Mesures et Intégration

Marc Troyanov - EPFL - Octobre 2005

30 avril 2008

Ce document contient les notes du cours de Mesure et Intégration enseigné à l'EPFL par Marc Troyanov, version 2005-2006.

Table des matières

Première partie : Théorie de la mesure

1 Le problème de Borel-Lebesgue

Dans l'introduction de sa thèse intitulée *Intégrale, Longueur, Aire* et soutenue à Paris en 1902, Henri Lebesgue écrit : *Dans l'étude des questions relatives à la théorie des fonctions de variables réelles on reconnaît souvent qu'il serait commode de pouvoir attacher aux ensembles de points des nombres jouissants de certaines des propriétés des longueurs des segments ou des aires des polygones. On a proposé différentes définitions de ces nombres que l'on appelle les mesures des ensembles ; celle qui a été le plus souvent adoptée se trouve exposées dans le livre de Mr Jordan*[1].
Dans le premier chapitre je définis, avec Mr Borel[2]*, la mesure d'un ensemble par ses propriétés essentielles. Après avoir complété les indications un peu rapides que donne Mr Borel, j'indique quelles relations il y a, entre la mesure ainsi définie et la mesure de Mr Jordan. La définition que j'adopte s'applique aux espaces à plusieurs dimensions.*

Puis, au début du premier chapitre, il formule le problème de la façon suivante : *Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.*
2. *Deux ensembles égaux ont même mesure.*
3. *La mesure d'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.*

Faisons quelques commentaires. Lebesgue ne le dit pas explicitement, mais les ensembles considérés sont des parties de $\mathbb{R}^n$. Dans la condition (2.) le mot "égal" signifie *congru* (ou *isométrique*), Lebesgue demande que la mesure soit invariante par translations et rotations. Dans la condition (3), le mot "somme" signifie *union*, il est demandé que la mesure d'une réunion disjointe dénombrable de parties $\mathbb{R}^n$ de est la somme des mesures de ces parties. On appelle cette condition la σ-additivité de la mesure ; c'est l'une des nouveauté introduite par Borel (Jordan ne ne demandait l'additivité que pour des réunions finies d'ensembles disjoints).

En termes modernes, nous énonçons le problème de Borel-Lebesgue de la façon suivante :

Problème de Borel-Lebesgue.
A) Démontrer l'existence d'une fonction

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$$

ayant les propriétés suivantes :

(i.) Invariance par translation : Pour tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ on a : $\lambda(A + \overrightarrow{v}) = \lambda(A)$;

(ii.) σ-additivité : Si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j);$$

(iii.) Normalisation : $\lambda([0,1]^n) = 1$.

B) Prouver l'unicité d'une telle fonction.

[1]voir [7] ; un exposé moderne de la notion de volume au sens de Jordan peut se lire au début du chapitre 6 de [14].
[2]voir [2]

Remarque La condition de σ-additivité entraîne que $\lambda(\emptyset) = 0$ et

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B).$$

Pour résoudre le problème de Borel-Lebesgue, il faut une description de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ des parties de $\mathbb{R}^n$.
Le cadre pour une telle description est l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel de la théorie des ensembles (1922). On a en particulier l'axiome du choix que nous énonçons sous la forme suivante :

Axiome du choix *Soit $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de sous-ensembles non vides deux à deux disjoints d'un ensemble X. Alors on peut former un nouveau sous-ensemble $C \subset X$ tel que pour tout $i \in I$, $A_i \cap C$ est un singleton.*

Vitali a démontré en 1905 en se basant sur l'axiome du choix que le problème de Borel-Lebesgue n'a pas de solution. Il faut donc affaiblir le problème de Borel-Lebesgue. On propose ici trois variantes :

Variante I : On laisse tomber la σ-additivité
Le problème devient alors : Construire une fonction $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ telle que

(i.) λ est invariante par translation ;

(ii.) λ est additive, i.e. $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$;

(iii.) λ est normalisée, i.e. $\lambda([0; 1]^n) = 1$.

Hausdorff, Tarski et Banach ont démontré que ce problème admet une solution si $n = 1$ ou $n = 2$ et aucune si $n \geq 3$.

Variante II : On remplace la σ-additivité par la σ-sous-additivité
Le problème devient alors : Construire $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ telle que

(i.) λ^* est invariante par translation ;

(ii.) λ^* est σ-sous-additive, i.e. pour toute suite $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i);$$

(iii.) λ^* est normalisée.

On montrera que ce problème admet une solution unique λ^* qui s'appelle la *mesure extérieure de Lebesgue.*

Variante III : On définit λ non pas sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mais sur une famille plus petite $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Plus précisément, il s'agit de se donner une collection d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les conditions suivantes [3] :

(a.) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(b.) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \backslash A \subset \mathcal{A}$

(c.) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

(d.) $\mathcal{A}$ contient tous les n-rectangles compacts, i.e. tous les ensembles du type

$$R = [a_1; b_1] \times ... \times [a_n; b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

Le problème est maintenant de construire $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

(i.) λ est invariante par translation

(ii.) λ est σ-additive : si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ et les A_i sont deux à deux disjoints alors

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

(iii.) λ est normalisée.

On démontrera que ce problème admet une solution unique. La mesure $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est appelée la *mesure de Lebesgue* ou de *Borel-Lebesgue.*

2 Présentation rapide de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

La *mesure extérieure de Lebesgue* d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est le nombre $0 \leq \lambda^*(A) \leq \infty$ défini par

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$$

[3] Une collection d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ s'appelle une *tribu* ou *σ-algèbre* si elle vérifie les conditions (a),(b) et (c).

Il est clair que $\lambda^*(\emptyset) = 0$, plus généralement, $\lambda^*(A) = 0$ pour tout ensemble A fini ou dénombrable. Une autre propriété importante est la σ-sous-additivité :

$$\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i)$$

On définit également la *mesure intérieure de Lebesgue* $\lambda_*(A)$ d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$: si A est borné, on pose

$$\lambda_*(A) := (b-a) - \lambda^*\left((a,b) \setminus A\right)$$

où (a,b) est un intervalle contenant A (cette définition est indépendante du choix de l'intervalle $(a,b) \supset A$) ; dans le cas général, on pose $\lambda_*(A) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_*(A \cap [-k,k])$.

Definition 2.1 L'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est *mesurable au sens de Lebesgue* si $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$.

On note $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famille de toutes les parties mesurables de $\mathbb{R}$; si $A \in \mathcal{L}$, on note $\lambda(A) := \lambda^*(A) = \lambda_*(A)$.

Les propriétés principales de $\mathcal{L}$ et λ sont énoncées dans le théorème ci-dessous :

Théorème 2.1 *1.) Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est mesurable, tout ensemble ouvert ou fermé de $\mathbb{R}$ est mesurable.*

2.) Si $A \in \mathcal{L}$, alors $A^c \in \mathcal{L}$. Si $\{A_i\}_{i\in N} \subset \mathcal{L}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$ et $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$.

3.) Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, alors $\lambda(I)$ est la longueur de I.

4.) $\lambda(A) = 0$ pour tout ensemble A fini ou dénombrable.

5.) λ est σ-additif : si $\{A_i\}_{i\in N} \subset \mathcal{L}$ est une suite dont les éléments sont deux à deux disjoints, alors $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$.

6.) Si $\{A_i\}_{i\in N} \subset \mathcal{L}$ et $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, alors $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \lambda(A_i)$.

7.) Si $\{A_i\}_{i\in N} \subset \mathcal{L}$ et $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, et $\lambda(A_1) < \infty$ alors $\lambda(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \lambda^*(A_i)$.

8.) Si $A \in \mathcal{L}$ et si $\lambda(A) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et un fermé $F \subset \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(A) - \varepsilon < \lambda(F) \leq \lambda(A) \leq \lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Les différentes assertions de ce théorème seront démontrées dans les prochains paragraphes. □

3 Familles d'ensembles

Si X est un ensemble on note $\mathcal{P}(X)$ (ou quelquefois 2^X) l'ensemble de tous les sous-ensembles de X ; une *famille* (ou une *collection*) de parties de X est simplement un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ (et donc un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$). Une collection $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est souvent indicée (par un ensemble d'indices I quelconque), on note alors

$$\mathcal{C} = \{A_i\}_{i\in I}$$

chaque A_i étant une partie de X.
L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ est ordonné par l'inclusion, rappelons que

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad [x \in A \Rightarrow x \in B],$$

on a en particulier $\emptyset \subset A \subset X$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$.

L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ est non seulement ordonné, mais il est aussi muni de plusieurs opérations appelées *opérations booléennes* :

1) Le *complémentaire* d'un élément $A \in \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble A^c défini par

$$x \in A^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A.$$

Observer que $X^c = \emptyset$, $\emptyset^c = X$ et que $A^{cc} = A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$.

2) La *réunion* d'une collection $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} A_i := \left\{ x \in X \,\middle|\, \exists i \in I : x \in A_i \right\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est une collection finie : $\mathcal{C} := \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ on note la réunion

$$\bigcup \mathcal{C} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n.$$

3) L'*intersection* d'une collection $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} A_i := \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A_i \, \forall i \in I \right\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est une collection finie : $\mathcal{C} := \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ on note l'intersection

$$\bigcap \mathcal{C} = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n.$$

4) La *différence* de deux ensembles $A, B \in \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble

$$A \setminus B := A \cap B^c = \left\{ x \in A \,\middle|\, x \notin B \right\}.$$

5) La *différence symétrique* de A et $B \in \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Observer que $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$ et $A \triangle X = A^c$.

Lemme 3.1 *(Lois de dualités de DeMorgan) La complémentation échange les opérations de réunion et d'intersection :*

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \quad \textit{et} \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

Remarque : On admet par convention que si $I = \emptyset$, alors on a :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = X \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$$

Ainsi les lois de De Morgan sont encore vraies si $I = \emptyset$.

Définitions Une *suite de parties de* X est simplement une collection de sous-ensembles $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ indicée par les entiers naturels. La suite est dite *monotone* si pour tout entier i on a ou bien $A_i \subset A_{i+1}$ (suite monotone croissante) ou bien $A_i \supset A_{i+1}$ (suite monotone décroissante).
On dit que la suite est *disjointe* si ses éléments sont deux à deux disjoints

La *limite* d'une suite monotone est définie par

$$\begin{aligned} \lim A_i &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{si } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ est croissante,} \\ \lim A_i &:= \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{si } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

Pour une suite quelconque, on défini sa limite sup par

$$\limsup A_i := \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j \geq i} A_j \right)$$

et sa limite inf par

$$\liminf A_i := \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j \geq i} A_j \right)$$

Définition La *fonction caractéristique* d'une partie $A \in \mathcal{P}(X)$ est la fonction $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Lemme 3.2 *Les fonctions caractéristiques vérifient les propriétés suivantes :*

i.) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$ *;*

ii.) si $A \subset B$*, alors* $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ *;*

iii.) si $A = \bigcap_{i \in I} A_i$*, alors* $\mathbb{1}_A = \min_{i \in I} (\mathbb{1}_{A_i})$ *;*

iv.) si $A = \bigcup_{i \in I} A_i$*, alors* $\mathbb{1}_A = \max_{i \in I} (\mathbb{1}_{A_i})$ *;*

v.) $\mathbb{1}_{A \triangle B} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \mod 2$ *;*

vi.) si $A = \limsup_{i \to \infty} A_i$*, alors* $\mathbb{1}_A = \limsup_{i \to \infty} (\mathbb{1}_{A_i})$ *;*

vii.) si $A = \liminf_{i \to \infty} A_i$*, alors* $\mathbb{1}_A = \liminf_{i \to \infty} (\mathbb{1}_{A_i})$.

$\square$

Exercices

3.1) Décider si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$;

(b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

(c) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, k\})$.

3.2) Que vaut $X \cap \mathcal{P}(X)$?

3.3) Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ une suite de parties de l'ensemble X. Montrer que

$$\limsup A_i = \big\{x \in X \,\big|\, x \in A_i \text{ pour un nombre infini d'indices } i \in \mathbb{N}\big\}$$

et

$$\begin{aligned}\liminf A_i \quad = \quad &\big\{x \in X \,\big|\, x \in A_i \text{ pour tous les indices } i \in \mathbb{N} \\ &\qquad\qquad \text{à l'exception d'un nombre fini d'entre eux}\big\}.\end{aligned}$$

3.4) Montrer que $\liminf (A_i^c) = (\limsup A_i)^c$.

3.5) Prouver le lemme 3.2.

3.6) On dispose de trois corbeilles appelées S (source), T (transit) et F (destination finale). Au temps $t = 0$, la corbeille S contient une infinité de billes alors que T et F sont vides. Au temps $t_1 = \frac{1}{2}$, on prend deux billes dans S que l'on places dans T, puis au temps $t_2 = \frac{3}{4}$, on prend une bille dans T et on la met dans F.
On répète ensuite cette opération : au temps $t_{2k-1} = 1 - 2^{1-2k}$, on prend deux billes dans S et on les places dans T et au temps $t_{2k} = 1 - 2^{-2k}$, on prend une bille dans T pour la mettre dans F (ceci pour tout $k = 1, 2, 3, \cdots$).

La question est *combien y a-t-il de billes dans la corbeille T au temps $t = 1$?*
Quelle est votre réponse :

i.) La corbeille T contient une infinité de billes.

ii.) T ne contient aucune bille.

iii.) T peut contenir une nombre N quelconque de billes (N peut être nul, infini ou un entier naturel quelconque).

4 Anneaux et algèbres d'ensembles

Lemme 4.1 *Les opérations $\triangle$ et $\cap$ vérifient les propriétés suivantes pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$:*

a.) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$ *;*

b.) $A\triangle\emptyset = \emptyset\triangle A = A$ *;*

c.) $A\triangle A = \emptyset$ *;*

d.) $A\triangle B = B\triangle A$ *;*

e.) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *;*

f.) $A \cap B = B \cap A$ *;*

g.) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$ *;*

h.) $A \cap X = X \cap A = A$.

En d'autres termes, $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ est un anneau commutatif unitaire.

□

Remarques 1) Observons que dans cet anneau, le zéro est l'ensemble vide $\emptyset$ et l'unité est l'ensemble X. De plus chaque élément est son propre opposé ($A\triangle A = \emptyset$) et le seul élément inversible est l'ensemble X ($A \cap A = X$ si et seulement si $A = X$).

2) Notons $\mathbb{Z}_2$ l'anneau ayant deux éléments 0 et 1 (avec les opérations $0\times 0 = 0\times 1 = 1\times 0 = 0$, $1\times 1 = 1$, $0+0 = 1+1 = 0$ et $1+0 = 0+1 = 1$) et $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ l'ensemble de toutes les fonctions de X vers $\mathbb{Z}_2$. Alors $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ est aussi un anneau commutatif unitaire et l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2) \\ A & \to & \mathbb{1}_A \end{array}$$

est un isomorphisme.

Definition 4.1 (Anneau) Une collection d'ensembles $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ est un *anneau* d'ensembles si c'est un sous-anneau de $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, i.e. si $\mathcal{R}$ est non vide et

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A\triangle B,\ A\cap B \in \mathcal{R}.$$

Exemples :

1.) La collection des parties finies de X forme un anneau de $\mathcal{P}(X)$.

2.) La collection des parties bornées de $\mathbb{R}^n$ forme un anneau de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

3.) La collection des réunions finies d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$ est un anneau dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.2 $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *est un anneau si et seulement si*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$ *;*

(ii) A et $B \in \mathcal{R} \Rightarrow A\backslash B \in \mathcal{R}$ *;*

(iii) A et $B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Nous laissons la preuve de cette proposition en exercices. □

On utilise souvent cette proposition comme définition de la notion d'anneau d'ensembles.

Definition 4.2 (σ-anneau) $\mathcal{S}$ est un *σ-anneau* si $\mathcal{S}$ est un anneau fermé pour les réunions dénombrables. Donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est un σ-anneau s'il satisfait les trois propriétés suivantes :

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$;

(ii) A et $B \in \mathcal{S} \Rightarrow A\backslash B \in \mathcal{S}$;

(iii) si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.

Definition 4.3 (Algèbre) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *algèbre (booléenne)* si

(i) $\emptyset$ et $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) A et $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Exemple : La collection $\mathcal{A}$ des parties de X qui sont finies ou "cofinies", i.e. de complémentaire fini, (en clair : $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ fini ou A^c fini) est une algèbre.

Proposition 4.3 *Un anneau* $\mathcal{R}$ *est une algèbre si et seulement si* $X \in \mathcal{R}$.

Preuve Puisque $X \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ est un anneau, on a par la proposition précédente $A^c = X\backslash A \in \mathcal{R}$ pour tout $A \in \mathcal{R}$. □

Definition 4.4 (Tribu ou σ-algèbre) Une collection $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *tribu* si c'est une algèbre fermée pour les réunions dénombrables. Donc $\mathcal{A}$ est une tribu si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\emptyset$ et $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

(iii') si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemple : La familles des parties dénombrables ou codénombrables forme une σ-algèbre.

Terminologie : On appelle *espace mesurable*[4] un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{A}$.

Exercices

4.1) Prouver le lemme **??**9lem.Panneau.

Montrer ensuite que cet anneau est isomorphe à l'anneau $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ de toutes les fonctions de X vers $\mathbb{Z}_2$.

4.2) Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des singletons (= ensembles à 1 élément) de $\mathbb{R}$. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{S}$.

4.3) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, et si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, alors $\limsup A_i \in \mathcal{A}$ et $\liminf A_i \in \mathcal{A}$.

4.4) Une collection $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de sous-ensembles de X est une *algèbre* d'ensembles si elle contient $\emptyset$ et qu'elle est fermée par réunion finie et par passage au complémentaire (i.e. $\emptyset \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ et $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$) :

Montrer que la collection $\mathcal{F}$ des sous-ensembles finis ou cofinis (= de complémentaire fini) d'un ensemble X est une algèbre.
Dans quel cas $\mathcal{F}$ est-elle une $\sigma-$algèbre ?

4.5) Soit $\mathcal{R}$ la collection de toutes les réunions finies de “rectangles” du plan du type $R = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ où $I, J \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles (bornés ou non).

Montrer que $\mathcal{R}$ est une algèbre, mais n'est pas une σ-algèbre.

4.6) **a.)** Combien de tribus peut-on former sur un ensemble X ayant 2 éléments ?
b.) Et si X possède 3 éléments ?

---

5 Autres types de familles d'ensembles

Definition 5.1 (Topologie) Une *topologie* sur X est une collection $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

(i) $\emptyset$ et $X \in \mathcal{O}$;

(ii) si U et $V \in \mathcal{O}$ alors $U \cap V \in \mathcal{O}$;

(iii) si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{O}$ alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

[4] On appelle aussi *espace borélien* un tel couple $(X, \mathcal{A})$, toutefois nous n'utiliserons pas cette terminologie car elle nous semble pouvoir prêter à confusion

Exemples :

1.) $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est la *topologie grossière sur* X.

2.) $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ est la *topologie discrète sur* X.

3.) Si d est une métrique, alors X est un espace métrique, et on peut définir une topologie sur X comme suit : $U \in \mathcal{O}$ si et seulement si pour tout $x \in U$ il existe $\epsilon > 0$ tel que si $d(x,y) < \epsilon \Rightarrow y \in U$.

Terminologie : On appelle *espace topologique* un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{O}$. Les éléments $U \in \mathcal{O}$ s'appellent les *ouverts* de l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$.

Definition 5.2 (Classe monotone) $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *classe monotone* si pour toute suite $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, on a :

(i) Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$;

(ii) si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.

Proposition 5.1 *$\mathcal{A}$ est une σ-algèbre si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

a.) $\mathcal{A}$ est une algèbre :

b.) $\mathcal{A}$ est une classe monotone.

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre . Alors $\mathcal{A}$ est une algèbre, il suffit donc de vérifier (b). La condition (i) est claire et la condition (ii) découle des lois de DeMorgan : $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\mathcal{A}$ une algèbre qui est une classe monotone et soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ une suite quelconque ; on doit montrer que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, alors $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ par hypothèse (car $\mathcal{A}$ est une classe monotone).

Sinon, on pose récursivement $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cup B_1, \cdots, B_k = A_k \cup B_{k-1} \cdots$

On a donc $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$, et par conséquent, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$.

Et comme $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ alors on a montré que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

$\square$

Scholie 5.2 *On a démontré en passant que dans une σ-algèbre $\mathcal{A}$, on a toujours*

$$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

6 Tribu engendrée par une famille d'ensembles

Lemme 6.1 *(a) Une intersection quelconque d'algèbres sur un ensemble X est encore une algèbre.*
(b) Une intersection quelconque de tribus sur un ensemble X est encore une tribu.

