EDO TP4

DUQUENOY Cyrile *

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
2021-2022

L3 de Mathématiques
Premier semestre

tp4, équations différentielles du 2eme ordre, visualisation de solutions exactes

1 Force de Coriolis

Une particule (de masse $m = 1$) se déplace dans un plan sous l'action de la force de Coriolis (d'intensité $\omega = 1$). Sa position à l'instant t est $(x(t), y(t))$ et sa vitesse est notée $(u(t), v(t))$ (on a donc $u(t) = x'(t)$ et $v(t) = y'(t)$). On suppose que $x(0) = y(0) = 0$ et $u(0) = v(0) = 1$. On s'intéresse à la position de la particule et à sa vitesse sur l'intervalle de temps $[0, 20]$. La modélisation de la force de Coriolis donne que u, v est solution du système pour $t > 0$,

$$u'(t) = -v(t), \tag{1.1}$$

$$v'(t) = u(t). \tag{1.2}$$

1.1 Résolution du système

Soit $z(t) = u(t)$.
Alors $z'(t) = u'(t) = -v(t)$ et $z''(t) = -v'(t) = -u(t)$.

On a ainsi une équation du second ordre en z : $z''(t) + z(t) = 0$.
Deux solutions complexes à l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$: $r_1 = i$ $r_2 = -i$.

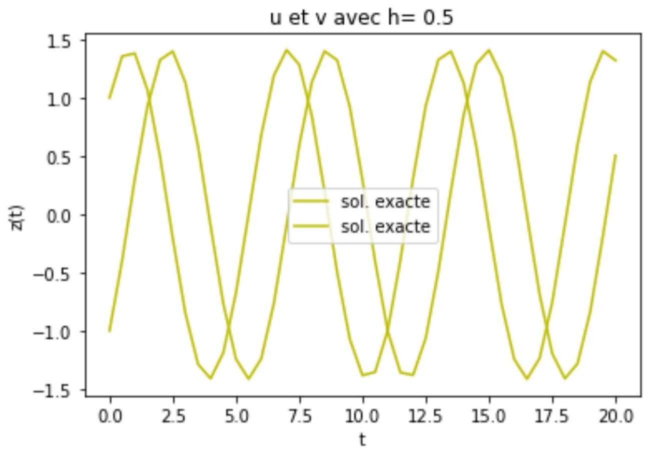
z s'écrit alors sous la forme $z(t) = \gamma cos(t) + \delta sin(t)$; γ, $\delta \in \mathbb{R}$.
Les conditions initiales donnent $\gamma = 1$, $\delta = 1$.

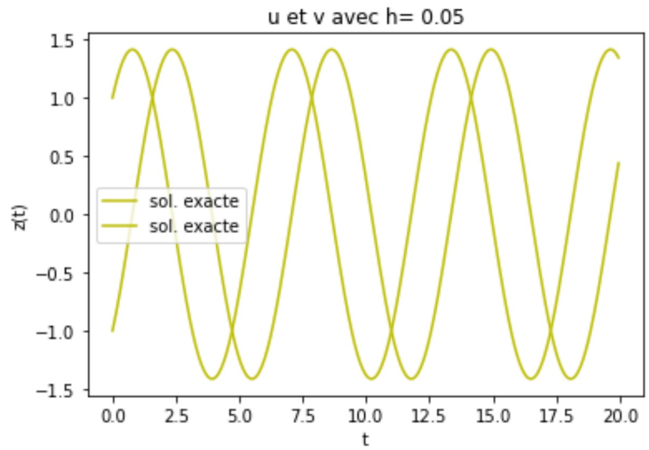
*Université Aix Marseille

Le système s'écrit alors :

$$u(t) = cos(t) + sin(t) \tag{1.3}$$
$$v(t) = sin(t) - cos(t) \tag{1.4}$$

Allure de u et v :





On peut en déduire x, y avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$.

