EDO TP1

DUQUENOY Cyrile *

TP 1, équations différentielles du 1er ordre, schémas explicites

1 Schéma d'Euler explicite

1.1 Modèle de Gompertz

On reprend ici le modèle de Gompertz (TD2, Exercice 1). Tracer sur un même graphe les solutions exactes et approchées par le schéma d'Euler explicite, avec différents pas de temps entre 0.1 et 1, de l'EDO

$$y'(t) = y(t) \ln\left(\frac{K}{y(t)}\right)$$

pour $K = 10$, $0 \leq t \leq 10$ et pour les conditions initiales suivantes

1. $y(0) = 0.1$,
2. $y(0) = 2$.

On peut vérifier que les solutions sont globales et sont de la forme

$$y(t) = K\left(\frac{y(0)}{K}\right)^{e^{-t}}.$$

Dans les deux cas demandés, que vaut $\lim_{t\to+\infty} y(t)$?

1.1.1 existence locale

Soit $f(s) = sln(\frac{K}{s})$.
f est C^1 sur tout les réels strictement positifs.
Comme on prends t entre 0 et 10, il existe alors par le théorème d'existence locale, une solution locale qui de plus est unique.

*Université Aix Marseille

1.1.2 Verifions que y(t) est de la forme $y(t) = K\left(\frac{y(0)}{K}\right)^{e^{-t}}$

Supposons $y(t) = K\left(\frac{y(0)}{K}\right)^{e^{-t}}$
On peut réécrire $y(t)$ comme ceci : $Ke^{e^{-t}ln(\frac{y(0)}{K})}$
Dérivons maintenant y :
$y'(t) = -y(t)e^{-t}ln(\frac{y(0)}{K})$
On veut retrouver $y'(t) = y(t)\ln\left(\frac{K}{y(t)}\right)$
En remarquant que $\frac{K}{y(t)} = \frac{1}{e^{e^{-t}ln(\frac{y(0)}{K})}}$ et en passant au log,
On retrouve bien $y'(t) = y(t)\ln\left(\frac{K}{y(t)}\right)$

