EDO TP3

DUQUENOY Cyrile *

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
2021-2022

L3 de Mathématiques
Premier semestre

tp3, équations différentielles du 2eme ordre, visualisation de solutions exactes

1 RLC

On considère le circuit RLC constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C en série et d'une résistance de résistivité R en série.
Le circuit est soumis à une tension E (en volts). On cherche à calculer la tension V (en volts) aux bornes du condensateur. On note I l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit.
On rappelle que :

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V = E(t)$$

1. On suppose que $E = 0$, $R = 0$ et $L = C = 1$ et on considère deux choix de conditions initiales, $V(0) = 1$, $V'(0) = 0$ et $V(0) = 0$, $V'(0) = 1$.

1.1 Résolution de l'équation.

On peut réécrire l'équation comme ceci :

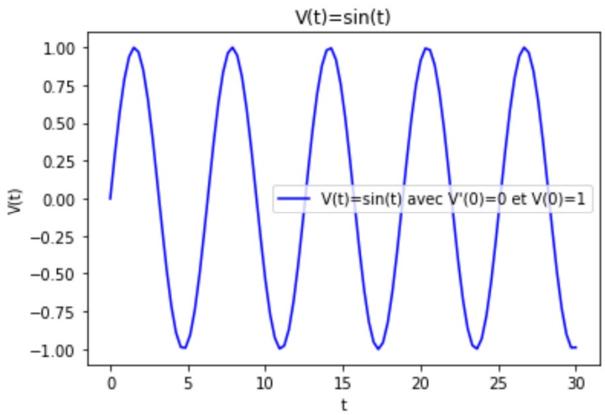
$$V''(t) + V(t) = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.
Deux solutions à l'équation caractéristique : $i, -i$.

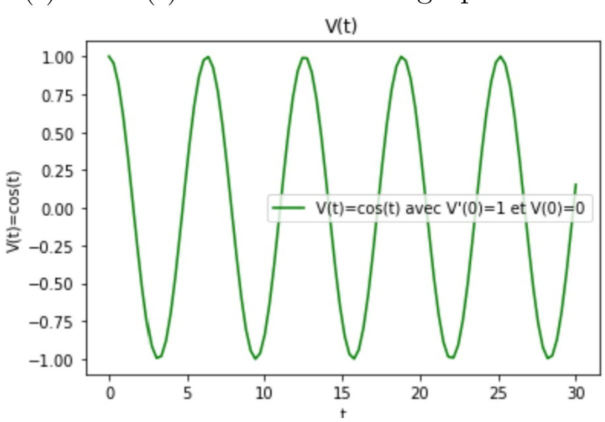
*Université Aix Marseille

Deux solutions à l'équation : $V_1(t) = cos(t)$, $V_2(t) = sin(t)$.
Ce qui donne : $V(t) = \gamma cos(t) + \delta sin(t)$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

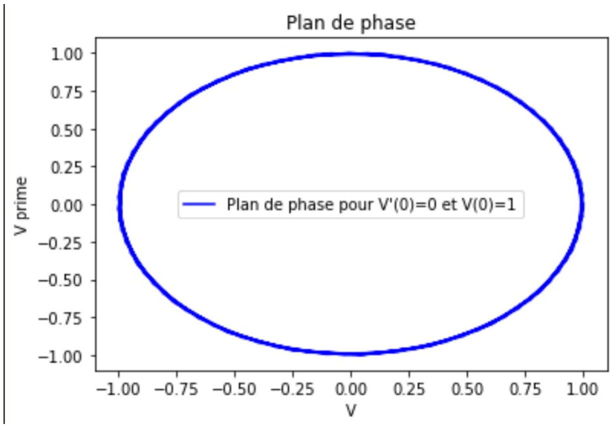
Le choix des conditions initiales $V(0) = 1$, $V'(0) = 0$ donne alors $V(t) = cos(t)$ dont le graphe est donné ci-dessous.