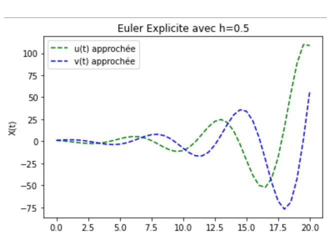
$$x(t) = sin(t) - cos(t) + 1 \tag{1.5}$$
$$y(t) = -(sin(t) + cos(t)) + 1 \tag{1.6}$$

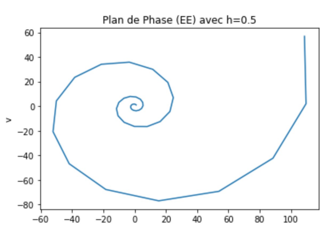
N.B. L'énergie cinétique du système est constante.
En effet, $\frac{1}{2}(u^2(t) + v^2(t)) = cos^2(t) + sin^2(t) = 1$.

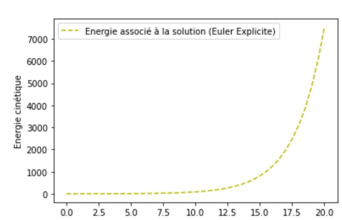
1.2 Schéma Numérique

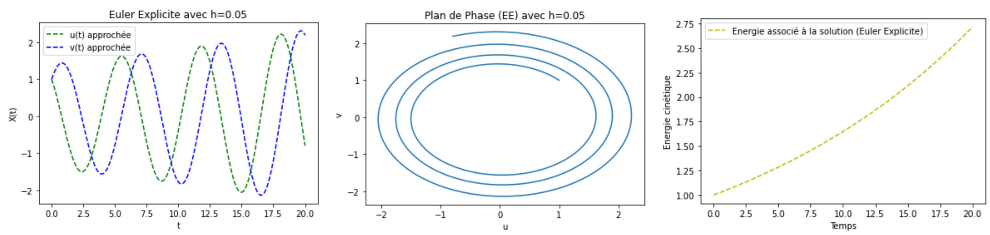
1.2.1 Euler Explicite

Ci dessous les solutions approchées de u et v par le schéma d'Euler Explicite avec des pas de temps de 0.5 et 0.05, suivi de leur plan de phase ainsi que de l'énergie cinétique associée à la solution.