Preuve (a) On doit montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ est une collection de parties de $\mathcal{P}(X)$ dont chaque élément est une algèbre, alors l'intersection $\cap\mathcal{E} = \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{E}}\mathcal{A}$ est encore une algèbre.
Notons $\mathcal{B} = \cap\mathcal{E}$, alors

i.) $\emptyset; X \in \mathcal{B}$ car $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$.

ii.) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ donc $A^c \in \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, d'où $A^c \in \mathcal{B}$.

iii.) Si $A, B \in \mathcal{B}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, par conséquent $A \cup B \in \mathcal{B} = \cap\mathcal{E}$.

(b) Pour démontrer que $\mathcal{B}$ est une tribu, il suffit maintenant de prouver que $\mathcal{B}$ est fermé pour les réunions dénombrables : Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, alors $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ et donc $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$; par conséquent $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

□

Definition 6.1 Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille d'ensembles. La plus petite tribu $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{S}$ (i.e. l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{S}$) s'appelle la tribu *engendrée par* $\mathcal{S}$ et se note

$$\mathcal{A} = \text{Tribu}(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S}).$$

Exemples 6.2 (1) Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique, alors la tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par les ouverts s'appelle la *tribu borélienne* de $(X, \mathcal{O})$ et se note $\mathcal{B}(X, \mathcal{O})$.

(2) *Tribu produit* : Soient $\mathcal{A}$ une tribu sur X et $\mathcal{B}$ une tribu sur Y. On note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille d'ensembles suivante :

$$\{A \times B \subset X \times Y \quad \text{tels que} \quad A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}\}$$

On appelle $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la *tribu produit (tensoriel)* sur $X \times Y$.

(3) *L'espace des messages* : Soit A un ensemble fini quelconque non-vide. (on dira que A est un “alphabet”). Soit

$$M_A = A^{\mathbb{N}} = (\text{l'ensemble des suites d'éléments de} A) = \{m = a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_j \in A\},$$

les éléments de M_A sont les *messages* en A.
Soit $\omega = c_0 c_1 c_2 \dots c_r$ (avec $c_j \in A$) un mot (séquence) fini(e) en A et $k \in \mathbb{N}$. Alors le *cylindre* associé à ω et k est l'ensemble

$$C_k(\omega) := \{m = a_1 a_2 a_3 \dots \bigm| a_k = c_0, a_{k+1} = c_1, \dots, a_{k+r} = c_r\} \subset M_A.$$

Notons $\mathcal{C}$ la σ-algèbre sur M_A engendrée par la famille de tous les cylindres $\{C_k(\omega) \subset M_A\}$. On appelle $\mathcal{C}$ la *tribu cylindrique sur M_A*.

Exercices

6.1) Soit X un espace métrique (ou topologique). La *tribu borélienne* sur X est la σ-algèbre $\mathcal{B}(X)$ engendrée par la collection de tous les ouverts $U \subset X$.

Montrer que $\mathcal{B}(X)$ est également engendrée par la collection de tous les fermés $F \subset X$.

6.2) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la collection de tous les intervalles fermés $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

6.3) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par la collection de tous les intervalles du type $(-\infty, b] \subset \mathbb{R}$ où $b \in \mathbb{Q}$.

Définition : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle *atome* de $(X, \mathcal{A})$ un élément non vide de $\mathcal{A}$ qui est minimal. Ainsi $E \subset X$ est un atome si

- $E \in \mathcal{A}$;
- $E \neq \varnothing$;
- pour tout $F \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset E$, on a ou bien $F = E$ ou bien $F = \emptyset$.

6.4) Montrer que les atomes forment une partition de X.

6.5) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection finie d'ensembles.

(a) Montrer que la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{C}$ contient un nombre fini d'éléments.

(b) Notons m le nombre d'atomes et $n =$Card$(\mathcal{A})$. Quelle est la relation entre m et n.

(c) Comment décrire $\mathcal{A}$ à partir des atomes $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$.

(d) L'algèbre $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\mathcal{C}$ est elle différente de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{C}$?

6.6) Existe-t-il une tribu ayant 34 éléments ?

6.7) Quels sont les atomes de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$?

6.8) Soient $X = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{O} := \{X, \emptyset, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(X)$.

(a) Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur l'ensemble X.

(b) Décrire la tribu borélienne $\mathcal{B}(X; \mathcal{O})$.

(c) Quels sont les atomes de cette tribu ?

(d) * Cette topologie dérive-t-elle d'une métrique ?

---

7 Espaces Mesurés

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable (i.e. un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$).

Definition 7.1 Une *mesure* sur $(X, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, telle que :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Si $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ est une suite disjointe, alors

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definition 7.2 Un *espace mesuré* est un triplet (X, A, μ) tel que $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et μ est une mesure.

Remarque 7.3 a.) La condition (ii) s'appelle la *σ-additivité* de la mesure.
b.) On peut remplacer la condition (i) par :

(i') Il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$.

Exemples 7.4

(1) $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

(2) $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ +\infty & A \neq \emptyset \end{cases}$

(3) *Masse de Dirac* : Soit $x \in X$. On pose $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

(4) *Mesure de comptage* : $\tau(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

(5) *Comptage pondéré* : Soient $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $p_i \geq 0$, des poids (= nombres ≥ 0). Alors $\tau_p(A) = \sum_{k \in A} p_k$ est une mesure.

(6) On peut faire des combinaisons linéaires (même infinies) à coefficients ≥ 0. A titre d'illustration, dans l'exemple (5), on a $\tau_p = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \delta_k$. En effet, $\tau_p(A) = \displaystyle\sum_{k \in A} p_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \delta_k(A)$.

(7) *Restriction d'une mesure* : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $D \in \mathcal{A}$; alors on définit une nouvelle mesure ν sur $(X, \mathcal{A})$ en posant $\nu(A) := \mu(A \cap D)$. Cette mesure se note $\nu = \mu \llcorner D$ et s'appelle la *restriction de μ à D*.

D'autres mesures (*Lebesgue, Hausdorff, Bernoulli, ...*), plus importantes, seront introduites plus tard.

Definition 7.5 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Alors on dit que

(i) μ est *finie* si $\mu(X) < \infty$.

(ii) μ est une *mesure de probabilité* si $\mu(X) = 1$.

(iii) μ est *σ-finie* si $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, avec $A_i \in \mathcal{A}$ et $\mu(A_i) < \infty$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exemples 7.6 La mesure de comptage τ est σ-finie sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7.1 ***(Propriétés élémentaires des espaces mesurés)***

(a.) Si $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

(b.) Si $B \subset A$ alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(c.) Monotonie : Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.

(d.) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(e.) Si $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ alors $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (rappelons qu'on a égalité si l'union est disjointe).

Nous laissons la preuve en exercice. □

Remarque 7.7 La condition (e.) s'appelle la *σ-sous-additivité*.

Théorème 7.2 (Continuité des mesures) *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *une suite monotone.*

(i) Si la suite est croissante ($A_1 \subset A_2 \subset \cdots$)*, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

(ii) Si la suite est décroissante ($A_1 \supset A_2 \supset \cdots$) *et* $\inf \mu(A_i) < \infty$*, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

Preuve (i) Posons $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, \ldots, B_n = A_n \backslash A_{n-1}$. Alors les B_i sont disjoints, donc

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i)$$

Or, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\displaystyle\mu(A_k) = \mu(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i)$, donc

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(ii) L'hypothèse $\inf \mu(A_i) < \infty$ signifie qu'il existe i tel que $\mu(A_i) < \infty$. Comme la suite A_i est décroissante, on peut supposer $\mu(A_1) < \infty$. Notons $A = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ et $C_i = A_1 \backslash A_i$ ($i \in \mathbb{N}$), alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = A_1 \backslash A$ et donc

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

Remarquons que $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$, et donc par (i), on sait que $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(C_i)$.
D'autre part $\mu(C_k) = \mu(A_1 \backslash A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$, on a donc

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(C_i) = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)),$$

d'où l'on déduit finalement que $\displaystyle\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_i)$. □

Remarque 7.8 L'hypothèse $\inf \mu(A_i) < \infty$ dans l'assertion (ii) est indispensable. Par exemple, si $X = \mathbb{N}$ et τ est la mesure de comptage, alors la suite

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq k\} = [k, \infty) \cap \mathbb{N}$$

vérifie bien $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, mais

$$\infty = \lim_{k\to\infty} \tau(A_k) \neq \tau\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_k\right) = \tau(\emptyset) = 0.$$

Exercices

7.1) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $x, y \in X$. Supposons que $\delta_x = \delta_y$ où δ_x, δ_y sont les mesures de Dirac associées.
A-t-on nécessairement $x = y$?
Donner des exemples. Donner une condition nécessaire et suffisante. Discuter le cas de la tribu borélienne.

7.2) Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, posons pour $A, B \in \mathcal{A}$

$$\rho(A, B) := \mu(A \triangle B).$$

Montrer que ρ possède presque les propriétés d'une distance :

(a) $\rho(A, B) \geq 0$;
(b) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
(c) $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$.

Montrer ensuite que $A \sim B \Leftrightarrow \rho(A, B) = 0$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$ et que, par conséquent, le quotient $\mathcal{A}/\sim$ est un espace métrique.

7.3) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un ensemble $N \subset X$ est *μ-négligeable* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On note $\mathcal{N}_\mu$ la collection de tous les ensembles μ-négligeables de X.

a) Montrer que que $\mathcal{N}_\mu$ est un anneau d'ensembles.

b) On note $\widetilde{\mathcal{A}}$ la collection de tous les ensembles du type $(A \cup N)$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$. Montrer que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu.

c) Montrer que la formule $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ (pour $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$) définit une mesure sur $(X, \widetilde{\mathcal{A}})$.

Définition : On dit que l'espace mesuré $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ est le *complété* de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

7.4) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable quelconque, $a \in X$ un point et δ_a la mesure de Dirac associée. Décrire le complété de $(X, \mathcal{A}, \delta)$ dans les deux cas suivants :
a) Si $\mathcal{A}$ est la tribu grossière $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$.
b) Si la tribu $\mathcal{A}$ contient l'ensemble $\{a\}$.

7.5) Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ que l'on suppose localement finie (i.e. $\mu(A) < \infty$ pour tout ensemble borné $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Montrer que pour tout point $a \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i.) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $a \in A$ et $\mu(A) < \varepsilon$.
ii.) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mu([a - \delta, a + \delta]) < \varepsilon$.

7.6) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, alors

i.) $\mu(\liminf_{i \to \infty} A_i) \leq \liminf_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

ii.) (Lemme de Borel-Canteli) : Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$, alors $\mu(\limsup_{i \to \infty} A_i) = 0$.

7.7) Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit F la fonction définie par $F(x) := \mu((-\infty, x])$ (F s'appelle la *fonction de répartition* de μ).
(a) Montrer que F est croissante et semi-continue à droite.
(b) Montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

8 Applications mesurables et mesures images

Rappelons que si $f : X \longrightarrow Y$ est une application, alors l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & B & \longrightarrow & f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{array}$$

est compatible avec les opérations booléennes :

a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(Y) = X$

b) $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$

c) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

Conséquence : Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ est une σ-algèbre, alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est encore une σ-algèbre sur X (de même, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ est un anneau ou une algèbre, alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est encore un anneau, respectivement une algèbre sur X).

Definition 8.1 Si $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ sont deux espaces mesurables, alors une application $f : X \to Y$ est dite $(\mathcal{A}$-$\mathcal{B})$-*mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$, en d'autres termes si pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Le lemme suivant donne un critère utile de mesurabilité d'une application :

Lemme 8.1 *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Supposons que la tribu $\mathcal{B}$ est engendrée par une famille d'ensembles $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$. Alors une application $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est $(\mathcal{A}$-$\mathcal{B})$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.*

Preuve Il est évident que si $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est $(\mathcal{A}$-$\mathcal{B})$-mesurable, alors $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ (puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$). Pour montrer la réciproque, on considère la famille d'ensembles

$$\mathcal{F} := \big\{ E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \big\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

On vérifie aisément que $\mathcal{F}$ est une tribu ; or cette tribu contient $\mathcal{C}$ par hypothèse. Donc elle contient aussi $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, puisque $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Mais dire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ signifie que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, c'est à dire que f est $(\mathcal{A}$-$\mathcal{B})$-mesurable.

□

Lemme 8.2 *Si $f : X \to Y$ est une application $(\mathcal{A}$-$\mathcal{B})$-mesurable et si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, alors la formule*

$$\nu(B) := \mu(f^{-1}(B))$$

(pour tout $B \in \mathcal{B}$) définit une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Definition 8.2 ν se note $f_*\mu$ et s'appelle la *mesure image par f* de μ.

Preuve (du lemme)

(i) $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

(ii) Si $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ est une suite disjointe alors $\{f^{-1}(B_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ est une suite disjointe et donc

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(B_i)$$

car $\{f^{-1}(B_i)\}$ est une suite disjointe. □

Exemple 8.3 Soient X et Y deux ensembles quelconques, et soient $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ une σ-algèbre quelconque sur Y. Alors toute application $f : X \to Y$ est $(\mathcal{A}$-$\mathcal{B})$-mesurable et $\nu = f_*\tau$ est la mesure qui compte le nombre de préimages :

$$\nu(B) = f_*\tau(B) = \tau(f^{-1}(B)) = \mathrm{Card}\{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Exercices

8.1) Trouver un exemple d'application non mesurable $f : X \to Y$ entre deux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$.

8.2) Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Montrer que toute application continue $f : X \to Y$ est $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}(Y)$ mesurable.

---

9 Mesure extérieure et théorème de Carathéodory

But : Construire la mesure de Lebesgue (et d'autres mesures) au moyen des mesures extérieures. Pour ce faire, on utilisera la méthode de Constantin Carathéodory (1914).

Definition 9.1 Une *mesure extérieure* sur un ensemble X est une application

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$$

telle que

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) (monotonicité) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) (σ-sous-additivité) Pour toute suite d'ensembles $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Exemple 9.2 a) $\mu^*(A) = 0$ pour tout $A \subset X$ est une mesure extérieure.

b) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ +\infty & A \neq \emptyset \end{cases}$

c) $\mu^*(A) = \begin{cases} \mathrm{Card}(A) & \text{A fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

d) La mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ qui est la fonction $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par la formule

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \right\}$$

Lemme 9.1 *Si μ^* une mesure extérieure sur X, alors*

$$\mu^*(A_1 \cup ... \cup A_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A_i).$$

Preuve Il suffit de compléter la suite finie A_i en une suite infinie d'ensembles en posant $A_j = \emptyset$ pour $j = k+1, ..., \infty$. $\square$

Definition 9.3 Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Un ensemble $A \subset X$ est μ^*-*mesurable (au sens de Carathéodory)* si pour tout $Q \subset X$ on a

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c).$$

Remarque 9.4 L'inégalité opposée $\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c)$ est toujours vérifiée par le lemme précédent. En particulier, un ensemble A est μ^*-mesurable si et seulement si

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c)$$

pour tout $Q \subset X$.

Théorème 9.2 (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur X ; notons $\mathcal{M}_{\mu^*} \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties μ^*-mesurables, alors*

1.) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est une σ-algèbre.

2.) $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ est une mesure sur $(X, \mathcal{M}_{\mu^*})$.

3.) L'espace mesuré $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$ est complet, i.e. si $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ et $\mu(E) = 0$, alors tout sous-ensemble $A \subset E$ appartient à $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

Ce théorème est donc une machine qui fait correspondre à tout ensemble X muni d'une mesure extérieure un espace mesuré

$$\underbrace{(X, \mu^*)}_{\text{mesure extrieure}} \longrightarrow \underbrace{(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)}_{\text{espace mesur}}.$$

Preuve Montrons d'abord que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est une σ-algèbre.
Observons premièrement qu'il est évident à partir de la définition que $\emptyset$ et $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Il est tout aussi clair que si $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, alors $A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.
On doit donc seulement prouver que si $\{A_i\} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ est une suite d'ensembles μ^*-mesurables, alors la réunion $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ est encore μ^*-mesurable.
Notons $B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1$ et $B_j = B_{j-1} \cup A_{j-1} = \cup_{i=1}^{j-1} A_i$ pour $j \geq 2$.
Observons que B_j est monotone : $B_j \subset B_{j+1}$, $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim B_j$
et que pour tout ensemble $Q \subset X$, on a

$$Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(Q \cap B_j^c \cap A_j \right). \tag{9.1}$$

Considérons la condition (P_k) suivante :

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} \mu^*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \tag{P_k}$$

La condition (P_1) dit simplement que

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A_1^c) + \mu^*(Q \cap A_1);$$

elle est donc vérifiée puisque A_1 est μ^*-mesurable.

Observons en outre que, par la mesurabilité de A_{k+1}, on a

$$\begin{aligned}\mu^*(Q \cap B_{k+1}^c) &= \mu^*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c) + \mu^*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}) \\ &= \mu^*(Q \cap B_{k+2}^c) + \mu^*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1})\end{aligned}$$

car $B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c = (B_{k+1} \cup A_{k+1})^c = B_{k+2}^c$.
En supposant que (P_k) est vérifiée, on a donc

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B_{k+2}^c) + \sum_{j=1}^{k+1} \mu^*(Q \cap B_j^c \cap A_j),$$

qui n'est autre que la condition (P_{k+1}). On a ainsi montré que (P_k) entraîne (P_{k+1}), par induction, cette condition est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Comme $B_{k+1} \subset A$, on a $Q \cap B_{k+1}^c \supset Q \cap A^c$ et donc

$$\mu^*(Q \cap B_{k+1}^c) \geq \mu^*(Q \cap A^c)$$

La condition (P_k) entraîne donc que

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{k} \mu^*(Q \cap B_j^c \cap A_j)$$

pour tout k et donc

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap B_j^c \cap A_j). \tag{9.2}$$

En utilisant (9.1) et (9.2), on a donc

$$\begin{aligned}\mu^*(Q \cap A^c) + \mu^*(Q \cap A) &= \mu^*(Q \cap A^c) + \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j)\right) \\ &\leq \mu^*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &\leq \mu^*(Q),\end{aligned}$$

ce qui montre que $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ est μ^*-mesurable.

Nous devons maintenant prouver que la restriction $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ est une mesure. La condition $\mu(\emptyset) = 0$ est vraie par définition ; nous devons donc seulement montrer que si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ est une suite disjointe, alors

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Choisissons $Q = A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, alors $Q \cap A^c = \emptyset$ et $Q \cap B_j^c \cap A_j = A_j$ pour tout j (car $\{A_j\}$ est une suite disjointe) ; l'équation (9.2) entraîne donc

$$\mu^*(Q) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

et par conséquent $\mu(A) = \mu(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Finalement, le fait que $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$ est complet est trivial.

□

Le théorème précédent nous dit que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est une σ-algèbre, mais nous ne savons pas à priori si elle contient beaucoup d'ensembles. Le critère suivant est à cet égard d'une grande importance.

Definition 9.5 Soit μ^* une mesure extérieure sur un espace métrique (X, d) :
a) On dit que μ^* une mesure extérieure *borélienne* si tout borélien est μ^*-mesurable, i.e. $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.
b) Une mesure extérieure μ^* est de *type métrique* si pour tous $A, B \subset X$ vérifiant

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf \left\{ d(x, y) \,\middle|\, x \in A \text{ et } y \in B \right\} > 0,$$

on a $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Proposition 9.3 (Critère de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un espace métrique (X, d). Si μ^* est de type métrique, alors μ^* est borélienne.*

Preuve Il suffit de prouver que tout fermé $F \subset X$ est μ^*-mesurable, i.e. vérifie

$$\mu^*(Q \cap F) + \mu^*(Q \setminus F) \leq \mu^*(Q)$$

pour tout $Q \subset X$. On peut supposer $\mu^*(Q) < \infty$.
Posons $Q_0 := \left\{ x \in Q \,\middle|\, d(x, F) \geq 1 \right\}$ et

$$Q_k := \left\{ x \in Q \,\middle|\, \frac{1}{k+1} \leq d(x, F) \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Il est clair que $\operatorname{dist}(Q_k, Q_{k+2}) > 0$, pour tout k, par conséquent

$$\sum_{j=0}^{m} \mu^*(Q_{2j}) = \mu^*(\cup_{j=0}^{m} Q_{2j}) \leq \mu^*(Q) < \infty,$$

ce qui entraîne en particulier que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(Q_{2j})$ converge. De même $\sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(Q_{2j+1})$ converge.

Notons

$$P_m := \cup_{k=0}^{2m+1} Q_k = \left(\cup_{j=0}^{m} Q_{2j}\right) \cup \left(\cup_{j=0}^{m} Q_{2j+1}\right)$$

Observons que $Q \setminus F = P_m \cup \left(\cup_{k=2m+2}^{\infty} Q_k\right)$ puisque F est fermé, donc $\mu^*(Q \setminus F) \leq \mu^*(P_m) + \sum_{k=2m+2}^{\infty} \mu^*(Q_k)$, et comme $\sum \mu^*(Q_k)$ converge, on a

$$\mu^*(Q \setminus F) \leq \lim_{m \to \infty} \mu^*(P_m).$$

D'autre part, comme $\mathrm{dist}(P_m, Q\cap F) > 0$ on a

$$\mu^*(Q\cap F) + \mu^*(P_m) = \mu^*\left((Q\cap F)\cup P_m\right) \le \mu^*(Q).$$

Ces deux inégalités entraînent

$$\mu^*(Q\cap F) + \mu^*(Q\setminus F) \le \mu^*(Q\cap F) + \lim_{m\to\infty} \mu^*(P_m) \le \mu^*(Q).$$

□

Exercices

9.1) Pour $A \subset \mathbb{N}$, on note

$$s_n(A) = \mathrm{Card}\{k\in A \ :\ k\le n\}$$

et

$$\eta(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{s_n(A)}{n}.$$

A) S'agit-il d'une mesure sur $\mathbb{N}$ (muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) ?