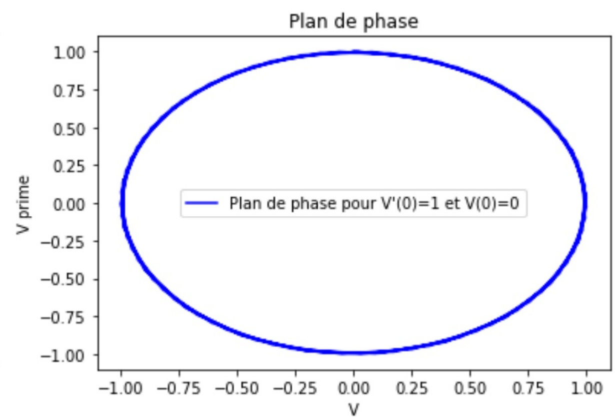


Considérons un autre choix pour les conditions initiales, $V(0) = 0$, $V'(0) = 1$. Alors $V(t) = sin(t)$ et on donne son graphe ci-dessous.



On remarque que pour les deux choix de conditions initiales, le plan de phase est le même en prenant l'ensemble des points $(V(t), V'(t))$ pour $t \in [0, 30]$.





1.2 Supposons maintenant que $L = C = R = 1$ et $E(t) = \cos(2t)$

On peut réécrire l'équation comme ceci :

$$V''(t) + V'(t) + V(t) = cos(2t)$$

1.2.1 Equation homogène.

Equation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$.
Deux solutions à l'équation caractéristique : $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
On pose $\lambda = \frac{-1}{2}$ *et* $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Deux solution à l'équation : $V_1(t) = e^{\lambda t}(cos(t\mu)), V_2(t) = e^{\lambda t}(sin(t\mu)),$.
Ce qui donne : $V_h(t) = e^{-\frac{t}{2}}(\alpha cos(t\frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta sin(t\frac{\sqrt{3}}{2}))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Equation non homogène.

Soit $V_p(t) = \alpha cos(2t) + \beta sin(2t)$.
$V_p'(t) = -2\alpha sin(2t) + 2\beta cos(2t)$.
$V_p''(t) = -4\alpha cos(2t) - 4\beta sin(2t)$.
En réinjectant on a :
$V_p''(t) + V_p'(t) + V_p(t) = (2\beta - 3\alpha)cos(2t) - (2\alpha + 3\beta)sin(2t) = cos(2t)$.
On trouve alors :
$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{5} \\ \beta = -\frac{2}{15} \end{cases}$$

$V_p(t)$ s'écrit donc comme ceci : $V_p(t) = -\frac{1}{5}cos(2t) - \frac{2}{15}sin(2t)$.

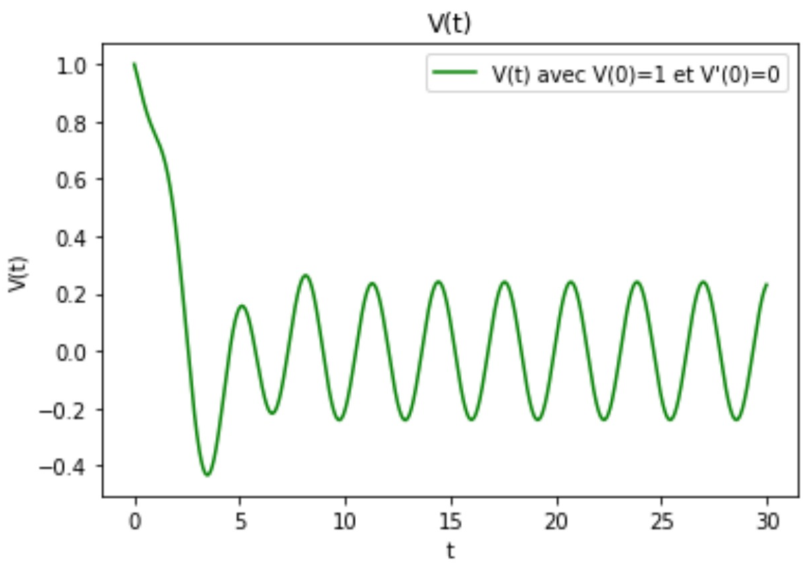
Et donc,

$$V(t) = V_h(t) + V_p(t) = e^{-\frac{t}{2}}(\alpha cos(t\frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta sin(t\frac{\sqrt{3}}{2})) - \frac{1}{5}cos(2t) - \frac{2}{15}sin(2t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