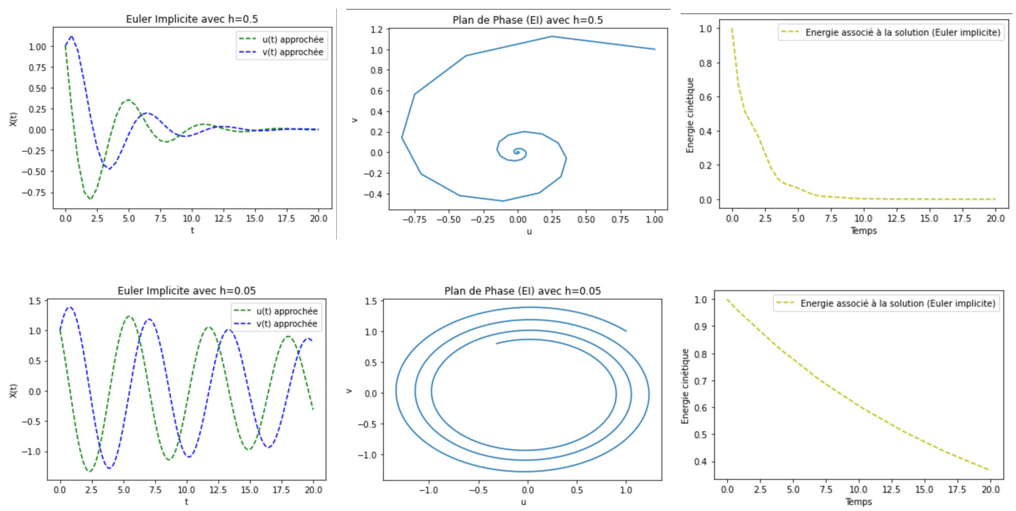






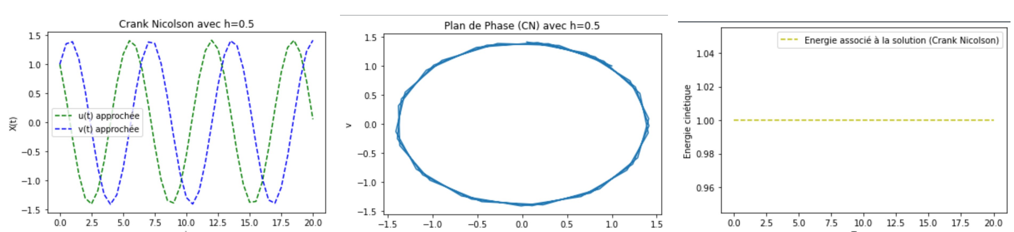
1.2.2 Euler Implicite

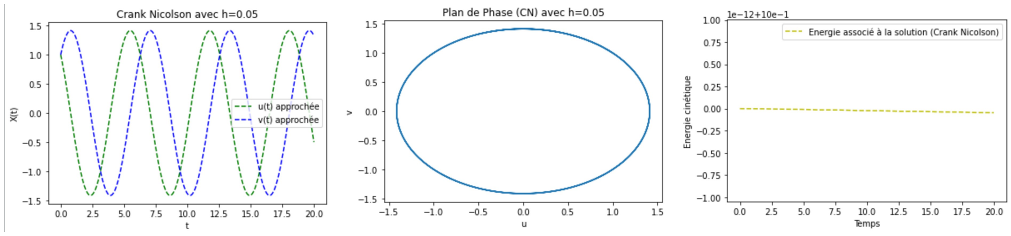
Ci dessous les solutions approchées de u et v par le schéma d'Euler Implicite avec des pas de temps de 0.5 et 0.05, suivi de leur plan de phase.



1.2.3 Crank-Nicholson

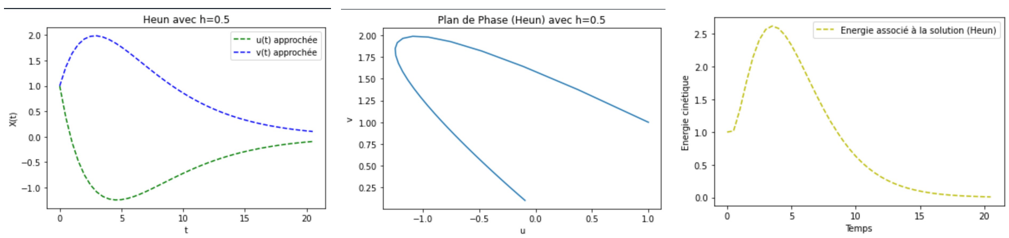
Ci dessous les solutions approchées de u et v par le schéma de Crank Nicolson avec des pas de temps de 0.5 et 0.05, suivi de leur plan de phase.

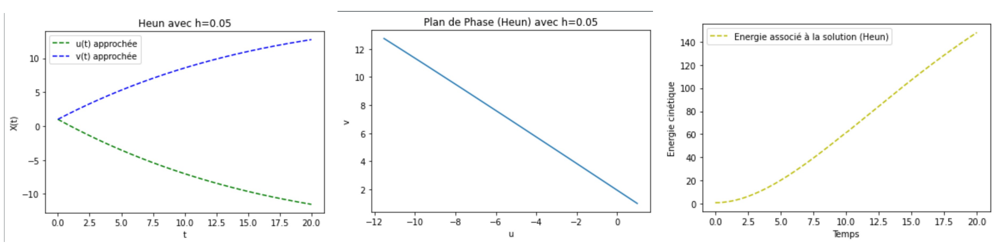




1.2.4 Heun

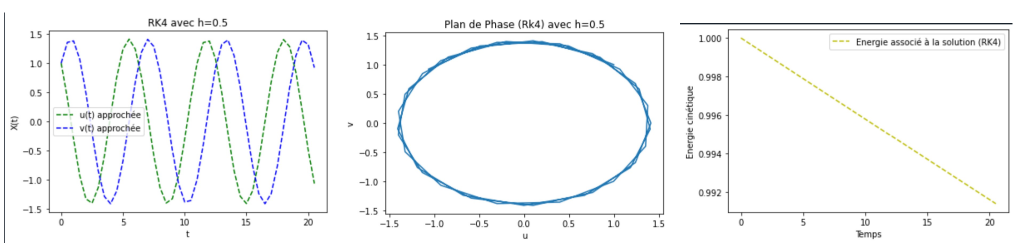
Ci dessous les solutions approchées de u et v par le schéma de Heun avec des pas de temps de 0.5 et 0.05, suivi de leur plan de phase.

