TP1 Recherche opérationnelle

Cyrus Kouassi
Mahamat Abdoulaye

March 2025

1 Exercice : Le problème du Stable Maximum

1.1 Création du fichier .dat

1.2 Implémentation du modèle

1.3 Navigateur des problèmes

Le navigateur de problèmes affiche les informations suivantes :

1. Les données du modèle qu'on a déclaré dans le fichier .dat :
   - B : une valeur numérique ,
   - C : un tableau binaire,
   - V : une valeur numérique .
2. Les variables de décision :
   - x : une variable binaire affichée sous la forme [0 1 0 1 1 0 1 0].

1.4 Description du fichier .lp associé au modèle implémenté

Le fichier contient les éléments suivants :

1. Encodage et Nom du Problème
2. Fonction objectif
3. Contraintes de la forme :
$$x(i) + x(j) \leq 1$$
4. Bornes des variables :
$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i$$
5. Déclaration des variables binaires

Les informations du fichier sont toutes correctes car elles respectent la configuration de notre problème.

1.5 Nombre de variables et de contraintes

Nous voyons à travers le fichier .lp qu'on a 8 variables et 24 contraintes.

1.6 Valeur de la fonction objectif et taille du stable

La valeur est la fonction objectif trouvé est $x = [0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0]$ Cette solution indique que les sommets x_2, x_4, x_5 et x_7 forment le stable maximum du graphe.

La taille du stable maximum est donc 4. Cette valeur de 4 représente le nombre maximal de sommets indépendants qu'on peut trouver dans le graphe donné, compte tenu de sa configuration.

1.7 Contrainte sur le nœud 7

Le nœud 7 n'est pas autorisé à faire partie du stable. Nous ajoutons donc la contrainte suivante : $x_7 = 0$. Initialement, il y avait 24 contraintes. L'ajout de la contrainte $x_7 = 0$ porte le total à 25 contraintes.

Dans la solution précédente, la taille du stable était 4 avec $x_7 = 1$. En forçant $x_7 = 0$, le modèle doit trouver un nouveau stable maximal sans inclure x_7.

La nouvelle valeur de la fonction objectif est donc $x = [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]$. La taille du stable est réduite à 3 dans ce cas.

2 Exercice : Fonds d'investissement

2.1 Définition des variables de décision

Nous utilisons des variables binaires pour représenter la sélection ou non de chaque fonds :

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si le fonds } i \text{ est sélectionné} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Le choix de variables binaires est approprié car chaque fonds ne peut être que sélectionné (1) ou non sélectionné (0). Cela permet de traduire directement les règles de sélection en contraintes linéaires.

Nous avons donc :

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Cette contrainte assure que chaque variable x_i ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, conformément à notre définition initiale.

Nos contraintes linéaires sous forme d'équation sont les suivants :

(a) Vous ne pouvez pas choisir tous les fonds d'investissement :

$$\sum_{i=1}^{7} x_i \leq 6$$

Cette contrainte assure que le nombre total de fonds sélectionnés est au plus 6, empêchant ainsi la sélection de tous les 7 fonds.

(b) Vous devez choisir au minimum un des fonds :

$$\sum_{i=1}^{7} x_i \geq 1$$

Cette contrainte garantit qu'au moins un fonds est sélectionné.

(c) Si vous choisissez le fond numéro 3, vous ne pouvez pas choisir le fond 1 :

$$x_3 + x_1 \leq 1$$

Cette contrainte empêche la sélection simultanée des fonds 1 et 3.

(d) Le fond 4 peut être choisi à condition que le 2 soit également choisi :

$$x_4 \leq x_2$$

Cette contrainte assure que si le fonds 4 est sélectionné ($x_4 = 1$), alors le fonds 2 doit aussi être sélectionné ($x_2 = 1$).

(e) Vous devez choisir au minimum un des fonds 1, 2 et 3 ou au minimum deux des fonds 2, 4, 5 et 6 :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}(x_2 + x_4 + x_5 + x_6) \geq 2$$

Cette contrainte complexe assure que soit au moins un fonds parmi {1, 2, 3} est choisi, soit au moins deux fonds parmi {2, 4, 5, 6} sont choisis, ou les deux conditions simultanément. Le facteur $\frac{1}{2}$ permet de combiner ces deux conditions en une seule inégalité.

2.2 Implémentation du modèle

Dans le cadre de notre problème de sélection de fonds d'investissement, nous avons obtenu deux solutions optimales distinctes pour la maximisation et la minimisation :

- Résultat de la maximisation

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Cette solution indique que les fonds 1, 2, 4, 5, 6 et 7 sont sélectionnés, tandis que le fonds 3 n'est pas choisi.

- Résultat de la minimisation

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Dans ce cas, seuls les fonds 1 et 2 sont sélectionnés, tandis que les fonds 3, 4, 5, 6 et 7 ne le sont pas.

2.3 Préférences pour certains des fonds d'investissement

Pour tenir compte des préférences , nous pouvons mettre en place plusieurs méthodes afin d'ajuster le modèle d'optimisation tout en respectant les contraintes initiales.

- Ajout d'une contrainte de coût

  Dans certains cas, les fonds peuvent avoir des coûts associés et nous avons une limite totale à ne pas dépasser.

  Si chaque fonds i a un coût c_i et que le budget total est B, nous ajoutons la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{7} c_i x_i \leq B \tag{1}$$

  Cette contrainte assure que la somme des coûts des fonds sélectionnés ne dépasse pas le budget total B.

- Pondération des fonds selon leur importance :

$$\text{Maximiser} \sum_{i=1}^{7} w_i x_i \tag{2}$$

  où w_i est le poids attribué au fonds i selon la préférence.

- Ajout de contraintes supplémentaires

  Une autre méthode consiste à ajouter des règles qui garantissent que certains fonds soient inclus ou exclus selon les besoins. On peut forcer la sélection d'au moins un ou plusieurs fonds parmi un groupe défini où si certains fonds ne doivent pas être choisis ensemble, on peut imposer une restriction empêchant leur sélection simultanée.