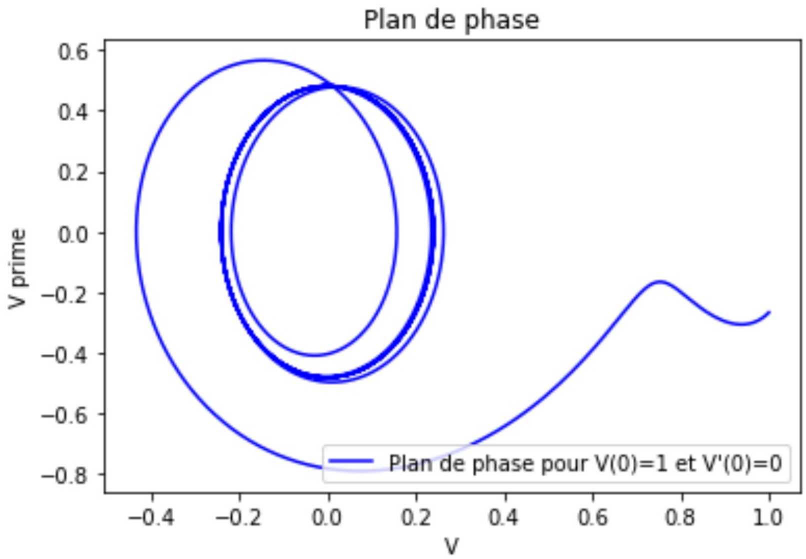
Le choix des conditions initiales $V(0) = 1$, $V'(0) = 0$ donne alors :

$$V(t) = e^{-\frac{t}{2}}(\frac{6}{5}cos(t\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{6}{5\sqrt{3}}sin(t\frac{\sqrt{3}}{2})) - \frac{1}{5}cos(2t) - \frac{2}{15}sin(2t)$$

On donne alors le graphe de V :



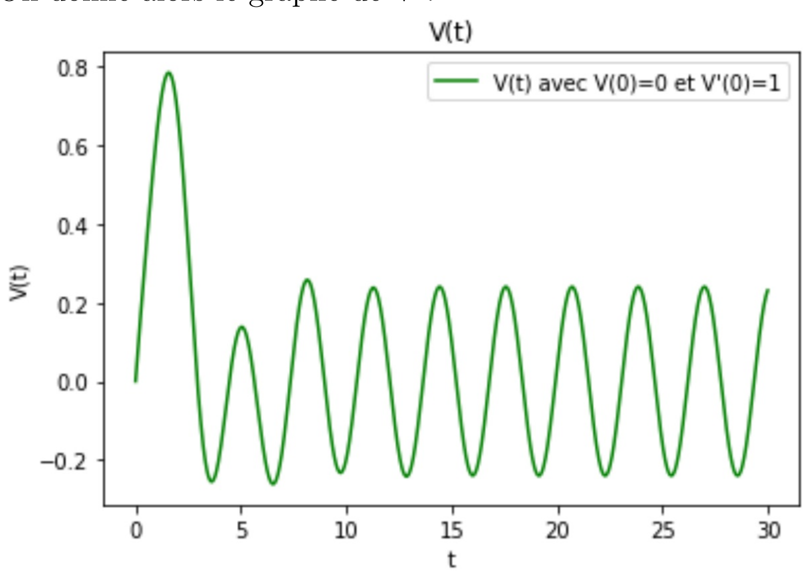
Dont le plan de phase donne :



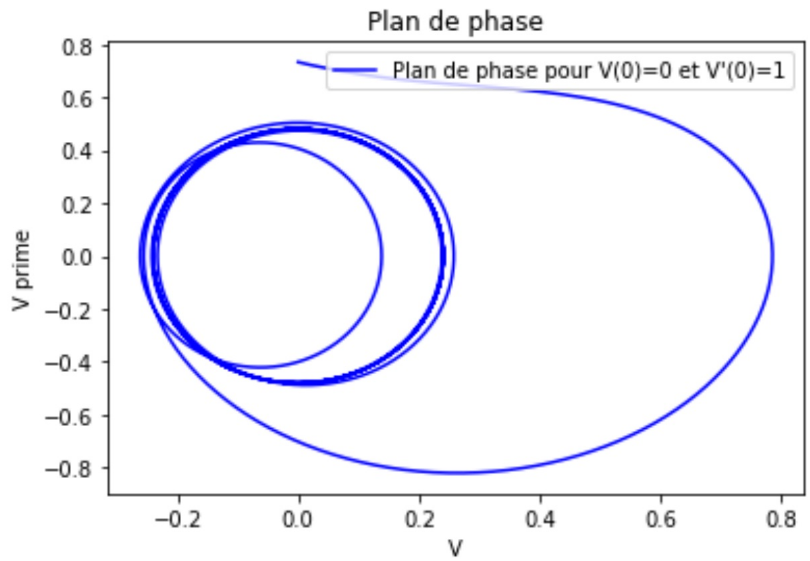
Le choix des conditions initiales $V(0) = 0$, $V'(0) = 1$ donne alors :