B) S'agit-il d'une mesure extérieure ?

9.2) On définit $\nu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ par

$$\nu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est borné} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

s'agit-il d'une mesure extérieure ?

9.3) On définit $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ par

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que μ^* est une mesure extérieure.
b) Quels sont les ensembles μ^*-mesurables ?

9.4) Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Montrer que tout ensemble $A\subset X$ tel que $\mu^*(A) = 0$ est μ^*-mesurable.

9.5) On définit $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ par

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que μ^* est une mesure extérieure.
b) Quels sont les ensembles μ^*-mesurables ?
c) Vérifier le théorème de Carathéodory sur cet exemple.

9.6) Soient X un ensemble et $\{\mu_i : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]\}_{i\in I}$ une famille quelconque de mesures extérieures sur X. Montrer que $\mu := \sup_{i\in I} \mu_i$ est une mesure extérieure sur X.

Qu'en est-il de $\nu := \inf_{i\in I} \mu_i$?

9.7) On définit la *mesure extérieure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \right\}$$

Montrer qu'il s'agit en effet d'une mesure extérieure.

---

10 Constructions de mesures extérieures

Les résultats du paragraphe précédents ne sont utiles que si l'on dispose d'une mesure extérieure. Le but de ce paragraphe est de donner des méthodes générales de constructions de mesures extérieures.

Donnons-nous une collection d'ensembles $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que $\emptyset \in \mathcal{V}$ et contenant une famille dénombrable $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ telle que $X = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$. Donnons-nous également une fonction $\eta : \mathcal{V} \to [0,\infty]$ telle que

a.) $\eta(\emptyset) = 0$;

b.) si $\{V, V'\} \subset \mathcal{V}$ et $V \subset V'$, alors $\eta(V) \leq \eta(V')$.

On dit alors que η est une *proto-mesure* sur $(X, \mathcal{V})$.

Théorème 10.1 *Soient $\mathcal{V}$ et $\eta : \mathcal{V} \to [0,\infty]$ comme plus haut. Définissons $\mu_\eta^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ par*

$$\mu_\eta^*(A) := \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta(V_i) \right) \,\middle|\, \{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V} \ \text{ et } \ A \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i \right\}.$$

Alors

1.) $\mu_\eta^*(A)$ est une mesure extérieure sur X ;

2.) de plus $\mu_\eta^*(A)$ est la plus grande mesure extérieure sur X vérifiant

$$\mu_\eta^*(V) \leq \eta(V) \ \text{pour tout } V \in \mathcal{V}.$$

Definition 10.1 On dit qu'une mesure extérieure est construite par la *méthode I* si elle est obtenue en appliquant ce théorème.

Preuve (1.) Il est clair que $\mu_\eta^*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B \subset X$, alors $\mu_\eta^*(A) \leq \mu_\eta^*(B)$, il faut donc uniquement démontrer que μ_η^* est σ-sous-additive.
Soit donc $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ une suite quelconque de parties de X, fixons $\varepsilon > 0$ et notons $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite $\{V_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ telle que $A_n \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_{n,i}$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta(V_{n,i}) \leq \mu_\eta^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Comme $A \subset \bigcup_{i,n} V_{n,i}$, on a

$$\begin{aligned} \mu_\eta^*(A) &\leq \sum_{n,i} \eta(V_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \eta(V_{n,i}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_\eta^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\eta^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc la σ-sous-additivité $\mu_\eta^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\eta^*(A_n)$ puisque ε est arbitraire.

(2.) Il est clair que $\mu_\eta^*(V) \leq \eta(V)$ pour tout $V \in \mathcal{V}$ (prendre le recouvrement $V_1 = V$ et $V_i = \emptyset$ pour $i > 1$). Pour montrer que μ_η^* est maximale avec cette propriété, on se donne une autre mesure extérieure ν^* sur X telle que $\nu^*(V) \leq \eta(V)$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. Pour tout $A \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ telle que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta(V_i) \leq \mu_\eta^*(A) + \varepsilon.$$

Mais alors

$$\nu^*(A) \leq \nu^*(\cup_{i=1}^{\infty} V_i) \leq \sum_i \nu^*(V_i) \leq \sum_i \eta(V_i) \leq \mu_\eta^*(A) + \varepsilon,$$

et donc $\nu^*(A) \leq \mu_\eta^*(A)$ puisque ε est arbitraire.

□

Remarque En général une mesure extérieure μ_η^* construite par la méthode I n'est pas borélienne. Nous allons donc maintenant étudier un raffinement de cette méthode qui nous garantira que les ensembles boréliens sont mesurables.

Soient (X, d) un espace métrique et $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de sous-ensembles de X.

Definition 10.2 On dit que $\mathcal{V}$ vérifie la *condition de Vitali* si $\emptyset \in \mathcal{V}$ et si pour tout $\delta > 0$ il existe une suite $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ telle que $\operatorname{diam}(V_i) < \delta$ pour tout i et $X = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$.

Exemples 1) La famille de tous les sous-ensembles bornés de X,
2) La famille de toutes les boules (ouvertes ou fermées) de X,
3) La famille de tous les cubes dans $\mathbb{R}^n$,
vérifient la condition de Vitali.

Soit $\mathcal{V}$ un système de Vitali sur X et $\eta : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une proto-mesure.
Notons $\mathcal{V}^\delta = \{V \in \mathcal{V} \mid \operatorname{diam}(V) \leq \delta\}$, puis notons

$$\mu_{\eta,\delta}^*(A) := \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta(V_i)\right) \mid \{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une suite d'éléments de } \mathcal{V}^\delta \text{ recouvrant } A\right\}.$$

Comme on a $\mathcal{V}^\delta \subset \mathcal{V}^{\delta'}$ si $\delta \leq \delta'$, on a clairement $\mu_{\eta,\delta}^*(A) \geq \mu_{\eta,\delta'}^*(A)$ pour tout $A \subset X$, on pose alors

$$\widetilde{\mu}_\eta(A) := \lim_{\delta\to 0} \mu_{\eta,\delta}^*(A) = \sup_{\delta>0} \mu_{\eta,\delta}^*(A).$$

Théorème 10.2 *$\widetilde{\mu}_\eta$ est une mesure extérieure borélienne sur X.*

On obtient donc une "vraie" mesure μ_η en restreignant $\widetilde{\mu}_\eta$ à $\mathcal{B}(X)$. On dit que cette mesure est construite par la *méthode II.*

Preuve Vérifions d'abord que $\widetilde{\mu}_\eta = \sup_{\delta>0} \mu_{\eta,\delta}^*$ est une mesure extérieure sur X. Il est clair que $\widetilde{\mu}_\eta(\emptyset) = 0$, puisque $\mu_{\eta,\delta}^*(\emptyset) = 0$ pour tout $\delta > 0$. D'autre part, si $A \subset B$, alors $\mu_{\eta,\delta}^*(A) \leq \mu_{\eta,\delta}^*(B)$ pour tout $\delta > 0$ et donc

$$\widetilde{\mu}_\eta(A) = \sup_{\delta>0} \mu_{\eta,\delta}^*(A) \leq \sup_{\delta>0} \mu_{\eta,\delta}^*(B) = \widetilde{\mu}_\eta(B).$$

Le même raisonnement montre que pour toute suite $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$

$$\widetilde{\mu}_\eta(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}_\eta(A_i).$$

Ce qui prouve donc que $\widetilde{\mu}_\eta$ est une mesure extérieure. Pour montrer qu'elle est borélienne, on utilise la proposition 9.3. On doit donc montrer que si $A, B \subset X$ vérifient $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, alors $\widetilde{\mu}_\eta(A \cup B) = \widetilde{\mu}_\eta(A) + \widetilde{\mu}_\eta(B)$. Fixons δ tel que $0 < \delta < \operatorname{dist}(A, B)$ et $\varepsilon > 0$ arbitraire. On peut alors trouver une suite $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}^\delta$ recouvrant $A\cup B$ et telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \eta(V_i) \leq \widetilde{\mu}_{\eta,\delta}(A\cup B)+\varepsilon$. Définissons $I_A, I_B \subset \mathbb{N}$ par

$$I_A := \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, V_i \cap A \neq \emptyset \right\} \quad \text{et} \quad I_B := \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, V_i \cap B \neq \emptyset \right\}.$$

Il est clair que $A \subset \bigcup_{i\in I_A} V_i$ et $B \subset \bigcup_{i\in I_B} V_i$. D'autre part comme chaque ensemble V_i est de diamètre au plus $\delta < \operatorname{dist}(A, B)$, on a $I_A \cap I_B = \emptyset$ (car un ensemble de diamètre inférieur à la distance entre A et B ne peut rencontrer que l'un de ces deux ensembles) ; on a donc

$$\mu^*_{\eta,\delta}(A) + \mu^*_{\eta,\delta}(B) \leq \sum_{i\in I_A} \eta(V_i) + \sum_{j\in I_B} \eta(V_j) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta(V_i) \leq \mu^*_{\eta,\delta}(A \cup B) + \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\mu^*_{\eta,\delta}(A) + \mu^*_{\eta,\delta}(B) \leq \mu^*_{\eta,\delta}(A \cup B)$. L'inégalité inverse $\widetilde{\mu}_{\eta\delta}(A) + \widetilde{\mu}_{\eta,\delta}(B) \geq \widetilde{\mu}_{\eta,\delta}(A \cup B)$ est vraie pour toute mesure extérieure. On a donc montré que pour tout $0 < \delta < \operatorname{dist}(A, B)$, on a

$$\widetilde{\mu}_{\eta\delta}(A) + \widetilde{\mu}_{\eta,\delta}(B) = \widetilde{\mu}_{\eta,\delta}(A \cup B).$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, on a donc $\widetilde{\mu}_\eta(A\cup B) = \widetilde{\mu}_\eta(A)+\widetilde{\mu}_\eta(B)$ et la preuve est ainsi complète.

□

11 La mesure de Lebesgue

11.1 Construction

Definition 11.1 Un *cube (axiparallèle)* de côté $a \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble du type

$$Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n,$$

où $I_k \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) de longueur a. Le *n-volume* d'un tel cube est défini par

$$\operatorname{Vol}_n(Q) = a^n.$$

Notons $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la collection de tous les cubes axiparallèles et observons que $\mathcal{C}$ vérifie la condition de Vitali, i.e. $\mathcal{C}$ contient l'ensemble vide et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ telle que $\operatorname{diam}(Q_i) < \varepsilon$ pour tout i et $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^\infty Q_i$. Observons aussi que la notion de volume d'un cube est une proto-mesure, puisque $\operatorname{Vol}_n(\emptyset) = 0$ et $\operatorname{Vol}_n(Q) \leq \operatorname{Vol}_n(Q')$ dès que $Q \subset Q'$.

Définition La *mesure de Lebesgue* λ^n sur $\mathbb{R}^n$ est la mesure construite par la méthode I (cf. théorème 10.1), à partir de la collection des cubes $\mathcal{C}$ et de la proto-mesure Vol_n.

La mesure de Lebesgue est donc concrètement obtenue par la construction suivante :

- On définit d'abord $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, par la formule

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \right) \mid \{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C} \text{ recouvre } A \right\}.$$

  Par le théorème 10.1, on sait que λ^* est une mesure extérieure et que $\lambda^*(Q) \leq \mathrm{Vol}_n(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{C}$.

- On introduit ensuite la collection $\mathcal{L}$ des ensembles qui sont λ^*-mesurables, i.e. $A \in \mathcal{L}$ si et seulement si pour tout $S \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \setminus A).$$

  Le théorème de Carathéodory 9.2 entraîne alors que $\mathcal{L}$ est une tribu et que $\lambda := \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ est une mesure.

Définition On appelle $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la *tribu de Lebesgue* ; les éléments de $\mathcal{L}$ sont les *parties mesurables au sens de Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11.1 *Pour tout cube $Q \in \mathcal{C}$, on a $\lambda^*(Q) = \mathrm{Vol}_n(Q)$.*

Lemme 11.2 *Si $P, Q_1, Q_2, ..., Q_m \in \mathcal{C}$ sont des cubes tels que $P \subset \cup_{i=1}^m Q$, alors*

$$\mathrm{Vol}_n(P) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

***. □

Preuve de la proposition On sait déjà que $\lambda^*(Q) \leq \mathrm{Vol}_n(Q)$, il faut simplement montrer l'inégalité inverse. Pour tout $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe une suite de cubes $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ recouvrant Q et telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \leq \lambda^*(Q) + \varepsilon/2.$$

On peut d'autre part trouver un cube fermé $P \in \mathcal{C}$ tel que $P \subset Q$ et $\mathrm{Vol}_n(Q) \leq \mathrm{Vol}_n(P) + \varepsilon/2$. Comme P est compact, il existe un entier m tel que $P \subset \cup_{i=1}^m Q_i$. Par le lemme précédent, on a

$$\mathrm{Vol}_n(P) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \leq \lambda^*(Q) + \varepsilon/2.$$

Ainsi $\mathrm{Vol}_n(Q) \leq \mathrm{Vol}_n(P) + \varepsilon/2 \leq \lambda^*(Q) + \varepsilon$ et on a donc $\mathrm{Vol}_n(Q) \leq \lambda^*(Q)$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

Proposition 11.3 *Tout borélien est mesurable au sens de Lebesgue (i.e. $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).*

Preuve Un cube de côté a peut-être subdivisé en 2^n cubes de côtés $\frac{a}{2}$. Le diamètre des petits cubes est la moitié du diamètre du cube original et le volume du grand cube est la somme des volumes des petits cubes. Par conséquent la définition de la mesure extérieure de Lebesgue est indépendante d'une éventuelle restriction sur les diamètres des cubes. Plus précisément, si on note $\mathcal{C}^\delta \subset \mathcal{C}$ l'ensemble des cubes de diamètre au plus δ et si l'on pose

$$\lambda_\delta^*(A) := \inf\left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_i)\right) \mid \{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\delta \text{ recouvre } A \right\},$$

alors $\lambda_\delta^* = \lambda^*$ pour tout $\delta > 0$. En particulier $\lambda^* = \lim_{\delta\to 0} \lambda_\delta^*$ et le théorème 10.2 entraîne donc que λ^* est borélienne. □

Proposition 11.4 *i) La mesure extérieure de Lebesgue est invariante par translation :* $\lambda^*(A) = \lambda^*(A + \overrightarrow{v})$ *pour tout* $A \subset \mathbb{R}^n$ *et tout* $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.
ii) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ *est Lebesgue mesurable, alors* $A + \overrightarrow{v}$ *aussi et* $\lambda(A) = \lambda(A + \overrightarrow{v})$ *pour tout* $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.

Preuve Observons d'abord que si $Q \in \mathcal{C}$, alors le translaté $Q + \overrightarrow{v} \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{Vol}_n(Q + \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vol}_n(Q)$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Il est donc clair que $\lambda^*(A) = \lambda^*(A + \overrightarrow{v})$ pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. On en déduit également que A est Lebesgue mesurable si et seulement si $A + \overrightarrow{v}$ est Lebesgue mesurable et que $\lambda(A) = \lambda(A + \overrightarrow{v})$ pour tout $A \in \mathcal{L}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. □

11.2 Un ensemble non-mesurable

Proposition 11.5 *Il existe des ensembles* $M \subset \mathbb{R}$ *non mesurables au sens de Lebesgue, autrement dit,* $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Preuve Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $S(x) := x + \mathbb{Q} = \left\{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$. Posons ensuite $\Sigma := \{S(x)\}_{x\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et remarquons que Σ est une partition de $\mathbb{R}$ (c'est la partition associée à la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Q}$).

Notons aussi $\Sigma' := \{S(x) \cap [0, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}([0, 1))$; l'axiome du choix nous dit qu'il existe un ensemble $M \subset [0, 1)$ tel que M contient un unique élément $m(x) \in S(x) \cap [0, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notons $\alpha := \lambda^*(M)$ et remarquons que, comme $M \subset [0, 1)$, on a $\alpha = \lambda^*(M) \leq \lambda^*([0, 1)] = 1$.

Introduisons encore l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ défini par

$$A := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} (M + q) = \left\{x = m + q \mid m \in M \text{ et } q \in \mathbb{Q}\cap[0, 1)\right\}.$$

Affirmation 1 : On a $[0, 1) \subset A \subset [0, 2)$.
En effet, tout élément de A s'écrit $x = m + q$ avec $0 \leq m, q < 1$, par conséquent $A \subset [0, 2)$. Inversement, par définition de M, tout nombre $x \in [0, 1)$ s'écrit (de façon unique) sous la forme $x = m + q$ avec $m \in M$ et $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, ce qui signifie que $[0, 1) \subset A$.

Affirmation 2 : On a $\alpha > 0$.
En effet, si on avait $\alpha = 0$, alors on aurait $\lambda^*(M + q) = \lambda^*(M) = \alpha$ pour tout q par la proposition précédente. La σ-sous additivité de λ^* entraînerait alors que

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \lambda^*(M + q) = 0,$$

ce qui est impossible puisque $[0, 1) \subset A$.

Affirmation 3 : L'ensemble M n'est pas mesurable au sens de Lebesgue.

En effet, si on avait $M \in \mathcal{L}$, on aurait aussi $(M+q) \in \mathcal{L}$ et $\lambda(M+q) = \lambda(M) = \alpha > 0$ pour tout q. Comme les ensembles $(M+q)$ sont deux à deux disjoint, la σ-additivité de $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ entraînerait alors que

$$\lambda(A) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \underbrace{\lambda(M+q)}_{=\alpha} = \infty;$$

ce qui est impossible puisque $A \subset [0,2)$.

□

Exercices

11.1) Montrer que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que $\lambda^1(\mathbb{Q}) = 0$.

11.2) Montrer qu'il existe un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure arbitrairement petite.

11.3) Montrer que tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

11.4) Montrer que pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ il existe un ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset B$ et $\lambda^*(B) = \lambda^*(A)$.

---

12 Unicité selon Dynkin

Pour prouver l'unicité de le mesure de Lebesgue, il est commode d'introduire les notions de λ-système et de π-système.

Definition 12.1 Un *π-système* sur l'ensemble X est une collection d'ensembles $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ qui est fermée pour les intersections finies : $A, B \in \Pi$ alors $A \cap B \in \Pi$.

Definition 12.2 Un *λ-système* sur l'ensemble X est une collection $\Lambda \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

a.) $X, \emptyset \in \Lambda$;

b.) si $A, B \in \Lambda$ et $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \Lambda$;

c.) si $\{A_i\} \subset \Lambda$ est une suite monotone croissante, alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda$.

Une collection d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ qui est à la fois un λ-système et un π-système s'appelle un $\lambda\pi$-système.

Il est clair que toute σ-algèbre est un $\lambda\pi$-système, nous allons montrer que, réciproquement, tout $\lambda\pi$-système est une σ-algèbre.

Lemme 12.1 *Un λ-système $\Lambda \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ-algèbre si et seulement si elle est fermée pour les réunions finies : $A, B \in \Lambda \Rightarrow A \cup B \in \Lambda$.*

Preuve Il suffit de montrer que si Λ est un λ-système qui est fermé pour les réunions finie, alors c'est une σ-algèbre.
Il est clair que Λ contient X et $\emptyset$, de plus, si $A \in \Lambda$, alors $A^c = X \setminus A \in \Lambda$.

Il reste à montrer que Λ contient toute réunion dénombrable d'éléments de Λ. Soit $\{A_i\} \subset \Lambda$ une suite quelconque et définissons $B_i := \cup_{j=1}^{i} A_j$; alors $B_i \in \Lambda$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\{B_i\} \subset \Lambda$ est une suite monotone croissante ; par conséquent

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \Lambda$$

puisque Λ est un λ-système. $\square$

Corollaire 12.2 *Tout $\lambda\pi$-système est une σ-algèbre.*

Preuve Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un $\lambda\pi$-système. Alors $\mathcal{A}$ est fermée pour la complémentation ; de plus, si $A, B \in \mathcal{A}$, alors

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}.$$

Le corollaire est maintenant une conséquence du lemme. $\square$

Lemme 12.3 *Soient $\Lambda \subset \mathcal{P}(X)$ un λ-système et $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ un* π-système *sur l'ensemble X. Si $\Lambda \supset \Pi$, alors Λ contient la σ-algèbre engendrée par* Π.

