FM1

Puissance de Matrice

1. $M = \lambda \cdot I_n + N$

- ✓ $N = \begin{pmatrix} 0 & & N_{i,j} \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_n$ $\quad N \text{ nilpotente}$

$$Donc\ N^n = 0$$

- ✓ $N \text{ et } \lambda \cdot I_n \text{ commutent}$

$$\boxed{M^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot \lambda^{p-k} \cdot N^k}$$

2. $DE\ de\ X^k\ par\ \chi_A\ (ou\ autre\ polynôme\ annulateur)$

- ✓ $On\ cherche\ \chi_A\ (on\ a\ donc\ les\ valeurs\ propres)$
- ✓ $On\ applique\ le\ théorème\ de\ la\ DE :$

$$\exists!\, Q_k \in \mathbb{K}[X], \exists!\, (\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{C}^2, X^k = Q_k \cdot \chi_A + \alpha_k \cdot X + \beta_k$$

- ✓ $On\ écrit\ l'équationpour\ chaque\ valeur\ propre :$

$$\lambda_i^k = Q_k(\lambda_i) \cdot \chi_A(\lambda_i) + \alpha_k \cdot \lambda_i + \beta_k$$

$$Or\ \chi_A(\lambda_i) = 0\ \ car\ \lambda_i\ valeur\ propre$$

$$Donc\ \lambda_i^k = \alpha_k \cdot \lambda_i + \beta_k$$

$$\begin{cases} \lambda_1^k = \alpha_k \cdot \lambda_1 + \beta_k \\ \lambda_2^k = \alpha_k \cdot \lambda_2 + \beta_k \end{cases}$$

- ✓ *Résolution du système par Cramer*

On obtient α_k *et* β_k

- ✓ *On remplace X par A :*

$$A^k = Q_k(A) \cdot \chi_A(A) + \alpha_k \cdot A + \beta_k \cdot I_n$$

$$Or\ \chi_A(A) = 0$$

$$Donc\ \boxed{A^k = \alpha_k \cdot A + \beta_k \cdot I_n}$$

3. *Diagonalisation de A*

- ✓ *On diagonalise A : A' la matrice diagonale*

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad avec\ P \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- ✓ *On élève A' à la puissance k*

$$A'^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

- ✓ *On écrit A^k en fonction de A'^k*

$$A^k = P \cdot A'^k \cdot P^{-1}$$

Or P orthogonale, donc $P^{-1} = {}^tP$

Donc $\boxed{A^k = P \cdot A'^k \cdot {}^tP}$