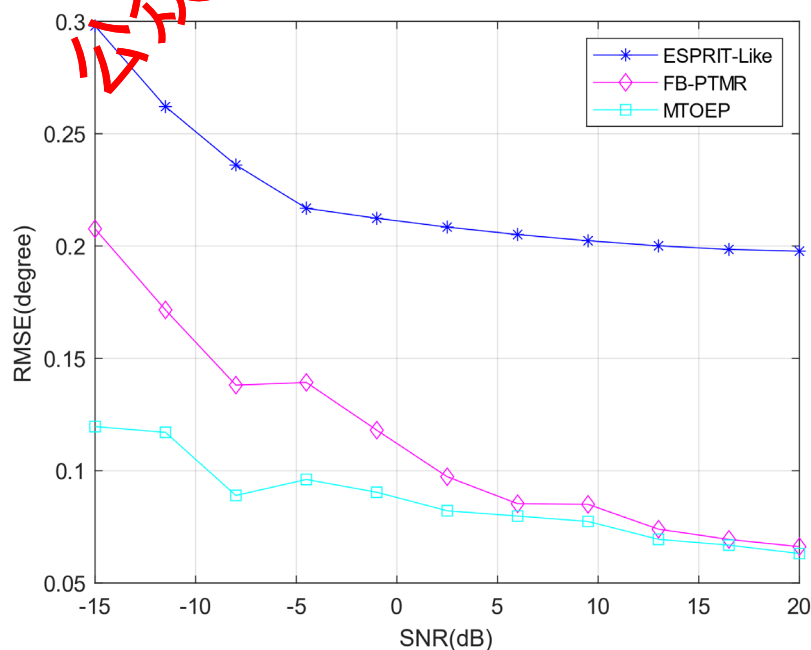


图 4-8 场景 4 性能评估结果

该场景实验结果说明，三种算法均在高信噪比下能分辨并估计出两个物体的 DOA，但随着信噪比降低三种算法均失效。全信噪比条件下 MTOEP 算法性能最优。

综上所述实验结论，我们选择 MTOEP 方法作为模型 DOA 估计算法。

## 5 问题一分析与求解

### 5.1 问题分析

问题一根据提供的无噪声仿真数据建立定位模型。考虑到数据形式为无噪声单 chirp 周期内的一组中频信号，为解决这一问题，首先对信源个数进行估计；其次，使用 FFT 方法对距离维做脉冲压缩，得到目标距离信息；最后，依据 4.4 节 DOA 估计方法评估结果，使用 MTOEP 方法进行角度估计。

### 5.2 问题求解

- 信源数估计

使用盖尔圆法估计相干信源个数，得到结果为 2。

- 距离估计

选取单一天线进行 FFT 变化得到如下结果：

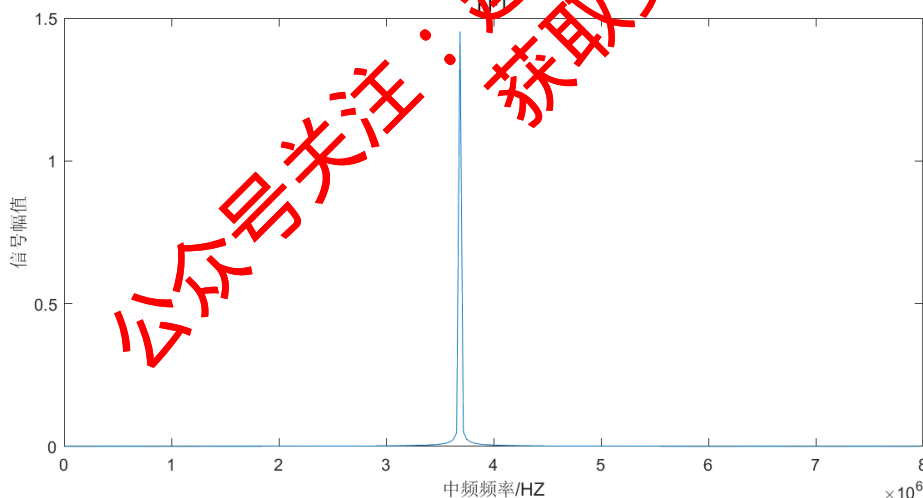


图 5-1 问题一距离估计结果

得到单一频率  $f_{IF} = 3.6875\text{MHz}$ ，说明两目标的径向距离差小于距离分辨率。

根据距离计算公式  $R_0 = \frac{c}{2\gamma} f_{IF}$  可得，对应距离  $R_0$  为 7.0028m。

考虑距离分辨率，对距离计算公式取微分可得  $\Delta R_0 = \frac{c}{2\gamma} \Delta f_{IF}$ ，而在 FFT 中有  $\Delta f_{IF} = \frac{F_s}{N}$ 。