Preuve Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ l'intersection de tous les λ-systèmes contenant Π. Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}$ est un λ-système. D'autre part, on a clairement $\Pi \subset \mathcal{A} \subset \Lambda$.
Vérifions que $\mathcal{A}$ est également un π-système : pour un ensemble $A \in \mathcal{A}$, notons

$$\mathcal{S}_A := \big\{ C \in \mathcal{A} \,\big|\, C \cap A \in \mathcal{A} \big\} \subset \mathcal{A}.$$

Alors on vérifie aisément les propriétés suivantes

i.) $\mathcal{S}_A \subset \mathcal{A}$;

ii.) $\mathcal{S}_A$ est un λ-système (facile à vérifier) ;

iii.) si $A, B \in \Pi$, alors $B \in \mathcal{S}_A$ (car Π est un π-système).

La condition (iii) dit que si $A \in \Pi$, alors $\Pi \subset \mathcal{S}_A$. Par minimalité de $\mathcal{A}$, les conditions (i) et (ii) entraînent alors que $\mathcal{S}_A = \mathcal{A}$ pour tout $A \in \Pi$.

Mais dire que $\mathcal{S}_A = \mathcal{A}$ pour tout $A \in \Pi$ signifie que si $A \in \Pi$ et $C \in \mathcal{A}$, alors $C \cap A \in \mathcal{A}$; par conséquent si $C \in \mathcal{A}$ alors $\Pi \subset \mathcal{S}_C$. Comme $\mathcal{A}$ est le plus petit λ-système contenant Π, on a donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_C$.
On a ainsi montré que si $A, C \in \mathcal{A}$, alors $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{S}_C$, i.e. $C \cap A \in \mathcal{A}$; cela signifie que $\mathcal{A}$ est un π-système.

Par le corollaire précédent, $\mathcal{A}$ est donc une σ-algèbre. Comme $\Pi \subset \mathcal{A}$, on a $\sigma(\Pi) \subset \mathcal{A}$ et on a finalement montré que

$$\Pi \subset \sigma(\Pi) \subset \mathcal{A} \subset \Lambda.$$

$\square$

Théorème 12.4 (Théorème d'unicité de Dynkin) *Soient* Π *un π-système sur l'ensemble X et $\mathcal{A} = \sigma(\Pi)$ la σ-algèbre engendrée par* Π. *Si μ et ν sont deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\mu(P) = \nu(P)$ pour tout $P \in \Pi$ et $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, alors $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.*

Preuve Notons $\Lambda \subset \mathcal{A}$, l'ensemble des $A \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A) = \nu(A)$. On sait par hypothèse que $X \in \Lambda$ et il est trivial que $\emptyset \in \Lambda$. Si $A, B \in \Lambda$ avec $A \subset B$, alors $\mu(A) = \nu(A)$ et $\mu(B) = \nu(B)$ par conséquent

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = v(B) - v(A) = v(B \setminus A)$$

et donc $B \setminus A \in \Lambda$. De même si $\{A_i\} \subset \Lambda$ est une suite monotone croissante, alors $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda$ car

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \lim_{i\to\infty} \nu(A_i) = v(\cup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

On a donc montré que Λ est un λ-système. Comme $\Lambda \supset \Pi$ par hypothèse, la proposition précédente entraîne que Λ contient $\sigma(\Pi) = \mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A} \subset \Lambda$ ce qui signifie que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

□

Voyons quelques applications du théorème précédent :

Corollaire 12.5 *Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ telles que $\mu((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Preuve La collection des intervalles $(-\infty, x]$ est un π-système engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Comme $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$, le théorème précédent entraîne que $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

□

Corollaire 12.6 *Soient μ et ν deux mesures boréliennes finies sur un espace topologique X. Alors $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(X)$ si et seulement si $\mu(U) = \nu(U)$ pour tout ouvert $U \subset X$.*

Preuve La collection des ouverts de X est un π-système engendrant la tribu borélienne.

□

13 Unicité de la mesure de Lebesgue

Définitions Un *intervalle diadique* d'ordre $r \in \mathbb{N}$ est un intervalle du type $I = [\frac{m}{2^r}, \frac{m+1}{2^r})$ où $m \in \mathbb{Z}$.
Un *cube diadique* de dimension n et d'ordre r est un cube du type

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$$

où chaque I_j est un intervalle diadique.

Propriétés 13.1 *1.) Si Q est un cube diadique de dimension n et d'ordre r, alors* $\operatorname{diam} Q = \frac{\sqrt{n}}{2^r}$ *et* $\operatorname{Vol}_n Q = 2^{-nr}$.
2.) Les cubes diadiques d'ordre r forment une partition de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\mathbb{R}^n$ est réunion disjointe des cubes diadiques d'ordre r).
3.) Si $r < r'$, alors tout cube diadique d'ordre r' est contenu dans un unique cube diadique d'ordre r.

4.) Si Q et Q' sont deux cubes diadiques d'ordres $r \leq r'$ respectivement, alors ou bien $Q \cap Q' = \emptyset$ ou bien $Q' \subset Q$.
5.) Il existe un nombre dénombrables de cubes diadiques dans $\mathbb{R}^n$.

La vérification de ces propriétés est élémentaire.

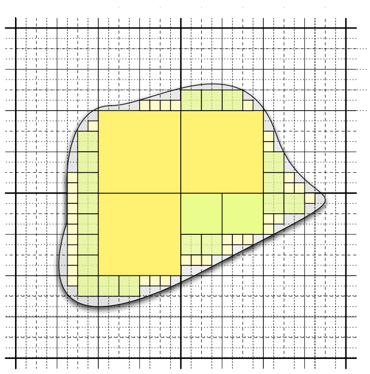
□

Proposition 13.2 *Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\{Q_j\}$ de cubes diadiques deux à deux disjoints tels que*

a.) Chaque Q_j est d'ordre $r_j \geq k$.

b.) $U = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$.

c.) $\lambda^n(U) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j)$.



Preuve Rappelons que les cubes diadiques d'ordre r forment une partition de $\mathbb{R}^n$, i.e. tout point $x \in \mathbb{R}^n$ appartient à un et un seul cube diadique d'ordre r.
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$, par conséquent, si $\frac{\sqrt{n}}{2^r} < \varepsilon$, alors tout cube diadique d'ordre r contenant x est contenu U (car le diamètre d'un tel cube est égale à $\frac{\sqrt{n}}{2^r}$).
Notons $Q_U(x)$ le plus grand cube diadique d'ordre $r \geq k$ tel que

$$x \in Q_U(x) \subset \overline{Q_U(x)} \subset U.$$

Pour deux points $x, x' \in U$, les cubes $Q_U(x)$ et $Q_U(x')$ sont ou bien disjoints ou bien égaux et il est d'autre part clair que

$$U = \bigcup_{x \in U} Q_U(x).$$

Comme les cubes diadiques forment une famille dénombrable, il en est de même pour les $Q_U(x)$ et on peut donc numéroter ces cubes $Q_1 = Q_U(x_1), Q_2 = Q_U(x_2), \ldots$. La suite $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie clairement les conditions (a), (b) et (c) du lemme.

□

L'écriture $U = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ s'appelle la *décomposition de Whitney* d'ordre $\geq k$ de l'ouvert U.

Théorème 13.3 *La mesure de Lebesgue λ^n est l'unique mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\lambda^n(Q) = Vol_n(Q)$ pour tout cube axiparallèle.*

(Rappelons que cette mesure a été construite plus haut).

Preuve Notons $\Pi \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des cubes diadiques. Le lemme précédent entraîne que Π est un π-système qui engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Soit ν une mesure borélienne quelconque sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nu(Q) = Vol_n(Q) = \lambda^n(Q)$ pour tout $Q \in \Pi$, on va montrer que $\nu(B) = \lambda^n(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Il est clair que $P_k := [-2^k, 2^k)^n$ est une réunion finie de cubes diadiques, et donc $\nu(P_k) = \lambda^n(P_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notons $\nu_k(A) := \nu(A \cap P_k)$ et $\lambda_k(A) := \lambda^n(A \cap P_k)$; le théorème 12.4 entraîne alors que $\nu_k(B) = \lambda_k(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On a donc par le théorème 7.2

$$\nu(B) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(B) = \lim_{k\to\infty} \lambda_k(B) = \lambda^n(B)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Exercices

13.1) Montrer que si μ est une mesure borélienne invariante par translation sur $\mathbb{R}^n$ alors il existe $c \geq 0$ tel que $\mu = c\lambda^n$.

13.2) Montrer que la mesure de Lebesgue est invariante par rotation.

13.3) Montrer que si $D \subset \mathbb{R}^n$ est une droite et $n \geq 2$, alors $D \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda^n(D) = 0$.

---

14 Régularité des mesures

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une mesure borélienne est (dans les bons cas) déterminée par sa valeur sur les ouverts ou sur les compacts.

Proposition 14.1 *Soit (X, d) un espace métrique et μ une mesure borélienne finie sur X. Pour tout borélien $B \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$:*

$$\textit{il existe un fermé } F \textit{ et un ouvert } U \subset X \textit{ tels que } F \subset B \subset U \textit{ et } \mu(U \setminus F) \leq \varepsilon \tag{14.1}$$

Rappelons qu'une mesure est borélienne si elle est définie sur une tribu contenant la tribu borélienne $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ (tout borélien est donc mesurable). La mesure μ est finie si $\mu(X) < \infty$.

Preuve La démonstration est un exemple typique d'argumentation sur les σ-algèbres. On pose d'abord

$$\mathcal{S} := \left\{ B \subset X \,\middle|\, \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ la condition (14.1) est vérifiée} \right\}.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}(X)$.

a) Tout ouvert de X appartient à $\mathcal{S}$. En effet, supposons que $B \subset X$ est ouvert et posons

$$F_k := \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, B^c) \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Il est clair que F_k est fermé et $F_k \subset F_{k+1} \subset B$ et $\cup_k F_k = B$. Par continuité de la mesure (proposition 7.2), on sait que $\lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = \mu(B)$. Il existe donc k assez grand pour que $\mu(B) - \mu(F_k) \leq \varepsilon$. Posons $U = B$ et $F = F_k$, on a $\mu(U \setminus F) = \mu(B) - \mu(F_k) \leq \varepsilon$.

b) Si $B \in \mathcal{S}$, alors $B^c \in \mathcal{S}$. En effet, si $B \in \mathcal{S}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert $U \subset X$ tels que $F \subset B \subset U$ et $\mu(U \setminus F) \leq \varepsilon$. Ainsi $U^c \subset B^c \subset F^c$ et $F^c \setminus U^c = U \setminus F$, donc $\mu(F^c \setminus U^c) \leq \varepsilon$; comme F^c est ouvert et U^c est fermé, on a montré que $B^c \in \mathcal{S}$.

c) Si $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$, alors $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{S}$. En effet, fixons $\varepsilon > 0$, il existe pour tout j un fermé F_j et un ouvert $U_j \subset X$ tels que $F_j \subset B_j \subset U_j$ et $\mu(U_j \setminus F_j) \leq 2^{-(j+1)}\varepsilon$.
Notons $B = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $U = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ et $F = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Alors U est ouvert, mais (attention) F n'est en général pas fermé. Cela dit nous avons $F \subset B \subset U$ et

$$\mu(U \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(U_j - F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+1)}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Notons $\widehat{F}_j := \cup_{i=1}^{j} F_i$, alors $F = \cup_{j=1}^{\infty} F_j = \cup_{j=1}^{\infty} \widehat{F}_j$. Comme $\{\widehat{F}_j\}$ est une suite monotone, nous avons $\lim_{j\to\infty} \mu(U \setminus \widehat{F}_j) = \mu(U \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc n assez grand pour que $\mu(U \setminus \widehat{F}_n) \leq \varepsilon$. On a donc trouvé un ouvert U et un fermé $\widehat{F}_n$ vérifiant (14.1).

d) Nous pouvons maintenant conclure la démonstration. Comme il est clair que $\emptyset \in \mathcal{S}$, les propriétés (a),(b) et (c) entraînent que $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant les ouverts. Par définition de la tribu borélienne, on a donc $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}(X)$, ce qui signifie que tout borélien vérifie (14.1).

□

Corollaire 14.2 *Soit μ une mesure borélienne sur un espace métrique (X, d). Supposons qu'il existe une suite croissante de compacts $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset X$ tels que $\cup_n K_n = X$ et $\mu(K_n) < \infty$ pour tout n. Alors pour tout borélien $B \subset X$, on a*

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sup\left\{\mu(K) \,\middle|\, K \text{ est compact et } K \subset B\right\} \\ &= \inf\left\{\mu(U) \,\middle|\, U \text{ est ouvert et } B \subset U\right\}. \end{aligned}$$

On dit alors que le mesure μ sur (X, d) est *régulière*. En particulier la mesure de Lebesgue λ^n sur $\mathbb{R}^n$ est régulière.

□

15 La mesure de Hausdorff

La mesure de Hausdorff en dimension s sur un espace métrique (X, d) est la mesure construite par le méthode II avec $\mathcal{V} = \mathcal{P}(X)$ et la fonction (proto-mesure)

$$\eta(V) = \operatorname{diam}(V)^s.$$

De manière plus spécifique, on définit pour tout $s \geq 0$, $\delta > 0$ et tout $A \subset X$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_i)^s \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \,,\, \operatorname{diam} E_i \leq \delta\right\}$$

Par le théorème 10.1, $\mathcal{H}_\delta^s$ est une mesure extérieure sur X (c'est une mesure extérieure obtenue par la méthode I). Par ailleurs, si $\delta < \delta'$, alors $\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \mathcal{H}_{\delta'}^s(A)$.

Définition La *mesure de Hausdorff* de dimension s est définie par

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Le théorème 10.2 implique que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure borélienne sur X. (i.e. tout borélien de X est $\mathcal{H}^s$-mesurable) en particulier la restriction de $\mathcal{H}^s$ à la tribu borélienne de X est une mesure.

Nous listons quelques propriétés élémentaires de la mesure de Hausdorff dans la proposition suivante :

Proposition

1.) $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage ;

2.) sur $X = \mathbb{R}$, on a $\mathcal{H}^1 = \lambda^1$;

3.) $\mathcal{H}^s$ est invariante par translation sur $\mathbb{R}^n$;

4.) $\mathcal{H}^s(\kappa A) = \kappa^s \mathcal{H}^s(A)$ pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\kappa > 0$.

Remarques La mesure de Hausdorff n'est en général pas σ-finie.

Lemme 15.1 *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\delta > 0$, on a*

$$\frac{1}{\beta_n} \lambda * (A) \leq \mathcal{H}_\delta^n(A) \leq n^{n/2} \lambda^*(A)$$

où β_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. En particulier $\mathcal{H}^n(U) \neq 0$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Preuve Pour tous $\varepsilon, \delta > 0$ on peut trouver une suite de cubes $\{Q_i\}$ de diamètre $< \delta$ telle que $A \subset \cup Q_i$ et $\sum_i \mathrm{Vol}(Q_i) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$.
Comme Q_i est un cube, on a $\mathrm{Vol}(Q_i) = \left(\frac{\operatorname{diam} Q_i}{\sqrt{n}} \right)^n$. On a donc

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) \leq \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} Q_i)^n = n^{n/2} \sum_{i=1}^\infty \mathrm{Vol}(Q_i) \leq n^{n/2} \left(\lambda^*(A) + \varepsilon \right).$$

d'où $\mathcal{H}_\delta^n(A) \leq n^{n/2} \lambda^*(A)$.

Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un recouvrement quelconque de A par une suite d'ensembles E_i de diamètre $\leq \delta$. Chaque E_i est contenu dans une boule B_i de rayon $\leq \operatorname{diam} E_i$. En particulier, $\lambda^n(E_i) \leq \beta_n (\operatorname{diam} E_i)^n$ où β_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent

$$\lambda^n(A) \leq \beta_n \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} E_i)^n.$$

En prenant l'infimum sur tous les recouvrements, on a $\lambda^n(A) \leq \beta_n \mathcal{H}_\delta^n(A)$.

□

Notons $c_n := \mathcal{H}^n([0,1]^n)$, le lemme précédent entraîne que $0 < c_n < \infty$. La mesure $\mu^n := \frac{1}{c_n} \mathcal{H}^n$ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, invariante par translation et telle que $\mu([0,1]^n) = 1$. Par unicité de la mesure de Lebesgue, on a donc $\mu^n = \lambda^n$, c'est à dire $\lambda^n = c_n \mathcal{H}^n$.

Théorème 15.2 *Nous avons en fait* $c_n = \frac{\beta_n}{2^n}$ *et donc* $\mathcal{H}^n = \frac{2^n}{\beta_n}\lambda^n$ *sur* $\mathbb{R}^n$*.*

La preuve fait intervenir la théorème de recouvrement de Vitali et l'inégalité isodiamétrique

$$\lambda^n(A) \leq \beta_n \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\right)^n .$$

Proposition 15.3 *a) Si* $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ *et* $t > s$*, alors* $\mathcal{H}^t(A) = 0$*.*
b) Si $\mathcal{H}^s(A) > 0$ *et* $t < s$*, alors* $\mathcal{H}^t(A) = \infty$*.*

Preuve Si $s < t$, alors pour tout $\delta > 0$ et pour tout ensemble E de diamètre $\leq \delta$, on a

$$(\operatorname{diam} E)^t = (\operatorname{diam} E)^{t-s}(\operatorname{diam} E)^s \leq \delta^{t-s}(\operatorname{diam} E)^s.$$

On en déduit que

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$$

ce qui prouve (a). L'assertion (b) se prouve de la même manière.

□

Cette proposition justifie la définition suivante :

Définition La *dimension de Hausdorff* d'un ensemble $A \subset X$ est définie par

$$\begin{aligned} \dim_H(A) &= \inf\left\{s \,\middle|\, \mathcal{H}^s(A) = 0\right\} \\ &= \sup\left\{t \,\middle|\, \mathcal{H}^t(A) = \infty\right\}. \end{aligned}$$

Il est clair que si $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, alors $\dim_H(A) = s$. La réciproque est fausse, il existe des ensembles de dimension de Hausdorff s tels que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ ou $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Exemple On a $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$. En effet, nous avons $\mathcal{H}^n(A) < \infty$ pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ borné. Par conséquent, pour tout $t > n$ on a $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Donnons-nous maintenant une suite d'ensembles bornés A_i telle que $\mathbb{R}^n = \cup_i A_i$, alors pour tout $t > n$, $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) \leq \sum_i \mathcal{H}^t(A_i) = 0$. Il s'ensuit que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$.
Réciproquement, $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = \infty$ et donc $\dim_H(\mathbb{R}^n) \geq n$.

Exercices

15.1) On note $\mathcal{H}^s$ la mesure de Hausdorff ; montrer que
- a.) $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage ;
- b.) si $s > 0$, alors $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout ensemble A fini ou dénombrable.
- c.) $\mathcal{H}^s$ est invariante par translation sur $\mathbb{R}^n$;
- d.) $\mathcal{H}^s(\kappa A) = \kappa^s\mathcal{H}^s(A)$ pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\kappa > 0$.

---

16 Fonctions et applications mesurables

Rappelons qu'une application $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ entre deux espaces mesurables est dite $(\mathcal{A}\text{-}\mathcal{B})$-mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Definition 16.1 Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *mesurable* si elle est $(\mathcal{L}\text{-}\mathcal{B})$-mesurable où $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est la tribu borélienne et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est la tribu de Lebesgue. L'application f est donc mesurable si $f^{-1}(B)$ est Lebesgue-mesurable pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^m$.

Definition 16.2 L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *borélienne* si elle est $(\mathcal{B}\text{-}\mathcal{B})$-mesurable, i.e. si $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^m$.

Exemples : Toute application continue est borélienne. Toute application borélienne est mesurable.

Remarquons que, d'une manière générale, si $(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{B})$ est $(\mathcal{A}\text{-}\mathcal{B})$-mesurable et $(Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{C})$ est $(\mathcal{B}\text{-}\mathcal{C})$-mesurable, alors $g \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$ est $(\mathcal{A}\text{-}\mathcal{C})$-mesurable. On a les cas particuliers suivants :

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications ; alors

1.) Si f et g sont boréliennes, alors $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est encore borélienne ;
2.) Si f est mesurable et g est borélienne, alors $g \circ f$ est mesurable ;
3.) **Attention :** si f est borélienne et g est mesurable, alors $g \circ f$ *n'est pas* forcément mesurable ! En particulier la composition de deux applications mesurables n'est pas toujours mesurable.

Definition 16.3 Une *fonction mesurable* sur $(X, \mathcal{A})$ est une application mesurable à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Lemme 16.1 *Soit f une fonction définie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Alors $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si*

$$f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Remarque 16.4 Pour alléger les notations, on écrit $\{f \leq a\}$ pour l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ (et de même pour les autres ensembles $\{f < a\}$ etc.)

