

TER 2024

Mery Paul, DUQUENOY Cyrile *

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER
2023-2024

M1 MANU
Second Semestre

Résolution par différences finies du problème de Stefan 1D

Abstract

Ce document est le rapport du sujet de TER 2024 du M1 MANU de la faculté des sciences de Montpellier fait en binôme entre Mery Paul et Duquenoy Cyrile.

Le sujet porte sur la résolution par différences finies du problème de Stefan 1D. Le but de ce document est de donner notre compréhension du sujet ainsi que divers résultats issus du papier d'origine, tant dans les résultats théoriques que numériques.

Contents

1	Introduction au problème	3
2	Définition du problème	3
2.1	Principe du maximum	4
3	Cas particulier: Bord fixe	6
3.1	Schémas Numériques	6
3.1.1	Schéma implicite	6
3.1.2	Etude de la consistance	7
3.1.3	Etude de la stabilité	8
3.1.4	Conclusion	9
4	Bord libre	10
4.1	Compréhension du schéma	10
4.2	Deux résultats importants	11
4.2.1	Etude de la convergence	11
4.2.2	Déplacement du bord	11
4.3	Mise en place	11
5	Résultats numériques à bord libre	12
5.1	D'autres schémas	13

*Faculté des Sciences Montpellier

6 Sources et Bibliographie

15

1 Introduction au problème

La classe de problème appelés problème de Stefan sont des tout d'abord des problème qui nous viennent de la physique. Il ont été posés pour la 1^{ère} fois aux alentours de 1890 par le physicien slovène Josef Stefan. Ils ont pour objectif de modéliser un changement d'état a l'intérieur d'un milieux, par exemple la fonte d'un glaçon ou la cristallisation de l'eau.

Pour notre part nous allons étudier une version adimensionnée du problème, car nous souhaitons en faire une analyse mathématique. Les grandeurs avec lesquels nous travaillerons seront donc "normalisé". Pour chacune des grandeurs physique (Temperature, longueur...) on choisit une grandeur de référence par laquelle on diviseras nos grandeur ce qui retireras effectivement les dimensions. Par exemple on ne travailleras pas avec un temps en seconde mais avec un temps en unité arbitraire de temps. Cela permet de simplifier l'expression des équations ainsi que leur analyse mais nous fait perdre le lien avec la réalité.

2 Définition du problème

Le problème de Stefan est une équation de degré 2 avec des conditions aux bords de Dirichlet.

Le problème de Stefan adimensionné en une dimension s'écrit ainsi:

Soit \mathbb{R}_+ le domaine de calcul. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit ϕ et f des fonctions positives données. Trouver $u(x, t)$ et $s(t)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} - u_t = 0 & \text{pour } 0 < x < s(t) \quad 0 < t \leq T \\ u(0, t) = f(t) & \text{pour } 0 < t \leq T \\ u(s(t), t) = 0 & \text{pour } 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{pour } 0 < x \leq b \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

$$\frac{ds}{dt}(t) = -u_x(s(t), t) \text{ pour } 0 < t \leq T.$$

Avec $u(x, t)$ qui est une chaleur et $s(t)$ le bord du domaine

Une interpretation physique de ce problème est la suivante. On a au départ un milieux avec deux phases distinctes. La première phase se trouve dans l'intervalle $[0, b]$ et la seconde phse se trouve dans $]b, +\infty[$. La condition de bord en 0 décrit, sous nos condition sur $f(t)$, une source de chaleur. La condition de bord en $s(t)$ représente la temperature de changement d'état du matériaux observé. Ici elle est fixé a 0 car l'exemple le plus direct est celui d'un glaçon qui fond. La condition $u(x, 0) = \phi(x)$ permet de savoir comment la temperature est répartie dans le milieux au début de l'expérience. Enfin la condition $s(0) = b$ nous donne la position initiale de l'interface entre les deux phases.

Avant de pouvoir commencer à travailler sur une méthode numérique de résolution du problème de Stefan il est nécessaire de montrer qu'il existe une unique solution à ce problème.