$$V(t) = e^{-\frac{t}{2}}(\frac{1}{5}cos(t\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{11}{5\sqrt{3}}sin(t\frac{\sqrt{3}}{2})) - \frac{1}{5}cos(2t) - \frac{2}{15}sin(2t)$$

On donne alors le graphe de V :



Dont le plan de phase donne :



2 Ressorts

On accroche une masse m à un ressort dans un milieu où elle est soumise à un frottement fluide. On notera x la position de la masse par rapport à son équilibre (ressort non tendu ni comprimé). D'après le principe de Newton, l'équation vérifiée par la fonction $t \mapsto x(t)$ est:

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - k\,x\ ,$$

où $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ désignent les dérivées première et seconde de x. Les nombres λ, k sont positifs et on suppose que $m = 1$.

2.1 On suppose que $\lambda = 0$ et $k = 1$ et on considère deux choix de conditions initiales, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

On peut réécrire l'équation donnée, avec les suppositions faites, comme ceci :

$$x^{''}(t) = -x(t)$$

L'équation est la même que dans la partie 1.1 du premier exercice. On trouve les mêmes résultats, les mêmes graphes et les mêmes plans de phase.

2.2 Supposons maintenant $\lambda = 0.1$, $k = 1$ et l'intervalle de temps $[0, 100]$

On peut réécrire l'équation donnée come ceci :

$$x^{''}(t) + \frac{1}{10}x^{'}(t) + x(t) = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 + \frac{1}{10}r + 1$.
Deux solutions à l'équation caractéristique : $r_1 = -\frac{1}{20} - \frac{1}{2}i\sqrt{3.99}$, $r_2 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{2}i\sqrt{3.99}$.

Posons $\lambda = -\frac{1}{20}$ et $\mu = \frac{\sqrt{3.99}}{2}$.

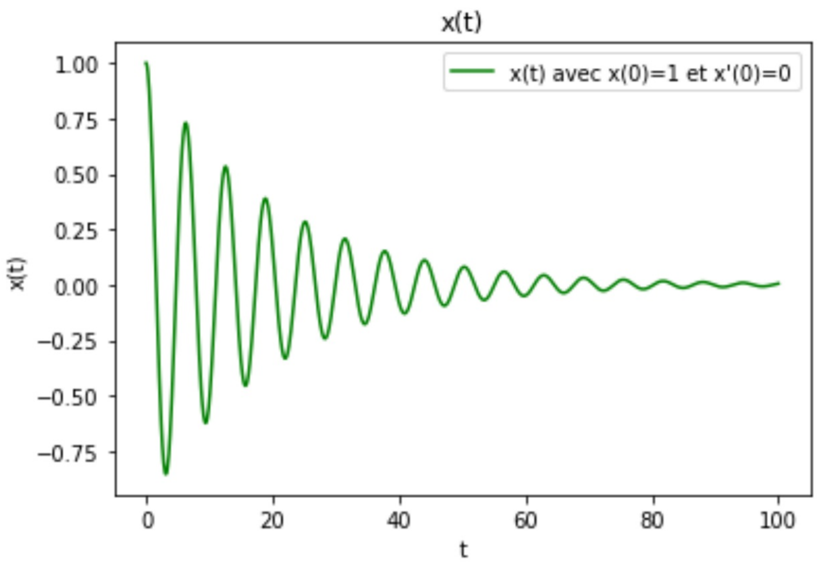
Alors $x(t) = e^{\lambda t}(\gamma cos(\mu t) + \delta sin(\mu t))$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Et donc : $x'(t) = e^{\lambda t}((\lambda\gamma + \delta\mu)cos(\mu t) + (\lambda\delta - \gamma\mu)sin(\mu t))$.