因此距离分辨率率可以表示为  $\Delta R_0 = \frac{F_s c}{2N\gamma}$ ，带入计算得到  $\Delta R_0 = 0.0593\text{m}$ 。因此，当不同物体与移动平台间距离大于 6cm 时可采用此方法实现距离向分辨。

● 角度估计

采用多重 Toeplitz 矩阵重构算法 DOA 估计结果如下：

	物体 1	物体 2
DOA (° )	-0.0685	0.2272

综合距离与 DOA 估计，我们可以得到物体二维坐标如下：

	物体 1	物体 2
径向距离 (m)	7.0028	7.0028
DOA (° )	-0.0685	0.2272

极坐标表示如下：

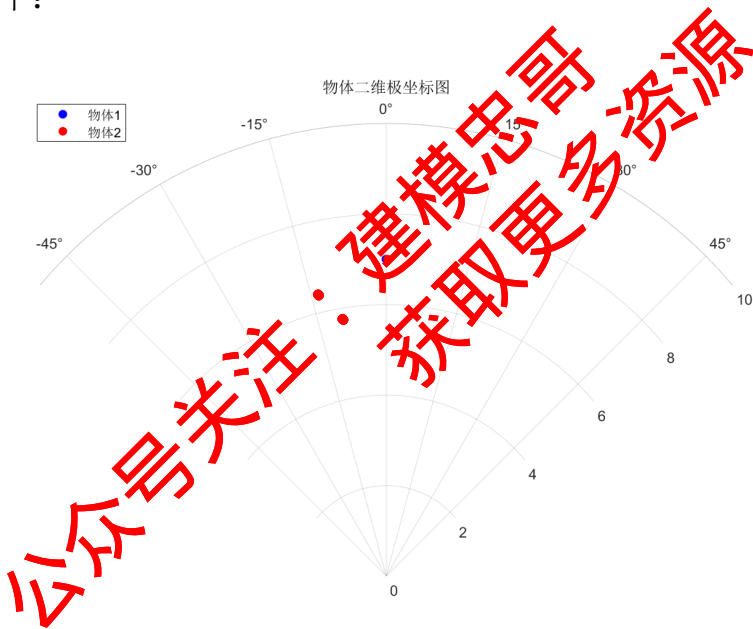


图 5-2 问题一物体坐标表示

6 问题二分析与求解

6.1 问题分析

问题二中提供的仿真数据添加高斯噪声。首先估计信源个数，其次，根据 FMCW 中频信号本身的特性，使用 FFT 方法对估计目标距离；最后，根据 4.4 节 DOA 估计方法评估结果，使用 MTOEP 方法进行角度估计