Théorème 2.1. *Soit ϕ et f deux fonction positive ou nulle telles que leur combinaison soit au plus discontinue en un nombre fini de point et qu'il existe une constante positive N tel que:*

$$0 \leq \phi(x) \leq N(b-x) \text{ pour } 0 \leq x \leq b$$

Alors le problème de Stefan admet une unique solution (u, s)

Nous ne démontrons pas ce théorème car ce n'est pas le but de ce rapport toutefois il est possible de trouver une démonstration dans [1].

Afin de pouvoir appliquer ce théorème nous devons ajouter une hypothèse supplémentaire sur ϕ . Dans la suite du rapport on supposera donc que:

$$0 \leq \phi(x) \leq N(b-x) \text{ pour } 0 \leq x \leq b$$

2.1 Principe du maximum

Le principe du maximum est un outil très utile en analyse, il faut donc montrer que la solution au problème de Stefan le respecte bien. On a toutefois besoin d'énoncer un lemme avant de pouvoir démontrer le principe du maximum.

Comme le principe du maximum a pour objectif de montrer que la solution atteint son maximum sur les bords d'un domaine il faut que l'on détermine notre domaine au préalable. On pose donc:

$$E_T = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$$

Ce domaine est compris dans le plan (x, t) . On notera:

$$S_1 = \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}$$

$$S_2 = \{0 \leq x \leq s(t), t = 0\}$$

$$S_3 = \{x = s(t), 0 \leq t \leq T\}$$

Sur chacun des domaines S_1 , S_2 et S_3 on connaît la température $u(x, t)$ grâce aux conditions initiales données par le problème.

Lemme 2.1. *Soit $u(x, t) \in C^2$ vérifiant l'inéquation différentielle suivante:*

$$Lu = \partial_{xx}u(x, t) - \partial_t u(x, t) > 0$$

sur le domaine E_T . Alors $u(x, t)$ ne peut pas atteindre sa valeur maximum à l'intérieur de la fermeture de E_T

Proof. Supposons que $u(x, t)$ atteigne son maximum en un point $P = (x_0, t_0)$ appartenant à l'intérieur de $\overline{E_T}$. Comme le point P est un point critique on a que $\partial_t u(x, t) = 0$ et comme c'est un maximum on a que $\partial_{xx} u(x, t) < 0$. Toutefois cela amène à une contradiction puisque par hypothèse $Lu > 0$ et donc u ne peut pas atteindre sa valeur maximale à l'intérieur de $\overline{E_T}$ \square

On a maintenant tout ce qu'il nous faut pour pouvoir démontrer la théorème suivant.

Théorème 2.2. *Soit la fonction $u(x, t)$ satisfaisant l'inégalité différentielle suivante:*

$$Lu = \partial_{xx} u(x, t) - \partial_t u(x, t) \geq 0$$

dans le domaine E_T alors la valeur maximum de $u(x, t)$ sur $\overline{E_T}$ est atteinte sur un des bords S_1 , S_2 ou S_3

Proof. Soit M la plus grande valeur qu'atteint $u(x, t)$ sur S_1 , S_2 et S_3 et supposons qu'il existe un point $P = (x_0, t_0)$ dans l'intérieur de $\overline{E_T}$ tel que $u(x_0, t_0) = M_1 > M$. On définit la fonction $w(x)$:

$$w(x) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2$$

A partir de u et w on définit la fonction $v(x, t) = u(x, t) + w(x)$. Sur les bords S_1 , S_2 et S_3 on a $u(x, t) < M$ et $0 < x < l(t)$ et donc:

$$v(x, t) \leq M + \frac{M_1 - M}{2} < M_1$$

Au point intérieur P on a que:

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + 0 = M_1$$

Et sur E_T on a:

$$Lv = Lu - Lw = Lu + \frac{M_1 - M}{l^2} > 0$$

On a donc que le maximum de $v(x, t)$ est soit à l'intérieur de E_T soit sur:

$$S_4 = \{0 < x < l, t = T\}$$

Par le lemme on sait que la condition $Lv > 0$ ne permet pas d'avoir un maximum à l'intérieur de E_T . Si le maximum est sur S_4 on a que $\partial_x v(x, t) \leq 0$ ce qui implique que $\partial_x v(x, t)|_{t=T} < 0$ ce qui implique que $v(x, t)$ a une valeur plus grande à un temps antérieur à T ce qui est une contradiction avec notre hypothèse.

