

Analyse Numérique 3 : Projet

DUQUENOY Cyrile, Mery Paul *

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER
2023-2024

M1 MANU
Second Semestre

Sujet 1

Abstract

Ce document est le rapport du projet d'Analyse Numérique 3 du Master MANU de la faculté des sciences de Montpellier. Il porte sur l'un des deux sujets proposés, en l'occurrence ici le sujet 1. Le but du projet est de mettre en oeuvre ce qui a été enseigné pendant le cours d'analyse numérique 3. Il s'agit en fait, à partir d'un problème aux limites, de formuler le problème variationnel, d'en faire l'étude d'existence et d'unicité d'une solution puis de mettre en oeuvre la résolution par éléments finis d'abord \mathbb{P}^1 -Lagrange 1D puis 2D.

L'ensemble des codes utilisés seront donnés en annexe du document, dans un fichier .zip.

Contents

1	Etude de l'existence et de l'unicité des solution	3
1.1	Définition du problème	3
1.2	Rappel des définitions et théorèmes	3
1.3	Problème variationnel	4
1.4	Application du Théorème de Lax-Milgram	4
1.5	Remontée	6
2	Analyse numérique par éléments finis	8
2.1	Méthode de Lagrange \mathbb{P}_1	8
2.2	Méthode d'assemblage	9
2.3	Algorithme d'assemblage	10
2.3.1	Cas particulier	11
2.4	Résolution numérique	11
2.4.1	Approximation par Trapèzes	12
2.4.2	Approximation par Simpson	12
2.4.3	Approximation de α	12
2.5	Analyse de convergence	14

*Faculté des Sciences Montpellier

3	Visualisation FreeFem++ 1D et 2D	16
3.1	Visualisation 1D	16
3.2	Visualisation 2D	17
4	Bibliographie	18

1 Etude de l'existence et de l'unicité des solution

1.1 Définition du problème

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + au = f \text{ dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = \alpha \end{cases}$$

Avec:

- Ω un ouvert de \mathbb{R}^n
- $a \in \mathbb{R}$
- $\alpha \in \mathbb{R}$
- $f \in L^2(\Omega)$

1.2 Rappel des définitions et théorèmes

On rappelle les théorèmes et définitions importants que nous allons utiliser afin de prouver l'existence et l'unicité des solutions. ¹

Théorème 1.1. *Théorème de Lax-Milgram*

Soit V un espace de Hilbert.

Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et V -elliptique sur V

Soit $l(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V .

Alors le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in V$.

Théorème 1.2. *Inégalité de Cauchy-Schwartz*

Soit H un espace préhilbertien

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H$$

Théorème 1.3. *Théorème de continuité de la trace*

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . On définit l'application trace :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\mapsto L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) \end{aligned}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue, notée γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$:

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

¹On ne démontrera pas ces résultats ici toutefois il est possible de trouver une démonstration dans [1].

Théorème 1.4. *Formule de Green*

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier. Soient $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u) \gamma_0(v) \cdot n_i(s) ds$$

Où n_i est la normale sortante au bord dans la direction i .

1.3 Problème variationnel

Soit X un espace fonctionnel que l'on fixera plus tard. Soit $v \in X$, le problème variationnel (PV) s'obtient en multipliant l'équation par v et en intégrant le résultat :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} a u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Par la formule de Green on a donc :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) v(x) \cdot n dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Or par la condition initiale, $\nabla u(x) \cdot n = \alpha$ donc on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx$$

On a donc le problème variationnel suivant :

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx \quad \forall v \in X \end{cases}$$

Pour que cette formulation soit licite on a besoin que $u, v, \nabla u, \nabla v \in L^2(\Omega)$. On choisit donc $X = H^1(\Omega)$ afin que la formulation variationnelle soit licite.

1.4 Application du Théorème de Lax-Milgram

Afin de pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut d'abord vérifier les hypothèses. Dans la suite on va identifier $a(u, v)$ à $\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$ et identifier $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx$ à $l(v)$.