6.2 问题求解

● 信源数估计



首先使用盖尔圆法估计相干信源个数，得到结果为 2。

### ● 距离估计

选取单一天线进行 FFT 变化得到如下结果：

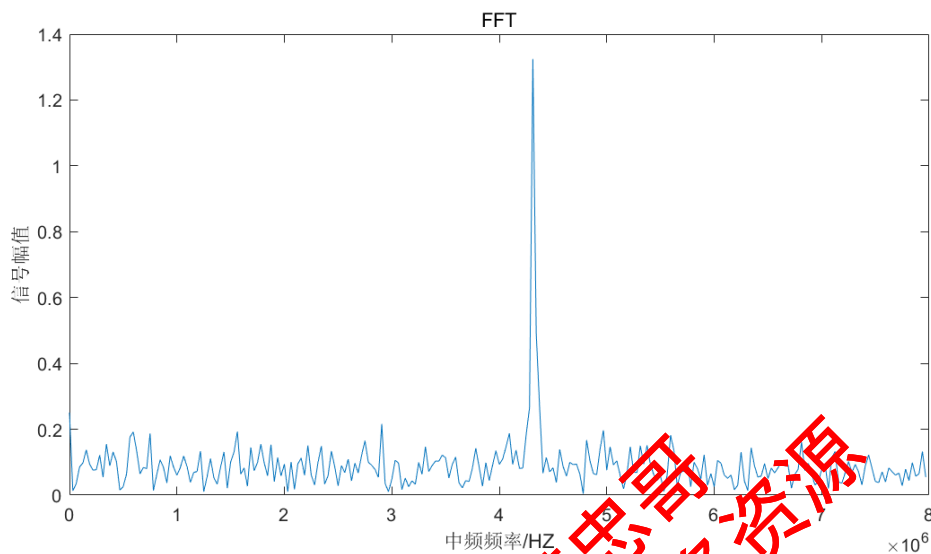


图 6-1 问题二距离估计结果

得到单一频率  $f_{IF}=4.3125\text{MHz}$ ，说明两个物体径向距离差小于距离分辨率，十分接近。

根据距离计算公式  $R_0 = \frac{c}{2\gamma} f_{IF}$  可得，对应距离  $R_0$  为 8.1897m。

### ● 角度估计

采用多重 Toeplitz 矩阵重构算法 DOA 估计结果如下：

	物体 1	物体 2
DOA ( $^{\circ}$ )	-0.2864	0.3507

综合距离与 DOA 估计，我们可以得到物体二维坐标如下：

	物体 1	物体 2
径向距离 (m)	8.1897	8.1897
DOA ( $^{\circ}$ )	-0.2864	0.3507

极坐标表示如下：

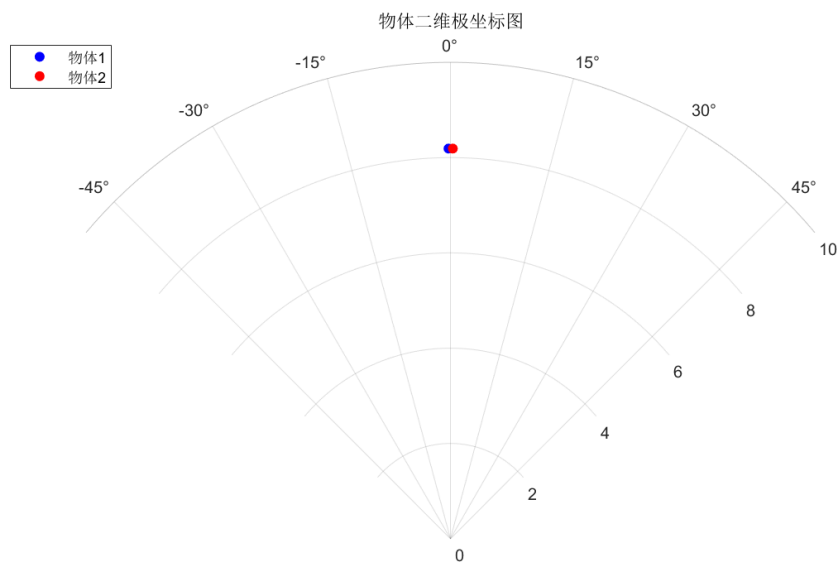


图 6-2 问题二物体坐标表示

## 7 问题三分析与求解

### 7.1 问题分析

问题三要求我们设计在线低复杂度算法，通过一帧数据计算出物体相对运动轨迹。相比前两个问题，问题三提供了多个 chirp 周期的数据。单 chirp 周期内认为物体静止不变而在一帧时间内，物体的相对位置有明显的移动。

多周期数据的引入可以提供如下信息：

#### 1. 二维距离多普勒像

针对单个天线信号，考虑其在 1 帧（32 个 chirp 周期）内的数据累计，并将其排列为  $32 \times 256$  的矩阵，作二维 FFT 后变换至距离多普勒域，其横坐标代表中频频率，对应径向距离，其纵坐标对应目标径向速度。我们选取其中一个天线进行上述二维 FFT 处理，结果如下。

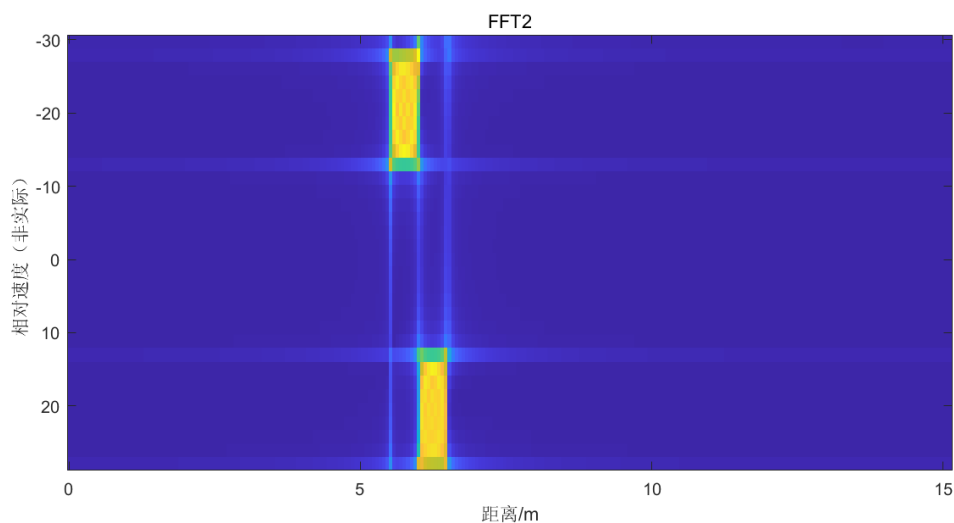


图 7-1 问题三二维距离多普勒像

观察上述结果我们发现：存在至少双物体，其中物体 1 的径向距离在 5.5m~6.0m，其径向速度为负；物体 2 的径向距离为 6m~6.5m，其径向速度为正。因此我们可以判断出物体的数目和各个物体的位置与速度范围。

## 2. 物体运动轨迹

在单个 chirp 周期内进行目标距离与角度估计确定坐标，多个周期即可获得多组坐标。再结合讨论 1 中得到的物体的位置与速度范围进行数据关联，计算出物体运动轨迹。

