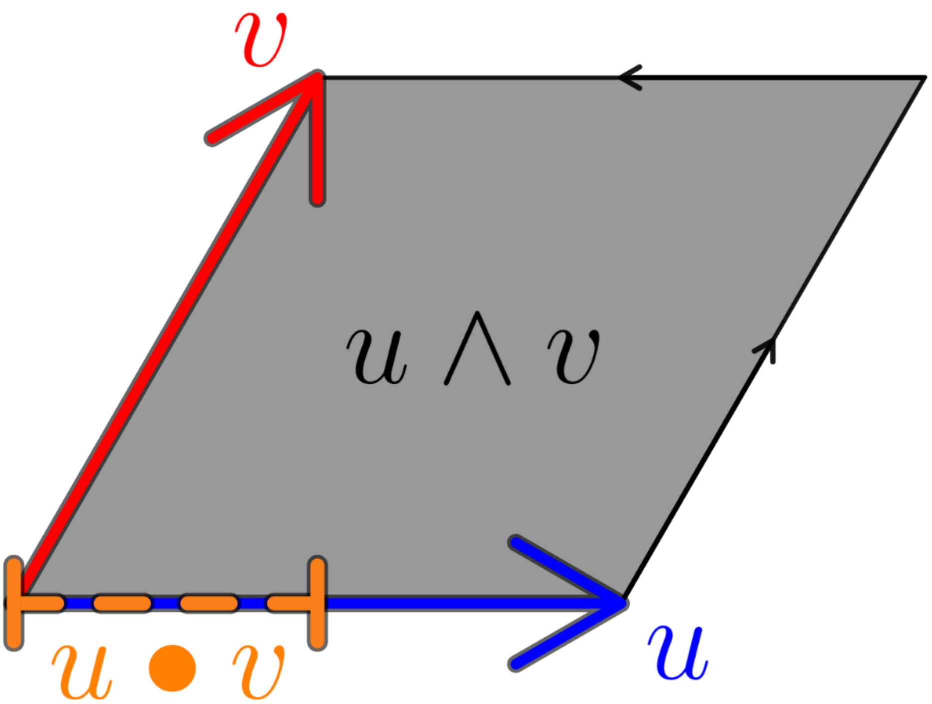
Examensarbete inom teknik

Grundnivå, 15 hp

Introduktion till Cliffordalgebra som ett alternativt ramverk för matematisk fysik

