Recueil d'exercices posés par M. Esperet

1. $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\Delta_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose $\Delta_n \to 0$. Limite de $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+k+1}$?

2. a et r deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose $a^r - 1$ premier. Montrer que r est premier et que $a = 2$. Etudier la réciproque.

3. $0 < a < b$. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{\tan u - u}{u^4} du = \ ?$

4. $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. Etude de $(u_n)_n$, équivalent de $1 - u_n$.

5. $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$. On suppose que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(5x) - f(3x)}{x}$ existe. Montrer que f est dérivable en 0 à droite.

6. $u_n = \dfrac{n}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$. Equivalent de u_n.

7. Dernier chiffre en base 10 de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$.

8. $u_1 > 0$, $a > 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^a u_n}$. Etude de $(u_n)_n$ selon a. Dans les cas où (u_n) diverge, équivalent à u_n.

9. $u_n = \dfrac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{n}$. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

10. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A\ {}^tA$ et ${}^tAA$ sont semblables.

11. Intégrabilité de $x \mapsto \sin(x^4 + x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}_+$? Existence de $\displaystyle\int_0^{\uparrow\infty} \sin(x^4 + x^2 + 1) dx$?

12. E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, $f_1, ..., f_n$ n endomorphismes, tous non-nuls. On suppose $f_i \circ f_j = \delta_{ij}\ f_i$. Montrer que $\forall i$, rg $(f_i) = 1$.

13. $x \geqslant 0$. $u(x) = x \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{xk+1}$. Existence, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(x)$.

14. $u_n = \dfrac{1}{n} \left(\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \right)$. Convergence et somme des u_n.

15. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = 5x + 2$. Trouver f. Même question avec f continue et dérivable en $-\frac{1}{2}$.

16. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. p une semi-norme non-nulle, c'est à dire que p respecte tous les axiomes d'une norme sauf $p(A) = 0 \Rightarrow A = 0$. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), p(AB) \leqslant p(A)p(B)$. Montrer que p est une norme.

17. On suppose $2^N + 1$ premier. Montrer que N est une puissance de 2.

18. $\sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{3} \in \mathbb{Q}$?

19. $x \geqslant 0$. $u(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$. Domaine de défintion, limites en 0 et $+\infty$, équivalents en 0 et $+\infty$.

20. Montrer que tout cube supérieur ou égal à 3 est différence de deux carrés.

21. $(x_n)_n$ suite réelle positive, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Montrer que (x_n) converge.

22. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\phi(A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$. Trouver les P inversibles tels que $\forall A$, $\phi(P^{-1}AP) = \phi(A)$.

23. f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante. $F(x) = \int_0^x f$. On suppose $F(x) = x^2 + o(x)$ en $+\infty$. $f(x) \sim$? Ce résultat est-il encore vrai avec f non forcément croissante? En reprenant f croissante, montrer $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$.

24. $a < b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (f, g) deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $\sup f = \sup g$. Montrer que l'équation $f^5(x) - 5f(x) = g^5(x) - 5g(x)$ admet une solution.

25. Montrer que $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

26. $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre $M+\mathrm{tr}(M)A = B$.

27. ω racine primitive n-ème de l'unité, c'est à dire $< \omega >= \mathbb{U}_n$. $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{2k} - 2\cos(\theta)\omega^k + 1\right)$.

28. $(u_1, v_1) \in \mathbb{R}^2$. $u_{n+1} = u_n - \dfrac{v_n}{n(n+1)}$, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{u_n}{n(n+1)}$. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent.

29. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \dfrac{u_{n-k}}{k!} = 1$. Exprimer u_n, trouver sa limite.

30. Dans l'espace des fonctions réelles continues en 0, on pose $\phi(f)(x) = g(x) = f(x)+f(2x)$. ϕ est-elle injective? surjective?

31. Un triangle ABC, un point M à l'intérieur. Trouver le maximum de d(M, (AB)).d(M, (BC)).d(M, (AC)).

32. Trouver les formes linéaires positives de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est à dire : si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, alors $f(u) \geqslant 0$.

33. $(a_n)_n$ suite réelle décroissante vers 0. $u_n = \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$. Etudier $\sum u_n$.

34. $4xy'' + 2y' + y = 0$. On sait qu'il existe deux solutions (α, β) telles que $\alpha\beta = 1$. Résoudre l'équation.

35. $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. $\Delta : f \mapsto f(x+1) - f(x)$. Trouver $\ker(\Delta^s)$.