Preuve Immédiat à partir du lemme 8.1 et du fait que la famille $(\{f \leq a\})$ engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Le lemme précédent se généralise :

Lemme 16.2 *Soit f une fonction définie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i.) $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *est mesurable*

ii.) $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$

iii.) $\{f < a\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$

iv.) $\{f \leq q\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q}$

v.) $\{f < q\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q}$

vi.) $\{f \geq a\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$

vii.) $\{f > a\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$

viii.) $\{f \geq q\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q}$

ix.) $\{f > q\} \in \mathcal{A}$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q}$

□

Définition : On dit qu'une propriété (P) qui est définie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est vérifiée *presque partout* si elle est vérifiée sur le complémentaire d'un ensemble qui est mesurable et de mesure nulle.

On peut naturellement identifier la propriété (P) avec l'ensemble des points $P \subset X$ qui la vérifient.

Ainsi, dire que (P) est vérifiée presque partout signifie que $P \in \mathcal{A}$ et que

$$\mu(P^c) = \mu(\{x \in X \,|\, x \text{ ne vérifie pas (P)}\}) = 0.$$

On remarque que cette notion suppose qu'une mesure a été choisie. On précise parfois cette mesure en disant que (P) est vérifiée *μ-presque partout* (μ-p.p. en abrégé).

Lemme 16.3 *Si une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *coïncide presque partout avec une fonction mesurable* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, alors* f *est elle-même mesurable.*

Nous laissons la preuve en exercice. □

Théorème 16.4 *Soient* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, alors :*

I.) $f + g$, f^2, $\alpha \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min(f, g)$ *et* $\max(f, g)$ *sont mesurables.*

II.) Si g *ne s'annule pas alors* $\frac{f}{g}$ *est mesurable.*

Preuve Montrons d'abord les assertions de (I.).

a.) $f + g$ est mesurable : Soit $h := f + g$, alors pour tout $a \in \mathbb{Q}$, on a [5].

$$\{h \leq a\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p + q \leq a}} \{f \leq p\} \cap \{g \leq q\}.$$

C'est un ensemble mesurable (puisque c'est une réunion dénombrable d'ensembles mesurables) ; il s'ensuit que h est une fonction mesurable.

[5] On rappelle la remarque (16.4)

b.) f^2 est mesurable car f est mesurable et

$$\{f^2 \le a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < 0 \\ \{-\sqrt{a} \le f \le \sqrt{a}\} & \text{si } a \ge 0 \end{cases}$$

c.) $\alpha \cdot f$ mesurable : cela est clair.

d.) $f \cdot g$ mesurable : Cela découle de (a), (b), (c) et de l'identité

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right).$$

e.) $|f|$ mesurable car f est mesurable et

$$\{|f| \le a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < 0 \\ \{-a \le f \le a\} & \text{si } a \ge 0 \end{cases}.$$

f.) $\max(f,g)$ mesurable : Cela découle de (a),(c), (e) et de l'identité

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|).$$

g.) $\min(f,g)$ mesurable : idem en utilisant l'identité $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.

II.) Pour voir que $\frac{1}{g}$ est mesurable si g ne s'annule pas, on remarque simplement que

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}((-\infty,a)) = \left\{\frac{1}{g} < a\right\} = \begin{cases} \{g > \frac{1}{a}\} \cup \{g < 0\} & \text{si } a > 0 \\ \{g < 0\} & \text{si } a = 0 \\ \{\frac{1}{a} < g < 0\} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Finalement $\frac{f}{g}$ est mesurable si g ne s'annule pas car $\frac{f}{g} = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)$. □

Théorème 16.5 *Si $\{f_i\}$ est une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\inf(f_i), \quad \sup(f_i), \quad \liminf_{i\to\infty}(f_i), \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to\infty}(f_i)$$

sont mesurables.
En particulier, si la suite $\{f_i\}$ converge presque partout, alors $f := \lim_{i\to\infty} f_i$ est mesurable.

Preuve

a.) Soit $h = \sup(f_i)$ (i.e. $h(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{f_i(x)\}$ pour tout x). Comme chaque f_i est mesurable, l'ensemble

$$\{h \le a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{f_i \le a\}$$

est mesurable, donc h est mesurable.

b.) Soit $g = \inf(f_i)$. Comme $\{g \ge a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{f_i \ge a\}$ est mesurable pour tout a, alors g est mesurable.

c.) Par conséquent

$$\liminf_{i\to\infty}(f_i) = \lim_{k\to\infty}(\inf_{i\ge k}(f_i)) = \sup_{k\ge 1}(\inf_{i\ge k} f_i)$$

est mesurable.

d.) De même
$$\limsup_{i\to\infty}(f_i) = \lim_{k\to\infty}(\sup_{i\geq k}(f_i)) = \inf_{k\geq 1}(\sup_{i\geq k} f_i)$$
est mesurable.

$\square$

Exercices

16.1) Si deux fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coïncident presque partout, alors elles coïncident partout.

16.2) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Montrer que la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset X$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

16.3) Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coïncide presque partout avec une fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est elle-même mesurable.

16.4) Si $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables et si $A_i \subset \mathbb{R}$ sont des ensembles mesurables 2 à 2 disjoints, alors la fonction
$$f(x) := \begin{cases} f_i(x) & si \quad x \in A_i \\ 0 & si \quad x \notin \cup_i A_i \end{cases}$$
est mesurable.

16.5) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & si \quad x = \frac{p}{q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
(où $p, q \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux) est une fonction mesurable.

16.6) Montrer que toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

16.7) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et si $a, b \in \mathbb{R}$, alors la fonction
$$g(x) := f(ax + b)$$
est mesurable.

16.8) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Considérons les deux conditions suivantes :
(i) f est continue presque partout.
(ii) f coïncide presque partout avec une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(a) Est-il vrai que (i) implique (ii) ?
(b) Est-il vrai que (ii) implique (i) ?

16.9) Montrer que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors sa dérivée $f = F'$ est une fonction mesurable.

---

17 Le théorème d'Egorov *

Definition 17.1 Une suite de fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *converge presque partout* (p.p) vers la fonction f, si elle converge sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle, c'est à dire

$$\lambda(\{x \mid f_i(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0.$$

Rappel : La suite f_i converge uniformément vers f sur $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $i \geq N$ et $x \in A \Rightarrow |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Théorème 17.1 (d'Egorov) *Soit $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables convergeant p.p vers f. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Alors pour tout $\rho > 0$, il existe un ensemble mesurable $E \subset I$, tel que*

i.) *f_i converge uniformément vers f sur $A = I \setminus E$;*

ii.) *$\lambda(E) < \rho$.*

En d'autres termes : toute suite convergeant p.p converge en fait uniformément sur le complémentaire d'un ensemble de mesure arbitrairement petite.

Preuve On note $F \subset I$ l'ensemble des points où $f_i \nrightarrow f$, on sait que $\lambda(F) = 0$.
De plus, pour tout $m, k \in \mathbb{N}$, on note

$$E_{m,k} := \bigcup_{j=m}^{\infty} \left\{ x \in I \setminus F \,\middle|\, |f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\} \subset I \setminus F.$$

Observer que $x \notin E_{m,k}$ signifie $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ pour tout $j \geq m$.

Les ensembles $E_{m,k} \subset \mathbb{R}$ sont mesurables et bornés (donc de mesure finie). Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, ils forment une suite monotone : $E_{m+1,k} \subset E_{m,k}$.

La proposition 7.2 entraîne donc que $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda(E_{m,k}) = \lambda(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_{m,k})$.

Or on a $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_{m,k} = \emptyset$ car f_j converge vers f sur $I \setminus F$; par conséquent

$$\lim_{m\to\infty} \lambda(E_{m,k}) = 0.$$

En particulier, pour tout $\rho > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver $m_{k,\rho}$ assez grand pour que $\lambda(E_{m_k,k}) < \frac{\rho}{2^k}$.

Notons $E := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{m_k,k}$ alors $\lambda(E) < \rho$, et on a pour tout $x \notin E \cup F$

$$m > m_k \qquad \Rightarrow \qquad |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

Ce qui signifie que f_m converge uniformément vers f sur l'ensemble $A := I \setminus (E \cup F)$; et cet ensemble vérifie

$$\lambda(A^c) = \lambda(E \cup F) \leq \lambda(E) + \lambda(F) \leq \rho,$$

qui est arbitrairement petit.

□

Mentionnons sans démonstration le

Théorème 17.2 (de Lusin) *Toute fonction mesurable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue en dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite.*

$\square$

Deuxième partie : Intégration

18 Sommation des fonctions simples non négatives

Définition : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est une *fonction simple* si f est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Il est clair que l'on peut écrire toute fonction sous la forme

$$f = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(t)} \tag{18.1}$$

Lemme 18.1 *La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est simple si et seulement si $f^{-1}(t) \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si l'expression (18.1) ne contient qu'un nombre de fini de termes non nuls (i.e. l'ensemble $f^{-1}(t)$ est vide pour tout $t \in \mathbb{R}$ sauf un nombre fini d'exceptions).*

La preuve est élémentaire.

$\square$

Remarque : Réciproquement, l'expression (18.1) ne définit une fonction simple qu'à la condition qu'elle ne contient qu'un nombre de fini de termes non nuls, c'est à dire lorsque l'ensemble $f^{-1}(t)$ est vide pour tout $t \in \mathbb{R}$ sauf un nombre fini d'exceptions.

Définition : Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, $D \in \mathcal{A}$ une partie mesurable et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction simple non négative. On appelle *sommation de f restreinte à D et pondérée par μ* la quantité

$$\boxed{S_D(f, \mu) := \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot \mu(D \cap f^{-1}(t)).}$$

Lemme 18.2 *Pour toute fonction simple non négative $f : X \to \mathbb{R}_+$, on a*

i.) $S_D(f, \mu) \geq 0$ *;*

ii.) $S_D(0, \mu) = 0$ *;*

iii.) si $\mu(D) = 0$, alors $S_D(f, \mu) = 0$;

iv.) si $D \subset D'$, alors $S_D(f, \mu) \leq S_{D'}(f, \mu)$;

v.) si $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$, alors $S_{D_1 \cup D_2}(f, \mu) = S_{D_1}(f, \mu) + S_{D_2}(f, \mu)$.

Preuve : Exercice. $\square$

Les autres propriétés fondamentales de $S_D(-, \mu)$ sont la linéarité et la monotonie :

Proposition 18.3 *a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a $S_D(\alpha f, \mu) = \alpha S_D(f, \mu)$;*
b) $S_D(f + g, \mu) = S_D(f, \mu) + S_D(g, \mu)$;
c) Si $f \leq g$, alors $S_D(f, \mu) \leq S_D(g, \mu)$.

Preuve (a) Si $\alpha = 0$, on a clairement $S_D(\alpha f, \mu) = 0 = \alpha S_D(f, \mu)$; on suppose donc $\alpha \neq 0$. Posons $h := \alpha f$ et $s := \alpha t$, alors $f^{-1}(t) = h^{-1}(\alpha t) = h^{-1}(s)$, et donc

$$s \cdot \mu(D \cap h^{-1}(s)) = (\alpha t) \cdot \mu(D \cap h^{-1}(\alpha t)) = \alpha \left(t \cdot \mu(D \cap f^{-1}(t)) \right).$$

Ainsi $S_D(\alpha f, \mu) = \alpha S_D(f, \mu)$.

(b) Notons $\varphi = f + g$, alors

$$\varphi^{-1}(t) = \bigcup_{u+v=t} \left(f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v) \right) ;$$

il s'agit d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints et dont seul un nombre fini sont non vides, par conséquent

$$t \cdot \mu(D \cap \varphi^{-1}(t)) = \sum_{u+v=t} (u+v) \cdot \mu(D \cap f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v));$$

et donc

$$\begin{aligned}
S_D(\varphi, \mu) &= \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot \mu(D \cap \varphi^{-1}(t)) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \sum_{u+v=t} (u+v) \cdot \mu(D \cap f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v)) \\
&= \sum_u \sum_v u \cdot \mu(f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v)) + \sum_v \sum_u v \cdot \mu(f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v)) \\
&= \sum_u u \cdot \mu(\bigcup_v \left(D \cap f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v) \right)) + \sum_v v \cdot \mu(\bigcup_u \left(D \cap f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v) \right)) \\
&= \sum_u u \cdot \mu(D \cap f^{-1}(u)) + \sum_v v \cdot \mu(D \cap g^{-1}(v)) \\
&= S_D(f, \mu) + S_D(g, \mu).
\end{aligned}$$

(c) est une conséquence de (a) et (b) : si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$ et on a

$$0 \leq S_D(g - f, \mu) = S_D(g, \mu) - S_D(f, \mu).$$

□

Il est clair qu'une fonction f sur $(X, \mathcal{A})$ est simple si et seulement si c'est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, i.e. si et seulement si f s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$$

où $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. La proposition précédente entraîne que

$$S_D(f, \mu) = \sum_{i=1}^{n} a_i S_D(\mathbb{1}_{A_i}, \mu) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(D \cap A_i).$$

On a en particulier le

Corollaire 18.4 *Si* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \geq 0$ *et* $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \in \mathcal{A}$ *vérifient*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_i \cdot \mathbb{1}_{B_i},$$

alors
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(D \cap A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_i \cdot \mu(D \cap B_i)$$
pour tout $D \in \mathcal{A}$.

$\square$

Si on se donne une fonction simple f sur $(X, \mathcal{A})$, alors on obtient une nouvelle fonction $\nu_f : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie par
$$\nu_f(D) = S_D(f, \mu)$$

Corollaire 18.5 *Si* $f \geq 0$ *, alors* ν_f *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$,.

Preuve La fonction f s'écrit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i \in \mathcal{A}$ et $a_i \geq 0$. Posons $\mu_i := \mu \lfloor A_i$ (i.e. $\mu_i(D) = \mu(D \cap A_i)$), alors chaque μ_i est une mesure et
$$\nu_f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu_i \, .$$
est donc aussi une mesure. $\square$

Définition On note $d\nu_f = f \cdot d\mu$ et on dit que f est la *densité* de ν_f par rapport à μ.

Exercices

18.1) Expliquer pour quelles raisons on se limite aux fonctions simples positives ou nulles dans la définition de la sommation d'une fonction simple.

18.2) Vérifier le lemme 18.1.

18.3) Montrer que si f et g sont des fonctions simples, alors $f + g$ et $f \cdot g$ aussi.

---

19 Intégration des fonctions mesurables positives

Étant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, on note
$$M^+ = M^+(X, \mathcal{A}) = \big\{ f : X \to [0, \infty] \, \big| \, f \ \text{ est mesurable} \big\}$$

Définition Si $D \in \mathcal{A}$ et $f \in M^+$, alors on définit l'*intégrale (au sens de Lebesgue)* de f sur D par rapport à la mesure μ par
$$\int_D f d\mu := \sup \big\{ S_D(h, \mu) \, \big| \, h : X \to [0, \infty) \ \text{ est simple et } 0 \leq h \leq f \big\} \, .$$

Remarques 1) Il est quelquefois utile de donner un nom à la variable d'intégration et de noter l'intégrale par
$$\int_D f(x) d\mu(x).$$

Notons toutefois que cette variable joue un rôle muet en sorte que

$$\int_D f(x)d\mu(x) = \int_D f(y)d\mu(y) = \int_D f(s)d\mu(s) = \cdots$$

2) Si $D \subset X$ est une partie mesurable, alors

$$\int_D f\, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_D\, d\mu.$$

3) Si $X = \mathbb{R}$, on note souvent $\int_a^b f\, d\mu$ pour $\int_{[a,b]} f\, d\mu$. Si on veut préciser qu'il s'agit de l'ntégrale au sens de Lebesgue, on note $(L)\int_a^b f\, d\mu$.

Proposition 19.1 *Pour tout* $f \in M^+$, *on a* $\displaystyle\int_D f d\mu = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *presque partout sur* D.

Preuve Supposons que $f = 0$ sur $D \setminus E$ où $E \in \mathcal{A}$ est un ensemble de mesure nulle. Alors toute fonction simple h telle que $0 \leq h \leq f$ est nulle sur $D \setminus E$, par conséquent

$$S_D(h,\mu) = S_{D\setminus E}(h,\mu) + S_{D\cap E}(h,\mu) = 0,$$

et donc $\int_D f d\mu = 0$. Supposons réciproquement que $\int_D f d\mu = 0$ et posons $E := \{x \in D \,\big|\, f(x) > 0\}$ et $E_n := \{x \in D \,\big|\, f(x) > \frac{1}{n}\}$, alors $E = \cup_n E_n$.
La fonction $h_n := \frac{1}{n}\mathbb{1}_{E_n}$ est une fonction simple telle que $0 \leq h_n \leq f$, par conséquent

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) = S_D(h_n,\mu) \leq \int_D f d\mu = 0,$$

et donc $\mu(E_n) = 0$. Par conséquent $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n) = 0$. $\square$

Proposition 19.2 *Pour tous* $f, g \in M^+$, *on a*

i.) Si $f \in M^+$ *est simple, alors* $\displaystyle\int_D f d\mu = S_D(f,\mu)$ *;*

ii.) si $f \leq g$ *presque partout, alors* $\displaystyle\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu$ *;*

iii.) si $D \subset D'$, *alors* $\displaystyle\int_D f d\mu \leq \int_{D'} f d\mu$ *;*

iv.) si $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$, *alors* $\displaystyle\int_{D_1\cup D_2} f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu$ *;*

v.) si $\lambda \geq 0$, *alors* $\displaystyle\int_D \lambda f d\mu = \lambda \int_D f d\mu$.

Preuve : Exercice.

Lemme 19.3 (Inégalité de Chebychev) *Pour toute fonction* $f \in M^+$, *et pour tout* $a \geq 0$, *on a*

$$\int_X f d\mu \geq a \cdot (\mu\{f \geq a\})\,.$$

Preuve C'est une évidence. Soit $A := \{x \mid f(x) \geq a\}$, alors la fonction $h := a \cdot \mathbb{1}_A$ est une fonction simple telle que $0 \leq h \leq f$, par conséquent

$$\int_X f d\mu \geq S_X(h, \mu) = a \cdot \mu(A) = a \cdot (\mu\{f \geq a\}).$$

$\square$

Lemme 19.4 (Lemme de Fatou) *Soit* $\{f_i\} \subset M^+$ *une suite quelconque. Alors*

$$\boxed{\int_X \left(\liminf_{i\to\infty} f_i\right) d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu.}$$

On verra aux exercices que cette inégalité peut être stricte : il existe des exemples simples où $\int_X (\liminf_{i\to\infty} f_i)\, d\mu < (\liminf_{i\to\infty}) \int_X f_i d\mu$.

Preuve Notons $f = \liminf_{k\to\infty} f_k$. Par le théorème 16.5, on sait que f est mesurable, et comme $f \geq 0$, on a $f \in M^+$.
Par définition de l'intégrale, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction simple h telle que $0 \leq h \leq f$ et

$$S_X(h, \mu) \leq \int_X f d\mu \leq S_X(h, \mu) + \varepsilon \tag{19.1}$$

On peut écrire $h = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{A_j}$ où les $A_j \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints ; posons

$$B_{j,k} := \left\{x \in A_j \mid f_m(x) \geq (1-\varepsilon)a_j \quad \text{pour tout} \quad m \geq k\right\}.$$

Observons que

$$B_{j,k} \subset B_{j,k+1} \subset A_j$$

pour tout k. Comme $\liminf_{k\to\infty} f_k = f \geq h$, on a aussi $\bigcup_{k=1}^\infty B_{j,k} = A_j$, et donc

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_{j,k}) = \mu(A_j). \tag{19.2}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_X f_k d\mu &\geq \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f_k d\mu && \text{(car les } A_j \text{ sont disjoints)} \\
&\geq \sum_{j=1}^n \int_{B_{j,k}} f_k d\mu && \text{(car } B_{j,k} \subset A_j) \\
&\geq (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^n a_j \mu(B_{j,k}) && \text{(car } f_k \geq (1-\varepsilon)a_j \text{ sur } B_{j,k})
\end{aligned}$$

On déduit de cette inégalité et de (19.1) et (19.2) que

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu &\geq \liminf_{k\to\infty} (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^n a_j\, \mu(B_{j,k}) = (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^n a_j\, \mu(A_j) \\
&= (1-\varepsilon) S_X(h, \mu) \geq (1-\varepsilon) \left(\int_X f d\mu - \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient $\displaystyle\int_X f d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu$.