On en déduit donc que $u(x_0, t_0) > M$ est faux et donc que le maximum de $u(x, t)$ se trouve bien sur un des bords S_1 , S_2 ou S_3 \square

Remarque 2.1. *Il est possible de faire une démonstration similaire pour obtenir un principe du minimum, ce qui nous permet d'encadrer nos solutions*

3 Cas particulier: Bord fixe

Afin de pouvoir plus facilement étudier le problème de Stefan on a choisit de d'abord rappeler des résultats dans le cas ou le bord n'est pas en mouvement. Cela revient donc a résoudre numériquement l'équation de la chaleur dans le domaine $[0, b]$.

3.1 Schémas Numériques

On commence tout d'abord par définir les domaines d'espace et de temps en prenant $(x, t) \in [0, b] \times \mathbb{R}_+$. On est sur un domaine constant, on choisit donc de mailler le domaine de façon uniforme avec N maille et donc un pas $h = b/N + 1$ et :



On resoud donc le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{pour } 0 < x < b \quad 0 < t \leq T \\ u(0, t) = f(t) & \text{pour } 0 < t \leq T \\ u(b, t) = 0 & \text{pour } 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{pour } 0 < x \leq b \end{cases}$$

3.1.1 Schéma implicite

On propose le schéma implicite suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ on a donc :

$$\begin{cases} (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} - \lambda u_{i-1}^{n+1} = u_i^n & \text{Pour } i \in [2, N-1] \\ (1 + 2\lambda)u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} = \lambda f(n) + u_1^n & \text{Pour } i = 1 \\ (1 + 2\lambda)u_N^{n+1} - \lambda u_{N-1}^{n+1} = u_N^n & \text{Pour } i = N \end{cases}$$

On se retrouve alors avec un système type $B_h U_h^{n+1} = U_h^n + B_c$ avec :

$$B_h = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} U_h^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} U_h^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix} B_c = \begin{pmatrix} \lambda f(t) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que pour chaque ligne de B_h la somme des modules des termes non diagonaux est strictement inférieur au module du terme diagonal. On a donc que B_h est une matrice diagonale strictement dominante et elle est donc inversible. Maintenant que l'on a établi le schéma de différence finies on doit montrer qu'il converge. Pour cela il faut montrer la consistance et la stabilité du schéma.

3.1.2 Etude de la consistance

Définition 3.1. Un opérateur approché L_h est dit consistant si son erreur de troncature $\tau_h(x, t) = L_h u(x, t) - Lu(x, t) = O(\Delta t^p + \Delta x^q)$. Il est alors d'ordre $\alpha = \min(p, q)$

Pour montrer la consistance on introduit l'opérateur $L = \partial_{xx} - \partial_t$ et l'opérateur approché :

$$L_h u(x, t) = -\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

On calcule maintenant l'erreur de troncature $\tau_h(x, t) = L_h u(x, t) - Lu(x, t)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \tau_h(x, t) &= L_h u(x, t) - Lu(x, t) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(u(x, t) + \Delta t \partial_t u(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u(x, t) + O(\Delta t^3) - u(x, t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x^2} \left(u(x, t) + \Delta x \partial_x u(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u(x, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u(x, t) + \frac{\Delta x^4}{24} \partial_x^{(4)} u(x, t) + O(\Delta x^5) - 2u(x, t) \right. \\ &\quad \left. + u(x, t) - \Delta x \partial_x u(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u(x, t) - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u(x, t) + \frac{\Delta x^4}{24} \partial_x^{(4)} u(x, t) + O(\Delta x^5) \right) - Lu(x, t) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u(x, t) + \frac{\Delta x^2}{12} \partial_x^{(4)} u(x, t) + O(\Delta t^2 + \Delta x^3) \end{aligned}$$

De plus l'équation nous donne que $\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t)$ et donc on a que:

- En dérivant à nouveau selon t on a : $\partial_{tt} u(x, t) = \partial_{txx} u(x, t)$
- En dérivant deux fois selon x on a : $\partial_{txx} u(x, t) = \partial_x^{(4)} u(x, t)$
- En mettant ces deux éléments ensemble on arrive au résultat: $\partial_{tt} u(x, t) = \partial_x^{(4)} u(x, t)$

