Etude d'un schéma de type éléments fini pour le problème de stefan en une dimension

Paul Mery, Cyrile Duquenoy

May 2024

Introduction

Les problèmes de stefan sont une classe de problème proposé par le mathématicien slovène Josef Stefan aux alentour des années 1890. Ils ont pour objectif de modéliser la formation de la glace en mer, ou du gel des sols

Liste des notations

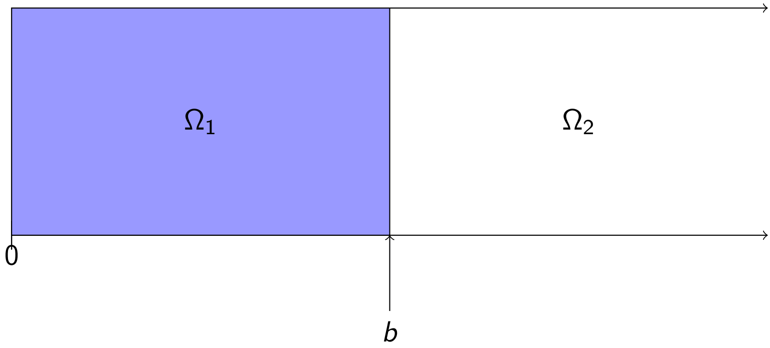
- $u(x,t)$ est la température a l'instant t en x
- $s(t)$ est le bord du domaine a l'instant t
- b est le bord du domaine a l'instant initial
- on utiliseras l'indice i pour l'espace et n pour le temps
- $M-1$ est le nombre de maille en espace et $N-1$ est le nombre de maille en temps
- J est le premier temps pour lequel le bord se déplace
- T est le temps de fin

Équations

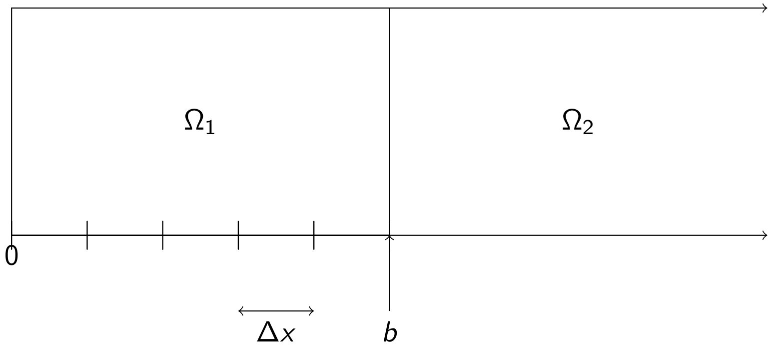
$$\begin{cases} \partial_{xx} u - \partial_t u = 0 & \text{pour} \quad 0 < x < s(t) \quad 0 < t \leq T \\ u(0,t) = f(t) & \text{pour} \quad 0 < t \leq T \\ u(s(t),t) = 0 & \text{pour} \quad 0 < t \leq T \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{pour} \quad 0 < x \leq b \\ s(0) = b & \end{cases}$$

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\partial_x u(s(t),t) \text{ pour } 0 < t \leq T.$$

Domaine au temps 0



Discrétisation en espace du domaine



Discrétisation en espace du domaine

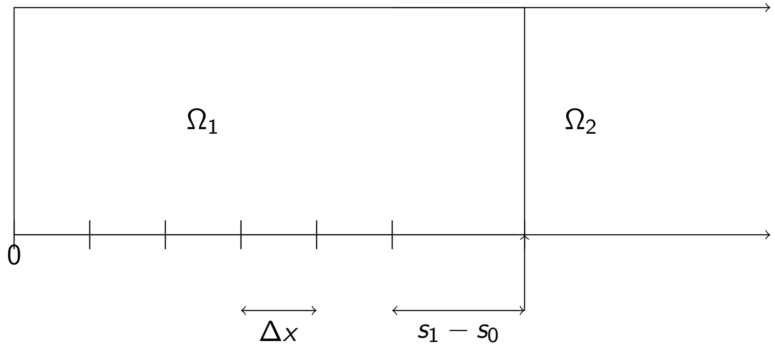


Schéma de type différence finies

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \text{ si } i=0,...,M \text{ et } n=0,1,2,\ldots,J-1 \\ \\ \frac{u_{M+i+1}^{n+1}-u_{M+i}^{n}}{\Delta t} = \frac{\frac{U_{M+i+1}^{n+1}-U_{M+i}^{n+1}}{S_{n+1}-S_n}-\frac{U_{M+i}^{n+1}-U_{M+i-1}^{n+1}}{S_n-S_{n-1}}}{\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_{n-1})} \\ \text{si } i=M+1,\ldots,M+L(j+1) \text{ et } n=J,J+1,\ldots,N-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{S_1 - S_0}{\Delta t} = \frac{u^0_{M-1}}{\Delta x} = \frac{\phi(\beta - \Delta x)}{\Delta x} \\ \\ \frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta t} = \frac{U^n_{M+L(n)-1}}{S_n - [S_{n-1}]}, n = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Théorème de convergence