JONA NORDIN NOBUOKA

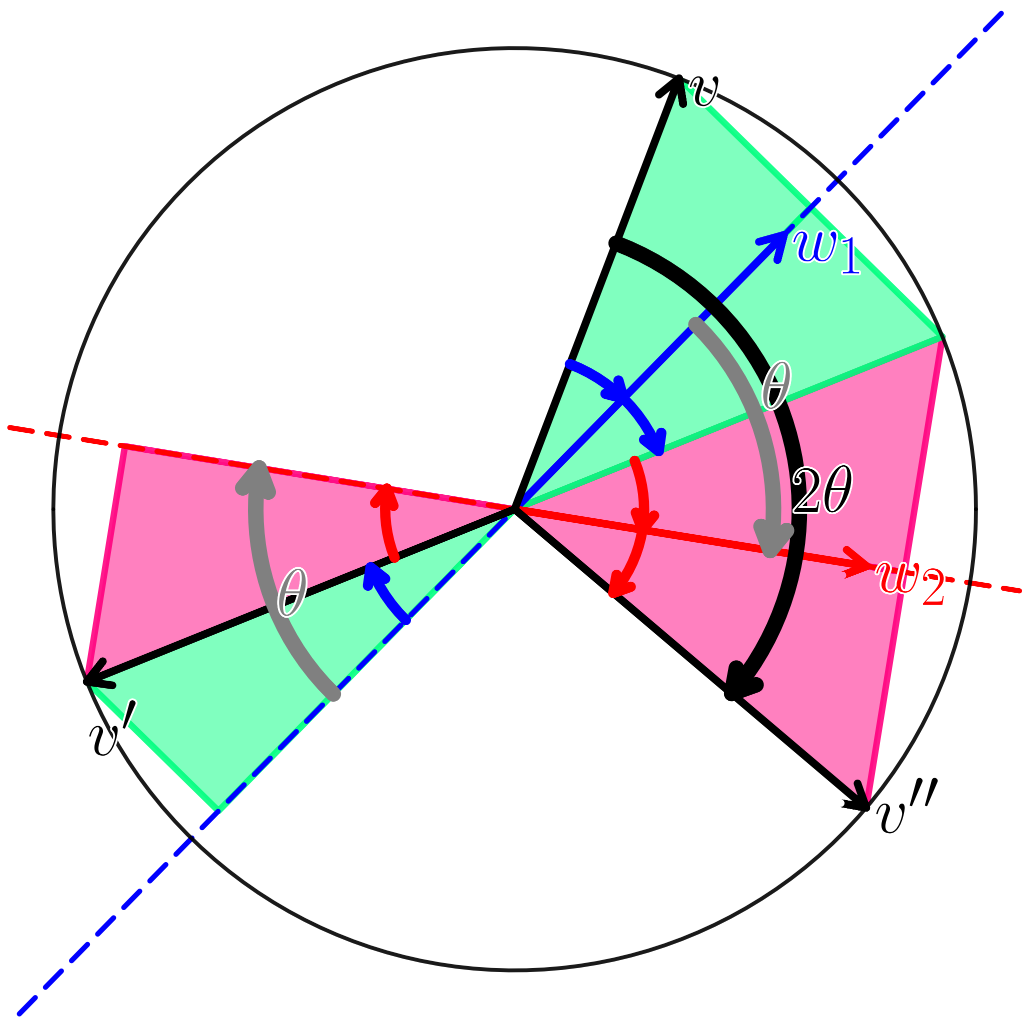


Stockholm, Sverige 2023

Introduktion till Cliffordalgebra som ett alternativt ramverk för matematisk fysik

Jona Nordin Nobuoka

9 juni 2023



Sammanfattning

Denna rapport introducerar Cliffordalgebra och visar hur det i flera fall kan ersätta tensoralgebran som grundläggande algebraisk struktur för matematisk fysik. Först konstrueras en allmän Cliffordalgebra utifrån ett vektorrum och en kvadratisk form. Sedan studeras de geometriska egenskaperna för reella Cliffordalgebror med icke-degenererad kvadratisk form. Dessa kallas geometriska algebror och är användbara för att generalisera rotationer till högre dimensioner. Efter det utforskas kopplingen mellan generaliserade rotationer i rumtidsalgebran och Lorentztransformationer. Slutligen används rumtidsalgebran som algebraisk grund för att modellera olika fysikaliska fenomen inom speciell relativitetsteori och elektromagnetism.

Tack

Att få skriva detta arbete har gett mig tid och motivation att fördjupa min förståelse för Cliffordalgebra. Det hade inte varit möjligt utan min handledare Mats Boij. Jag är väldigt tacksam för hans tålamod att sätta sig in i ämnet och det stöd och den uppmuntran jag fått till att utforska den underliggande matematiken.

Innehåll

1 Inledning

Detta arbete är till stor del baserat på kapitel 5, 6 och 7 av *Geometric Algebra for Physicists* [2] av Chris Doran och Anthony Lasenby samt kapitel 2, 3 och 6 av *Clifford algebra, geometric algebra, and applications* [9] av Douglas Lundholm och Lars Svensson.

Som namnet antyder är [2] en fysikbok, medan [9] är föreläsningsanteckningar till den nedlagda forskarkursen FSF3608. Eftersom den ena fokuserar på fysiktillämpningar och den andra fokuserar på själva matematiken så kompletterar de varandra väl.

1.1 Disposition

I del 2 konstrueras hjälpstrukturen multivektorrum, som tillsammans med Cliffordprodukten och en orienteringskonvention bildar en Cliffordalgebra.

Del 3 specialiserar till geometriska algebror, vilket är Cliffordalgebror som genereras av reella vektorrum med icke-degenererade kvadratiska former. Bland annat diskuteras vektorderivatan samt olika delmängder av geometriska algebror som bildar grupper under Cliffordprodukten.

Del 4 specialiserar till (anti-)euklidiska eller (anti-)lorentziska geometriska algebror. Här visas hur rotorer kan användas för att generalisera vanliga rumsliga rotationer till allmänna Lorentztransformationer.