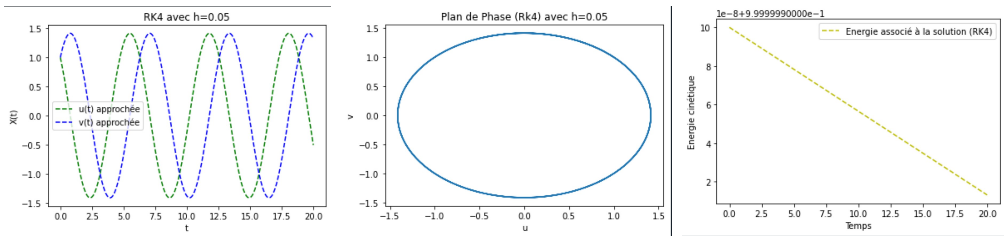




1.2.5 RK-4

Ci dessous les solutions approchées de u et v par RK4 avec des pas de temps de 0.5 et 0.05, suivi de leur plan de phase.





2 Modèle proie-prédateurs

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère le système différentiel suivant :

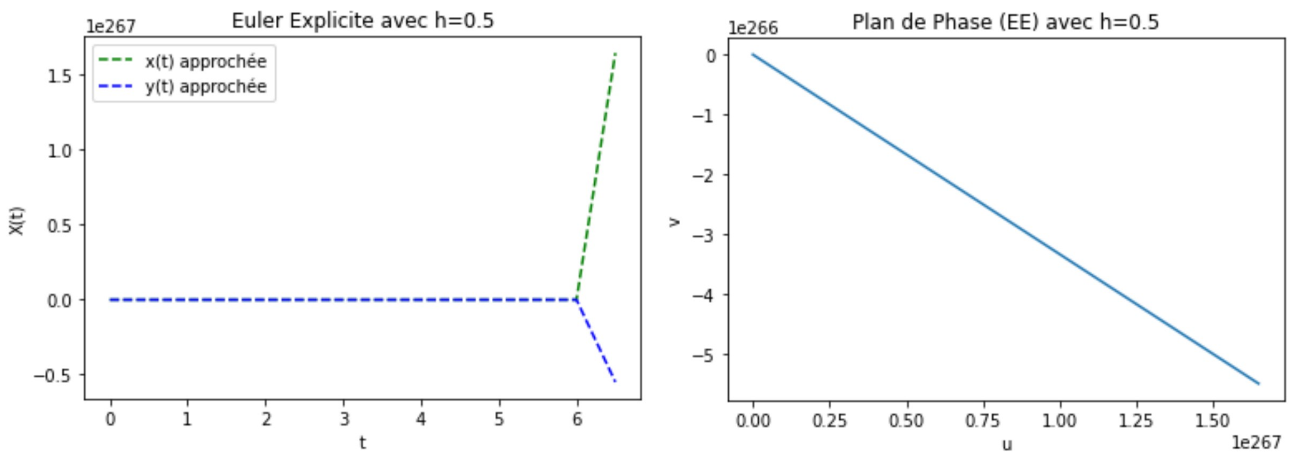
$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), t > 0, \tag{2.1}$$
$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), t > 0, \tag{2.2}$$

Avec pour conditions initiales : $x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$.