Hypothèse sur X :

On a que $X = H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ est un Hilbert

Hypothèse sur $a(u, v)$

On doit montrer que $a(u, v)$ est une forme bilinéaire, continue et coercive Montrons que $a(., .)$ est bilinéaire. Tout d'abord il est évident que $a(u, v) = a(v, u)$ et donc que $a(., .)$ est symétrique.

$$\begin{aligned} a(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} (\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)) v(x) dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) dx + \mu \int_{\Omega} \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \lambda \int_{\Omega} u_1(x) v(x) dx + a \mu \int_{\Omega} u_2(x) v(x) dx \\ &= \lambda a(u_1, v) + \mu a(u_2, v) \end{aligned}$$

Et donc par symétrie on a que $a(., .)$ qui est bilinéaire.

Montrons ensuite que $a(., .)$ est continue.

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right|$$

En posant $A = \max(1, a)$ on a que:

$$\leq |A| \left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right|$$

On reconnaît le produit scalaire $H^1(\Omega)$ et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a que :

$$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Montrons enfin que $a(., .)$ est coercive:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + a \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

En posant $B = \min(1, a)$ on a que:

$$\begin{aligned} &\geq B \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right) \\ &\geq B \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Hypothèse sur $l(v)$

On doit montrer que $l(\cdot)$ est linéaire et continue Montrons tout d'abord que $l(\cdot)$ est linéaire:

$$\begin{aligned} l(\lambda v_1 + \mu v_2) &= \int_{\Omega} f(x) ((\lambda v_1(x) + \mu v_2(x))) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} ((\lambda v_1(x) + \mu v_2(x))) dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} f(x) v_1(x) dx + \alpha \lambda \int_{\partial\Omega} v_1(x) dx + \mu \int_{\Omega} f(x) v_2(x) dx + \alpha \mu \int_{\partial\Omega} v_2(x) dx \\ &= \lambda l(v_1) + \mu l(v_2) \end{aligned}$$

Donc $l(\cdot)$ est bien linéaire.

Montrons maintenant que $l(\cdot)$ est continue.

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| dx + |\alpha| \int_{\partial\Omega} 1 \times |v(x)| dx \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a que:

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha| \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Par continuité de l'application trace on a que :

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha| \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Par définition de la norme sur $H^1(\Omega)$

$$\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha|) \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On a donc que $l(\cdot)$ est bien continue.

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Le problème (PV) admet donc une unique solution.

1.5 Remontée

Nous avons maintenant établi que le problème (PV) admet une unique solution. Il faut maintenant "remonter" jusqu'au problème initial afin de montrer que lui aussi n'admet qu'une unique solution. Soit $u \in H^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ solution de (PV) . Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ espace des fonction test. On repars de l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx$$

On utilise maintenant la formule de de Green sur le premier terme et on obtient:

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) v(x) \cdot n dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx$$

Comme $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a que $\alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx = 0$ et $\int_{\partial\Omega} \nabla u(x) v(x) \cdot n dx = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \\ \int_{\Omega} (-\Delta u(x) + au(x) - f(x)) v(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve donc l'EDP $-\Delta u(x) + au(x) = f(x)$. Toutefois en imposant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a imposé une condition trop forte sur qui ne reflète pas les conditions aux bords. Prenons maintenant $v \in H^1(\Omega)$. On a donc :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) v(x) \cdot n dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx$$

Or on a montré que u vérifie aussi $-\Delta u(x) + au(x) = f(x)$ donc on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) v(x) \cdot n dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx \\ \int_{\Omega} (-\Delta u(x) + au(x) - f(x)) v(x) dx &= \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) v(x) \cdot n dx \\ 0 &= \int_{\partial\Omega} (\alpha - \nabla u(x) \cdot n) v(x) dx \end{aligned}$$

On retrouve donc la condition initiale $\nabla u(x) \cdot n = \alpha$. Et donc si u est solution de (PV) alors u est aussi solution de :

$$\begin{cases} \Delta u + au = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = \alpha \end{cases}$$

2 Analyse numérique par éléments finis

Nous nous intéresserons à partir d'ici au problème en dimension 1.