Del 5 specialiserar till rumtidsalgebran. Bland annat utreds förhållandet mellan Lorentzgruppen och rumtidsalgebrans rotorgrupp.

I del 6 används rumtidsalgebran som algebraisk grund för att studera några utvalda problem från speciell relativitetsteori och klassisk elektromagnetism. Till exempel används vektorderivatan för att fånga in all information från Maxwells ekvationer i en mycket enkel multivektorekvation.

1.2 Användning av algebra i matematisk fysik

Matematisk fysik är användningen av matematik för att beskriva fysikaliska fenomen. Länge användes bara elementär algebra, alltså de fyra räknesätten över $\mathbb{R}$. Detta räckte gott och väl för enklare samband som Arkimedes princip och tillsammans med Euklidisk geometri kunde man hantera geometrisk optik och klassisk mekanik. Dock behövde vektorekvationer hanteras komponentvis.

En ny algebraisk struktur, kvaternionerna, introducerades år 1843 av William Rowan Hamilton. Kvaternionalgebran är ett 4-dimensionellt rum

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \colon a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

där talen i, j, k antikommuterar ($ij = -ji$ etc) och uppfyller

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Algebran $\mathbb{H}$ kan användas för att beskriva rotationer i $\mathbb{R}^3$. Detta gjorde det möjligt att uttrycka Maxwells ekvationer med (beroende på hur man räknar) 4 istället för 12 ekvationer [1].

Kvaternionformalismen kom att ersättas av linjär algebra och vektoranalys under slutet av 1800-talet. I vektoranalysen definieras rotationer utifrån det delrum som hålls invariant. I 2D är det invarianta delrummet till en rotation 0-dimensionellt och rotationer kan beskrivas med en skalär (vinkel). I 3D är det invarianta delrummet 1-dimensionellt så rotationen kan beskrivas av en vektor via kryssprodukten $\times$. Det finns inget enkelt sätt att generalisera detta till högre dimensioner. En möjlighet är att använda rotationsmatriser, som explicit specificerar vart varje basvektor ska skickas.

Cliffordalgebra utvecklades av William Kingdon Clifford och Rudolf Lipschitz kring år 1880 [7, s. 320]. Clifford kallade området för geometrisk algebra. Vissa författare använder begreppen synonymt men ofta får de geometriska algebrorna utgöra en delklass av Cliffordalgebrorna. I denna rapport kommer geometrisk algebra att syfta på en Cliffordalgebra som genereras av ett reellt och icke-degenererat kvadratiskt rum.

I geometrisk algebra specificeras en rotation utifrån planet den sker i. Detta görs med **rotorer** och fungerar på samma sätt oavsett rummets dimension. Rotorernas förankring i geometrin gör att de blir mer visuellt intuitiva än kvaternioner. Samtidigt är de i allmänhet lättare att hantera och mer informationstäta än rotationsmatriser, vilket visas i följande exempel.

Exempel 1. Antag att vi har en godtycklig vektor $v \in \mathbb{R}^4$ och vill rotera den med vinkeln θ i planet $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ och med vinkeln ϕ i planet $\operatorname{span}\{e_3, e_4\}$. Med rotationsmatriser:

$$v \mapsto Mv, \qquad M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Med rotorer:

$$v \mapsto R^{-1}vR, \qquad R = \exp\left(\frac{\theta}{2}e_1e_2 + \frac{\phi}{2}e_3e_4\right).$$

Om vi istället vill rotera med vinkeln θ i planet $\operatorname{span}\{e_1 + e_2, e_3\}$, uttryckt i samma bas som tidigare, så blir M ännu mer komplicerad. Men R blir bara

$$R = \exp\left(\frac{\theta}{2}\frac{e_1e_3 + e_2e_3}{\sqrt{2}}\right).$$

Många områden av fysiken, till exempel speciell relativitetsteori och elektromagnetism, använder idag tensoralgebran $\mathcal{T}(V)$ som algebraisk grund. Tensoralgebran genererad av $\mathbb{F}$-vektorrummet V består av linjärkombinationer av tensorer på formen