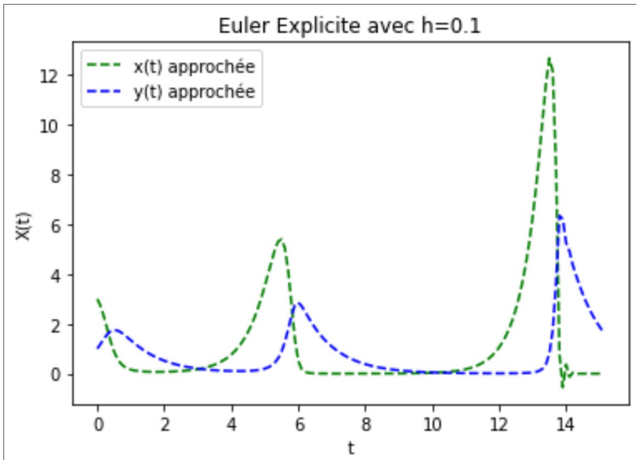
On considérera pour la suite $a = 2; c = 1; b = 3; d = 1$.

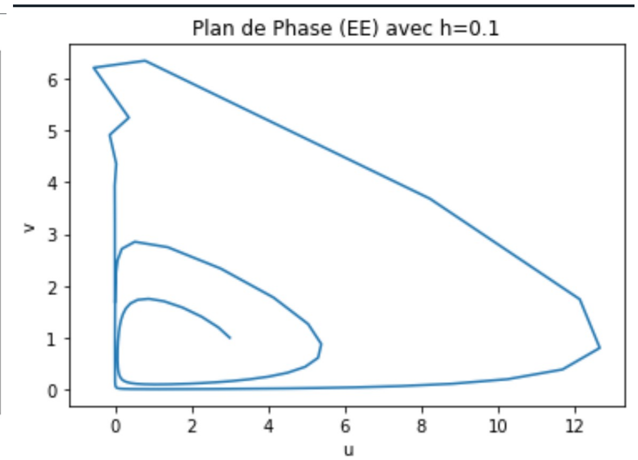
On peut approximer les solutions de ce système par différents types de schémas numériques. Nous nous attarderons ici sur Euler Explicite, Heun et RK4.

2.1 Euler Explicite

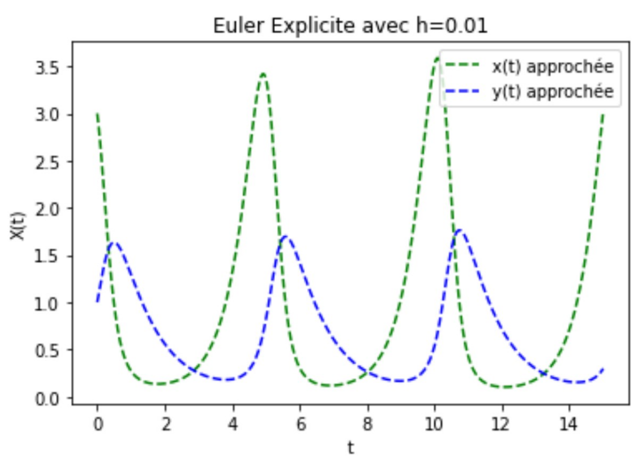


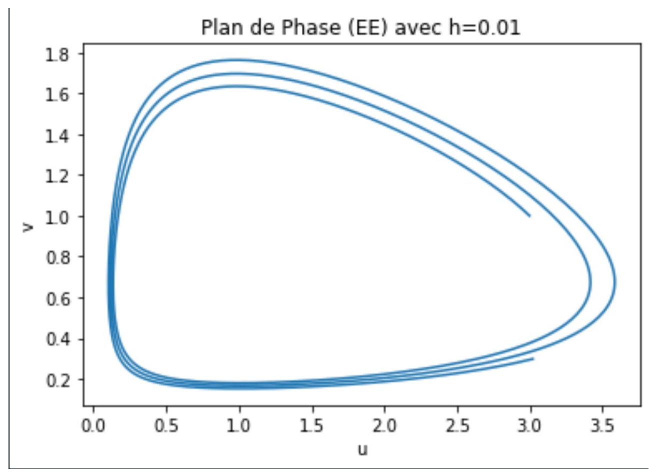
Le pas de temps est clairement trop grand pour pouvoir conclure quelque chose.





