EDO TP1

DUQUENOY Cyrile *

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
2021-2022

L3 de Mathématiques
Premier semestre

TP2 : équations différentielles du 1er ordre, schémas d'Euler explicite et implicite

1 Comparaison des schémas d'Euler explicite et implicite

Pour $\mu \neq 0$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ données, on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} z'(t) &= 1 - \frac{z(t)}{\mu} \\ z(0) &= z_0 \end{cases}$$

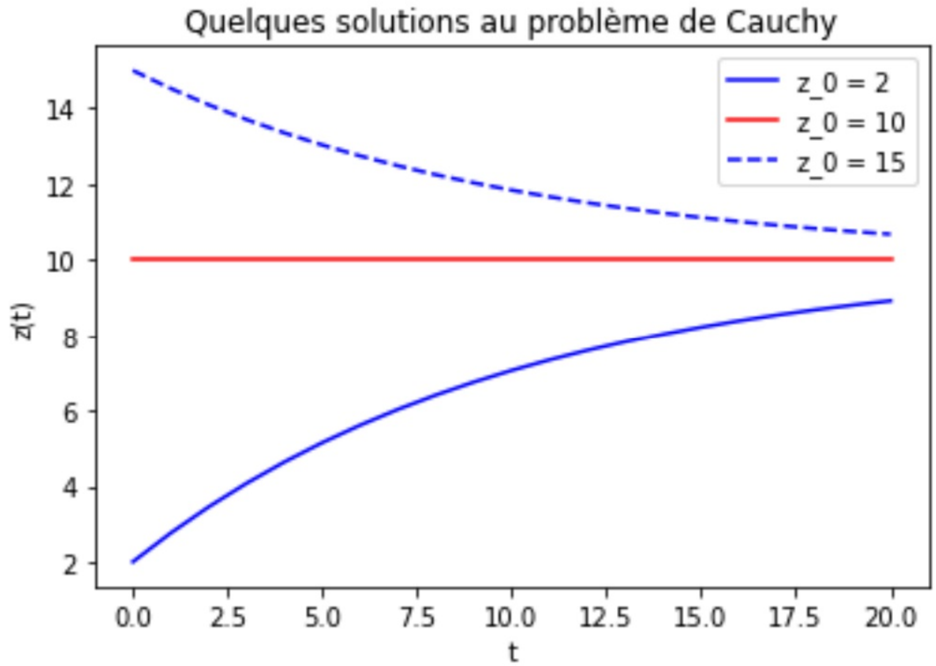
1.1 Solution du problème

Solution de l'équation homogène : $z_h(t) = ce^{-\frac{t}{\mu}}$, $c \in \mathbb{R}$.
Solution particulière (évidente) : $z_p(t) = \mu$.
Solution du problème : $z(t) = z_p(t) + z_h(t) = ce^{-\frac{t}{\mu}} + \mu$, $c \in \mathbb{R}$.
La condition $z(0) = z_0$ *donne* $c = z_0 - \mu$.
Et donc : $z(t) = \mu + (z_0 - \mu)e^{-\frac{t}{\mu}}$.

Pour toute la suite on prendra $\mu = 10$.