$$T = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$$

där $v_i \in V$ och $k \in \mathbb{N}$. Om $k = 1$ gäller $T \in V$ och om $k = 0$ fås en tom produkt och $T \in \mathbb{F}$ [9, s. 120]. Cliffordalgebran $\mathcal{C}l(V, q)$ är den delalgebra av $\mathcal{T}(V)$ som fås när tensorprodukten av en vektor med sig själv ger en skalär, specificerad av den kvadratiska formen q [9, s. 7]. Identifieringen

$$v \otimes v \sim q(v) \quad \in \mathbb{F}$$

gör att $\mathcal{C}l(V, q)$ blir ändligdimensionell. Dessutom ger den mening åt de inhomogena linjärkombinationerna. Exempelvis kan produkten av två vektorer resultera i summan av en skalär och en tensor av grad 2:

$$v_1 \otimes (v_1 + v_2) = q(v_1) + v_1 \otimes v_2.$$

De tidigare nämnda rotorerna har ofta just denna form.

2 Cliffordalgebra $\mathcal{C}l(V, q)$

2.1 Kvadratiska rum

Definition 1. Låt V vara ett ändligdimensionellt $\mathbb{F}$-vektorrum. En avbildning $q\colon V \to \mathbb{F}$ som uppfyller

(*i*) $q(cv) = c^2 q(v) \qquad \forall c \in \mathbb{F}, \forall v \in V$

(*ii*) $(u, v) \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v)$ är bilinjär $\quad \forall u, v \in V$

kallas **kvadratisk form** och paret (V, q) kallas **kvadratiskt rum**. Den kvadratiska formen q kallas **isotrop** om det existerar något $u \neq 0$ i V sådant att $q(u) = 0$.

För en kropp med additiv enhet 0 och multiplikativ enhet 1 så är dess **karakteristik** det minsta antalet gånger 1 måste adderas till sig själv för att summan ska bli 0. Om summan av godtyckligt många 1:or aldrig blir 0 så sägs kroppen ha karakteristik noll.

Exempel 2. Heltalen modulo 2 har karakteristik 2 och allmänt gäller att

$$\operatorname{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p,$$

för ett primtal p. Kropparna $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ med vanlig addition och multiplikation har alla karakteristik noll.

Definition 2. Låt (V, q) vara ett kvadratiskt rum över en kropp $\mathbb{F}$, med $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Den **associerade bilinjära formen** till q är då avbildningen

$$\begin{aligned} \beta_q \colon V \times V &\to \mathbb{F} \\ (u, v) &\mapsto \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}. \end{aligned}$$

Den bilinjära formen β_q sägs vara **degenererad** om det existerar något $u \neq 0$ i V som uppfyller $\beta_q(u, v) = 0$ för alla $v \in V$. Om $\beta_q(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in V$ så kallas den **fullständigt degenererad**.

Den kvadratiska formen q sägs även vara degenererad om β_q är det. Notera att $\beta_q(v, v) = q(v)$ samt att q kan vara isotrop utan att vara degenererad.

Sats 1. *För ett n-dimensionellt kvadratiskt rum (V, q) över någon kropp med $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ existerar en bas $E = \{e_i\}_{i=1}^n$ till V som är ortogonal med avseende på β_q, det vill säga $\beta_q(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.*

Bevis. Om $q = 0$ så är $\beta_q = 0$ (fullständigt degenererad) och samtliga baser till V är ortogonala. Antag nu istället att det existerar en vektor $e_1 \in V$ sådan att $q(e_1) \neq 0$. Vi kan då bilda basen $E_1 = \{e_1\}$ och delrummet $W_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{F}} E_1 \subseteq V$. Då E_1 bara består av ett element så är den per definition en ortogonal bas till W_1. Dessutom är β_q icke-degenererad på W_1. Detta är basfallet till följande induktion.