Considérons $a \neq 0$ et $\Omega = [0, 1]$.² On a alors :

$$\begin{cases} -u'' + au = f & \text{dans } \Omega =]0, 1[\\ u'(0) = u'(1) = \alpha \end{cases}$$

La méthode des éléments finis consiste à chercher une solution du problème variationnel de manière approchée en découpant le domaine Ω de manière polygonal. On "découpe", où plutôt on maille le domaine et on cherche des approximations de la solution en chacun des sommets du maillage qu'on a fait (Méthode Galerkin) ou sur chaque maille (Méthode d'assemblage). Puisque nous sommes en dimension $d = 1$, nous découperons l'intervalle $[0, 1]$ de manière uniforme en N intervalles, tous de longueur $h = \frac{1}{N}$ et on note les points de discrétisations $x_i = ih$ avec $i \in 0, \dots, N + 1$.

2.1 Méthode de Lagrange \mathbb{P}_1

Soit $V_h = \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, i \in \{0, \dots, N\}\}$.

On note $(\phi_i)_{i \in \{0, \dots, N\}}$ une base de V_h avec :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Doù :

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $u_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} u_h(x_j) \phi_j$. Alors $a(u_h, \phi_i) = a(\sum_{j=0}^{N+1} u_h(x_j) \phi_j, \phi_i) = \sum_{j=0}^{N+1} u_h(x_j) a(\phi_j, \phi_i)$.

Nous avons ici un produit matrice/vecteur Au_h . Si on note $F = l(v_h)$ alors on a un système linéaire du type $Au_h = F$. Ainsi, si A est inversible, alors on peut résoudre le système. En pratique, on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1. Soit $a(\cdot, \cdot)$ coercive. Alors A est inversible.

Proof. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Alors :

$$x^t A x = (x_1, \dots, x_N) \left(\sum_{i=1}^N a(\phi_j, \phi_i) x_i \right) = a \left(\sum_{j=1}^N x_j \phi_j, \sum_{i=1}^N x_i \phi_i \right) \geq \alpha \left\| \sum_{i=1}^N x_i \phi_i \right\|^2 \geq c \|x\|^2.$$

La première majoration vient de la coercivité de a . La seconde de l'équivalence des normes. \square

²Le cas $a = 0$ sera traité en section 2.3.1 comme cas particulier.

Remarque 2.1. On peut scinder notre matrice A en deux parties A_1 et A_2 tel que $A = A_1 + aA_2$ avec $(A_1)_{ij} = a(\phi'_i, \phi'_j)$ et $(A_2)_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$.

Remarque 2.2. Il n'a pas été mentionné plus haut que F prends bien évidemment en compte les conditions de Neumann. La première ainsi que la dernière coordonnée de F se voient rajouter un terme ici égal à α . En fait : $F = (l(\phi_0), \dots, l(\phi_{N+1}))^t$ avec :

$$F_i = \begin{cases} \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx & \text{si } i \neq 0, N+1 \\ \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx + \alpha & \text{si } i = N+1 \\ \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx - \alpha & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

A partir de la remarque 2.1, construisons la matrice A .

- On a $(A_1)_{ij} = a(\phi'_i, \phi'_j) = \int_0^1 \phi'_i(x)\phi'_j(x)dx$.
 A_1 est une matrice tridiagonale dont les coefficients sont tels que :

$$A_1 = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Prenons maintenant A_2 .
 A_2 est une matrice tridiagonale dont les coefficients sont tels que $(A_2)_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx$. Par soucis de construction à la main, nous utiliserons une méthode d'assemblage pour construire A_2 .

2.2 Méthode d'assemblage

Plutôt que de faire nos calculs en chacun des noeuds du maillage, on va ici les faire en chaque maille directement.

Soit \mathcal{T} notre maillage. Puisqu'on a $N+2$ points sur le domaine $[0,1]$, on a alors $N+1$ mailles qu'on note \mathcal{T}_j pour $j = 1, \dots, N+1$.

