

TP2 - Relaxation linéaire

Intervenant : Diego Perdigão Martino

Objectifs

- Étudier la relaxation linéaire d'un Problème Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) à travers d'une analyse de sensibilité et de l'utilisation de la méthode des plans sécants.

1 Analyse de sensibilité - Production industrielle

Une entreprise dispose de $m = |T|$ techniques de fabriquer un produit donné. Chaque technique j ($j = 1, \dots, m$) est associée à un coût fixe f_j , à un coût unitaire c_j et à un nombre maximal u_j d'unités qui peuvent être fabriqués. Cette entreprise doit produire au minimum d unités du produit en utilisant au maximum k techniques différentes de production parmi les m disponibles. L'entreprise souhaite minimiser les coûts de production associés au produit qu'elle fabrique.

Les variables $x_t, t \in T$ correspondent à la quantité fabriquée par technique disponible et les variables binaires $y_t, t \in T$ indiquent si la technique t est utilisée ($y_t = 1$) ou pas ($y_t = 0$). Le PLNE qui permet à l'entreprise minimiser leurs coûts de production est représenté par les équations (1)-(6) ci-dessous.

$$\text{minimize} \quad \sum_{t \in T} f_t y_t + \sum_{t \in T} c_t x_t \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t \in T} x_t \geq d \quad (2)$$

$$\sum_{t \in T} y_t \leq k \quad (3)$$

$$x_t \leq u_t y_t \quad \forall t \in T \quad (4)$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall t \in T \quad (5)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T \quad (6)$$

1. L'entreprise dispose de 4 techniques différentes pour atteindre une demande de 100 unités du produit. Pour des raisons de diversification, elle a décidé qu'au maximum 3 parmi les techniques disponibles doivent être utilisées dans la production. Les coûts fixes et variables ainsi que la limite maximale de production par technique sont les suivants :

$$\begin{aligned} f &= [100, 138, 76, 98] \\ c &= [2.8, 1.5, 4.3, 3.7] \\ u &= [70, 20, 60, 45] \end{aligned}$$

Implémentez le modèle décrit par les équations (1)-(6) dans sa version relaxée (*i.e.*, sans les contraintes d'intégralité pour les variables). Utilisez ensuite les données ci-dessus pour résoudre le problème.

2. Exportez le modèle créé ainsi que la solution obtenue et vérifiez que les informations qui y figurent sont correctes.
3. Supposez que vous êtes l'un des employés de cette entreprise et que vous êtes chargé de présenter les résultats obtenus avec le modèle linéaire à votre responsable qui n'a pas de connaissance en informatique et qui ne peut pas donc interpréter le résultat du modèle. Rédigez un paragraphe en lui expliquant le mode de fabrication qui permet à l'entreprise la minimisation de leurs coûts de production tenant en compte les données présentées sur la question 1.
4. Afin de s'assurer que les employés maîtrisent toujours les techniques 2 et 4, l'entreprise a décidé de fabriquer 3 unités du produit en utilisant chacun de deux modes de fabrication. Quel sera l'impacte sur le coût global de la solution en produisant les 6 unités supplémentaires ? Expliquez comment vous avez fait cette analyse.
5. En se basant sur des données historiques, l'entreprise a observé que la fabrication du produit en utilisant les techniques 1 et 3 présente toujours des défauts liés à l'usure des outils manipulés dans le processus. Pour cela, elle a décidé de produire 2 unités supplémentaires en utilisant

chacune de ces deux techniques. Comme pour la question précédente, donnez l'impacte de la production supplémentaire des 4 unités sur le coût global de la solution et expliquez comment vous avez trouvé cette réponse.

6. Le fournisseur des matières premières a informé l'entreprise que pour des raisons techniques il ne pourra pas fournir l'intégralité des matières prévues auparavant. En tenant compte de ce changement inopiné, l'entreprise ne pourra produire que 95 produits à ses clients. Quel sera l'impacte de ce changement sur le coût global de production ? Comment avez-vous tiré cette conclusion ?
7. Si l'entreprise souhaite augmenter le nombre de techniques utilisées dans la solution optimale trouvée, toujours en respectant la limite maximale de 3, combien elle aura de marge pour le faire ? Expliquez votre raisonnement.
8. Comment peut-on adapter le modèle (équations (1)-(6)) dans le cas où le portfolio de cette entreprise soit constitué de p produits ? (pas d'implémentation requise)

2 Algorithme de plans sécants

Soit le PLNE P_{ILP} suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

1. Soit P_{LR} la relaxation linéaire de P_{ILP} et P'_{LR} le problème P_{LR} dans la forme standard. Donnez la formulation de P'_{LR} .
2. Implémentez P'_{LR} . Donnez la valeur de la fonction objectif.
3. En utilisant l'algorithme des plans sécants (*Cutting plane*) sur P'_{LR} , ajoutez une coupe de Gomory en précisant les étapes de calcul et résolvez-le à nouveau. Y a-t-il des changements dans la nouvelle solution obtenue ?
4. Ajoutez une deuxième coupe. Y a-t-il des changements dans la nouvelle solution obtenue ?