On a donc que:

$$\tau_h(x, t) = \frac{1}{2} \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{6} \right) \partial_{tt} u(x, t) + O(\Delta t^2 + \Delta x^3)$$

On a donc que la méthode est consistante d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

3.1.3 Etude de la stabilité

Définition 3.2. *Un schéma aux différences finies est dit stable en temps longs pour la norme $\|\cdot\|$ s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δx et Δt (lorsque ces valeurs tendent vers 0 tel que*

$$\|U_h^n\| < K\|U_h^0\|$$

On vas montrer la stabilité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
On a précédement exprimé U_h^{n+1} sous la forme $U_h^{n+1} = B_h^{-1}U_h^n + B_h^{-1}B_c$.
On a donc que:

$$\begin{aligned}\|U_h^{n+1}\|_\infty &= \|B_h^{-1}U_h^n + B_h^{-1}B_c\|_\infty \\ &\leq \|B_h^{-1}U_h^n\|_\infty + \|B_h^{-1}B_c\|_\infty \\ &\leq \|B_h^{-1}U_h^n\|_\infty \\ &\leq \|B_h^{-1}\|_\infty \|U_h^n\|_\infty\end{aligned}$$

Il faut donc montrer que $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq K$. En pratique on vas montrer que $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq 1$
Afin de montrer cela on vas rappeler deux résultats sur les matrice monotone et les matrices a diagonales dominantes.

Théorème 3.1. *Soit A tel que*

$$\begin{cases} a_{ii} > 0 & \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket \\ a_{ij} \leq 0 & \forall i \neq j \in \llbracket 1; N \rrbracket \end{cases}$$

alors si A est une matrice a diagonale dominante et inversible alors A est une matrice monotone

Théorème 3.2. *Si A est une matrice monotone alors :*

- $AX = 1 \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = \|X\|_\infty$
- $AX \geq 1 \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty \leq \|X\|_\infty$

En notant b_{ij} les coefficients de la matrice B_h on a que pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket, b_{ii} = 1 + 2\lambda > 0$ et pour tout $i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket, i \neq j$ on a $b_{ij} = -\lambda \leq 0$. Donc par le théorème la matrice B_h est une matrice monotone.

Il suffit donc maintenant de trouver un X tel que $B_h X \geq 1$. On remarque que :

$$B_h \mathbf{1}_N = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} \geq \mathbf{1}_N$$

On en déduit donc par le second théorème que $\|b_h^{-1}\|_\infty \leq \|\mathbf{1}_N\|_\infty = 1$

On a donc montré que le schéma est stable en norme infini

3.1.4 Conclusion

On a montré que le schéma est consistant d'ordre 1 et stable en norme infini. Le schéma converge donc vers la solution exacte lorsque Δx et Δt tendent vers 0. Nous avons choisi d'effectuer l'étude de ce schéma à bord fixe car il constitue la base du schéma à bord libre.

4 Bord libre

Le but ici va être de construire une méthode différence finie pour le problème à l'aide du support de travail.

4.1 Compréhension du schéma

Pour $i = 0, \dots, M$, on garde le même schéma implicite qu'à bord fixe :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Chaque itération en temps va nous fournir un nouveau bord s donné par :

$$\begin{cases} \frac{S_1 - S_0}{\Delta t} = \frac{u_{M-1}^0}{\Delta x} = \frac{\phi(\beta - \Delta x)}{\Delta x} \\ \frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta t} = \frac{U_{M+L(n)-1}^n}{S_n - S_{n-1}} \end{cases}$$

où $L(n)$ est un compteur qui compte le nombre de fois où le bord s'est déplacé, $[S_{n-1}]$ est le bords le plus grand avant S_n .

Maintenant qu'on a S_n , il nous faut approcher u en S_n pour tout temps supérieur ou égal à n .

Il nous faut alors définir un schéma tenant compte du caractère variable des pas d'espace entre tout nouveau bord. On écrit donc :

$$\frac{u_{M+i+1}^{n+1} - u_{M+i}^n}{\Delta t} = \frac{\frac{U_{M+i+1}^{n+1} - U_{M+i}^{n+1}}{S_{n+1} - S_n} - \frac{U_{M+i}^{n+1} - U_{M+i-1}^{n+1}}{S_n - S_{n-1}}}{\frac{1}{2}(S_{n+1} - S_{n-1})}$$

de sorte que si on considère $S_{n+1} - S_n = S_n - S_{n-1}$, on retrouve bien le schéma implicite précédent.