36. f $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ à valeurs réelles, $f(1) = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$. Encadrer l. (Et au passage justifier un peu l'énoncé...).

37. $U(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}t^k}{1-t^k}$. Domaine de définition de U, limite en 1^-, équivalent en 1^-.

38. ABC un triangle, M le barycentre de A, B et C, pondérés respectivement par α, β et γ. Montrer que, à coéfficient de proportionnalité près, $\gamma = \mathcal{A}(MAB), \beta = \mathcal{A}(MAC)$ et $\alpha = \mathcal{A}(MBC)$.

39. $P \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

40. $A \in \mathbb{K}[X], A \neq 0$. montrer que $\exists B \neq 0$ tel que AB soit de la forme $\sum c_k X^{k^2}$.

41. $x^5 + nx - 1 = 0$. Montrer qu'il n'existe qu'une seule racine réelle et en donner un développement asymptotique.

42. E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétes sont équivalentes :
    (a) Seuls $\{0\}$ et E sont stables par f.
    (b) χ_f est irréductible.

43. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{4n+2}$.

44. $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \max \mathrm{sp}(A + tB)$. Montrer que ϕ est convexe.

45. $(u_n)_n$ suite de fonctions continues positives sur $[a, b]$. Examiner les quatre implications suivantes :
    (a) La suite (u_n) converge vers f continue $\Rightarrow$ CVU

(b) La suite (u_n) converge uniformément vers $f \Rightarrow f$ continue.

(c) $\sum u_n$ converge simplement vers U continue $\Rightarrow \sum u_n$ CVU.

(d) $\sum u_n$ CVU vers $U \Rightarrow U$ est continue.

46. $z \in \mathbb{C},\ x = \mathcal{R}e(z)$. Comparer $\left|\dfrac{e^z-1}{z}\right|$ et $\left|\dfrac{e^x-1}{x}\right|$.

47. $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}$. $x|y+z$, $y|x+z$ et $z|x+y$. Résoudre.

48. $\alpha > 0$. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$. Nature de $\sum u_n$.

49. $u_0 \in \mathbb{C}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$. Convergence et limite de (u_n).

50. E l'espace vectoriel des applications $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telles ques $f(0) = f(1) = 0$. On considère $N_1 = ||f||_\infty$, $N_2 = ||f + f''||_\infty$ et $N_3 = ||f||_\infty + ||f''||_\infty$. Montrer que ce sont des normes et les comparer entre elles.

51. Continuité de $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto$ la plus grande racine de $x^3 + ax + b$?

52. E un ensemble. Montrer $|E| = +\infty \Leftrightarrow (\forall f \in E^E,\ f$ admet un stable propre).

53. Polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

54. G est l'ensemble des matrices de rotation de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que G est un groupe, le caractériser par une relation simple entre a, b et c.

55. $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Soit $f \in E$ telle que $\inf f$ existe. Montrer qu'il existe une suite points $(M_n)_n$ telle que $\text{grad}(f)(M_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

56. $a, b \in \mathbb{R}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$. Convergence de $\sum u_n$ et somme.

57. $(f_n)_n$ suite d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $f_0 = 1$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{|f_n(u)|}du$. CVS, CVU de $(f_n)_n$.

58. $f \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie n. On suppose que $\mu_f = a_pX^p + ... + X^d$, avec $\text{d}(\mu_f) = d$, et $a_p \neq 0$. Montrer que $\ker(f^p) \oplus \text{ im}(f^p) = E$.

59. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{sA}(A-B)e^{(1-s)B}ds$.

60. $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté muni de la base canonique. Trouver la matricde rotation par rapport à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle θ.

61. Trouver les applications $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) + (1 + f'(x))^2 \leqslant 1$.

62. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver A telle que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+B) = \det(B)$.

63. $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{Q}[A]$ est un corps.

64. $x > 0$ Calculer $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{\sinh^2(xt)}$. Peut-on en déduire un équivalent en 0 de $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sinh^2(nx)}$?

65. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, β, γ différents et non-nuls. $A = \beta B + \gamma C$, $A^2 = \beta^2 B + \gamma^2 C$ et $A^3 = \beta^3 B + \gamma^3 C$. montrer que $\forall p > 1$, $A^p = \beta^p B + \gamma^p C$. En déduire $\exp(A)$.

66. G un groupe, $|G| = 2p$ avec p premier. Montrer qu'il existe un sous-groupe de G de cardinal p.