Antag att $E_k = \{e_i\}_{i=1}^k$ är en ortogonal bas för ett k-dimensionellt delrum $W_k \subseteq V$ samt att β_q är icke-degenererad på W_k. Vi definierar mängden

$$U_k := \{u \in V \colon \beta_q(e_i, u) = 0 \quad \forall e_i \in E_k\}$$

som är ett delrum till V eftersom den är sluten under addition

$$\begin{aligned} \beta_q(e_i, u_1) + \beta_q(e_i, u_2) &= \beta_q(e_i, u_1 + u_2) \\ u_1, u_2 \in U_k &\Rightarrow (u_1 + u_2) \in U_k \end{aligned}$$

och multiplikation med skalärer

$$\begin{aligned} c\beta_q(e_i, u) &= \beta_q(cu, e_i) \\ u \in U_k &\Rightarrow cu \in U_k \qquad \forall c \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Dessutom gäller $U_k \cap W_k = \{0\}$ eftersom β_q är icke-degenererad på W_k. Om det existerar något $u \in U_k$ med $q(u) \neq 0$ så kan vi därför välja $e_{k+1} = u$. Då blir $E_{k+1} = E_k \cup \{e_{k+1}\}$ en ortogonal bas till $W_{k+1} = \operatorname{span}_{\mathbb{F}} E_{k+1}$. Detta delrum har dimension $k + 1$.

Per induktion finns därmed ett tal $1 \leq m \leq n$ sådant att E_m är en ortogonal bas till W_m samt att $q(u) = 0 \quad \forall u \in U_m$, vilket är ekvivalent med att β_q fullständigt degenererad på U_m. Om $m = n$ så är $E = E_m$ en ortogonal bas till $W_m = V$ och vi är klara.

För $m < n$ använder vi att $\beta_q(u, w) = 0 \quad \forall u \in U_m, \forall w \in W_m$ samt att $\beta_q(u_1, u_2) = 0 \quad \forall u_1, u_2 \in U_m$. Därför blir $E = E_m \cup B$ en ortogonal bas till $W_m \oplus U_m$, för varje godtyckligt vald bas B till U_m. Då $W_m \cap U_m = \{0\}$ så gäller

$$W_m \oplus U_m = V$$

förutsatt att

$$\dim U_m = \dim V - \dim W_m = n - m.$$

För att visa detta kan β_q representeras med en matris $Q \in V^{n \times n}$ genom $\beta_q(v, w) = v^\top Q w$. Därför är U_m kärnan till avbildningen

$$\mathcal{E}^\top Q = \begin{bmatrix} e_1^\top \\ \vdots \\ e_m^\top \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} e_1^\top Q \\ \vdots \\ e_m^\top Q \end{bmatrix} \in V^{m \times n}.$$

Om $\operatorname{rang} \mathcal{E}^\top Q < m$ så måste raderna $\{e_i^\top Q\}$ vara linjärt beroende. Då skulle det finnas en nollskild vektor $v \in W_m$ som uppfyller $v^\top Q = 0$. Men någon sådan vektor existerar inte eftersom β_q är ickedegenererad på W_m. Därför är $\operatorname{rang} \mathcal{E}^\top Q = m$ och dimensionssatsen ger

$$\dim U_k = \dim \ker(\mathcal{E}^\top Q) = \dim V - \operatorname{rang}(\mathcal{E}^\top Q) = n - m.$$

Alltså är E en ortogonal bas till $V = W_m \oplus U_m$. $\square$

Definition 3. En ortogonal bas $E = \{e_i\}_{i=1}^n$ till ett kvadratiskt rum (V, q) som uppfyller

$$q(e_i) \in \{-1, 1\} \qquad \forall e_i \in E$$

kallas **ortonormal**. Om q är positiv definit överensstämmer detta med den vanliga definitionen eftersom inre produkten av en vektor med sig själv är icke-negativ i euklidiska rum.

2.2 Multivektorrum

Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum, över någon kropp $\mathbb{F}$. Om vi väljer en bas $E = \{e_i\}_{i \in J}$, där J är en indexmängd, så kan en godtycklig vektor $v \in V$ skrivas som summan

$$v = \sum_{i \in J} v^i e_i,$$

där $v^i \in \mathbb{F}$ är koordinaterna för v i denna bas. På ett liknande sätt kan själva vektorrumet skrivas som en direkt summa

$$V = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{F}$$

vilket är $|J|$ stycken oberoende kopior av $\mathbb{F}$. Kopiorna kan särskiljas beroende på vilket index $i \in J$ som de hör till.

Denna rapport kommer bara hantera vektorrum med ändlig dimension. Om inget annat specificeras kan indexmängden antas vara $J = \{1, \ldots, n\}$, där $n = \dim V$.