Lemme 2.2. Soit \hat{K} un élément de référence. On prendra ici $\hat{K} = [0,1]$. Il existe une application affine \mathcal{F}_K allant de \hat{K} vers K où K est un élément quelconque de notre maillage.

Il existe alors une application affine $\mathcal{F}_K : \begin{matrix} \hat{K} & \longrightarrow & K \\ \hat{x} & \longmapsto & x \end{matrix}$ telle que $\mathcal{F}_K = B_K \hat{x} + b_K$.

Proof. Supposons que \mathcal{F}_K soit d'une telle forme. Soit $[0,1]$ notre élément de référence. On note $0 = \hat{a}_2$ et $1 = \hat{a}_1$. Soit $[x_i, x_{i+1}] = [a_2, a_1]$ un élément de notre maillage. On veut $\mathcal{F}_K(\hat{a}_2) = a_2$ (i.e. $\mathcal{F}_K(0) = a_2$) d'où $b_k = a_2$. On veut de plus $\mathcal{F}_K(\hat{a}_1) = a_1$ (i.e. $B_k \hat{a}_1 + a_2 = a_1$). Or $a_1 = a_2 + h$ et $\hat{a}_1 = 1$ d'où $B_k = h$. Ainsi, $\mathcal{F}_K = h\hat{x} + a_2$. \square

On cherche à calculer $\int_0^1 a(\phi_i, \phi_j)$. Ceci revient à calculer l'intégrale sur chaque maille. On cherche donc $\sum_{j=1}^{N+1} \int_{\mathcal{T}_j} \phi_i(x) \phi_j(x) dx$. On va utiliser un changement variable en utilisant le lemme 2.2 et en posant $x = \mathcal{F}_K(\hat{x})$. Les fonctions de bases sur \hat{K} sont $\hat{\phi}_0(x) = 1 - x$ et $\hat{\phi}_1(x) = x$. On remarque alors que $\hat{\phi}_i = \phi_i \circ \mathcal{F}_K$. Ainsi pour chaque maille $[x_j, x_{j+1}]$, $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_i \phi_j dx = \int_0^1 h \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j d\hat{x} = h \int_0^1 \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j d\hat{x}$. On peut alors assembler la matrice élémentaire $M \in M_2(\mathbb{R})$ qui correspond aux contributions élémentaires de l'élément $[x_j, x_{j+1}]$. On trouve alors :

$$M = \frac{h}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ainsi :

$$A_2 = \frac{h}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Remarque 2.3. Par la même méthode appliqué à $a(\phi'_i, \phi'_j)$, on trouve A_1 exactement comme explicité dans la section précédente.

2.3 Algorithme d'assemblage

Le but ici va être de construire un algorithme qui automatise l'ensemble des calculs fait à la main précédemment. Certaines remarques seront faites directement en commentaire du code donné en annexe du document.

Definition 2.1 (Ordre d'une méthode d'intégration numérique.). Une méthode d'intégration numérique est dite d'ordre N si elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à N et fautive pour tout polynôme de degré supérieur à N .

On commence tout d'abord par construire les matrices élémentaires sur la maille de référence \hat{K} par méthode d'intégration. Par comparaison avec les calculs à la main, la méthode de Simpson est exacte. Les méthodes d'ordres moins élevés ne l'étant pas.

On monte ensuite les matrices A_1 et A_2 à l'aide des matrices élémentaires, puis le second membre.