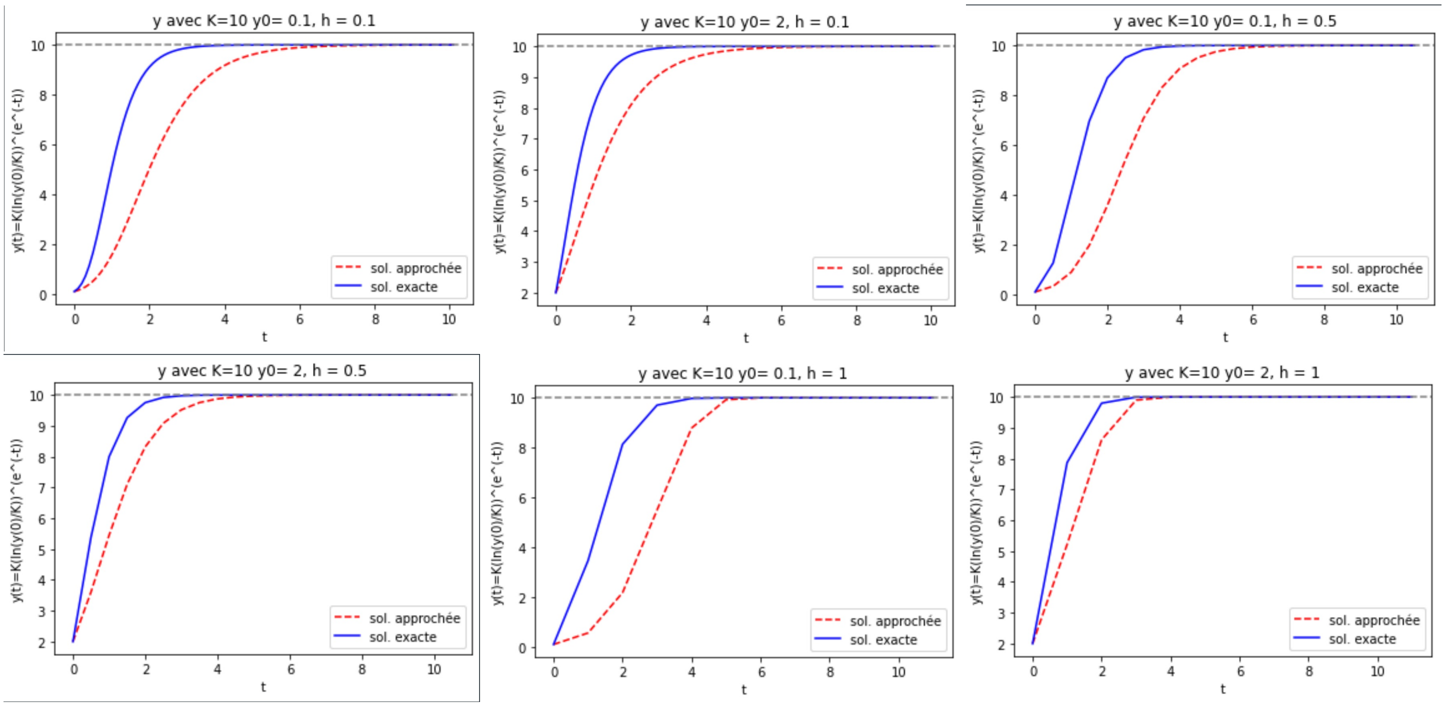
1.1.3 limite de y

e^{-t} tend en l'infini vers 0 et donc $(\frac{y(0)}{K})$ tend en l'infini vers 1 tant que $y(0)$ différent de 0.
Ici nos valeurs pour $y(0)$ sont de 0.1 et 2. Par conséquent : $y(t)$ tend vers K en l'infini.

1.1.4 Existence globale

Il suffit de remarque que les solutions sont C^1 sur tout les réels.
Ce qui nous donne existence globale.

1.1.5 Graphe des solutions exacte et approchées par le schéma d'Euler explicite



Ligne pointillé grise : Limite de y.
Code disponible en .py dans le fichier zip.

1.2 EDO étudiée en cours

Tracer sur un même graphe les solutions exactes et approchées par le schéma d'Euler explicite, avec différents pas de temps entre 0.1 et 0.001, de l'EDO $y'(t) = (y(t))^2$ pour $0 \leq t \leq T$ et pour les conditions initiales suivantes

1. $T = 2$, $y(0) = 0.2$,
2. $T = 0.49$, $y(0) = 2$.

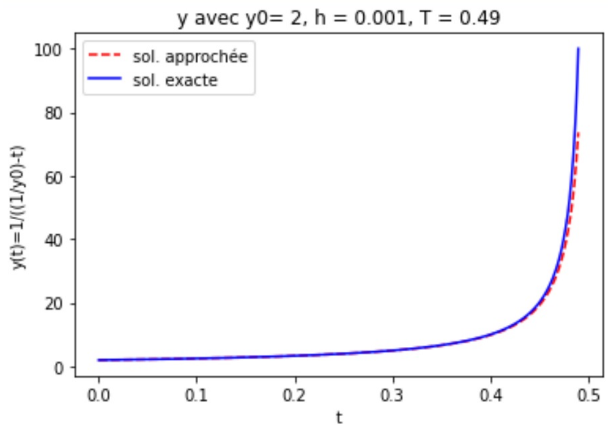
Vérifier que les solutions sont, sur l'intervalle considéré de la forme

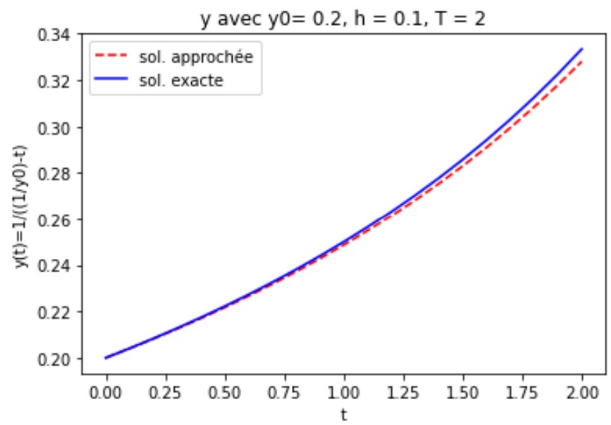
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} - t}.$$

1.2.1 Verifions que y(t) est de la forme $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} - t}$

Supposons que $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} - t}$.
y est C^1 sur tout les réels sauf en $\frac{1}{y(0)}$.
On peut donc écrire, pour tout $t \in [0, T]$ différent de $\frac{1}{y(0)}$: $y'(t) = \frac{1}{(\frac{1}{y(0)} - t)^2} = (y(t))^2$.

1.2.2 Graphe des solutions exacte et approchées par le schéma d'Euler explicite





Code disponible en .py dans le fichier zip. Correction du code ligne 42 : sol0=y(t,y0)

2 Equilibre atteint ou non atteint

1. On étudie l'équation différentielle

$$y'(t) = -y(t)^2,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

avec une condition initiale en $t = 0$ notée y_0. Dans la suite, on prendra $y_0 = 1$ ou 2 et on s'intéressera à la solution pour $t \in [0, T]$, avec $T = 1,5$ ou $T = 10$.