Ainsi :

$$u_{M+i}^n = \left(1 + \frac{2\Delta t}{\alpha\beta\gamma}(\beta + \alpha)\right)u_{M+i}^{n+1} - \left(\frac{2\Delta t\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)u_{M+i+1}^{n+1} - \left(\frac{2\Delta t\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)u_{M+i-1}^{n+1}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = S_{n+1} - S_n \\ \beta = S_n - S_{n-1} \\ \gamma = S_{n+1} - S_{n-1} \end{cases}$$

Le système à résoudre est alors augmenté d'une dimension. On augmente la taille de la matrice de discrétisation B_h tel que B_h soit toujours tridiagonale et on donne comme coefficients :

$$\begin{cases} (B_h)_{M+L(n), M+L(n)} &= (1 + \frac{2\Delta t}{\alpha\beta\gamma}(\beta + \alpha)) \\ (B_h)_{M+L(n)-1, M+L(n)} &= -(\frac{2\Delta t\beta}{\alpha\beta\gamma}) \\ (B_h)_{M+L(n), M+L(n)-1} &= -(\frac{2\Delta t\alpha}{\alpha\beta\gamma}) \end{cases}$$

De plus , on ajoute un coefficient nul en dernière position de U_h et B_c .

4.2 Deux résultats importants

4.2.1 Etude de la convergence

Avant de discuter des résultats que nous avons obtenu et de la façon dont on a mis en place ce schéma, il est intéressant d'en étudier la convergence.

Théorème 4.1. *Soit $(\Delta t^n, \Delta x^n)$ une suite ordonnée de paire ou $\{\Delta t^n\}_{n=1}^\infty$ et $\{\Delta x^n\}_{n=1}^\infty$ sont deux suite non décroissante de nombre réel tendant vers 0 lorsque $n \mapsto \infty$. Soit $((S_j)^n, (U_i^j)^n)$ la solution obtenue a partir du schéma, soit (s, u) la solution exacte de du problème de Stefan. Alors $((S_j)^n, (U_i^j)^n)$ converge vers (s, u) lorsque $n \mapsto \infty$*

Nous n'inclurons pas la preuve dans ce rapport, toutefois elle disponible dans [3] Ce résultat est important car il nous permet de nous assurer que les solutions approché que nous obtiendrons sont suffisamment proche de la solution exacte. Le théorème ne précise pas l'ordre de la méthode, toutefois on sait qu'elle ne peut être d'ordre supérieur a 1 car la méthode garde le même opérateur approché en temps qui est d'ordre 1.

4.2.2 Déplacement du bord

Ce résultat n'est pas aussi important d'un point de vu théorique mais on y fait référence plus tard dans ce rapport car il nous a permis plusieurs fois vérifier les résultats que l'on a obtenu.

Lemme 4.1. *La sequence de point $(S_j), j = 0, 1, 2, \dots, N$ est une suite monotone non décroissante*

Proof. La preuve se fait par récurrence.

En effet, comme ϕ, f sont positives, le principe du maximum implique que $U_i^j \geq 0$, pour $i = 0, 1, 2, \dots, M + L(j), j = 0, 1, 2, \dots, N$. On a donc :

$$\frac{S_1 - S_0}{\Delta t} = \frac{U_{M-1}^0}{\Delta x} = \frac{\phi(b - \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

Cela qui implique que $S_1 \geq S_0$.

Supposons maintenant $S_j \geq S_{j-1} \geq \dots \geq S_0$.

Alors :

$$\frac{S_{j+1} - S_j}{\Delta t} = \frac{U_{M+L(j)-1}^j}{S_j - [S_{j-1}]} \geq 0$$

Ce qui implique donc $S_{j+1} \geq S_j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, N$ □

4.3 Mise en place

On explique ici la procédure de code qu'on a mis en place pour résoudre le problème.

1. On discrétise les domaines de temps et d'espace et on définit toute les constantes.
2. On définit les diverses fonctions qui nous seront utiles (avant le main ou dans des modules séparés qui seront importé dans le fichier main).