□

Théorème 19.5 (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi) *Soit $\{f_i\} \subset M^+$ une suite telle que $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$. Alors*

$$\boxed{\int_X \left(\lim_{i\to\infty} f_i\right) d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu.}$$

Preuve Remarquons tout d'abord que la suite $\{f_i\}$ converge dans M^+ puisqu'elle est monotone. De même, la suite croissante $\int_X f_i\, d\mu$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
L'inégalité $\displaystyle\int_X \left(\lim_{i\to\infty} f_i\right) d\mu \leq \lim_{i\to\infty} \int_X f_i\, d\mu$ découle immédiatement du lemme de Fatou.
Pour montrer l'inégalité inverse, on pose $f = \lim\limits_{i\to\infty} f_i \in M^+$. Comme $f \geq f_i$ pour tout i, on a donc

$$\int_X f d\mu \geq \int_X f_i\, d\mu,$$

par conséquent

$$\int_X \left(\lim_{i\to\infty} f_i\right) d\mu = \int_X f d\mu \geq \lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu.$$

□

Le théorème de convergence monotone est encore vrai si l'on suppose les hypothèses vérifiées presque partout.

Proposition 19.6 (Généralisation du théorème de convergence monotone) *Soit $\{f_i\} \subset M^+$ une suite telle que $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$ et telle que $f_i \nearrow f$ presque partout. Alors*

$$\int_X f d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu.$$

Preuve Par hypothèse, il existe $X_0 \subset X$, mesurable tel que $\mu(X_0) = 0$ et $f_i \nearrow f$ sur $X \setminus X_0$. Posons

$$\begin{aligned} g &:= f(1 - \mathbb{1}_{X_0}) = f - f\mathbb{1}_{X_0} \\ g_i &:= f_i(1 - \mathbb{1}_{X_0}). \end{aligned}$$

Alors $\int_X (f-g) d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_{X_0}\, d\mu = 0$, donc

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

De même $\int_X f_i d\mu = \int_X g_i d\mu$. D'autre part, $g_i \nearrow g$ en tout point de X, donc par le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X g_i d\mu = \int_X g d\mu = \int_X f d\mu.$$

□

Remarque 19.1 Par la suite, nous ne distinguerons pas entre ce corollaire et le théorème de Beppo Lévi. Nous utiliserons souvent le théorème de convergence monotone en supposant les hypothèses vérifiées presque partout.

Corollaire 19.7 *Soient f une fonction dans M^+ et $\{h_i\}$ une suite monotone de fonctions simples telle que $h_i \leq h_{i+1}$. Si $f(x) = \lim_{i\to\infty} h_i(x)$ presque partout. Alors*

$$\int_X f d\mu = \lim_{i\to\infty} S_X(h_i, \mu).$$

La preuve est immédiate à partir de la proposition précédente. □

Le lemme suivant complète ce corollaire :

Lemme 19.8 *Pour tout $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ il existe une suite $\{h_m\}$ de fonctions simples telle que $h_m(x) \leq h_{m+1}(x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ et telle que $\lim_{m\to\infty} h_m(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.*

Preuve Posons

$$E_{m,k} := \left\{ x \in X \,\middle|\, \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m} \right\} \quad \text{et} \quad D_m := \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) \geq m \right\};$$

on vérifie alors facilement que la suite de fonctions simples

$$h_m = m \cdot \mathbb{1}_{D_m} + \sum_{k=0}^{N} \frac{k-1}{2^m} \cdot \mathbb{1}_{E_{m,k}}$$

(où $N = m \cdot 2^m$) vérifie les conditions voulues. □

L'intérêt du lemme et du corollaire précédent est qu'ils nous donnent une définition plus simple de l'intégrale d'une fonction mesurable positive (on remplace un suprémum par une limite). Une application est donnée dans le prochain résultat :

Proposition 19.9 *Pour tous $f, g \in M^+$ et tous $\alpha, \beta \geq 0$, on a*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X f d\mu$$

Preuve Cette propriété a déjà été démontrée pour les fonctions simples.

Choisissons deux suites croissantes de fonctions simples $\{h_i\}$ et $\{k_i\}$ telles que $h_i \nearrow f$ et $k_i \nearrow g$. En utilisant le corollaire précédent, on a

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g) d\mu &= \lim_{i\to\infty} S(\alpha h_i + \beta k_i, \mu) \\ &= \alpha \lim_{i\to\infty} S(h_i, \mu) + \beta \lim_{i\to\infty} S(k_i, \mu) \\ &= \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Exercices

19.1) Soit $f \in M^+$ une fonction intégrable (i.e. d'intégrale finie). Alors $\mu(\{f = \infty\}) = 0$.

19.2) Soit $f \in M^+$ une fonction intégrable. Alors l'ensemble $\{f > 0\}$ est σ-fini.

19.3) Soit $f : X \to \mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\})$$

19.4) Supposons que $\mu(X) < \infty$. Alors une fonction $f \in M^+$ est intégrable si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(f \geq n) < \infty$$

19.5) Soit $f \in M^+(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Peut-on conclure que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Préciser.

19.6) Construire une suite de fonctions mesurables bornées $f_j : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ telle que $f_j \to 0$ en tout point mais $\int_X f_j \, d\mu \to \infty$. Comparer avec le lemme de Fatou.

19.7) Montrer que pour toute fonction $f \in M^+(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f \, d\lambda.$$

19.8) Soit $\{f_n\} \subset M^+$ une suite quelconque. Alors

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

---

20 Intégration des fonctions à valeurs réelles (et complexes)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définitions Une fonction mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite *intégrable* sur $D \in \mathcal{A}$ si

$$\int_D |f| d\mu < \infty.$$

On note $\mathcal{L}^1(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur D, on note aussi $\mathcal{L}^1(D, \mathbb{R}_+) = \mathcal{L}^1(D, \mathbb{R}) \cap M^+$, c'est l'ensemble des fonctions intégrables qui sont positives ou nulles.

L'*intégrale* d'une fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(D, \mathbb{R})$ est alors définie par

$$\int_D f d\mu := \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu$$

où les fonctions f^+, f^- sont définies par

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad \text{et} \qquad f^- := -\min\{f, 0\}$$

Observons que $f^+, f^- \in M^+$ et que

$$f = \left(f^+ - f^-\right) \qquad \text{et} \qquad |f| = \left(f^+ + f^-\right).$$

Proposition 20.1 *1)* $\mathcal{L}^1(D, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel réel.*
2) L'intégration $f \longmapsto \int_D f d\mu$ *est une application linéaire sur cet espace vectoriel :*

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_D f d\mu + \beta \int_D g d\mu$$

$\square$

Preuve 1) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(D, \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$, par conséquent

$$\int_D |\alpha f + \beta g|\, d\mu \leq \int_D (|\alpha||f| + |\beta||g|)\, d\mu = |\alpha| \int_D |f| d\mu + |\beta| \int_D |g| d\mu < \infty,$$

donc $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(D, \mathbb{R})$.

2) Il est facile de vérifier que $\int_D \alpha f d\mu = \alpha \int_D f d\mu$, on doit donc seulement montrer que $\int_D (f+g)\, d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu$. Nous allons nous ramener au cas des fonctions positives pour lequel la linéarité est déjà connue (proposition 19.9).
De l'identité

$$(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^- = \left(f^+ - f^-\right) + \left(g^+ - g^-\right)$$

on déduit que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$, et donc

$$\int_D \left((f+g)^+ + f^- + g^-\right) d\mu = \int_D \left((f+g)^- + f^+ + g^+\right) d\mu.$$

Notons I cette intégrale. Comme toutes ces fonctions appartiennent à M^+, on a par la proposition 19.9

$$\int_D (f+g)^+\, d\mu + \int_D f^- d\mu + \int_D g^- d\mu = I = \int_D (f+g)^-\, d\mu + \int_D f^+ d\mu + \int_D g^+ d\mu$$

en regroupant les termes, on peut écrire

$$\int_D (f+g)^+\, d\mu - \int_D (f+g)^-\, d\mu = \left(\int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu\right) + \left(\int_D g^+ d\mu + \int_D g^- d\mu\right)$$

ce qui, par définition des intégrales des fonctions à valeurs réelles, signifie

$$\int_D (f+g)\, d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu.$$

$\square$

Proposition 20.2 *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ et si $f \leq g$ presque partout, alors*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Preuve Soit $h := (g - f)$, par hypothèse $h \in M^+$, et donc $\int_X h d\mu \geq 0$. La proposition précédente entraîne donc

$$\int_X g d\mu = \int_X (f + h) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X h d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

$\square$

Proposition 20.3 *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ on a*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \left|\int_X f d\mu\right| &= \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| \\ &\leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X \left(f^+ + f^-\right) d\mu = \int_X |f| d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 20.4 *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$, on a $\mu\left(\{x \mid |f(x)| = \infty\}\right) = 0$.*

Preuve Notons $A_a := \{x \mid |f(x)| \geq a\}$ et $A_\infty := \{x \mid |f(x)| = \infty\}$. Alors $A_\infty \subset A_a$ pour tout $a > 0$. En utilisant l'inégalité de Chebychev (Lemme 19.3), on a donc

$$\mu(A_\infty) \leq \mu(A_a) \leq \frac{1}{a} \int_X |f| d\mu.$$

En faisant tendre $a \to \infty$, on obtient $\mu(A_\infty) = 0$. $\square$

Passons à la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs complexes :

On note $\mathcal{L}^1(D, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : D \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_D |f| d\mu < \infty.$$

L'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(D, \mathbb{C})$ est alors définie par

$$\int_D f d\mu := \int_D \text{Ré}(f) d\mu + i \int_D \text{Im}(f) d\mu.$$

Les propriétés précédentes de l'espace $\mathcal{L}^1(D, \mathbb{R})$ et de l'intégration se généralisent sans autres à l'espace $\mathcal{L}^1(D, \mathbb{C})$. En particulier, on a :

1.) $\mathcal{L}^1(D,\mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe.

2.) L'intégration est linéaire : $\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^1(D,\mathbb{C})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

3.) $\int_X |f| d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

4.) (Chebychev) $\int_X |f| d\mu \geq a \cdot \mu(|f| \geq a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}_+$.

5.) $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$;

6.) (Fatou :) $\displaystyle\int_X \left(\liminf_{i\to\infty} |f_i|\right) d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_i| d\mu.$

Exercices

20.1) Soient f, g deux fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que $f = g$ p.p si et seulement si $\displaystyle\int_D f d\mu = \int_D g d\mu$ pour tout $D \in \mathcal{A}$.

20.2) Soient f, g comme dans l'exercice précédent. Montrer que si $g \in \mathcal{L}^1(X)$ et $|f| \leq |g|$ p.p., alors on a aussi $f \in \mathcal{L}^1(X)$.

20.3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que, pour tout $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(ax)$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax) d\lambda^1(x) = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda^1(x)$$

20.4) Soient $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ trois fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que si $f, h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $f \leq g \leq h$ alors $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

---

21 Le théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 21.1 *Soit $f_i : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Supposons que*

i.) Il existe une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ telle $f_i \to f$ presque partout et

ii.) il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}_+)$ telle que $|f_i| \leq g$ presque partout pour tout i.

Alors f est intégrable et on a

a) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_X |f_i - f|\, d\mu = 0$;

b) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu = \int_X f d\mu.$

Démonstration Observons tout d'abord que f est mesurable puisque c'est la limite d'une suite de fonctions mesurables. D'autre part, nous avons presque partout

$$|f - f_i| \leq |f| + |f_i| = \lim_{j\to\infty} |f_j| + |f_i| \leq 2g$$

Donc les fonctions f et f_i sont intégrables et

$$\varphi_i = (2g - |f - f_i|) \geq 0 \qquad \text{presque partout.}$$

Quitte à modifier la fonction φ_i sur un ensemble de mesure nulle, nous pouvons supposer que $\varphi_i \in M^+$. Comme $f_i \to f$ presque partout, on a $2g = \liminf_{i\to\infty} \varphi_i$ presque partout et le lemme de Fatou entraîne que

$$\begin{aligned} \int_X 2g\, d\mu &= \int_X \liminf_{i\to\infty} \varphi_i\, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_X \varphi_i\, d\mu \\ &= \int_X 2g\, d\mu + \liminf_{i\to\infty} \int_X (-|f-f_i)|d\mu. \end{aligned}$$

On en déduit que $\liminf_{i\to\infty} \int (-|f-f_i)|d\mu \ge 0$, c'est à dire $\limsup_{i\to\infty} \int |f-f_i|d\mu \le 0$.
Par conséquent

$$\lim_{i\to\infty} \int |f-f_i|d\mu = 0,$$

et l'assertion (a) est démontrée.

Pour prouver (b), on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu - \lim_{i\to\infty} \int_X f_i d\mu \right| &= \left| \lim_{i\to\infty} \int_X (f-f_i)\, d\mu \right| \\ &= \lim_{i\to\infty} \left| \int_X (f-f_i)\, d\mu \right| \\ &\le \lim_{i\to\infty} \int_X |f-f_i|\, d\mu = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Le corollaire suivant joue un rôle important dans un grand nombre de questions, notamment en théorie des séries de Fourier.

Corollaire 21.2 *Soit $\{u_k\} \subset \mathcal{L}^1(X,\mathbb{C})$ une suite de fonctions intégrables sur X telle que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |u_k| d\mu < \infty.$$

Alors la série $\sum u_k$ converge presque partout vers une fonction $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathbb{C})$. De plus on a

a.) $\left| \int_X \left(f - \sum_{k=1}^{n} u_k \right) d\mu \right| \to 0$, *lorsque* $n \to \infty$ *;*

b.) $\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X u_k d\mu.$

c.) $\left| \int_X f d\mu \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |u_k| d\mu.$

Preuve Soit $g = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, par le le théorème de convergence monotone, on voit que

$$\begin{aligned} \int_X g\, d\mu &= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |u_k| \right) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X |u_k| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |u_k| d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathbb{R})$. On sait que $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)| < \infty$ presque partout, donc la série $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ converge presque partout. On appelle $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ la limite et on voit que l'on peut appliquer la théorème de convergence dominée à la suite $f_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$, ce qui prouve les assertions (a) et (b).
L'assertion (c) découle de (b) et

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_X u_k d\mu\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_X u_k d\mu\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_X |u_k| d\mu.$$

□

Exemple (Série de Fourier) Soit $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ une suite telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty,$$

(c'est à dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}|c_k| + \sum_{k=-1}^{-\infty}|c_k| < \infty$). Alors la série

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ikx} \tag{21.1}$$

converge pour presque tout $x \in [0,2\pi]$ et définit une fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ telle que

$$\int_{[0,2\pi]} |f(x)| d\lambda(x) \leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|.$$

Remarque On peut voir f comme une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui est 2π-périodique. Bien que f ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur tout intervalle borné.

Preuve On applique le corollaire à $u_k(x) = c_k \mathrm{e}^{ikx}$ en observant que

$$\int_{[0,2\pi]} |e^{ikx}| d\lambda(x) = 2\pi$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. □

L'identité (21.1) s'appelle le *développement en série de Fourier* de la fonction f. Une question importante est de décrire la classe des fonctions $f \in \mathcal{L}^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ admettant un développement de Fourier.

Exercices

21.1) Soit $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables telle que (a) $\{f_k\}$ est uniformément bornée (i.e. $|f_k(x)| \leq C$ où $C < \infty$ est une constante), et (b) $|f_k(x)| \to 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k \, d\mu = 0.$$

Pourrait-on se passer de l'hypothèse (a) ?

21.2) Toute fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est "petite à l'infini". Montrer par exemple que pour toute $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on a

(a) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} f d\lambda^n = 0\,;$

(b) pour tout $\epsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \lambda^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| \geq r \text{ et } |f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0\,;$

(c) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r \cdot \lambda^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |f(x)| \geq r\}\right) = 0.$

21.3) Soit $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Alors l'ensemble $\{|f| > 0\}$ est σ-fini.

21.4) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x) \ ?$$

21.5) Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx} d\lambda(x)$$

où $b > 1$.

21.6) Soit $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_A f d\mu\right| < \varepsilon$$

(cette propriété s'appelle l'*absolue continuité* de l'intégrale).

---

22 L'intégrale de Riemann

Rappelons la définition de l'intégrale de Riemann :

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Pour toute subdivision $\tau := [a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b]$ de cet intervalle on définit la *somme inférieure* et la *somme supérieure de Darboux :*

$$\underline{S}(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) \cdot (t_i - t_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad \overline{S}(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Observons que $\underline{S}(f, \tau) \leq \overline{S}(f, \tau')$ pour toutes subdivisions τ, τ'.

Définition La fonction f est *intégrable au sens de Riemann* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision telle que

$$\left(\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau)\right) < \varepsilon.$$

L'*intégrale de Riemann* de f est alors définie par

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \sup \underline{S}(f, \tau) = \inf \overline{S}(f, \tau)$$

(le sup et l'inf étant pris sur l'ensemble de toutes les subdivisions τ de $[a, b]$).

Rappelons les propriétés suivantes, qui sont étudiées en première année :

Proposition 22.1 (Propriétés de l'intégrale de Riemann) *1.) Une fonction f qui est intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a, b]$ est bornée sur cet intervalle.*

2.) Toute fonction continue est intégrable.

3.) Si f est intégrable, alors $|f|$ aussi. Plus généralement, si f est intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $g \circ f$ est intégrable

4.) Toute fonction monotone (croissante ou décroissante) est intégrable au sens de Riemann.

5.) (Linéarité) Si f et g sont intégrables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable et

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \ .$$

6.) (Monotonie) Si f et g sont intégrables et $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

7.) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur tout sous-intervalle de $[a, b]$. De plus si $a \leq c \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

8.) (Newton-Leibniz) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors la fonction $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ est continue. De plus si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

□

Remarques : Toutes les "méthodes d'intégration" (substitution, intégration par parties etc. sont des conséquences du théorème de Newton-Leibniz).

Théorème 22.2 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, alors f est aussi intégrable au sens de Lebesgue et*

$$(R) \int_a^b f(x)dx = (L) \int_{[a,b]} f(x)dx$$

où (L)$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda^1$ *désigne l'intégrale au sens de Lebesgue.*

□

Proposition 22.3 *f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement f est bornée et continue en dehors d'un ensemble de mesure nulle.*

□

Convergence de l'intégrale de Riemann :

Théorème 22.4 *Soit* $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann et convergeant uniformément vers une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Alors* f *est intégrable au sens de Riemann et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right) dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

$\square$

Remarquons que les hypothèses de ce théorème sont beaucoup plus fortes que celles du théorème de convergence dominée.

Exercices

22.1) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

22.2) Démontrer la proposition 22.3.

23 Les intégrales impropres

Rappelons que l'intégrale de Riemann n'a de sens que pour les fonctions définies sur un intervalle compact et qui sont bornées.

L'*intégrale impropre* de Riemann est défine par passage à la limite :

$$(IR)\int_a^b f(x)dx := \lim_{\alpha\to a,\beta\to b}(R)\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

lorsque cette limite a un sens (et donc en particulier f doit être borné sur tout sous-intervalle compact $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$). On admet ici les cas $a = -\infty$ et/ou $b = \infty$.

Si une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ est définie en dehors d'un point $c \in (a,b)$ et $\lim_{x\to c}|f(x)| = \infty$, alors on peut encore définir l'intégrale impropre de Riemann par

$$(IR)\int_a^b f(x)dx := (IR)\int_a^c f(x)dx + (IR)\int_c^b f(x)dx.$$

On peut généraliser cette procédure au cas où f possède un nombre fini (et dans certains cas dénombrable) de singularités bien que cette procédure soit de plus en plus complexe.

Avec la notion d'intégrale de Lebesgue, toutes ces difficultés s'évaporent : l'intégrale de Lebesgue est directement définie sur tout intervalle, même si la fonction f est infinie sur un ensemble non dénombrable (mais de mesure nulle).

Proposition 23.1 *1) Soit f une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur un intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (où $-\infty \le a < b \le \infty$). Si f admet une intégrale impropre de Riemann sur (a,b), alors les deux intégrales coincident :*

$$(IR)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_{(a,b)} f(x)dx$$

2) Si $f \ge 0$ presque partout, alors l'intégrale impropre de Riemann $(IR)\int_a^b f(x)dx$ existe si et seulement $f \in \mathcal{L}^1((a,b),\mathbb{R})$.

Il est toutefois possible qu'une fonction de signe variable admette une intégrale impropre de Riemann sans être intégrable au sens de Lebesgue.

Exemple Un exemple classique est le suivant : soit $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}.$$

Alors $(L) \displaystyle\int_{(0,\infty)} |f(x)|dx = \infty$ et donc $f \notin \mathcal{L}^1((0,\infty),\mathbb{R})$. Toutefois l'intégrale impropre $(IR) \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ existe car

$$(IR) \int_0^\infty f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

où $c_k := \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)dx = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx.$

Il suffit d'observer que la série alternée $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k |c_k|$ converge puisque c_k est décroissante et $\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_k = 0$.

On peut en fait démontrer que

$$(IR) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice

23.1) Pour quelles valeurs de α et $\beta \in \mathbb{R}$, a-t-on

$$\int_1^\infty x^\alpha \, d\lambda(x) < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^\beta \, d\lambda(x) < \infty \ ?$$

---

24 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 24.1 *Soit $f : X \times [s_1, s_2] \to \mathbb{C}$ une fonction (où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré) telle que*

i.) Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, la fonction définie sur X par $x \mapsto f(x,s)$ est mesurable ;

ii.) pour presque tout x, la fonction $s \mapsto f(x,s)$ est continue en $s_0 \in [s_1, s_2]$;

iii.) il existe une fonction intégrable $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}_+)$ telle que $|f(x,s)| \leq g(x)$ pour tout $s \in [s_1, s_2]$ et pour presque tout $x \in X$.