(a) Vérifier (ou admettre) que les solutions sont bien de la forme:

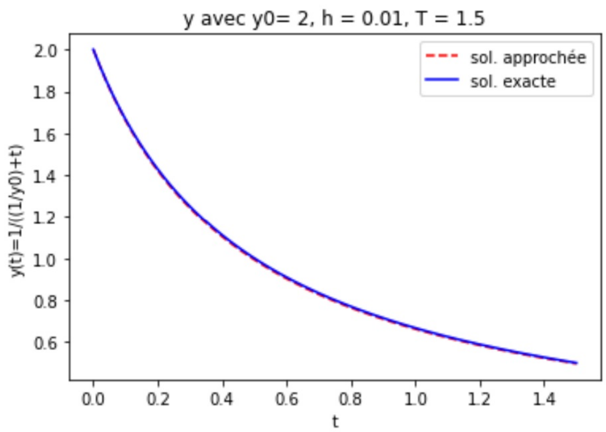
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + t}.$$

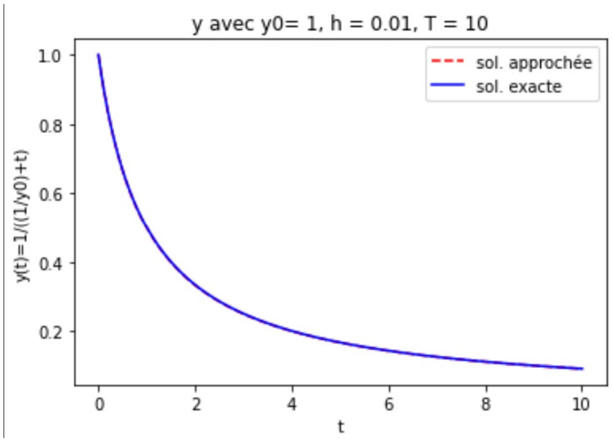
2.0.1 Verifions que y(t) est de la forme $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)}+t}$

Supposons que $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)}+t}$.
y est C^1 sur $\mathbb{R}$.
On peut donc écrire, pour tout $t \in [0, T]$: $y'(t) = \frac{1}{(\frac{1}{y(0)}+t)^2} = -(y(t))^2$.

(b) Représenter maintenant (pour différentes valeurs de y_0) sur un même graphique la solution exacte et la solution approchée obtenue avec le schéma d'Euler explicite et un pas de temps de 0.01. Commenter.

2.0.2 Graphe des solutions exacte et approchées par le schéma d'Euler explicite





Code disponible en .py dans le fichier zip.
La solution approchée épouse quasi parfaitement la solution exacte.
y tend vers 0 en l'infini, il y a existence globale.

2. On étudie maintenant l'équation

$$y'(t) = -\sqrt{|y(t)|},\ t \in \mathbb{R}_+,$$

avec une condition initiale en $t = 0$ notée y_0. Dans la suite, on prendra aussi $y_0 = 1$ ou 2 et on s'intéressera à la solution pour $t \in [0, T]$, avec $T = 2\sqrt{y_0}$.

(a) Vérifier que les fonctions définies pour $t \leq 2\sqrt{y_0}$ par

$$y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{t}{2}\right)^2$$

sont bien des solutions.

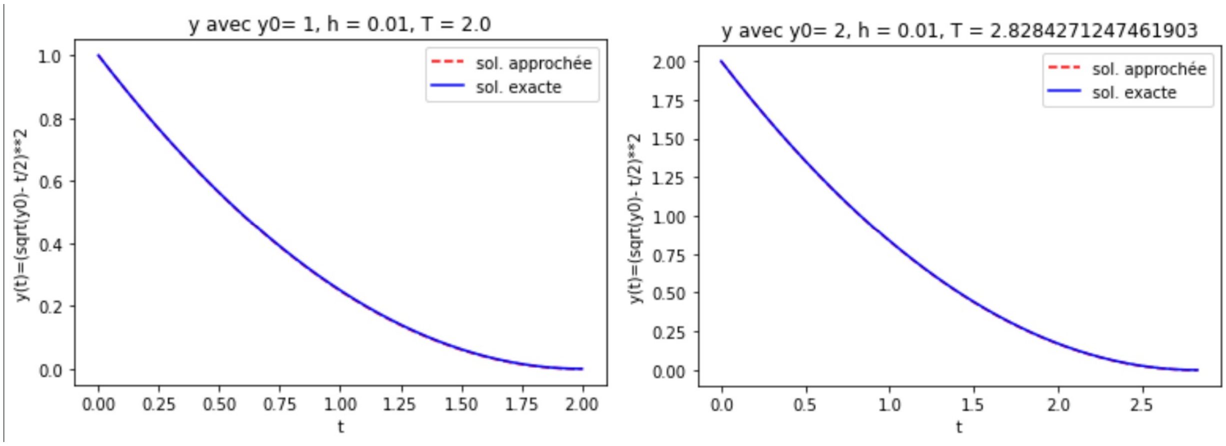
2.0.3 Vérifions que $y(t) = (\sqrt{y_0} - \frac{t}{2})^2$

Supposons que $y(t) = (\sqrt{y_0} - \frac{t}{2})^2$.
y est définit et continue sur tout $\mathbb{R}$.