Definition 4. Ett n-dimensionellt vektorrum $V = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{F}$ kan utvidgas till ett **multivektorrum** $\mathcal{M}(V)$ genom

$$\mathcal{M}(V) := \bigoplus_{S \in \mathbb{P}(J)} \mathbb{F} = \bigoplus_{S \subseteq J} \mathbb{F},$$

där $\mathbb{P}(J)$ syftar på potensmängden, alltså mängden av alla delmängder av J. Multivektorrummet $\mathcal{M}(V)$ är ett 2^n-dimensionellt vektorrum över samma kropp som V.

Definition 5. Ett multivektorrum kan delas upp i **graderade delrum**. Delrummet med grad k är den direkta summan av de kopior av $\mathbb{F}$ som hör till en mängd med kardinalitet k

$$\mathcal{M}^k(V) := \bigoplus_{\substack{S \subseteq J \\ |S| = k}} \mathbb{F}.$$

Det **jämna delrummet** och det **udda delrummet** är direkta summan av alla delrum med jämn respektive udda grad

$$\mathcal{M}^+(V) := \bigoplus_{2 \,|\, k} \mathcal{M}^k(V),$$
$$\mathcal{M}^-(V) := \bigoplus_{2 \nmid k} \mathcal{M}^k(V).$$

En

Alltså gäller

$$\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}^+(V) \oplus \mathcal{M}^-(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{M}^k(V).$$

Kombinatoriken ger $\dim \mathcal{M}^k(V) = \binom{n}{k}$ och $\dim \mathcal{M}^\pm(V) = 2^{n-1}$.

Anmärkning. Vektorrumsisomorfierna $\mathcal{M}^0(V) \cong \mathbb{F}$, $\mathcal{M}^1(V) \cong V$ gäller. Därför kan vi 'notationsmässigt glömma bort' $\mathbb{F}$ och V. När ytterligare struktur läggs på och multivektorrummet blir en Cliffordalgebra så kommer jag identifiera $\mathcal{C}l^0(V,q)$ med $\mathbb{F}$ och $\mathcal{C}l^1(V,q)$ med V.

I de senare delarna, som är begränsade till geometriska algebror $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$, identifieras $\mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{p,m})$ med $\mathbb{R}$ och $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ med vektorrummet $\mathbb{R}^{p,m}$.

Definition 6. En bas $E = \{e_i\}_{i\in J}$ till V genererar en **naturlig bas**

$$\mathcal{N}(E) := \{e_S\}_{S\subseteq J} = \left\{ \begin{array}{c} e_\varnothing, \\ e_{\{1\}}, \ldots, e_{\{n\}}, \\ e_{\{1,2\}}, \ldots, e_{\{n-1,n\}}, \\ \vdots \\ e_{\{1,\ldots,n\}} \end{array} \right\}. \tag{2.1}$$

till multivektorrummet $\mathcal{M}(V)$. Elementen $e_S \in \mathcal{N}(E)$ kallas för **basblad** och indexeras med delmängder av indexmängden. Basbladen är blad, se Definition 10.

Mängden av basblad med grad k skrivs $\mathcal{N}^k(E)$. Elementen med grad 1, $\mathcal{N}^1(E) = \{e_{\{1\}}, \ldots, e_{\{n\}}\}$, kan identifieras med $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ och kallas även för multivektorrummets basvektorer.

Ett element x i ett multivektorrum kallas för **multivektor** och har, givet en naturlig bas, den allmänna formen

$$x = \sum_{S\subseteq J} x^S e_S, \qquad x^S \in \mathbb{F}.$$

En multivektor $x \in \mathcal{M}(V)$ kallas k-**vektor** om $x \in \mathcal{M}^k(V)$. I specialfallen $k = 0, 1, 2, 3$ kallas x för skalär, vektor, bivektor respektive trivektor. För $k = n$, $n-1$ kallas x pseudoskalär respektive pseudovektor. Om en multivektor består av termer med olika grad sägs den vara **inhomogen**. I Ekvation (2.1) är basbladen ordnade i rader efter deras grad.

Graden för en homogen multivektor $x \in \mathcal{M}^k(V)$ betecknas

$$\mathrm{grd}(x).$$

Detta ska inte förväxlas med notationen $\mathrm{grad}(\phi)$, som ibland används för gradienten av ett skalärfält ϕ.