Alors la fonction $I(s)$ définie sur $[s_1, s_2]$ par

$$I(s) := \int_X f(x,s) d\mu(x)$$

est continue en s_0.

Preuve On doit montrer que si $\{s_i\} \subset [s_1, s_2]$ est une suite convergeant vers s_0, alors

$$\lim_{i\to\infty} I(s_i) = I(s_0).$$

On pose $f_i(x) := f(x, s_i)$ et $f_0(x) = f(x, s_0)$. Puis on applique le théorème de convergence dominée.

□

Théorème 24.2 (Dérivation sous la signe $\int$) *Soit $f : X \times [s_1, s_2] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que*

i.) Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, la fonction $x \mapsto f(x,s)$ est intégrable ;

ii.) pour presque tout x, la fonction $s \mapsto f(x,s)$ est dérivable sur (s_1, s_2).

iii.) il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}_+)$ telle que $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}| \le g(x)$ pour tout $s \in [s_1, s_2]$ et pour presque tout $x \in X$.

Alors la fonction $I(s) := \int_X f(x,s) d\mu(x)$ est dérivable sur (s_1, s_2) et

$$\frac{dI}{ds} = \int_X \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} d\mu(x).$$

Preuve Soit t un point de (s_1, s_2) et $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [s_1, s_2]$ une suite telle que $t_i \neq t$ et $t_i \to t$. Posons $\varphi_i(x) := \dfrac{f(x,t_i) - f(x,t)}{t_i - t}$.
Par le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe pour tout i et tout x un nombre $u_i(x) \in (s_1, s_2)$ tel que $\varphi_i(x) = \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_i(x))$; en particulier, on a presque partout

$$|\varphi_i(x)| \le \sup_s \left| \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} \right| \le g(x).$$

Le théorème de convergence dominée entraîne alors

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial s}(x,t) d\mu(x) &= \int_X \lim_{i \to \infty} \left(\frac{f(x,t_i) - f(x,t)}{t_i - t} \right) d\mu(x) \\ &= \lim_{i \to \infty} \int_X \left(\frac{f(x,t_i) - f(x,t)}{t_i - t} \right) d\mu(x) \\ &= \lim_{i \to \infty} \left(\frac{I(t_i) - I(t)}{t_i - t} \right) = \frac{dI}{ds}(t). \end{aligned}$$

□

Exemple Nous allons prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-ts} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

Cette preuve procède par récurence sur n. Pour $n = 0$, la formule dit que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ts} dt = \frac{1}{s},$$

ce qui est facile à vérifier.
Pour $n > 0$, on admet par récurence que $\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-ts} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Par le théorème précédent, on a

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-ts} dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} \left(t^n \mathrm{e}^{-ts} \right) dt = -\int_0^\infty t^{n+1} \mathrm{e}^{-ts} dt,$$

et donc

$$\int_0^\infty t^{n+1} \mathrm{e}^{-ts} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-ts} dt = -\frac{d}{ds} \left(\frac{n!}{s^{n+1}} \right) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

□

En posant $s = 1$, dans la formule précédente, on trouve

$$n! = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t} dt.$$

La fonction Γ d'Euler est définie pour $z > 0$ (en fait pour $z \in \mathbb{C}$, Ré $z > 0$) par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

Le théorème de convergence dominée entraîne que Γ est une fonction continue et le théorème précédent nous dit que Γ est différentiable (et même holomorphe). Par ailleurs, on vient de voir que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t} dt = n!$$

Exercices

24.1) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $a(t) \leq b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$F(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx$$

est une fonction continue.

24.2) Calculer l'intégrale

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-sx}\, dx$$

pour $s > 0$. (Indication : dériver sous le signe $\int$).

24.3) Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Le *produit de convolution* de f et g est défini par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) d\lambda^n(y)$$

en tout point x où cette intégrale existe (i.e. où la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ est intégrable). Montrer que si g est intégrable et f est une fonction continue à support compact, alors $f * g$ est partout définie et $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue.

24.4) Soit $g \in \mathcal{L}^1([0,1])$. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(t) := \int_0^1 \sqrt{t + g(x)^2} dx.$$

a) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0, \infty)$.

b) Montrer que f est dérivable sur $(0, \infty)$ et calculer la dérivée en $t_0 > 0$.

c) A quelle condition sur la fonction g le résultat obtenu en (b) est-il valable en $t_0 = 0.$?

24.5) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixy} f(x) dx,$$

montrer que

a) $\hat{f}$ est continue,

b) $\hat{f}$ est bornée et $\sup|\hat{f}| \le \|f\|_{L^1}$ $(=\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx)$

c) $\hat{f}\,(y) \to 0$ lorsque $y \to \pm\infty$.

d) Si $x \to xf(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{dy}\,\hat{f} = -\widehat{ixf(x)}$$

24.6) Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et $g \in L^1(X)$. Alors

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_X e^{tf}\cdot g\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$

b) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_X e^{tf}\cdot g\,d\mu = \int_X e^{tf} f\cdot g\,d\mu$

c) Si $\int_X g\,d\mu = 1$, alors $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\int_X e^{tf}\cdot g\,d\mu\right)^{1/t} = \exp\left(\int_X fg\,d\mu\right).$

---

25 Quelques inégalités importantes

En analyse, les inégalités jouent un rôle prépondérant. Dans ce paragraphe, nous étudions quelques-unes des inégalités importantes de la théorie de l'intégration.

Nous avons déjà vu les inégalités suivantes :

i.) $\displaystyle\int_X \liminf_{i\to\infty} f_i(x)d\mu(x) \le \liminf_{i\to\infty}\int_X f_i(x)d\mu(x)$ (Lemme de Fatou) ;

ii.) $\displaystyle\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| \le \int_X |f(x)|\,d\mu(x)$;

iii.) $\displaystyle\int_X |f(x)|\,d\mu(x) \ge a\cdot\mu\{|f|\ge a\}$ (inégalité de Chebychev).

25.1 L'inégalité de Jensen

Si $0 < \mu(D) < \infty$ et si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(D)$, on a

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu(D)}\int_D f(x)d\mu(x)\right) \le \frac{1}{\mu(D)}\int_D \Phi\circ f(x)d\mu(x).$$

Preuve Pour simplifier, nous supposons que Φ est différentiable. Alors on a pour tous $u, m \in \mathbb{R}$

$$\Phi(u) - \Phi(m) \ge \Phi'(m)\cdot(u-m).$$

Posons $m := \frac{1}{\mu(D)}\int_X f(x)d\mu(x)$ et $u = f(x)$, alors l'inégalité ci-dessus dit que

$$\Phi(f(x)) - \Phi(m) \ge \Phi'(m)\cdot(f(x)-m)$$

pour tout $x \in D$. En intégrant cette inégalité, on obtient

$$\int_D \Phi\circ f(x)d\mu(x) - \Phi(m)\cdot\mu(D) \ge \Phi'(m)\cdot\left(\int_D f(x)d\mu(x) - m\cdot\mu(D)\right) = 0$$

d'où

$$\Phi(m) \le \frac{1}{\mu(D)}\int_D \Phi\circ f(x)d\mu(x).$$

□

25.2 Exemples

a) Soit $1 \leq p \leq q < \infty$. En prenant $\Phi(u) := |u|^{q/p}$ et en posant $f(x) := |g(x)|^p$, on obtient l'inégalité

$$\left(\frac{1}{\mu(D)}\int_D |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{\mu(D)}\int_D |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

b) L'exponentielle est convexe, d'où

$$\exp\left(\frac{1}{\mu(D)}\int_D f(x) d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{\mu(D)}\int_D e^{f(x)} d\mu(x).$$

c) La célèbre inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique d'une famille de nombres dit que si $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Pour démontrer cette inégalité, on considère l'ensemble $X = \{1, 2, ..., n\}$ avec la mesure de comptage μ, et on pose $f(k) := \log(a_k)$. Alors, d'après l'exemple précédent,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\int_X f(k) d\mu(k)\right) \leq \frac{1}{n}\int_X e^{f(k)} d\mu(k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

$\square$

25.3 L'inégalité de Young

L'inégalité de Young n'est pas une inégalité intégrale, mais elle sera nécessaire dans la preuve de l'inégalité de Hölder.

Définition On dit que deux nombres $p, q > 1$ sont *conjugués au sens de Young*, si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De manière équivalente :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{q}{q-1} \quad \Longleftrightarrow \quad pq = p + q \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{q}{p} = q - 1.$$

L'inégalité de Young dit que si p et q sont conjugués et si $a, b \geq 0$, alors

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

(Par exemple, si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$.)

Preuve Cette inégalité est triviale si $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose donc $ab \neq 0$ et on pose

$$t := \frac{a^p}{b^q}$$

On a donc $t^{1/p} = \dfrac{a}{b^{q/p}} = \dfrac{ab}{b^q}$, et $\left(\dfrac{t}{p} + \dfrac{1}{q}\right) = \left(\dfrac{a^p}{p}\dfrac{1}{b^q} + \dfrac{1}{q}\right)$, en sorte que l'inégalité de Young $\frac{ab}{b^q} \leq \left(\frac{a^p}{p}\frac{1}{b^q} + \frac{1}{q}\right)$ est équivalent à l'inégalité

$$t^{1/p} \leq \left(\frac{t}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Pour prouver cette inégalité, on introduit la fonction $g(t) := \left(\frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p}\right)$.

On $g'(t) = \frac{1}{p}\left(1 - t^{\frac{1}{p}-1}\right) = \frac{1}{p}\left(1 - t^{1/q}\right)$, donc $g(t)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1)$ et strictement croissante sur l'intervalle $(1, \infty)$, cette fonction présente donc un minimum absolu en $t = 1$. Or $g(1) = 0$ puisque p, q sont conjugués. Par conséquent $g(t) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $t := \frac{a^p}{b^q} = 1$. L'inégalité (25.3), et donc l'inégalité de Young, est démontrée.

□

25.4 L'inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, alors

$$\int_D (f(x)g(x))\, d\mu(x) \leq \left(\int_D |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_D |g(x)|^q\, d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Il est commode de noter

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_D |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p},$$

en sorte que l'inégalité de Hölder peut s'écrire

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p}\, \|g\|_{\mathcal{L}^q}.$$

On note aussi $\|f\|_p = \|f\|_{\mathcal{L}^p}$.

Preuve Cas 1 : Si $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$, alors $f = 0$ presque partout, donc $\displaystyle\int_D (f(x)g(x))\, d\mu(x) = 0$ et il n'y a rien à montrer (de même si $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = 0$).

Cas 2 : Supposons que $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|g\|_{\mathcal{L}^q} = 1$.
Par l'inégalité de Young, on sait que pour tout x, on a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Par conséquent

$$\|fg\|_1 = \int_D |fg|\ d\mu \leq \frac{1}{p}\int_D |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q}\int_D |g|^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\, \|g\|_q.$$

Cas général : Si $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \neq 0$ et $\|g\|_{\mathcal{L}^q} \neq 0$, alors on pose

$$f_1 := \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad g_1 := \frac{g}{\|g\|_q}$$

en sorte que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$. On a donc, par le cas 2, $\|f_1 g_1\|_1 \leq 1$ ce qui entraîne

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq 1.$$

□

Remarque L'inégalité

$$\left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

pour $0 < \mu(D) < \infty$ et $1 \leq q \leq p < \infty$ peut aussi être déduite de l'inégalité de Hölder.

En effet, posons $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p}{p-q}$. Alors r et r' sont conjugués, on a donc pour toute fonction $\|f \cdot 1\|_1 \leq \|f\|_r \|1\|_{r'}$, c'est à dire

$$\int_D f \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int_D |f|^r \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_D 1 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r'}} = (\mu(D))^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_D |f|^r \, d\mu(x)\right)^{\frac{q}{p}}$$

En élevant cette inégalité à la puissance $1/q$ et en posant $f(x) := |g(x)|^q$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D f d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D |f|^r \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Un cas particulier de l'inégalité de Hölder est l'inégalité

$$\left\|f \cdot h^{p-1}\right\|_1 \leq \|f\|_p \|h\|_p^{p-1}. \tag{25.1}$$

qui est vraie pour tout $p \geq 1$ et toute fonction mesurable positive $h \geq 0$.
Cette inégalité signifie

$$\int_X f \cdot h^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X h^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Pour vérifier cette inégalité, on pose $q = p/(p-1)$, alors $(h^{p-1})^q = h^p$. On a donc par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\left\|f \cdot h^{p-1}\right\|_1 &\leq \|f\|_p \left\|h^{p-1}\right\|_q \\
&\leq \|f\|_p \cdot \left(\int_X (h^{p-1})^q d\mu\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_p \cdot \left(\int_X h^p d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p \|h\|_p^{p/q} \\
&= \|f\|_p \|h\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Car $\dfrac{p}{q} = p - 1$.

□

25.5 L'inégalité de Minkowski

Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que $|f(x)|^p$ est intégrable, i.e. $\int_D |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$.

L'inégalité de Minkowski dit que si $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{L}^p(X,\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n f_k \in \mathcal{L}^p(X,\mathbb{R})$ et

$$\left(\int_X \left|\sum_{k=1}^n f_k(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^n \left(\int_X |f_k(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Avec la notation $\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$, l'inégalité de Minkowski peut s'écrire

$$\left\|\sum_{k=1}^n f_k(x)\right\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k(x)\|_p .$$

Preuve Il suffit naturellement de prouver que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
Soit $h := |f+g|$, alors $|f+g|^p = |f+g| \cdot h^{p-1} \leq |f| \cdot h^{p-1} + |g| \cdot h^{p-1}$, donc, en utilisant l'inégalité (25.1), on a

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p d\mu &\leq \int_X |f| \cdot h^{p-1} d\mu + \int_X |f| \cdot h^{p-1} d\mu \\ &= \left\|f \cdot h^{p-1}\right\|_1 + \left\|g \cdot h^{p-1}\right\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \|h\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|h\|_p^{p-1} . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|h\|_p^{p-1} = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{p-1} .$$

$\square$

26 L'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Soit $1 \leq p < \infty$. On note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ (ou simplement $\mathcal{L}^p(X)$) l'ensemble des fonctions $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ qui sont p-intégrables :

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, f \text{ est mesurable et } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Observons que $\mathcal{L}^p(X)$ est un espace vectoriel : en effet, si $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $(\alpha f + \beta g)$ est mesurable et comme $|\alpha f + \beta g|^p \leq 2^p(|\alpha|^p |f|^p + |\beta|^p |g|^p)$, on a

$$\int_X |\alpha f + \beta g|^p d\mu \leq 2^p |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p |\beta|^p \int_X |g|^p d\mu < \infty.$$

On définit ensuite une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(X)$ en posant

$$f \backsim g \Leftrightarrow \mu\left(\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0$$

(i.e. $f \backsim g$ s.si f et g coïncident presque partout).

Définition L'espace $L^p(X)$ est par définition le quotient

$$L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/\backsim$$

Un élément de $L^p(X)$ est donc une classe d'équivalence de fonctions ; il est toutefois habituel de considérer qu'un élément de $L^p(X)$ est une fonction “bien définie presque partout”.
Remarquons qu'en général, un ensemble réduit à un point est un ensemble de mesure nulle ; par conséquent si $f \in L^p(X)$ et $x \in X$, le nombre $f(x)$ n'est en général pas défini.

Toutefois si $f \in L^1(D)$ avec $D \in \mathcal{A}$, alors l'intégrale $\int_D f(x)d\mu$ est bien définie (en effet, si $g \backsim f$ alors f et g coïncident presque partout et donc $\int_D g(x)d\mu = \int_D f(x)d\mu$).
Remarquons en outre que, par l'exemple 1 de l'inégalité de Jensen, nous avons l'inclusion $L^p(D) \subset L^q(D)$ pour tout ensemble $D \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(D) < \infty$. En particulier, si $0 < \mu(D) < \infty$ et $f \in L^q(D)$ (avec $1 \leq q < \infty$) alors $f \in L^1(D)$ et donc l'intégrale $\int_D f(x)d\mu$ est bien définie. On peut aussi considérer la moyenne de f sur D.

Formulons ces remarques sous la forme suivante : *Pour tout ensemble mesurable D de mesure finie et non nulle, et pour tout $f \in L^q(D)$, la moyenne*

$$\frac{1}{\mu(D)} \int_D f(x)d\mu$$

est bien définie.

Proposition 26.1 *La fonction qui à tout $f \in L^p(X)$ associe le nombre*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

est une norme sur $L^p(X)$.

Preuve Il est clair que $\|f\|_p \geq 0$ pour tout f et que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$. D'autre part $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ presque partout, i.e. si et seulement si f est l'élément nul de l'espace vectoriel $L^p(X)$. Finalement l'inégalité du triangle

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

n'est qu'une reformulation de l'inégalité de Minkowski. □

Proposition 26.2 *Soit $\{g_k\} \subset \mathcal{L}^p(X)$ une suite telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{L}^p(X)$ tel $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ presque partout et*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|_p = 0$$

Preuve Posons $M = \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$ et $\psi_n := \sum_{k=1}^{n} |g_k|$. La suite ψ_n^p est une suite monotone de fonctions mesurables positives et on a donc par le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n^p d\mu = \int_X \psi^p d\mu$$

où $\psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$.

Par l'inégalité de Minkowski, nous avons

$$\left(\int_X \psi_n^p d\mu\right)^{1/p} = \left\|\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \leq M < \infty$$

pour tout n. La fonction ψ appartient donc à $\mathcal{L}^p(X)$ et $\|\psi\|_p \leq M$.
Considérons l'ensemble des points $E \subset X$ tel que la série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ est absolument convergente, i.e.

$$E := \left\{x \in X \,\middle|\, \psi(x) < \infty\right\},$$

et notons $\varphi : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Comme $\psi \in \mathcal{L}^p(X)$, on a $\psi(x) < \infty$ presque partout, i.e. $\mu(X \setminus E) = 0$. Nous avons donc démontré qu'il existe une fonction mesurable φ telle $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ presque partout.
Il est clair que $\varphi \in \mathcal{L}^p(X)$, puisque $|\varphi(x)| \leq \psi(x)$ pour tout x et $\psi \in \mathcal{L}^p(X)$; il reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} \left\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k\right\|_p = 0$.
Nous avons $\lim_{n\to\infty} \left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k\right) = 0$ presque partout et

$$\left|\varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k\right|^p \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} g_k\right|^p \leq \psi^p$$

pour tout n. Comme ψ^p est intégrable, le théorème de convergence dominée entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k\right\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \left|\varphi - \sum_{k=1}^{n} g\right|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_X \lim_{n\to\infty} \left|\varphi - \sum_{k=1}^{n} g\right|^p d\mu\right)^{1/p} = 0.$$

□

Théorème 26.3 (Riesz-Fischer) *L'espace $L^p(X)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$.*

Dire que l'espace est complet signifie que toute suite de Cauchy converge ; i.e. si $\{f_i\} \subset L^p(X)$ est une suite telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que $\|f_i - f_j\|_p \leq \varepsilon$ dès que $i, j \geq N$, alors il existe un élément $f \in L^p(X)$ tel que $\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\|_p = 0$ (on dit alors que f_i converge vers f *au sens L^p*).

Démonstration Supposons que $\{f_i\} \subset L^p(X)$ est une suite de Cauchy, alors pour tout entier k il existe $m_k \geq k$ tel que si $i, j \geq m_k$, alors $\|f_i - f_j\|_p \leq 2^{-k}$. Posons $g_k := f_{m_{k+1}} - f_{m_k}$, alors $\|g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ et donc $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p \leq 1$. Par la proposition précédente, on sait qu'il existe $\varphi \in L^p(X)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|_p = 0$. Posons $f := \varphi + f_{m_1}$, alors on a

$$f - f_{m_{n+1}} = \varphi - f_{m_{n+1}} + f_{m_1} = \varphi - \sum_{k=1}^{n} g_k,$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \left\| f - f_{m_{n+1}} \right\|_p = 0$. Nous pouvons maintenant conclure car

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \left(\left\| f - f_{m_{n+1}} \right\|_p + \left\| f_n - f_{m_{n+1}} \right\|_p \right) = 0.$$

□

Remarque Un espace vectoriel muni d'une norme et qui est complet pour cette norme s'appelle un *espace de Banach*. Le théorème de Riesz-Ficher peut donc être formulé ainsi : "$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach".