2.3.1 Cas particulier

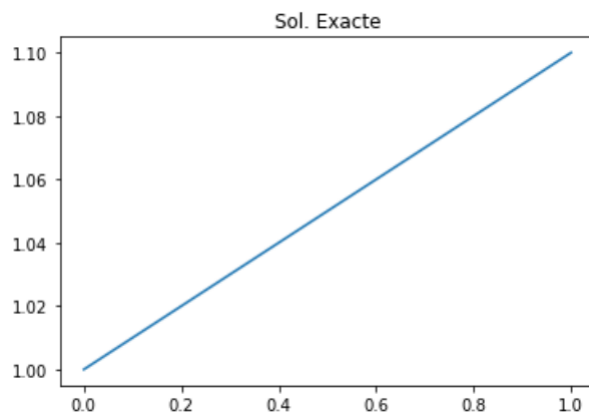
Lemme 2.3. *Soit $a = 0$. Alors la matrice A issue de la méthode \mathbb{P}_1 – Lagrange est singulière. Il existe alors une condition dite de compatibilité telle que le système peut être résolu. Cette condition est telle que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.*

Proof. Prenons $a = 0$. Le problème aux limites devient $-u'' = f$ avec les mêmes conditions aux bords. Si on intègre les deux membres et qu'on fait une intégration par partie sur le membre de gauche on trouve alors $u'(1) - u'(0) = \int_0^1 f$. Soit alors $\int_0^1 f = 0$. □

2.4 Résolution numérique

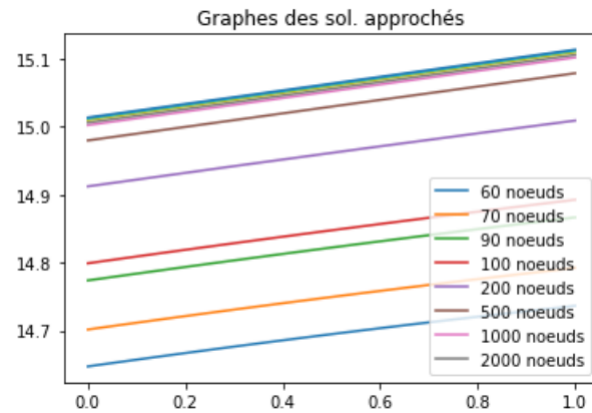
Nous avons mis en place la méthode Lagrange- \mathbb{P}_1 à la section précédente. La résolution du système obtenu demande de passer par un calcul à la machine. Avant d'y avoir recours, construisons tout d'abord une solution exacte au problème.

Une solution exacte au PL est $u(x) = \alpha x + 1$ avec $f(x) = a\alpha x + 1$ dont le graphe est donné ci-dessous pour $\alpha = a = 0.1$

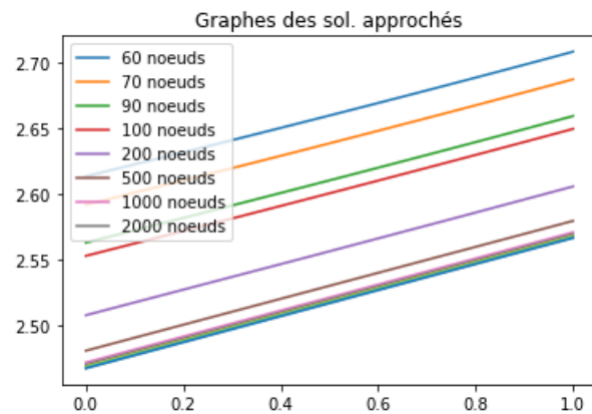


Le but va être d'approcher le second membre du PV par une méthode d'approximation d'intégrale. Nous utiliserons dans ce qui suit la méthode des trapèzes et celle de Simpson.

2.4.1 Approximation par Trapèzes

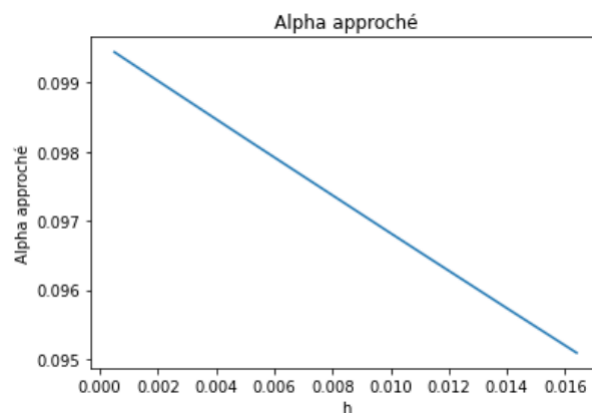


2.4.2 Approximation par Simpson



2.4.3 Approximation de α

On peut aussi s'intéresser à l'approximation de α . Comme u est polynomial de degré 1 et que sa dérivée vaut α , on peut grossièrement approcher α en prenant le différence aux bords de u_h .