### 7.2 计算结果

单帧物体径向距离及相对角度计算结果如下：

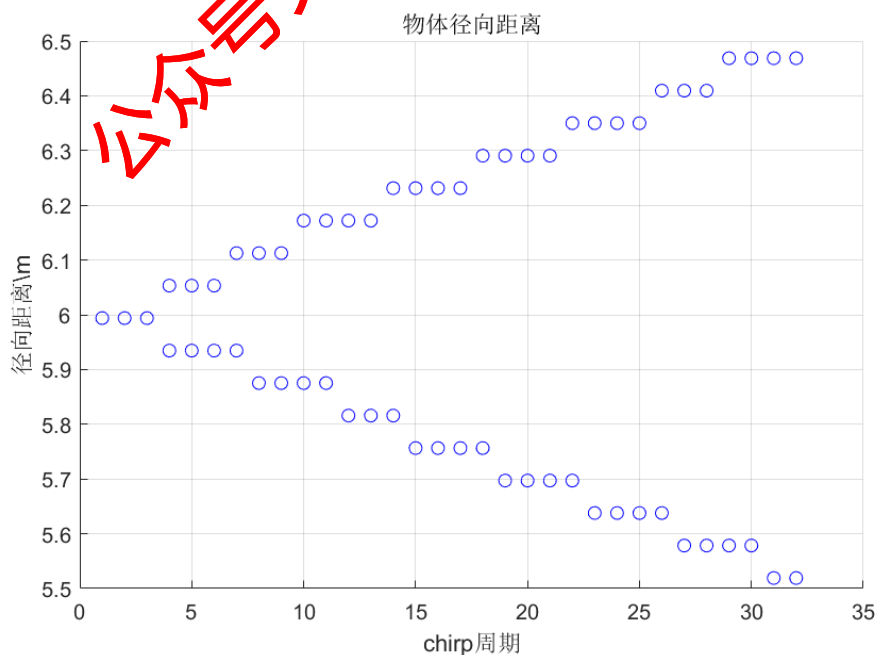


图 7-2 问题三单帧物体径向距离

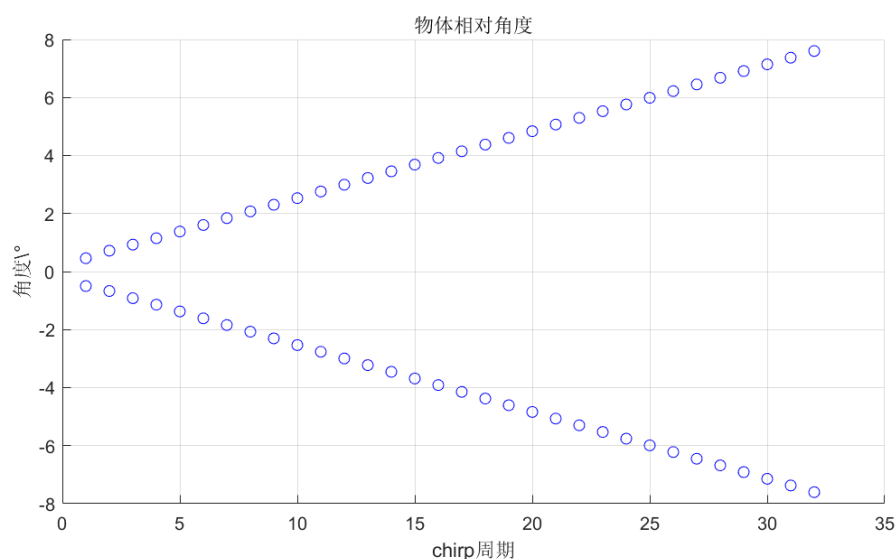


图 7-3 问题三相对角度

结合物体的位置与速度范围，数据关联后结果如下：

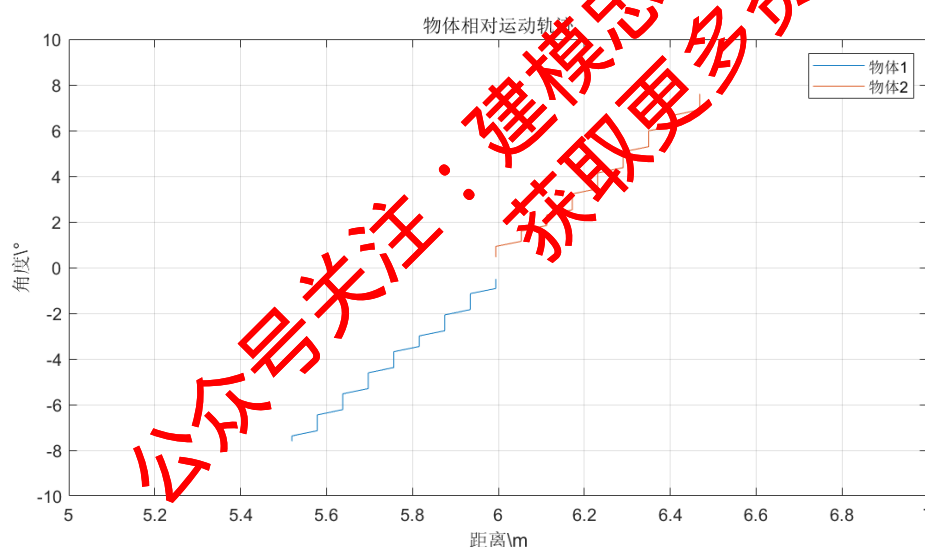


图 7-4 问题三物体运动轨迹

最终结果与最初讨论相一致。

### 7.3 改进模型

在上述问题中，我们将物体位置的测量分成了两个方面——测距与测角。在测角方面，我们比较了 5 种 DOA 估计方法在不同 SNR 下的 PSNR，选取了鲁棒性与精度均较高的多重 Toeplitz 矩阵重构算法，实现了 DOA 方位的精确估计。在测距方面，我们采用了基于 FFT 的基线方案，通过对单一天线回波信号的谱分析，找到中频频率，进而实现距离估计。但限于采样率和采样点数，距离分辨率无法提升。因此我们考虑仅采用 DOA 角度估计与移动平台坐标两类数据实现对多个物体的超分辨率定位。

#### 7.3.1 模型原理

DOA 定位的基本原理如下：