26.1 L'espace $L^\infty(X)$

Définition. On dit qu'un nombre $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est *essentiellement* un *majorant* de f si $f \leq a$ presque partout : $\mu(f \geq a) = 0$. Le plus petit majorant essentiel s'appelle le *sup essentiel* :

$$\text{ess-sup}_{x\in X} f := \inf \{ a \in \mathbb{R} \mid \mu(f \geq a) = 0 \}.$$

On définit aussi la norme L^∞ de f par

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f|,$$

et l'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{C})$ des fonctions mesurables essentiellement bornées par

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{C}) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ est mesurable et } \|f\|_\infty < \infty \}.$$

On obtient ensuite l'espace $L^\infty(X, \mathbb{C})$ en identifiant deux fonctions de $\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{C})$ qui coïncident presque partout.

Proposition 26.4 *a)* $\| \ \|_\infty$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{L}^\infty(X)$.
b) $(L^\infty(X, \mathbb{C}), \| \ \|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

□

26.2 Une application aux séries de Fourier

Le théorème de Riesz-Ficher (et plus exactement la Proposition 26.2) joue un rôle fondamental en théorie des séries de Fourier et plus généralement en analyse harmonique.

Voici une application importante :

Proposition 26.5 *Soit* $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *une suite de nombres complexes telle que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty,$$

alors il existe une fonction $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ *telle que* $f \in L^p(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ *pour tout* $p \in [1, \infty)$ *et*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f(\theta) - \sum_{|k|\le m} c_k \mathrm{e}^{ik\theta} \right\|_{L^p} = 0.$$

Preuve. Notons $g_k(\theta) = c_k \mathrm{e}^{ik\theta}$, alors

$$\begin{aligned} \|g_k\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{S}^1} |c_k \mathrm{e}^{ik\theta}|^p d\theta \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{S}^1} |c_k|^p d\theta \right)^{1/p} \\ &= (2\pi)^{1/p} |c_k|. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|g_k\|_{L^p} \le (2\pi)^{1/p} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty,$$

et nous pouvons appliquer la Proposition 26.2.

□

Remarque. Lorsque $p = 2$, nous pouvons remplacer l'hypothèse $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ par l'hypothèse plus faible

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

On peut d'ailleurs démontrer qu'il y a un isomorphisme entre l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ et l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$ des suites $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ telles que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$

La preuve repose sur des propriétés spécifiques aux espaces de Hilbert et ne se généralise pas au cas $p \ne 2$.

Exercices

26.1) Montrer que si $g \in L^p(X)$ et $\mu(X) < \infty$, alors $g \in L^r(X)$ pour tout $1 \le r \le p$.

26.2) Démontrer la proposition 26.4.

26.3) Montrer que l'inégalité de Hölder est encore vraie pour le couple conjugué $p = 1, q = \infty$.

---

27 Mesure produit et théorème de Fubini

Dans ce paragraphe, tous les espaces mesurés sont supposés σ-finis.

Rappelons que l'intégrale de Riemann peut se définir sur un domaine borné du plan ou de $\mathbb{R}^n$. De plus, si $h : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'intégrale double se ramène à deux intégrales simples successives :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} h(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} h(x, y) dx \right) dy.$$

En particulier, on peut échanger l'ordre d'intégration :$\int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b} = \int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b}$. Le théorème de Fubini est une généralisation de ce principe.

Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Rappelons que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ est la σ-algèbre sur $X = X_1 \times X_2$ engendrée par les ensembles du type $A_1 \times A_2 \subset X$ où $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$.
Pour un ensemble $A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ quelconque, on défini les *tranches* (ou *sections*) de A par

$$\begin{aligned} A'_x \quad &: \quad = \{y \in X_2 \mid (x, y) \in A\} \subset X_2 \\ A''_y \quad &: \quad = \{x \in X_1 \mid (x, y) \in A\} \subset X_1 \end{aligned}$$

Lemme 27.1 *Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A'_x \in \mathcal{A}_2$ pour tout $x \in X$ et $A''_y \in \mathcal{A}_1$ pour tout $y \in Y$.*

Preuve Notons $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ la collection des ensembles $C \in \mathcal{A}$ tels que $C'_x \in \mathcal{A}_2$. Cette collection est clairement une tribu (car $\emptyset'_x = \emptyset$, $(C^c)'_x = (C'_x)^c$ et $(\cup_k C_k)'_x = \cup_k (C_k)'_k$). De plus, si $C = C_1 \times C_2$ avec $C_1 \in \mathcal{A}_1$ et $C_2 \in \mathcal{A}_2$, alors $C'_x = C_2$ ou $\emptyset$ selon que $x \in C_1$ ou $x \in C_1^c$. Dans tous les cas, $C'_x \in \mathcal{A}_2$, par conséquent $C \in \mathcal{S}_x$.
On a montré que $\mathcal{S}_x$ est une tribu contenant tous les ensembles du type $C = C_1 \times C_2$ avec $C_1 \in \mathcal{A}_1$ et $C_2 \in \mathcal{A}_2$, donc $\mathcal{S}_x \supset \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Par conséquent, si $A \in \mathcal{A}$, alors $A \in \mathcal{S}_x$ et donc $A'_x \in \mathcal{A}_2$ pour tout $x \in X$. □

Proposition 27.2 *Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesuré σ-finis. Alors*

i.) Il existe une unique mesure μ sur $(X_1 \times X_2\ , \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

pour tous $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$

ii.) La mesure μ est σ-finie ;

iii.) Pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, on a

$$\mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A'_x) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \mu_1(A''_y) d\mu_2(y).$$

□

Définition Cette mesure s'appelle la *mesure produit* sur $(X_1 \times X_2\ , \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ et ce note $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Théorème 27.3 (Théorème de Fubini) *A.) Soit $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ une fonction mesurable, alors*

(a) la fonction $x \to \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est mesurable (sur $(X_1, \mathcal{A}_1)$) ;

(b) la fonction $y \to \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est mesurable (sur $(X_2, \mathcal{A}_2)$) ;

(c) on a l'égalité

$$\begin{aligned} \iint_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \quad &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \end{aligned}$$

B.) Soit $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$ une fonction intégrable, alors

(a) pour presque tout $x \in X_1$, la fonction $y \to f(x,y)$ est intégrable sur X_2 ;

(b) la fonction $x \to \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ est intégrable sur X_1 ;

(c) pour presque tout $y \in X_2$, la fonction $x \to f(x,y)$ est intégrable sur X_1 ;

(d) la fonction $y \to \int_X f(x,y)d\mu_1(x)$ est intégrable sur X_2 ;

(e) on a l'égalité

$$\begin{aligned}\iint_{X_1\times X_2} f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\\ &= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\end{aligned}$$

Remarques 1) La partie (A) de ce théorème s'appelle parfois le théorème de Fubini-Tonelli et la partie (B) s'appelle parfois le théorème de Fubini-Lebesgue.
2) La fonction $x \to \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ n'est définie que lorsque la fonction $[y \to f(x,y)]$ est intégrable, c'est à dire presque partout. Mais cela est sans inconvénient : pour dire qu'une fonction $g(x)$ est intégrable, il suffit que cette fonction soit définie presque partout. Son intégrale $\int_X g(x)d\mu_1(x)$ a alors un sens

Preuve (A) La partie (A) du théorème est vérifiée pour les fonctions caractéristique $1\!\!1_A$ où $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ par le lemme précédent et la proposition 27.2. Elle est donc vérifiée pour toutes les fonctions simples $h = \sum_{i=1}^n a_i 1\!\!1_{A_i}$ sur $(X_1 \times X_2\ , \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ par linéarité de l'intégrale. Finalement, elle est vérifiée pour toute fonction mesurables $f \geq 0$ en approximant f par une suite monotone de fonctions simples et en appliquant le théorème de convergence monotone.

(B) On se ramène à (A) en décomposant $f = f^+ - f^-$. □

Voyons quelques applications du théorème de Fubini.

Le principe de Cavalieri

Théorème 27.4 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-finis. Pour toute fonction mesurable $f : X \to [0,\infty]$, on a*

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu\left(\{f > t\}\right) dt.$$

Preuve Soit $Z = X \times \mathbb{R}$ avec la tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la mesure $\nu = \mu \otimes \lambda^1$. Définissons une fonction $\xi : Z \to \mathbb{R}$ par

$$\xi(x,t) = 1\!\!1_{[0,f(x))}(t) = 1\!\!1_{\{f>t\}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } f(x) > t \\ 0 \text{ si } f(x) \leq t \end{cases}$$

Observons que pour tout x,

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_{\mathbb{R}_+} 1\!\!1_{[0,f(x))}(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \xi(x,t)dt,$$

et donc

$$\int_X f d\mu = \int_X \left(\int_{\mathbb{R}_+} \xi(x,t)dt\right) d\mu(x).$$

D'autre part,

$$\mu(\{f>t\}) = \int_X \mathbb{1}_{\{f>t\}}(x)d\mu(x) = \int_X \xi(x,t)d\mu(x).$$

On vérifie que ξ est mesurable sur Z, on a donc par Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}_+} \xi(x,t)dt\right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_X \xi(x,t)d\mu(x)\right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f>t\})\, dt.\end{aligned}$$

□

Corollaire 27.5 *Pour toute fonction mesurable $g : X \to \mathbb{R}$, on a*

$$\|g\|^p_{L^p(X)} = \int_X |g|^p d\mu = p\int_0^\infty s^{p-1}\mu(\{|g|>s\})\, ds.$$

Preuve Appliquer le théorème précédent à la fonction $f = |g|^p$ et faire le changement de variable $t = s^p$, $dt = ps^{p-1}ds$. □

L'intégration par parties

Proposition 27.6 (Intégration par parties) *Pour tous $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurables, on a*

$$\int_a^b \left(\int_a^t f(s)ds\right) g(t)dt = \int_a^b f(s)\left(\int_s^b g(t)dt\right) ds.$$

Preuve Soit $\xi(s,t) = 1$ si $s \leq t$ et $\xi(s,t) = 0$ si $s > t$. Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^t f(s)ds\right) g(t)dt &= \int_a^b \left(\int_a^b g(t)f(s)\xi(s,t)ds\right) dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b g(t)f(s)\xi(s,t)dt\right) ds \\ &= \int_a^b f(s)\left(\int_s^b g(t)dt\right) ds.\end{aligned}$$

□

28 Changement de variables dans les intégrales

On sait que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation. De fait, elle est également invariante par rotation, plus généralement, on a

Théorème 28.1 *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une transformation affine, i.e. $F(x) = Ax + b$ où $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Alors pour toute partie mesurable $D \subset \mathbb{R}^n$, on a*

$$\lambda^n(F(D)) = |\det A| \cdot \lambda^n(D).$$

Si F est une rotation ou plus généralement une isométrie quelconque, alors $A \in O(n)$, i.e. $AA^t = \mathbf{I}$, par conséquent $\det A = \pm 1$ et donc F préserve la mesure de Lebesgue.

Supposons plus généralement que F est un difféomorphisme, alors on a

Théorème 28.2 *Soit $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors pour toute partie mesurable $D \subset \Omega_1$, on a*

$$\lambda^n(F(D)) = \int_D |J_F(x)|\, d\lambda^n(x)$$

où $J_F(x) = \det DF_x$ est le jacobien de F au point $x \in \Omega_1$.

Rappelons que la différentielle DF_x: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de F au point $x \in \Omega_1$ est l'application linéaire définie par

$$DF_x(v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(F(x + tv) - F(x)\right)$$

où, de manière équivalente, par

$$\left\|F(x') - F(x) - DF_x(x' - x)\right\| = o(\left\|x' - x\right\|).$$

Lorsqu'on exprime F en coordonnées, $F(x_1, x_2, ..., x_n) = (F_1, F_2, ..., F_n)$, alors la matrice de DF est la matrice des dérivées partielles :

$$DF_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et le jacobien est donné par $J_F = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$.

Le théorème précédent se généralise aux intégrales.

Théorème 28.3 *Soit $h : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction Borel mesurable et intégrable. Si $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ est un difféomorphisme, alors $F \circ h : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ est Borel mesurable ; de plus $J_F \cdot h \circ F$ est intégrable et on a*

$$\int_{\Omega_2} h(y) d\lambda^n(y) = \int_{\Omega_1} h(F(x))\, |J_F(x)|\, d\lambda^n(x). \tag{28.1}$$

On écrit cette formule sous la forme compacte

$$d^n y = |J_F(x)|\, d^n x = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) d^n x.$$

Remarque. Dans ce théorème, on suppose que h est borélienne, cela entraîne que $h \circ F$ est aussi borélienne. Si on supposait seulement que h est mesurable au sens de Lebesgue, on ne pourrait rien conclure sur $h \circ F$.

Preuve. Si $h = \mathbb{1}_A$ est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $A \subset \Omega_2$, alors la formule (28.1) se ramène au théorème précédent en posant $D = F^{-1}(A)$. La formule (28.1) est donc aussi vraie si $h = \sum a_j \mathbb{1}_{A_j}$ est une fonction simple.
Si h est une fonction borélienne positive ou nulle, alors il existe une suite monotone croissante de fonctions simples h_i telle que $h_i \uparrow h$ et le théorème découle du cas précédent et du théorème

de convergence monotone. Enfin, lorsque h est intégrable, on se ramène au cas précédent en décomposant $h = h^+ - h^-$ en somme de deux fonctions boréliennes positives ou nulles.

$\square$

Exemple 1 (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$).
Soient $\Omega_1 := \{(r,\theta) \mid r > 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi\}$ et $\Omega_2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$. Les coordonnées polaires sur le plan sont décrites par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} F \ : \ \Omega_1 &\to \Omega_2 \\ (r,\theta) &\to (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

On calcule le jacobien :

$$J_F = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

La formule de changement de variables s'écrit donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy = \int_{\Omega_1} \widetilde{h}(r,\theta)rdrd\theta$$

où $\widetilde{h}(r,\theta) := h(F(r,\theta)) = h(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Sous forme compacte, on écrit

$$dxdy = rdrd\theta.$$

Exemple 2 (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$).
Les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$ sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}$$

où $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ et $0 < \phi < \pi$. Le jacobien de cette transformation est donné par

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix} = -r^2\sin\phi,$$

et la formule de changement de variables s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega_1} \widetilde{g}(r,\theta,\phi)\,r^2\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi,$$

où $\Omega_1 := \{(r,\theta,\phi) \mid r > 0\ ,\ -\pi < \theta < \pi \text{ et } 0 < \phi < \pi\ \}$.
Sous forme compacte on peut écrire :

$$dx\,dy\,dz = r^2\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

29 Intégration sur la sphère et intégration polaire sur $\mathbb{R}^n$

On note $\mathbb{S}^{n-1} := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$, et pour toute partie borélienne $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$on pose

$$\sigma^{n-1}(A) := n \cdot \lambda^n \left(C_1(A)\right)$$

où $C_a(A)$ est le cône sur A de rayon a, i.e.

$$C_a(A) := \{t \cdot u : 0 < t < a \text{ et } u \in A\}.$$

Proposition 29.1 *σ^{n-1} est une mesure borélienne sur $\mathbb{S}^{n-1}$.*
De plus cette mesure est invariante par rotation, i.e. $Q_*\sigma^{n-1} = \sigma^{n-1}$ pour tout $Q \in O(n)$.

La preuve, qui est très simple, est laissée en exercice. □

Remarque. On peut démontrer qu'il existe une unique mesure borélienne invariante par rotation sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ à une constante près. Par conséquent nous avons

$$\sigma^{n-1} = c \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathbb{S}^{n-1}$$

Notons $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'homéomorphisme[6]

$$\Phi(r, u) = r \cdot u$$

Théorème 29.2 *La mesure de Lebesgue et la mesure sphérique sont reliées par la formule*

$$d\lambda^n = \Phi_* \left(r^{n-1} dr \otimes d\sigma^{n-1}\right)$$

Preuve Notons provisoirement $d\mu = \Phi_* \left(r^{n-1} dr \otimes d\sigma^{n-1}\right)$. On sait par le théorème 12.4 qu'il suffit de voir que $\mu(E) = \lambda^{n-1}(E)$ pour tout ensemble $E \in \Pi$ où $\Pi \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est un π-système engendrant la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
On choisit pour $\Pi \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des cônes

$$C_a(U) := \{t \cdot u : 0 < t < a \text{ et } u \in U\}$$

où $U \subset \mathbb{S}^{n-1}$est un ouvert quelconque et $a \geq 0$. Il n'est pas difficile de voir que Π est un π-système et qu'il engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Il est clair que

$$\lambda^{n-1}(C_a(U)) = a^n \lambda^{n-1}(C_1(U)) = \frac{1}{n} a^n \sigma^{n-1}(U),$$

comme $\frac{1}{n}a^n = \int_0^a r^{n-1} dr$, on a

$$\begin{aligned} \lambda^{n-1}(C_a(U)) &= \int_U \int_0^a r^{n-1} dr \otimes d\sigma^{n-1} = r^{n-1} dr \otimes d\sigma^{n-1} \left((0, r) \times U\right) \\ &= r^{n-1} dr \otimes d\sigma^{n-1} \left(\Phi\left(C_a(U)\right)\right) = \mu(C_a(U)) \end{aligned}$$

car $C_a(U) = \phi^{-1}\left((0, r) \times U\right)$.

□

Le théorème de Fubini et le thorème précédent entraînent :

---

[6]Il s'agit bien d'un homéomorphisme, et même d'un difféomorphisme, son inverse est donné par $\Phi^{-1}(x) = \left(\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right)$. C'est cette application que nous appelons les "coordonnées polaires", bien qu'il ne s'agisse pas réellement de coordonnées.

Corollaire 29.3 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \; d\lambda^n &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r \cdot u)\, r^{n-1} d\sigma^{n-1}(u)\, dr \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty f(r \cdot u)\, r^{n-1} dr\, d\sigma^{n-1}(u)\end{aligned}$$

□

En particulier, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est invariante par rotation, i.e. $f(Q \cdot x) = f(x)$ pour tout $Q \in O(n)$, alors il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \; d\lambda^n = \alpha_{n-1} \int_0^\infty \tilde{f}(r)\, r^{n-1} dr$$

où $\alpha_{n-1} = \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) n\, \lambda^n(\mathbb{B}^n)$.

Corollaire 29.4 (intégrale gaussienne) *L'intégrale de* $\mathrm{e}^{-a\|x\|^2}$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *est donnée par*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-a\|x\|^2} d\lambda = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Preuve Notons $I_n := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-a\|x\|^2} d\lambda$. Comme $\mathrm{e}^{-a\|x\|^2} = \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^n a x_j^2} = \prod_{j=1}^n \mathrm{e}^{-a x_j^2}$, on a par le théorème de Fubini

$$I_n = (I_1)^n = (I_2)^{n/2}.$$

Par ailleurs, une intégration polaire nous donne

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-a\|x\|^2} dx = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ar^2} r dr = -\left(\frac{\pi}{a}\right) \mathrm{e}^{-ar^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-a\|x\|^2} d\lambda = (I_2)^{n/2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

□

Nous pouvons maintenant facilement calculer la mesure de la sphère :

Proposition 29.5 *La mesure de* $\mathbb{S}^{n-1}$ *est donnée par*

$$\alpha_{n-1} = \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Preuve Le changement de variable $s = r^2$, $ds = 2rdr$ entraîne que

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds = 2 \int_0^\infty r^{2t-1} e^{-r^2} dr,$$

on a donc par le corollaire précédent

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|^2} d\lambda = \alpha_{n-1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{\alpha_{n-1}}{2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

□

Corollaire 29.6 *Le volume de la boule $\mathbb{B}^n$ est donné par*

$$\beta_n = \lambda^n(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}.$$

Preuve Comme $\mathbb{B}^n = C_1(\mathbb{S}^{n-1})$, on a par définition de la mesure sphérique

$$\beta_n = \frac{1}{n}\alpha_{n-1} = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}.$$

$\square$

Les deux résultats précédents montrent qu'il est utile de connaître les valeurs de la fonction Gamma pour les entiers et les demi-entiers.
De la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on déduit facilement que $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a $2 = \alpha_0 = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, et donc

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit par récurence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(k+\tfrac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

Références

[1] Benoist J. et Salinier A., *Exercices de calcul intégral avec rappels de cours,* Dunod.

[2] Emile Borel *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898).

[3] Browder, Andrew(1-BRN) *Mathematical analysis. An introduction.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.

[4] S. Chatterji, *Cours d'analyse* (Volume 1). aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1997.

[5] D. Cohn, *Measure theory* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1980, 1993.

[6] G. B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication, (1999)

[7] Camille Jordan *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, plusieurs éditions (1882–1915). Disponible en reprint aux éditions Jacques Gabay., Paris.

[8] A. N. Kolmogorov, and S. V. Fomin : *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover Publications.

[9] K. L. Kuttler *Modern Analysis.* CRC Press.

[10] H. Royden : *Real analysis Third edition.* Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[11] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe.* Masson, Paris, 1980.

[12] E. Stein et R. Shakarchi *Real analysis, Measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[13] A. E. Taylor *General Theory of Functions and Integration*, Dover Publications.

[14] R. Webster *Convexity* Oxford Science Publication, Oxford University Press 1994.