Om $x \in \mathcal{M}^\pm(V)$ så sägs x vara en jämn respektive udda multivektor, även om den är inhomogen.

Definition 7. Låt $x \in \mathcal{M}(V)$ vara en multivektor som kan skrivas som linjärkombinationen

$$x = \sum_{S \subseteq J} x^S e_S$$

givet en naturlig bas $\mathcal{N} = \{e_S\}_{S \subseteq J}$. **Gradprojektionen** av x på grad k ges då av

$$\langle x \rangle_k := \sum_{\substack{S \subseteq J \\ |S| = k}} x^S e_S.$$

Gradprojektionen är en surjektion

$$\langle \cdot \rangle_k : \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}^k(V).$$

2.3 Cliffordprodukten

En **algebra** är ett vektorrum med en väldefinierad bilinjär produkt mellan vektorerna. Vektorrummet som en Cliffordalgebra utgår från är alltid ett multivektorrum $\mathcal{M}(V)$. I resten av rapporten kommer 'vektorrummet' att syfta på det genererande vektorrummet V. Allmänna element i en Cliffordalgebra kommer alltid att refereras till som 'multivektorer'. Begreppet 'vektor' kommer endast att användas för multivektorer med grad 1: $v \in \mathcal{M}^1(V) \cong V$.

Produkten i en Cliffordalgebra kallas **Cliffordprodukt**[1]och skrivs utan något tecken mellan operanderna. Förutom att den är bilinjär

$$\begin{aligned} (x+y)z &= xz + xy \\ x(y+z) &= xy + xz \qquad\qquad \forall x, y, z \in \mathcal{M}(V),\ c \in \mathcal{M}^0(V) \\ ((cx)y) &= c(xy) = (x(cy)) \end{aligned}$$

så är den även associativ

$$(xy)z = x(yz) \qquad \forall x, y, z \in \mathcal{M}(V).$$

Produkten av en vektor med sig själv definieras med en kvadratisk form

$$v^2 := q(v) \qquad \forall v \in \mathcal{M}^1(V).$$

Detta begränsar hur produkten av två olika vektorer kan se ut. För två vektorer $u, v \in \mathcal{M}^1(V)$ ger bilinjäriteten

$$\begin{aligned} q(u+v) &= (u+v)^2 = q(u) + uv + vu + q(v) \\ uv + vu &= 2\beta_q(u,v) \quad \in \mathcal{M}^0(V). \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1]I annan litteratur kallas den ibland för **geometrisk produkt**.

Som vi sett avbildar Cliffordprodukten två parallella vektorer på en skalär

$$w \in \operatorname{span}\{v\} \quad \Rightarrow \quad vw \in \mathcal{M}^0(V).$$

En annan viktig egenskap är att Cliffordprodukten mellan vektorer som är ortogonala (med avseende på β_q) ger en bivektor

$$\beta_q(u,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad uv \in \mathcal{M}^2(V).$$

Men (2.2) medför att ortogonala vektorer antikommuterar. I en given en ortogonal bas blir produkten av två olika basvektorer

$$e_i e_j = -e_j e_i = \pm e_{\{i,j\}}.$$

Då mängder tar inte hänsyn till elementens ordning så behöver vi introducera en **orientering** på basen. Ett praktiskt sätt att göra detta är att välja indexmängden $J = \{1, 2, 3, \ldots, \dim V\}$ och definiera

$$e_i e_j := \begin{cases} +e_{\{i,j\}}: & i < j \\ -e_{\{i,j\}}: & i > j \end{cases}$$

för bivektorer och den allmänna regeln

$$e_S e_T := \begin{cases} +e_{S \cup T}: & i < j \quad \forall i \in S \quad \forall j \in T \\ -e_{S \cup T}: & i > j \quad \forall i \in S \quad \forall j \in T \end{cases}. \tag{2.3}$$

På så vis är en produkt av olika basvektorer med stigande index alltid ett basblad. Elementet $e_\varnothing$ kan ses som den tomma produkten av basvektorer och kan identifieras med den multiplikativa enheten i $\mathbb{F}$, det vill säga $e_\varnothing = 1$. Nu kan en bas till $\mathcal{M}(V)$ uttryckas enbart i produkter av ortogonala basvektorer. Till exempel

$$\mathcal{N}(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) = \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 1, & & & & & \\ e_1, & e_2, & e_3, & e_4 & & \\ e_1e_2, & e_1e_3, & e_1e_4, & e_2e_3, & e_2e_4, & e_3e_4, \\ e_1e_2e_3, & e_1e_2e_4, & e_1e_3e_4, & e_2e_3e_4, & & \\ e_1e_2e_3e_4 & & & & & \end{array} \right\}$$

om $\dim V = 4$.