设存在 $N$ 个物体，在平面坐标系下的位置为 $s_n = (x_n, y_n)^T, n=1,2,...,N$ 。有一移动平台沿运动轨迹行驶并对物体进行DOA估计测向，过程中共选取 $M$ 个观测位置，位置坐标为 $r_m = (x_m, y_m)^T, m=1,2,...,M$ 。移动平台在每个观测位置都会获取到 $N$ 组DOA估计值，记 $r_m$ 处采集到的数据为 $\theta_m = [\theta_{m,1}, \theta_{m,2}, ..., \theta_{m,N}]^T, m=1,2,...,M$ 。

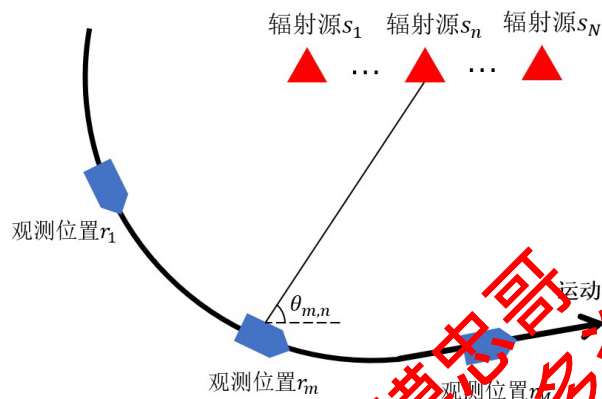


图 7-5 DOA 定位基本原理

结合移动平台在不同观测位置的坐标以及 DOA 估计值，可采用测向交叉定位实现对多个物体的精确定位。

测向交叉定位原理如下：

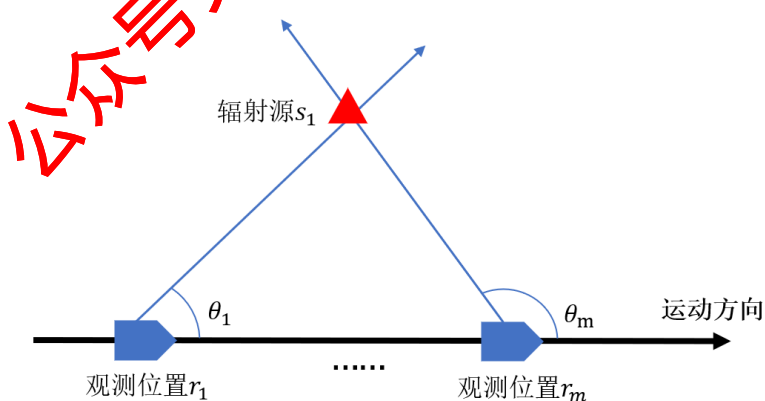


图 7-6 测向交叉定位原理

如图所示，假设有 $M$ 个观测位置，其坐标记为 $r = [r_1, r_2, ..., r_M]$ ，其中第 $m$ 个观测位置的坐标为 $r_m = [x_m, y_m]^T, m=1,2,...,M$ 。目标的真实位置坐标为 $u = [x, y]^T$ 。记 $M$ 个观测位置对目标DOA真实值为 $\theta = [\theta_1, \theta_2, ..., \theta_M]^T$ 。