Théorème

Soit $(\Delta t^m, \Delta x^m)$ une suite ordonnée de paire ou $\{\Delta t^m\}_{m=1}^{\infty}$ et $\{\Delta x^m\}_{m=1}^{\infty}$ sont deux suite non croissante de nombre réel tendant vers 0 lorsque $n \mapsto \infty$. Soit $((S_j)^m, (U_i^n)^m)$ la solution obtenue a partir du schéma, soit (s, u) la solution exacte de du problème de Stefan. Alors $((S_j)^m, (U_i^n)^m)$ converge vers (s, u) lorsque $n \mapsto \infty$

Algorithme avec remaillage du domaine

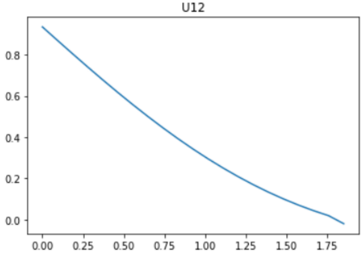


Figure – Température après 12 itération

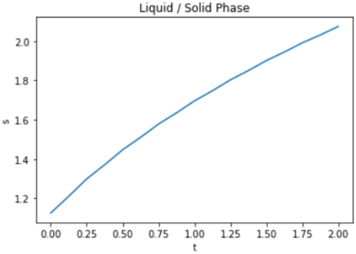


Figure – Diagramme de phase

Organigramme de l'algorithme avec changement de la matrice

1. On discrétise les domaines de temps et d'espace et on définit toute les constantes.
2. On définit les diverses fonctions qui nous seront utiles (avant le main ou dans des modules séparés qui seront importé dans le fichier main).
3. Main :
    - On boucle sur le temps.
    - Pour $t = 0$:
      On calcule le premier bord et on résoud le système.
    - Pour $t > 0$: On calcule le nouveau bord, on augmente nos matrices et vecteurs en dimensions en leur associant leurs coefficients puis on résoud le système.
      On pourra afficher le graphe pour chaque temps.
    - On sort de la boucle et on affiche le graphe de $s(t)$ en fonction de t.

Résultat obtenu

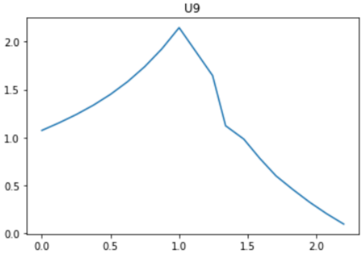


Figure – Température après 9 itération

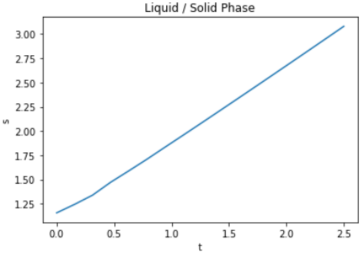


Figure – Diagramme de phase

Second schéma

$$\begin{cases} u^n_{M+i} = (1 + 2\Delta t + \frac{\alpha}{\beta})u^{n+1}_{M+i} - (2\Delta t)u^{n+1}_{M+i+1} - (\frac{\alpha}{\beta})u^{n+1}_{M+i-1} \\ \alpha = S_{n+1} - S_n \\ \beta = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

Résultat obtenu

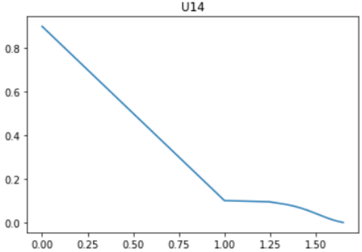


Figure – Température après 14 itération

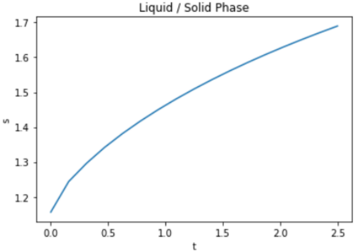


Figure – Diagramme de phase