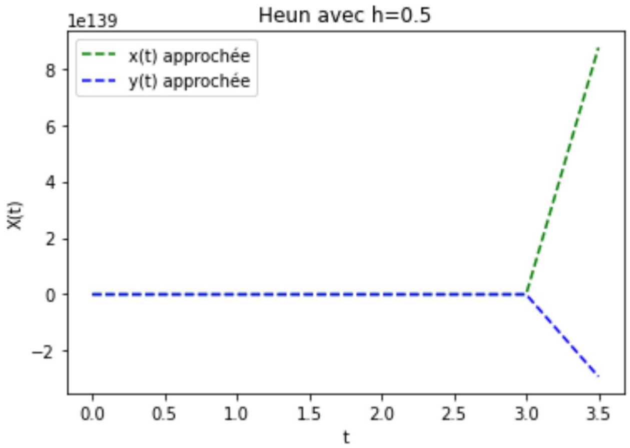
Les graphes approchés donnent un semblant de solutions "périodiques" mais le pas de temps est encore trop grand, on a une orbite qui se forme autour d'un point.

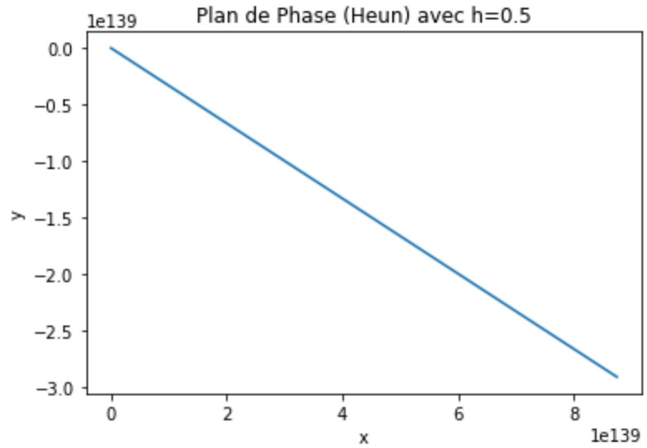


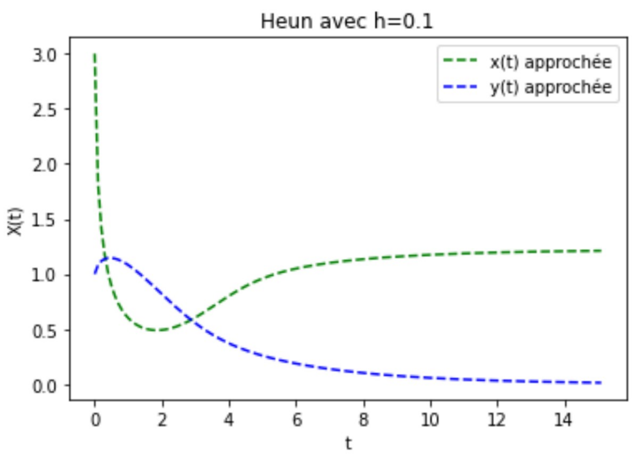


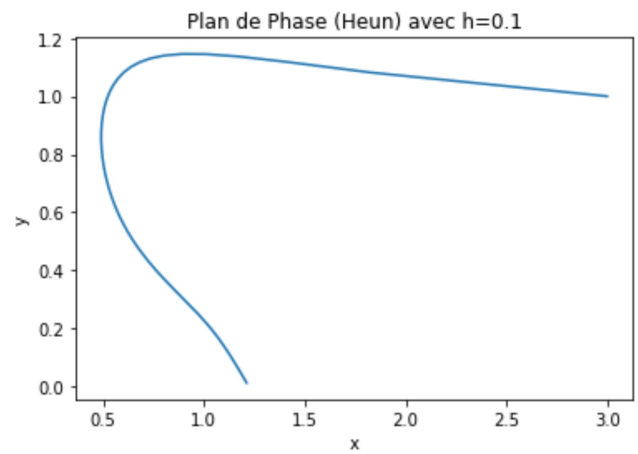
Le pas de temps est suffisamment petit pour y voir clairement une solution périodique de période environ 4. L'orbite est bien dessinée.