第 $m$ 个观测位置与目标到达角计算式如下：

$$\theta_m = \arctan \frac{y - y_m}{x - x_m}, m = 1, 2, \dots, M \quad (7-1)$$

使用两个观测位置  $r_1$ 、 $r_2$  对目标定位时，从两个观测位置以到达角测向线相交于一点，则该点为目标的估计位置。

由上式可得：

$$\begin{cases} (x - x_1) \tan \theta_1 = y - y_1 \\ (x - x_2) \tan \theta_2 = y - y_2 \end{cases} \quad (7-2)$$

当  $\tan \theta_1 \neq \tan \theta_2$  时，解方程组可得目标的位置估计为：

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{x_2 \tan \theta_2 - x_1 \tan \theta_1}{\tan \theta_2 - \tan \theta_1} \\ \hat{y} = \frac{y_1 \tan \theta_2 - y_2 \tan \theta_1 + (x_2 - x_1) \tan \theta_1 \tan \theta_2}{\tan \theta_2 - \tan \theta_1} \end{cases} \quad (7-3)$$

由上式可知，只要已知两个观测位置的坐标  $r_1$ 、 $r_2$  和到达角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ，即可得到目标的位置估计  $[\hat{x}, \hat{y}]^T$ 。

但当观测位置为三个及以上时，由于存在测量误差，每个观测位置的测向线并不会相交于同一点，基于上述公式的位置估计不再准确，此时需要采用多点测向交叉定位算法进行改进。DBSCAN 算法是一种基于密度聚类的无监督算法，可挑选出样本集合中密度较大的簇。在误差存在的情况下交叉点密度最大的区域即可能是目标真实位置，通过 DBSCAN 聚类算法可以找到密度最大的簇，再计算簇的中心点位置即可得到目标的位置估计。

算法的具体流程如下：

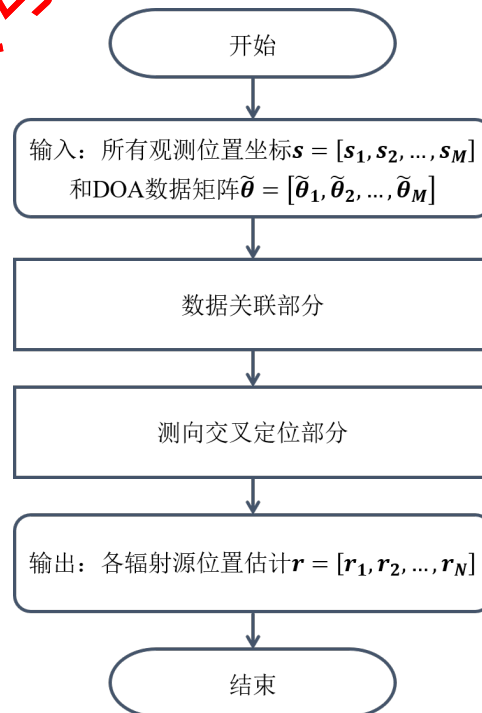


图 7-7 算法流程图



7.3.2 仿真结果

算法仿真实验如下：

- 仿真参数设置  
在区域内存在两个紧邻物体，其极坐标系下坐标分别为(7m, -1°)和(7m, 1°)；移动平台于 X 轴上运动，从(-4m, 0)运动至(4m, 0)，其间观测位置均匀分布。
- 仿真结果  
交点图与聚类结果如下：