2.2.1 Soit $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$

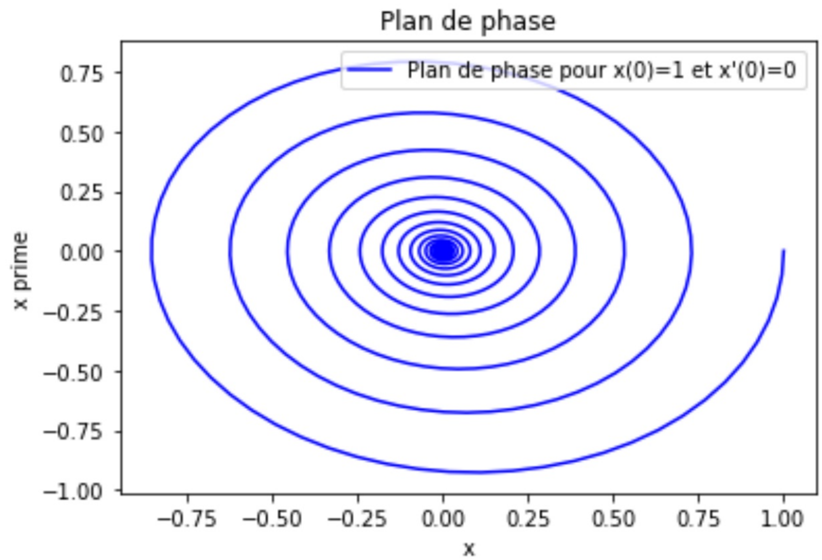
On trouve alors

$$\begin{cases} \gamma &= 1 \\ \delta &= -\frac{\lambda}{\mu} \end{cases}$$

Ci-dessous le graphe de x avec les conditions initiales choisies précédemment :



Dont le plan de phase est décrit comme tel :

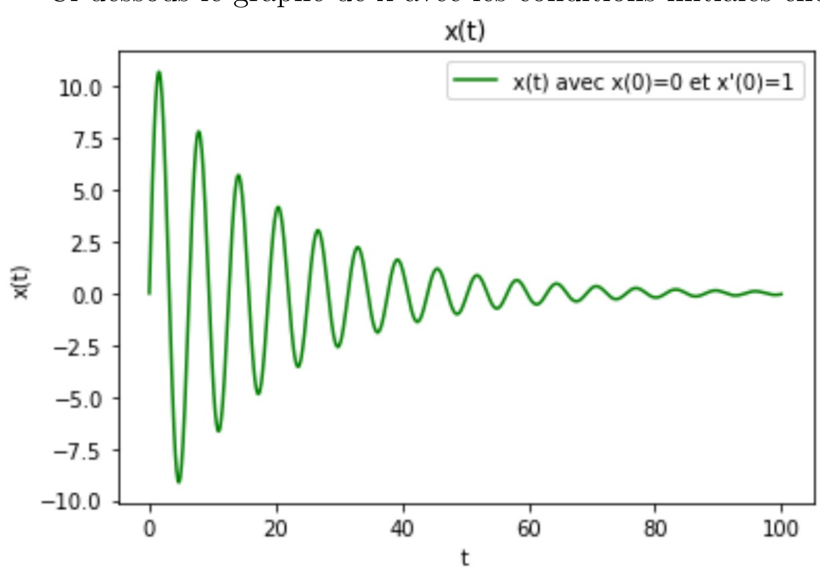


2.2.2 Soit $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$

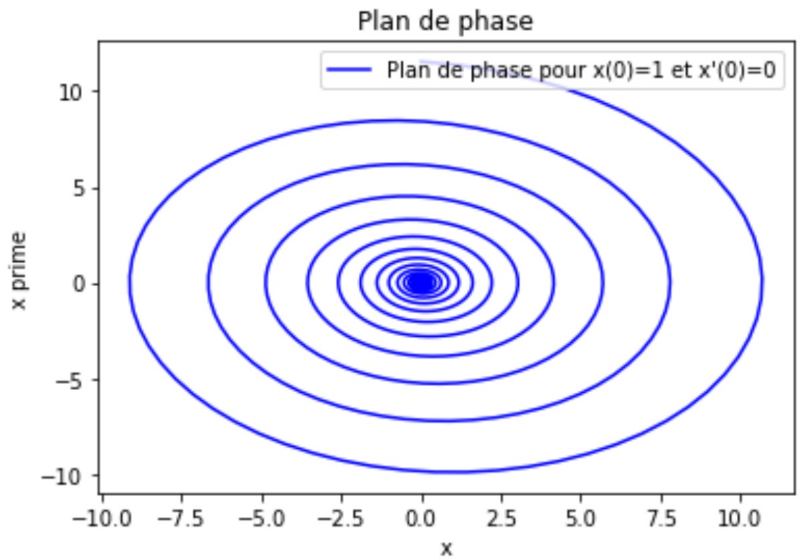
On trouve alors

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

Ci-dessous le graphe de x avec les conditions initiales choisies précédemment :