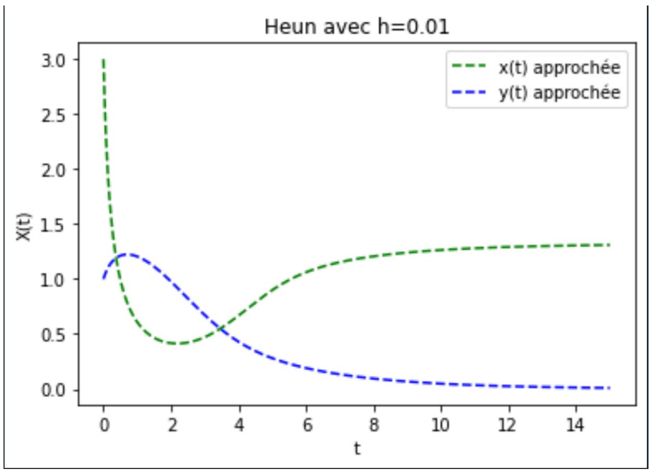
2.2 Heun

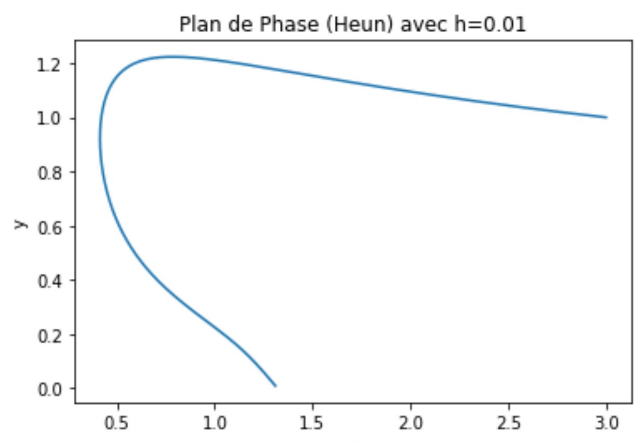






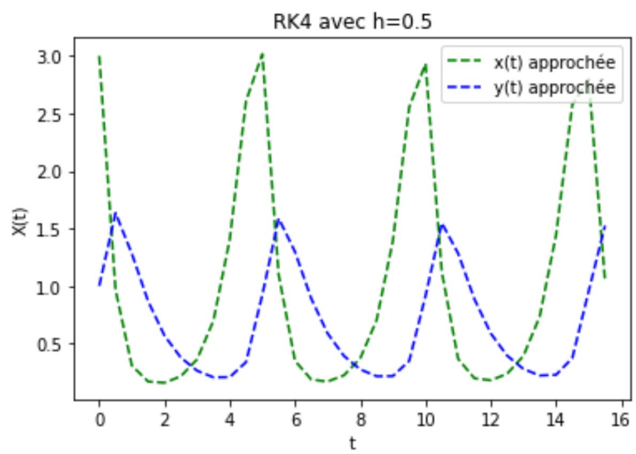


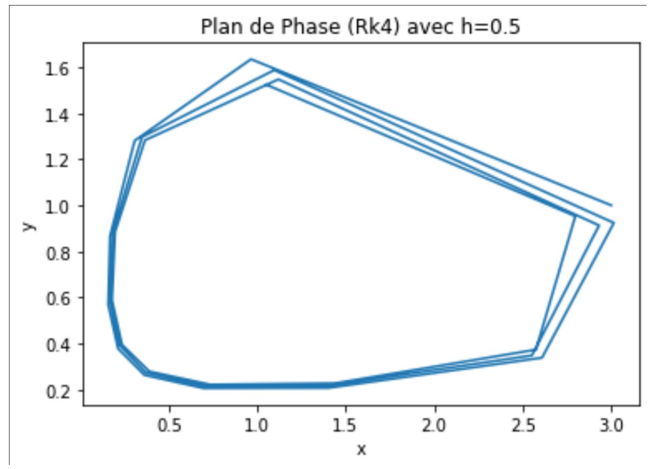


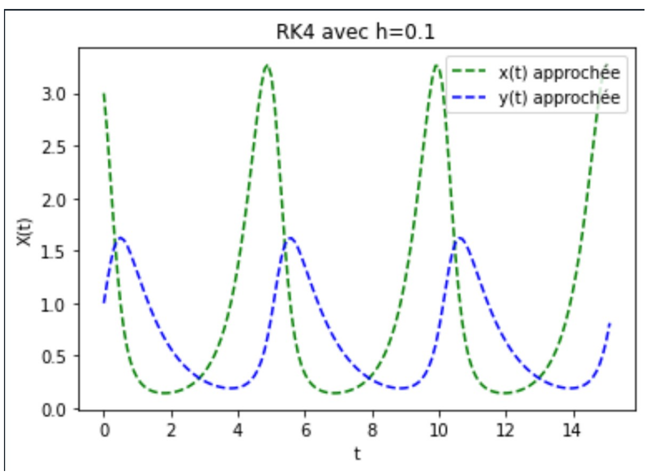


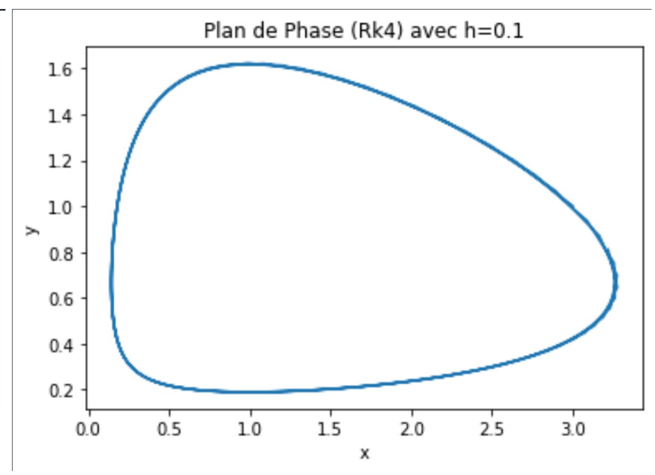
Heun ne donne rien d'intéressant.

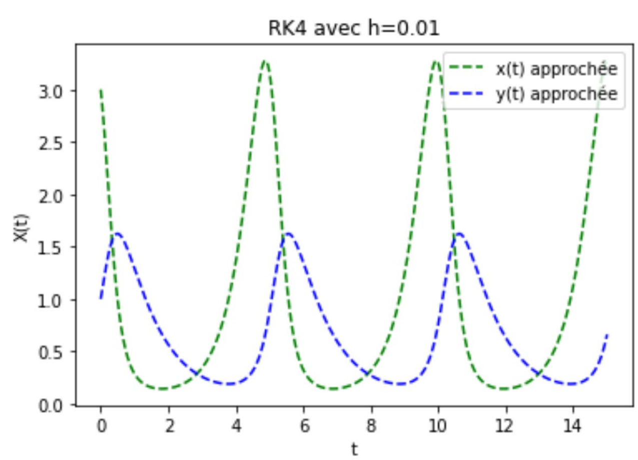
