FM3

Inverse de matrice

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \quad inversible$

- ✓ *On détermine la Comatrice de A*

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

$$Com\ (A) = \left((-1)^{j+1} \cdot \Delta_{ij}\right)$$

- ✓ *On écrit la relation entre A et Com (A)*

$${}^{t}Com\ (A) \cdot A = A \cdot {}^{t}Com\ (A) = det\ A \cdot I_n \quad \textit{(Théorème)}$$

- ✓ *On obtient finalement l'expression de l'inverse*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot {}^{t}Com\ (A)}$$

Rappel :

$$A\ inversible \Leftrightarrow det\ A \neq 0$$

- *Calcul de P^{-1}*

1. P matrice de passage de B à B' $\Leftrightarrow$ P^{-1} matrice de passage de B' à B

$$\left|\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 \\ e_2' &= e_3 \\ e_3' &= e_1 - e_2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{aligned} e_1 &= \frac{e'_1 + e'_2}{2} \\ e_2 &= \frac{e'_1 - e'_3}{2} \\ e_3 &= e_2' \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + z' \\ x' - z' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{aligned} x &= x' + z' \\ y &= x' - z' \\ z &= y' \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{aligned} x' &= \frac{x + y}{2} \\ y' &= z \\ z' &= \frac{x - y}{2} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$