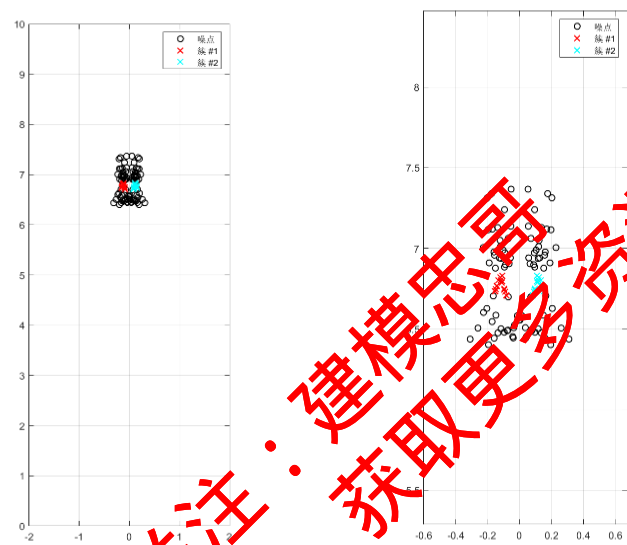


图 7-8 问题三交点与聚类结果

最终定位结果如下

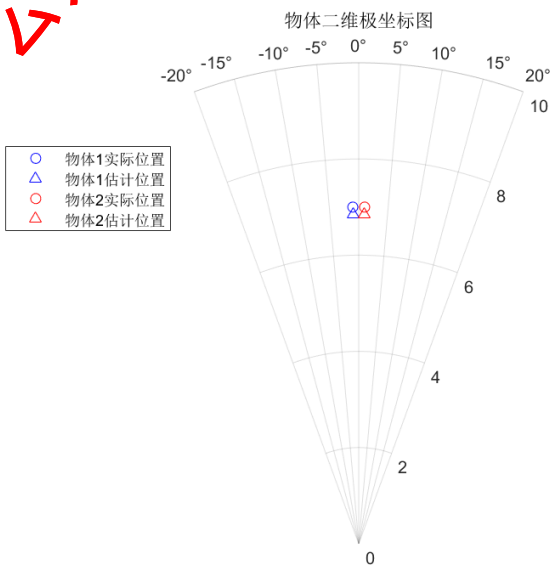


图 7-9 问题三物体坐标表示

物体的估计位置与计算位置十分相近，验证了算法的可行性。

## 8 问题四分析与求解

### 8.1 问题分析

在产品实际使用过程中，由于老化等原因，天线阵列对于自身的定位也会有误差。在实际情况中，若老化程度极度恶劣，超出模型稳定性范围，会使得定位失败，此时用户更有可能将产品丢弃或以旧换新，因此，算法所关注的老化程度更应该刚刚开始老化的时候。

我们假设天线阵列中几个阵元存在位置误差，为了减小单个阵元对整体估计的影响，我们考虑将整个阵列分成若干个子阵，对于每个子阵采用基本模型进行 DOA 估计，通过滑窗的方式遍历全部的阵元，最终将各个窗口计算的平均值作为输出结果。

考虑到误差阵元的稀疏性，仅有少数估计结果存在误差，而平均的计算方式可以平均误差带来的影响，从而提升模型的鲁棒性。

### 8.2 求解结果

距离估计结果：

	物体 1	物体 2
径向距离 (m)	5.9940	6.1126

基本模型与改进算法 DOA 估计结果：

DOA ( $^{\circ}$ )	物体 1	物体 2
基础模型	-0.2647	0.1822
滑窗平均 (窗口 60)	-0.2778	0.1600
滑窗平均 (窗口 50)	-0.2875	0.1528

观察结果可以得知采用基于滑窗平均改进模型与基础结果有差异，考虑到窗口较短时其计算结果更为准确，因此我们使用窗口为 50 的估计结果作为最终值。

物体坐标位置为：

	物体 1	物体 2
径向距离 (m)	5.9940	6.1126
DOA ( $^{\circ}$ )	-0.2875	0.1528

## 9 模型评价

### 9.1 优点

1. 设置了几组数值实验进行定量性能分析，并选择了本场景下较优的算法；
2. 根据移动场景特点设计了一种仅使用 DOA 估计与移动平台坐标数据实现对多个物体的

超分辨率定位的算法，回避了距离分辨率过大的问题。

## 9.2 缺点

1. 距离维的分辨率相对较低，应考虑结合角度进行进一步优化；
2. 问题四只考虑了少量阵元出现老化的简单情况，没有考虑大量阵元均出现位置误差的复杂情况。

## 9.3 展望

移动场景中天线的自身定位是一个关键问题，如无人驾驶中定位的准确性决定着车辆的行驶安全，在实际移动场景中会包含很多固定的目标点，可以设计一种算法利用这些固定目标点对天线进行辅助定位。

在环境杂波较多的情况下对多个目标进行稳定跟踪较为复杂，此时单个天线阵列探测性能具有一定的限制，希望可以设计一种多天线阵列融合技术，通过布置在不同位置的多个传感器信息，提高目标的检测概率，扩大目标跟踪的范围，提高目标的跟踪精度。

公众号关注：建模忠哥  
获取更多资源

## 参考文献

- [1] 张馨予. 阵列超分辨算法模拟研究[J]. 科技信息, 2009(36):437-439,442. DOI:10.3969/j.issn.1001-9960.2009.36.365.
- [2] 董姝敏, 梁国龙. 改进的盖尔圆源数目估计方法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 34(4):440-444. DOI:10.3969/j.issn.1006-7043.201206021.
- [3] WU H T, CHEN F K. A new Gerschgorin radii method for source number estimation[C]//Statistical Signal and Array Processing. Yung Kung City, 2000:104-107.
- [4] \_Karen\_, 【雷达信号处理】---信源数估计算法总结(含 MATLAB 仿真) [https://blog.csdn.net/Shen\\_KL/article/details/122220487](https://blog.csdn.net/Shen_KL/article/details/122220487)., 2022.10.7
- [5] 喻体娟. 相干信源与低复杂度 DOA 估计技术研究[D]. 西南交通大学, 2021. DOI:10.27414/d.cnki.gxnju.2021.001460.
- [6] Fang-Ming, Han, Xian-Da, et al. An ESPRIT-like algorithm for coherent DOA estimation[J]. Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE, 2005, 4:443-446.
- [7] 李德明. 基于扩展和优化两种互质阵列的 DOA 估计研究[D]. 天津: 天津工业大学, 2021.
- [8] Zhang W, Han Y, Jin M, et al. An Improved ESPRIT-like Algorithm for Coherent Signals DOA Estimation[J]. IEEE Communications Letters, 2019, PP(99):1-1.
- [9] Zhang W, Han Y, Jin M, et al. Multiple-Toeplitz Matrices Reconstruction Algorithm for DOA Estimation of Coherent Signals[J]. IEEE Access, 2019, 7:49504-49512.