*Université Aix Marseille

1.2 Graphe de quelques solutions

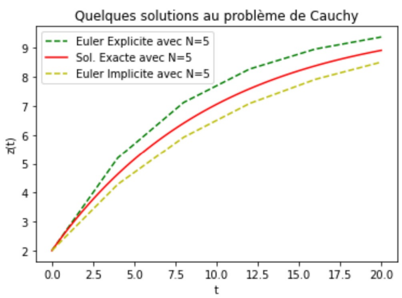


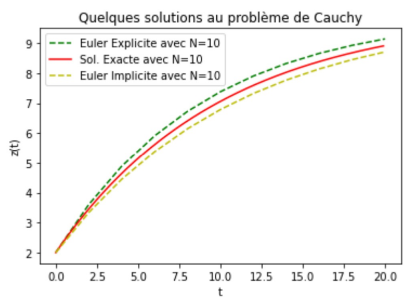
Commentaires sur le graphe :
Il est clair que 10 est solution d'équilibre.
Si $z_0 > 10$*, alors* $z'(t) < 0$ *et donc* z *est décroissante. Comme les trajectoire ne se rencontrent pas,* $z(t) > 10$ *et* z *tends vers 10 quand* t *tends vers l'infini.*
Si $z_0 < 10$*, alors* $z'(t) > 0$ *et donc* z *est croissante. Comme les trajectoire ne se rencontrent pas,* $z(t) < 10$ *et* z *tends vers 10 quand* t *tends vers l'infini.*

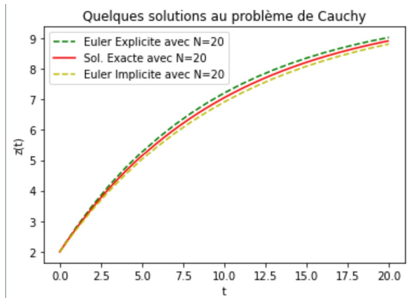
Pour la suite, on choisit $z_0 = 2$, on note z la solution exacte du problème et on calcule une solution approchée par un schéma numérique sur l'intervalle de temps [0,20].

1.3 Graphe des solutions approchés

Le schéma d'Euler Explicite s'écrit de la manière suivante : $z_{n+1} = z_n + h(1 - \frac{z_n}{\mu})$.
Le schéma d'Euler Implicite s'écrit de la manière suivante : $z_{n+1} = z_n + h(1 - \frac{z_{n+1}}{\mu})$.
Qui peut être réécrit comme ceci : $z_{n+1} = \frac{\mu(z_n+h)}{\mu+h}$.







1.4 Erreur de discrétisation

Pour un pas de temps donné, noté dt, on note $t_n = ndt$, $\tilde{z}_n = z(t_n)$ et z_n la solution obtenue par un schéma numérique.
On définit alors l'erreur de discrétisation (pour ce schéma et ce pas de temps) par :

$$E = max_{n\in\{1,\ldots,N\}}|z_n - \tilde{z}_n|,$$

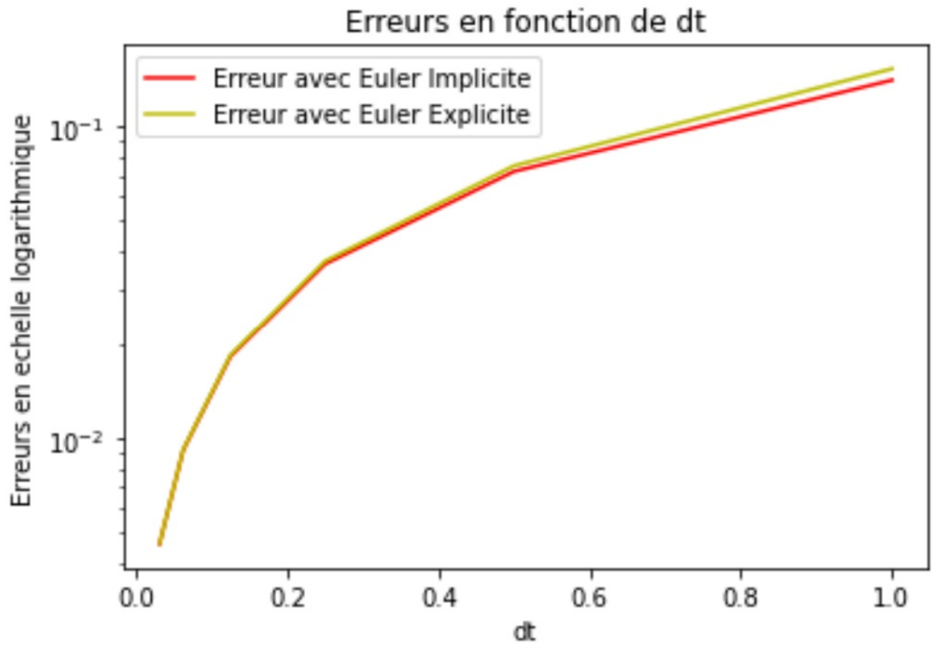
avec $Ndt = 20$.