2.3 RK4

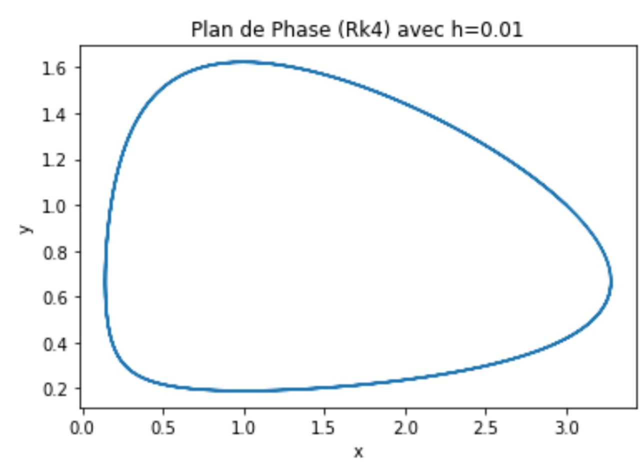












Il est clair que RK4 est le plus ineteressant des 3 shémas proposés.

On a de suite une solution périodique avec de petits pas de temps, période d'environ 5.
L'orbite décrit un chemin fermé.
L'évolution des 2 populations est périodiques.

3 Le modèle SIR

Edit : Je me perds dans le code.