公众号关注：建模忠哥  
获取更多资源

## 附录

## 1. 盖尔圆法

% 信源数估计

```
[row_length, col_length] = size(Rxx);
R_new = Rxx(1:row_length-1,1:col_length-1);
[V, D] = eig(R_new);
D = diag(D).';
[D,I0] = sort(D);
D = fliplr(D);
V = fliplr(V(:,I0));
U = [V zeros(row_length-1,1);zeros(1,col_length-1) 1];
S = U'*Rxx*U;
k = 1;
while 1

GDE=abs(S(k,col_length))-1/(2*num_Samples*(col_length-1))*sum(abs(S(1:row_length-1,col_length)));%调整因子取为 1/M
    if GDE<0 || k>col_length-2
        break;
    end
    k = k+1;
end
num_est = k-1;
```

## 2. 测向与 DOA 估计算法

% 仿真信号生成

```
Ts = 1.25e-7; %采样间隔
T = 3.2e-5; %chirp 周期
num_Samples = 256; %采样点数
t = (0: num_Samples-1)*Ts;
kr = 78.986e12; %调频率
f0 = 78.8e9; %载频

c = 3e8;
lambda = c / f0;
f = (0:num_Samples-1)*(1/Ts/num_Samples);
x = c.*f/2/kr;
c*(1/Ts)/(2*kr*256)

L = 0.0815; %天线阵长度
```

```
Na = 86;           %天线个数
xa = -L/2 + (0:Na-1)/(Na-1)*L;
ya = zeros(1,Na);

r = [7,7];
theta = [-0.2,0.2];
A = [1,1];
R1 = 2*sqrt( (r(1)*sind(theta(1)) - xa).^2 + (r(1)*cosd(theta(1)) - ya).^2);
R2 = 2*sqrt( (r(2)*sind(theta(2)) - xa).^2 + (r(2)*cosd(theta(2)) - ya).^2);

s = zeros(Na,num_Samples);
for ii = 1:Na
    s(ii,:) = A(1)*exp(1j*2*pi * R1(ii)/c * (kr*t + f0)) + A(2)* exp(1j*2*pi *
R2(ii)/c * (kr*t + f0));
end

% 加载数据
load data_q1.mat
load("data_q2.mat");
load data_q3.mat
load data_q4.mat

%% FFT 距离估计
tarloc = zeros(32,2);
tarang = zeros(32,2);

for i=1:32
    sig = squeeze(Z_time(i,43,:));
    sigt = squeeze(Z_time(i,:,:));

    sft = fft(sig);
    [~,locs] = findpeaks(abs(sft));
    locs = [locs',locs'];
    tarloc(i,:) = c/2*(f(locs(1:2))/kr);

[tarang(i,:)] = Multiple_Toeplitz_function_New(Z_antnoisy,num_Samples,2,0,86,0
);

end

% fft 画图
figure;
plot(f,abs(sft)/256);
```



```
xlabel("中频频率/HZ");ylabel("信号幅值");  
title("FFT");
```

### 3. MTOEP ALGORITHM

```
% MTOEP 算法  
function  
[estimated_source_doa]=Multiple_Toeplitz_function_New(Signal,SnapNum,K,~,N,~  
)  
%%  
Delay=6;  
CovMarix=Signal(:,1:end-Delay)*Signal(:,Delay+1:end)'/SnapNum;  
m=ceil((N+1)/2);  
CovariceNew=zeros(m,m);  
J=fliplr(eye(m,m));  
for ii=1:size(CovMarix,1)  
    row=CovMarix(m:end,ii);  
    column=CovMarix(m:-1:1,ii);  
    R=toeplitz(column,row);  
    CovariceNew=CovariceNew+R*R';  
end  
R=CovariceNew+J*conj(CovariceNew)*J;  
[U,S,V]=svd(R);  
Us=U(:,1:K);  
Us1=Us(1:end-1,:);  
Us2=Us(1+1:end,:);  
Us12=[Us1,Us2];  
[E,Sa,Va]=svd(Us12*Us12');  
E11=E(1:K,1:K);  
E12=E(1:K,K+1:2*K);  
E21=E(K+1:2*K,1:K);  
E22=E(K+1:2*K,K+1:2*K);  
M=-(E12*(inv(E22)));  
[Vm,Dm]=eig(M);  
Dm=diag(Dm).';  
estimated_source_doa=asin(angle(Dm)/pi)*180/pi;  
estimated_source_doa=sort(estimated_source_doa);  
end
```