Remarque 2.4. Une autre façon de construire une solution exacte serait de résoudre l'EDO de second d'ordre $-u'' + au = f$.

Si par exemple on prends $f(x) = 1$, alors une solution serait :

$$\begin{cases} u(x) = \gamma e^{x\sqrt{a}} + \delta e^{-x\sqrt{a}} + \frac{1}{a} \\ \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{1-e^{-\sqrt{a}}}{2\sinh(a)} - 1 \right) \\ \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-e^{-\sqrt{a}}}{2\sinh(a)} - 1 \right) \end{cases}$$

On remarque que a doit être non nul, ce qui est cohérent avec la condition de compatibilité.

2.5 Analyse de convergence

Le but de cette section est d'analyser l'erreur commise quand on approche u la solution exacte par u_h la solution approchée. Nous verrons plus tard qu'il s'agit en fait plutôt d'un problème d'approximation d'espace. On cherche à ce que la distance entre l'espace fonctionnel approché et l'espace fonctionnel exact soit la plus petite possible (c.f. Céa). On rappelle que le problème variationnel approché admet une unique solution si $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (c.f. 2.1) On rappelle que le problème variationnel s'écrit :

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + a \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v(x) dx \quad \forall v \in X \end{cases}$$

On pose alors:

$$W_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \mid v|_{\tau_j} \in \mathbb{P}_1, v'(0) = v'(1) = \alpha, j = 0, 1, \dots, N \right\}$$

On a donc l'approximation conforme de Galerkin suivante :

$$(PV_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h(x) \cdot \nabla v_h(x) dx + a \int_{\Omega} u_h(x) v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v_h(x) dx + \alpha \int_{\partial\Omega} v_h(x) dx \quad \forall v_h \in W_h \end{cases}$$

Definition 2.2. Pour une fonction $v \in H^1(0, 1)$ on définit :

$$\Pi_h(v)(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \phi_i(x)$$

Cette fonction $\Pi_h(v)(x)$ interpole la fonction v et appartient à W_h par définition. Pour montrer que notre schéma converge on a besoin des deux lemmes suivants :

Théorème 2.1. Lemme de Céa

Sous les mêmes hypothèses que Lax-Milgram :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

avec M la constante de continuité de a et α la constante de coercivité de a .

Proof. Afin de démontrer le lemme on rappelle le Lemme d'orthogonalité.

Lemme 2.4.

$$\forall v_h \in W_h, a(u - u_h, v_h) = 0$$

Comme nous sommes sous les mêmes hypothèses que le théorème de Lax-Milgram on a que a est coercive et donc :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &\leq a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

Pour un $v_h \in V_h$ quelconque, $u_h - v_h \in W_h$ et donc par le lemme d'orthogonalité, le second terme est bien nul. On utilise ensuite les propriétés de telle sorte que :

$$\text{Par bilinéarité} \leq a(u - u_h, u - v_h)$$

$$\text{Par continuité} \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

On obtiendra le résultat recherché en passant à la borne inférieure.