$y'(t) = 2(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{y_0}-\frac{t}{2}})e^{2ln(\sqrt{y_0}-\frac{t}{2})}$
$= 2y(t)(-\frac{1}{2})\frac{y(t)}{\sqrt{y(t)}}$
$= -\frac{(y(t))^2}{\sqrt{y(t)}}.$
$= -\sqrt{y(t)}$

(b) Représenter maintenant (pour différentes valeurs de y_0) sur un même graphique la solution excacte et la solution approchée obtenue avec le schéma d'Euler explicite et un pas de temps de 0.01. La solution approchée est elle strictement positive pour tout $t < T$?

2.0.4 Graphe des solutions exacte et approchées par le schéma d'Euler explicite



3 Comparaison de trois schémas explicites

On s'intéresse ici au calcul pour $t = 1$ de la solution du problème

$$\begin{aligned} &y'(t) = y(t)(1 + e^{-y(t)}) + e^{2t}, \\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

3.0.1 Pour un pas de temps $h = 1/n$, $n \geq 10$, programmer les trois méthodes suivantes :

Schéma d'Euler explicite,

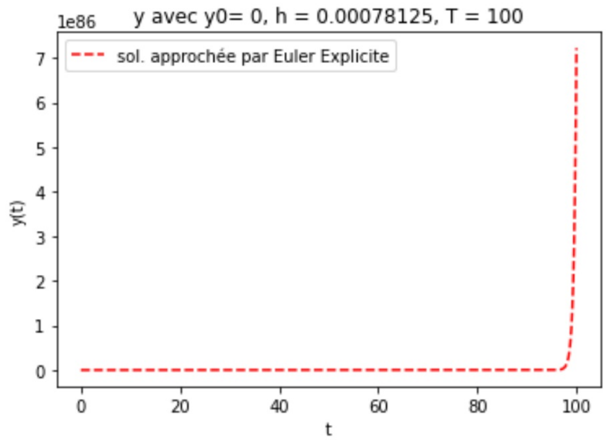


Schéma de Heun,

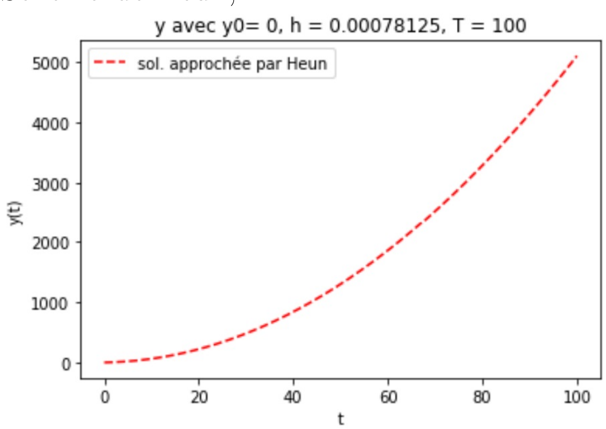
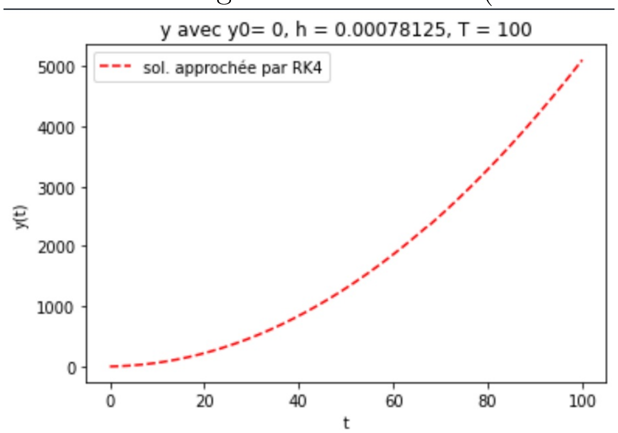


Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (noté RK4).



Code disponible en .py dans le fichier zip.

3.0.2 **En prenant comme valeur (presque) exacte la solution donnée par le schéma RK4 avec $n = 1280$, donner l'ordre de convergence de chacune des 3 méthodes considérées à la question (en prenant $n \leq 640$).**

3.0.3 **Pour chacune des méthodes considérées à la question , en prenant des valeurs de n de la forme $2^p 5$, pour quelle valeur de n a-t-on la solution avec 2 décimales exactes ? pour quelle valeur de n a-t-on la solution avec 6 décimales exactes ?**

Figure 1: Idée pour le week end