Indications succintes

1. $u_k = (k+1)\Delta_k - k\Delta_{k-1}$
2.
   - $x^s - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{s-1} x^k$
   - $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$
3. $\dfrac{\tan u - u}{u^4} = \dfrac{1}{3u} + o(1)$ ou alors $[u = xv]$ + TCD.
4. TCD ou bien découpage variable. Ensuite : $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$. $[u = x^n]$ + TCD.
5.
   - $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ si je veux.
   - Quantification avec des ε, réinjection.
6. Comparaison série/intégrale.
7. Table des $7^n \equiv 10$, et caetera.
8.
   - Positivité, croissance.
   - Etudier la série $u_{n+1} - u_n$ c'est étudier la suite (u_n).
   - Etude de $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$, pour un α convenable.
9.
   - Etude des sommes partielles modulo 3.
   - $H_n = \log n + \gamma + o(1)$.
10.
    - Deux matrices diagonalisables sont semblables si et seulement si elles ont les même valeurs propres.
    - $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (attention au corps de base dans cette égalité).
11.
    - Astuce 1 : $\sin(P(u)) = \dfrac{P'(u)\sin(P(u))}{P'(u)}$ + IPP.
    - Astuce 2 : $\sin^2(x) \leqslant |\sin x|$
12.
    - Les f_i sont des projecteurs, montrer que leurs images sont deux à deux disjointes.
    - Ou alors, astuce : $p = f_1 + ... + f_n$ est un projecteur. Or, tr p = rg p, et conclure.
13. Critère spécial de convergence des séries alternées, convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, interversion des limites.
14. u_n vaut souvent 0 sauf quand... (tracer le graphe).
15. $f(5x+2) = 5f(x) + 1$, dériver, étude de $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{5}$.
16.
    - Montrer que $N = \{A/p(A) = 0\}$ est un idéal bilatère.
    - Montrer qu'un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\{0\}$ ou bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier, via des multiplications adéquates par les E_{ij}
17. On suppose que N admet un facteur impair, une factorisation est alors possible.
18. Se ramener à la $\mathbb{Q}$-liberté de $(1, 2^{1/3}, 2^{2/3})$.
19. Pour les équivalents, comparaison série/intégrale et découpages variables sont possibles.
20. $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = c^3$. Postulons $b - a = ...$ et $b + a = ...$
21.
    - Montrer que $(x_n)_n$ est bornée.

- Montrer qu'elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.

22. - $\phi(A) = \text{tr}(\,^t AA)$
    - Poser $Q = P\,^tP$, montrer que Q est une homotéthie. $\text{tr}(Q\,^tAQ^{-1}A) = \text{tr}(\,^tAA)$: les formes quadratiques sont égales donc les formes polaires sont égales.
23. Montrer que F est convexe, et exploiter $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$ ainsi que $F(x) = x^2 + \varepsilon(x)x$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
24. Montrer plus simplement qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
25. Dérouler les tables modulo 13.
26. Déduire une condition sur $\text{tr}M$ en fonction de A et B, réinjecter.
27. Factoriser, recombiner.
28. - Montrer que les deux suites sont bornées.
    - Ou alors, astuce qui torche, examiner $u_n + iv_n$.
29. Introduire $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$.
30. Réinjecter, trouver une formule avec du $(-1)^k f(\frac{x}{2^k})$. ϕ est injective mais pas surjective.
31. La distance de $M(x_0, y_0)$ à $ax + by + c = 0$ vaut $\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
32. Exercice difficile...
33. - Comparaison série/intégrale.
    - Astuce qui torche : si $u_n \to 0$, $u_n \sim -\ln(1-u_n)$.
34. Une possibilité est de résoudre à l'aide des séries entières, ce qui donne une idée des solutions puis réciproquement montrer qu'elles conviennent.
35. - $\ker(\Delta) = ?$
    - $\ker(\Delta^s)$ par rapport $\ker(\Delta^{s-1})$?
36. Montrer que f est bornée.
37. On se ramène à une série plus sympathique modulo un Fubini puis comparaison série/intégrale (solution non unique).
38. Exprimer les aires des trois triangles sous forme de produits vectoriels, puis injecter la définition du barycentre sous forme d'égalité vectorielle.
39. Que dire de la multiplicité des racines réelles? Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis recombiner.
40. Utiliser la division euclidienne.
41. $x_n \sim \dfrac{1}{n}$. Sinon, maths planantes : théorème des fonctions implicites, x_n est redevable de Taylor-Young, et ce à tout ordre dans l'échelle des $\dfrac{1}{n^p}$.
42. Utiliser μ_f et Cayley-Hamilton.
43. Pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{x^{3n+1}}{4n+2} = x^{-1/2}\dfrac{(x^{3/4})^{4n+2}}{4n+2}$.
44. Montrer que $\max \text{sp}A = \displaystyle\sup_{X\in\mathbb{R}^n} \frac{^tXAX}{^tXX}$.
45. Identifier ce qui est du cours. (c) est vrai car redevable du théorème de Dini.
46. $|e^z - 1|^2 = (e^z-1)(e^{\bar{z}}-1)$. Ou alors astuce qui torche : $\dfrac{e^z-1}{z} = \displaystyle\int_0^1 e^{tz}dt$.
47. Sans perte de généralités, en considérant que z est le plus grand, montrer que $z = x + y$.

48. Développement limité, méthode de la louche.

49. Formule diabolique : $\prod_{k=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{u}{2^k}\right) = \frac{\sin(2u)}{2u}$.

50. Montrer entre autres que N_2 et N_3 sont équivalentes ($f + f'' = g$, résoudre avec la méthode de variation des constantes).

51. Pas de figure pas de points + connaître le TFI.

52. Si E est un ensemble fini, trouver une f n'admettant aucun espace stable. Si E est infini, étudier l'ensemble $(x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0), ...)$.

53. Il est possible d'avoir l'intuition d'un vecteur propre et de sa valeur propre associée, puis d'en déduire les autres avec la trace.

54. Utiliser que c'est une matrice orthogonale, en déduire des relations sur a, b et c, et (pourquoi pas) intuiter un vecreur propre de la matrice.

55. Faire le cas $p = 1$, puis pour les dimensions supérieures se ramener à $p = 1$ (exercice difficile).

56. Poser $v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

57. Montrer par récurrence que $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$, étude de $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$.

58. Penser au théorème des noyaux.

59. Si A et B commutent, cela vaut... Généraliser le résultat, soit avec des séries entières, soit en montrant que $e^{sA}(A - B)e^{(1-s)B}$ est la dérivée de quelque chose.

60. ...

61. Montrer que f et f' sont bornées.

62. Montrer que A n'est pas inversible, et introduire J_r.

63. Via des considérations sur μ_A modulo le théorème de Bézout, il faut montrer que μ_A est $\mathbb{Q}$-irréductible (ce qui est difficile d'ailleurs).

64. En fait on ne peut en déduire l'équivalent. Pour l'obtenir on peut multiplier la série par x^2 et appliquer un théorème limite de limite.

65. Remarquer que A, A^2, A^3 sont liées, former un polynôme annulateur de A.

66. Ou bien il existe un élément d'ordre p, et c'est ce que l'on veut, ou bien tous les éléments sont d'ordre 2 et trouver une contradiction (montrer que dans ce cas le groupe est abélien).