Dont le plan de phase est décrit comme tel :



2.3 Supposons maintenant $\lambda = 10$, $k = 1$ et l'intervalle de temps $[0, 50]$

On peut réécrire l'équation donnée come ceci :

$$x^{''}(t) + 10x^{'}(t) + x(t) = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 + 10r + 1$.
Deux solutions à l'équation caractéristique : $r_1 = -5 - 2\sqrt{6}$, $r_2 = -5 + 2\sqrt{6}$.

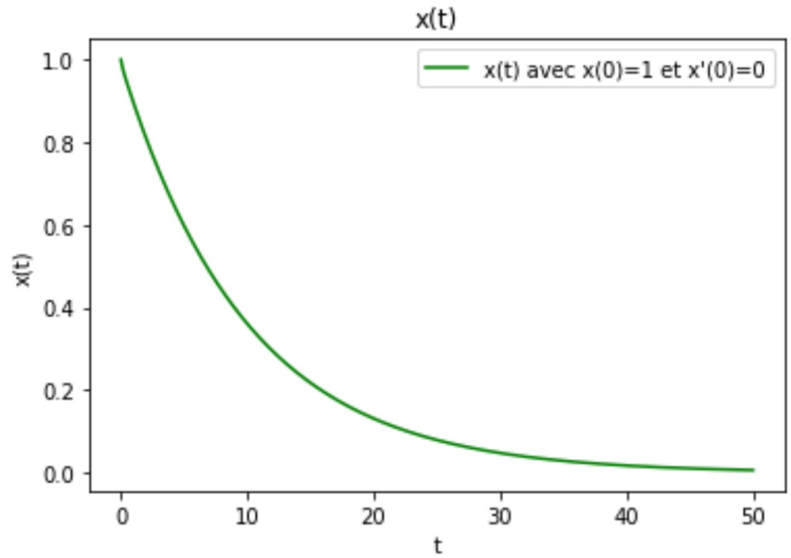
Alors $x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Et donc : $x'(t) = r_1 \alpha e^{r_1 t} + r_2 \beta e^{r_2 t}$.

2.3.1 Soit $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$

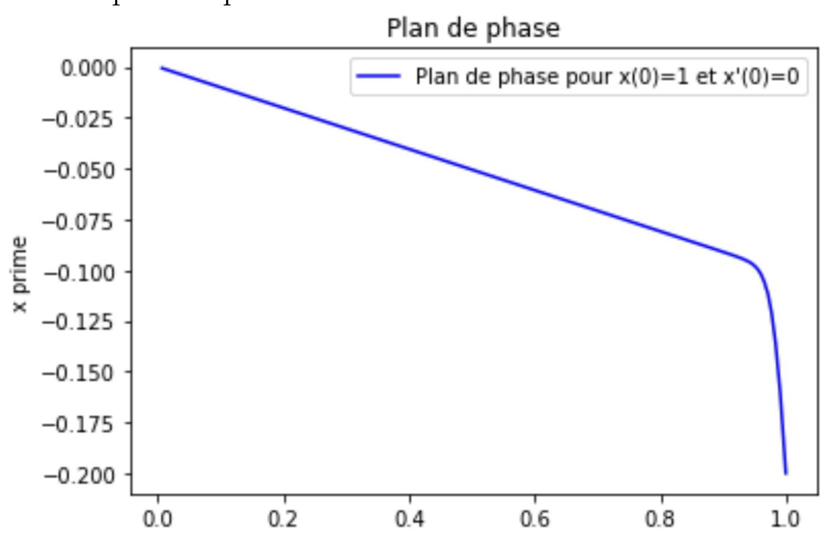
On trouve alors

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{r_2}{r_1}\left(\frac{1}{\frac{r_2}{r_1}+1}\right) \\ \beta &= \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}+1} \end{cases}$$