3. Main :

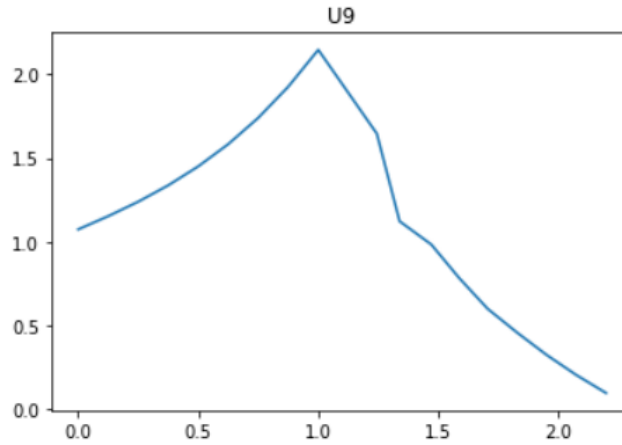
- On boucle sur le temps.
- Pour $t = 0$:
On calcule le premier bord et on résoud le système.
- Pour $t > 0$: On calcule le nouveau bord, on augmente nos matrices et vecteurs en dimensions en leur associant leurs coefficients puis on résoud le système.
On pourra afficher le graphe pour chaque temps.
- On sort de la boucle et on affiche le graphe de $s(t)$ en fonction de t .

5 Résultats numériques à bord libre

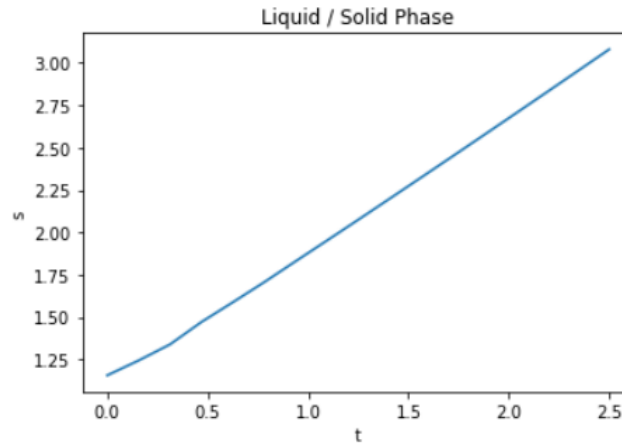
On présentera dans cette section nos résultats numériques qui nous ont donné beaucoup de difficultés. En effet, le schéma décrit précédemment colle plutôt bien à la représentation qu'on a du problème mais les résultats numériques ne correspondent pas aux résultats voulus. Le codes étant donné en annexe de ce document, nous en proposerons plusieurs versions avec d'autres coefficients qui donnent alors de meilleurs résultats par rapport à notre représentation du problème.

Remarque 5.1. *L'un des tout premiers objectifs a été de se rapprocher au mieux des résultats numérique énoncés par le support de travail qui mets bien évidence que (S_n) la suite des bords est monotone non décroissante (croissante dans la cas qu'on regarde) et que le schéma vérifie le PMD. La principale difficulté a été de comprendre et savoir quels sont les bon coefficients à mettre dans la matrice de discretisation à droite de x_M . Il a fallu comprendre exactement ce que l'on faisait. Le pas Δx étant constant sur $[0, b]$, c'est à droite de $x_M = b$ que les pas diffèrent. Il faut déjà différencier les cas où le bord bouge ou non. Si il ne bouge pas, on refait une itération sur le système qu'on a. Si le bord bouge (i.e. $S_{j+1} \neq S_j$), on augmente la matrice de discretisation qui passera d'une taille $(M + L(j)) \times (M + L(j))$ à une taille $(M + L(j) + 1) \times (M + L(j) + 1)$, toujours tridiagonale. On augmente aussi le vecteur solution U et B_c au temps t_j par l'ajout d'un coefficient nul en dernière position. On remarquera plus tard qu'il n'y a pas besoin de différencier les différents cas selon si le bord bouge ou non. (c.f. "constante" devant $-u_x(s(t), t)$).*

Considérons le schéma comme nous l'avons décrit et affichons la solution obtenue en un temps quelconque.