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V$$

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

□

La preuve du lemme d'orthogonalité est dans [1]

Théorème 2.2. *Lemme d'interpolation*

- $\forall v \in H^1(0, 1), \lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h(v)\|_{H^1(0,1)} = 0$
- $\forall v \in H^2(0, 1), \exists C > 0$ indépendant de h tel que :

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h(v)\|_{H^1(0,1)} &\leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \tilde{C}h \|v\|_{H^2(0,1)} \end{aligned}$$

Proof. Voir [1]

□

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 Lagrange* Soit $f \in L^2(0,1)$ et $u \in H^1(0,1)$ la solution du problème variationnel. Soit $u_h \in W_h$ la solution de l'approximation conforme de Galerkin. Alors $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0$. De plus si $u \in H^2(0,1)$ alors :

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|au - f\|_{H^2(0,1)}$$

Proof. Par le lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{A}{B} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

$$\text{Comme } \Pi_h(u) \in W_h \leq \frac{A}{B} \|u - \Pi_h(u)\|$$

$$\text{Par le lemme d'interpolation} \leq \frac{A}{B} \tilde{C} h \|u''\|_{L^2(0,1)}$$

Ceci montre que $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0$ puisque \tilde{C} et $\|u''\|_{L^2(0,1)}$ ne dépendent pas de h . Si $u \in H^2(0,1)$ alors on a u solution du problème aux limites donc $u'' = au - f$ et donc :

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{A}{B} \tilde{C} \|au - f\|_{L^2(0,1)}$$

□

3 Visualisation FreeFem++ 1D et 2D

FreeFem++ est un logiciel open source de résolution d'edp par éléments finis. Il est assez facile d'utilisation au sens où nous n'avons pas besoin de programmer manuellement l'entièreté de la théorie des éléments finis. Il possède une version en ligne que nous utiliserons pour illustrer notre problème en dimension une puis deux.

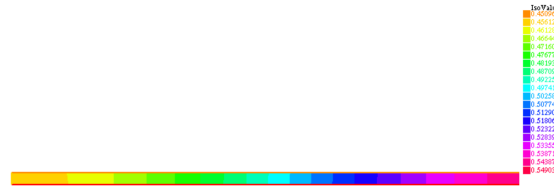
3.1 Visualisation 1D

Le logiciel FreeFem n'est pas prévu pour pouvoir travailler en une dimension. Pour avoir un résultat qui s'approche le plus de ce que l'on souhaite calculer on demande au programme de travailler sur un domaine ne contenant qu'une maille en hauteur. Voici le résultat que l'on obtient avec les paramètres suivants:

- $a = 1$

- $\alpha = 0$
- $f = 1 - x$

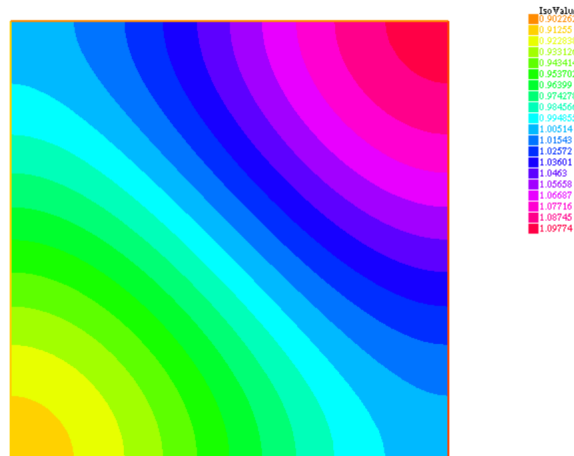
Puisque nous travaillons techniquement en dimension 2, les mailles sont des triangles. On travaille ici sur un domaine rectangulaire de 100 maille de long et 1 maille de haut. Voici le résultat que l'on obtient:



Le code qui nous a donné cette représentation nous donne une erreur en norme L2 de 0.0453697 en \mathbb{P}^1 et de 0.0453698 en \mathbb{P}^2

3.2 Visualisation 2D

On reprend le même problème, toutefois on l'adapte à la dimension 2. a et α restent identiques toutefois f devient $2 - x - y$. On travaille ici sur un domaine carré avec 20 maille par bord. Le maillage n'est pas régulier contrairement à celui fait pour le problème 1D.



Le code qui nous a donné cette représentation nous donne une erreur en norme L2 de 0.453606 en \mathbb{P}^1 et de 0.453697 en \mathbb{P}^2

4 Bibliographie

[1] Cour d'Analyse numérique 3 2023-2024 M1 MANU H.Mathis