Ci-dessous le graphe de x avec les conditions initiales choisies précédemment :



Dont le plan de phase est décrit comme tel :

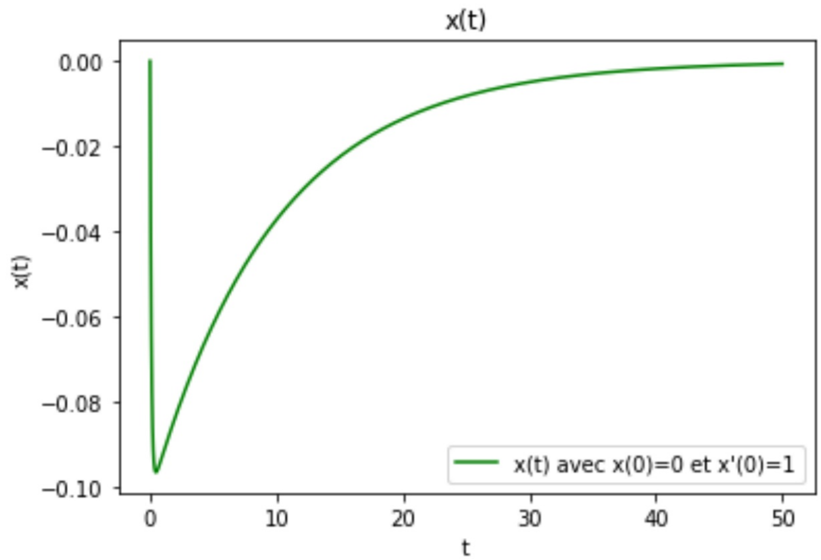


2.3.2 Soit $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$

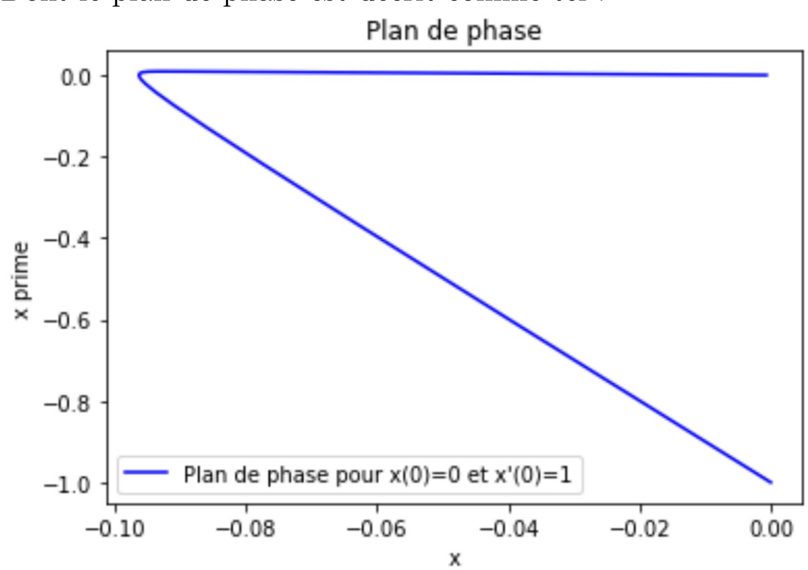
On trouve alors

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{r_2 - r_1} \\ \beta &= \frac{1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

Ci-dessous le graphe de x avec les conditions initiales choisies précédemment:



Dont le plan de phase est décrit comme tel :



2.4 Commentaires des phénomènes physique que sont censés représenter λ et k

Rappelons l'équation de la masse attachée au ressort :

$$x''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = 0.$$

Pour visualiser le phénomène physique, les commentaires ci-dessous se sont appuyés sur le site web suivant :

$https : //www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort.php?typani$
$Javascript$

On remarque assez facilement que λ représente "l'amortissement" du ressort. Dès que $\lambda > 1$, la masse tombe jusqu'à son point d'équilibre. Si $\lambda < 1$, la masse "rebondit", elle va tourner autour de son point qu'équilibre (ce qu'on voit bien sur le plan de phase avec $\lambda = 0.1$). Le cas $\lambda = 0$ donne le mouvement perpétuel.
k représente "l'amplitude" qu'à le ressort, ou plutôt l'étirement que prends le ressort.