On remarque de suite un pic sur la solution qui ne devrait pas être là. Deux causes immédiates viennent alors. Soit le schéma, soit le code n'est pas bon. Toutefois (S_n) est croissante bien qu'elle devrait se comporter comme du racine carée en théorie.



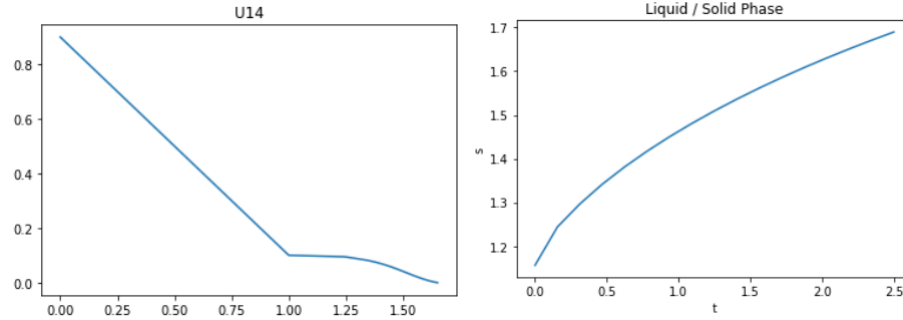
5.1 D'autres schémas

On se propose de modifier le schéma sur u pour avoir d'autre coefficients dans la matrice B_h .

- Prenons par exemple :

$$\begin{cases} u_{M+i}^n = (1 + 2\Delta t + \frac{\alpha}{\beta})u_{M+i}^{n+1} - (2\Delta t)u_{M+i+1}^{n+1} - (\frac{\alpha}{\beta})u_{M+i-1}^{n+1} \\ \alpha = S_{n+1} - S_n \\ \beta = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

Affichons la solution obtenue à un temps quelconque ainsi que le graphe de phase.

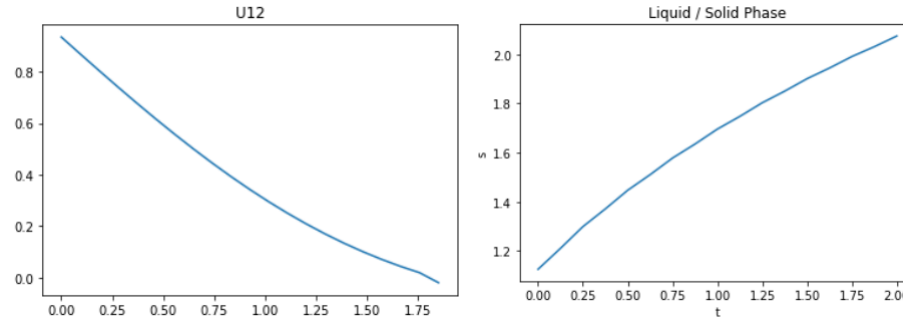


Les résultats numériques coïncident mieux avec notre perception du problème.

- Faisons maintenant un autre test cette fois en remaillant le domaine $[0, s(t)]$ de manière régulière pour chaque itération et en prenant :

$$\begin{cases} u_{M+i}^n = (\frac{2\Delta t}{\alpha}\beta)u_{M+i}^{n+1} + (1 + \frac{2\Delta t}{\alpha}\beta)u_{M+i-1}^{n+1} \\ \alpha = S_{n+1} - S_n \\ \beta = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

On obtient les graphes suivants :



A savoir que cette méthode de remaillage du domaine pour chaque temps était notre première approche du problème mais ce n'est pas la bonne méthode. En effet, on a une dépendance des bords par rapport aux valeurs de u sur nos points de maillages. Si on fait une nouvelle subdivision régulière pour chaque temps, on change les valeurs de u et donc les résultats au temps suivant seront biaisés. De plus, le remaillage à chaque temps demande de travailler sur une toute nouvelle matrice à chaque itération alors qu'avec les méthodes précédentes, on travaille avec au plus trois nouveaux coefficients.

6 Sources et Bibliographie

[1] J. R. CANNON, C. DENSON HILL, Existence, uniqueness, stability, and monotone dependance in a Stefan problem for the heat equation, J. Math. and Mech., (1) 17 (1976), 1-19.

<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:647481/FULLTEXT01.pdf>

Smith, T.C. A finite difference method for a Stefan problem. *Calcolo* 18, 131–154 (1981)