微分形式不变性以及$\mathrm{d}y, \Delta y, f'(x)$的区别和联系

cyrus28214.top

初学微积分的时候，看到课本上证明所谓的“一阶微分形式不变性”看得云里雾里，想着“$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ 竟然也需要证?”．但当我仔细看了看微积分中导数$f'(x)$，微分$\mathrm{d}x$的定义，明晰了以前一直混淆的概念，发现这确实需要证明．不禁又一次感叹微积分的严谨（上一次是理解$\varepsilon - \delta$语言时）．

导数

在现代的微积分里，是先有导数再有微分的．定义导数为

$$f'(x) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

微分

若$y = f(x)$，则对于自变量的增量Δx，因变量的增量为

$$\Delta y \coloneqq f(x + \Delta x) - f(\Delta x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \tag{2}$$

定义y的微分为

$$\mathrm{d}y \coloneqq f'(x)\Delta x \tag{3}$$

这便是课本上所谓的“$\mathrm{d}y$是Δy的线性主部”．

一阶微分形式不变性

当x是**自变量**时，显然$\Delta x = \mathrm{d}x$，式 3 可以写成

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

自然就有我们熟悉的

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \tag{5}$$

假如对一个**可微函数**积分，而不是一个自变量呢？当$y = f(u), u = g(x)$时

$$\mathrm{d}y = f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

又因为 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$,

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u \tag{7}$$

把 式 4 和 式 7 结合起来，就是**一阶微分形式不变性**，也就是说无论是对于可微函数还是自变量，我们总是可以把微分写成这种形式．

高阶微分

对自变量做微分

对自变量x做微分时，无论多少阶都可以写成

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n \tag{8}$$

证明：以二阶为例

$$d^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) \tag{9}$$

由定义

$$\mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

由于$\mathrm{d}x = \Delta x$只是一个**常数**，而非函数，有

$$\mathrm{d}^2 y = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x = f''(x)\,\mathrm{d}x^2 \tag{11}$$

$\square$

也就是说我们熟悉的 $f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 是正确的.

对可微函数做微分

然而，对可微函数做微分时，情况就不是这样了，若 $y = f(u), u = g(x)$，对于这种复合函数，可以采用最简单粗暴的方法，全部用x表示

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) &= \mathrm{d}(f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x)\\ &= (f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x\\ &= f''(g(x))(g'(x))^2\,\mathrm{d}x^2 + f'(g(x))g''(x)\,\mathrm{d}x^2\end{aligned} \tag{12}$$

由式 8 ，有

$$g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \tag{13}$$

$$g''(x)\,\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}^2 u \tag{14}$$

代入 式 12 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 y &= f''(g(x))\underline{(g'(x)\,\mathrm{d}x)^2} + f'(g(x))\underline{g''(x)\,\mathrm{d}x^2}\\ &= f''(g(x))\,\mathrm{d}u^2 + f'(u)\mathrm{d}^2 u\end{aligned} \tag{15}$$

也就是说高阶微分并不具有形式不变性，多出了一项$f'(u)\mathrm{d}^2 u$.

多元函数

另外，多元函数也具有一阶微分形式不变性，即

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v \tag{16}$$

当$z = f(u, v)$, f具有连续偏导数，u, v是自变量时，式 16 也成立.

当$z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, f, φ, ψ都具有连续偏导数时，式 16 成立.

证明略.