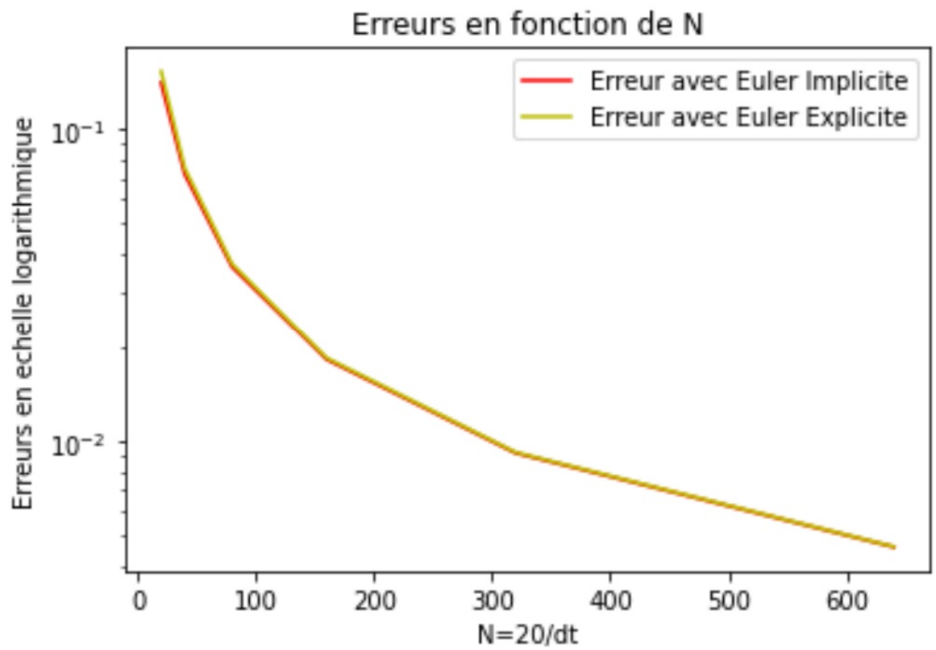
Ce qui donne pour notre problème de Cauchy :

```
Pour n= 20
Erreur de discrétisation avec Euler Explicite : 0.15360800857153833
Erreur de discrétisation avec Euler Implicite : 0.14131078606471625

Pour n= 40
Erreur de discrétisation avec Euler Explicite : 0.07514815010320053
Erreur de discrétisation avec Euler Implicite : 0.07208033361246802

Pour n= 80
Erreur de discrétisation avec Euler Explicite : 0.037176010268493265
Erreur de discrétisation avec Euler Implicite : 0.03640946021090041

Pour n= 160
Erreur de discrétisation avec Euler Explicite : 0.01849037699460432
Erreur de discrétisation avec Euler Implicite : 0.01829876471085612

Pour n= 320
Erreur de discrétisation avec Euler Explicite : 0.009221011622743802
Erreur de discrétisation avec Euler Implicite : 0.009173110128355866

Pour n= 640
Erreur de discrétisation avec Euler Explicite : 0.004604490007869444
Erreur de discrétisation avec Euler Implicite : 0.004592514732799202
```

On remarque que l'erreur de discrétisation est divisé par 2 dès qu'on double N (Pour les 2 schémas).

On peut alors tracer le graphe de ces erreurs en fonction de dt :





L'ordre de convergence étant d'au moins d'un, il existe $D \in \mathbb{R}$ *tel que :* $E \leq Dh^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. *(Ici* $h = dt$*).*