2.4 Formell konstruktion

Vi kommer behöva mängdoperationen **symmetrisk differens**

$$S_1 \triangle S_2 := (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2),$$

där S_1 och S_2 är mängder. Allmänt så gäller

$$|S_1 \triangle S_2| = |S_1| + |S_2| - 2|S_1 \cap S_2| \tag{2.4}$$

eftersom gemensamma element raderas parvis.

Följande resultat är baserat på [9, Lemma 2.6].

Lemma 1. *Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum och $q\colon V \to \mathbb{F}$ en kvadratisk form på V. Låt $E = \{e_i\}_{i \in J}$ vara en ortogonal bas för V med avseende på β_q och låt $\mathcal{N} = \{e_S\}_{S \subseteq J}$ vara den naturliga basen till $\mathcal{M}(V)$ genererad av E. Då existerar en avbildning $\tau\colon \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{F}$ sådan att*

(i) $\tau(e_{\{i\}}, e_{\{i\}}) = q(e_i) \quad \forall i \in J,$

(ii) $\tau(e_{\{i\}}, e_{\{j\}}) = -\tau(e_{\{j\}}, e_{\{i\}}) \quad \forall i, j \in J\colon i \neq j,$

(iii) $\tau(e_S, e_\varnothing) = \tau(e_\varnothing, e_S) = 1 \quad \forall S \subseteq J,$

(iv) $\tau(e_S, e_T)\tau(e_{S \triangle T}, e_U) = \tau(e_S, e_{T \triangle U})\tau(e_T, e_U) \quad \forall S, T, U \subseteq J,$

(v) $\tau(e_S, e_T) \in \{-1, 1\} \quad \forall S, T \subseteq J\colon S \cap T = \varnothing.$

Anmärkning. En sådan avbildning τ kommer användas i definitionen för Cliffordprodukten för att bestämma vad basbladen får för koefficienter. Kraven (*i*)–(*v*) ser till att strukturen som bildas blir en Cliffordalgebra. Krav (*i*) och (*ii*) ger att vektorer kvadrerar på rätt sätt och antikommuterar med varandra. Krav (*iii*) garanterar att det finns en multiplikativ identitet. Krav (*iv*) säkerställer associativitet. Krav (*v*) tillsammans med orienteringskonventionen (2.3) ser till att produkten blir unik.

Bevis. Lemmat kan bevisas med induktion över antalet dimensioner i V. Om $\dim V = 0$ så är $\mathcal{N} = \{e_\varnothing\}$ och $\mathcal{N}^1 = \varnothing$ så kraven (*i*)–(*v*) uppfylls av

$$\tau\colon (e_\varnothing, e_\varnothing) \mapsto 1. \tag{2.5}$$

Antag nu att $\dim V = n > 0$ och att lemmat gäller för delrummet V' som spänns upp av $E' = E \setminus \{e_n\}$. Alltså antar vi att det existerar en avbildning $\tau'\colon \mathcal{N}' \times \mathcal{N}' \to \mathbb{F}$ som uppfyller (*i*)–(*v*), där $\mathcal{N}'$ är den naturliga basen genererad av E'.

Indexmängden för E' blir $J' = J \setminus \{n\}$. Vi inför notationen $e_S^\circ = e_{S\cup\{n\}}$ och definierar mängden av basblad som finns i $\mathcal{N}$ men inte i $\mathcal{N}'$ som

$$\mathcal{N}^\circ := \{e_S^\circ \colon S \subseteq J'\} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'.$$

Nu kan τ' utvidgas till $\tau \colon \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{F}$ genom

$$
\begin{aligned}
&(a) \qquad \tau(e_{S_1}, e_{S_2}) := \tau'(e_{S_1}, e_{S_2}),\\
&(b) \qquad \tau(e_{S_1}, e_{S_2}^\circ) := \tau'(e_{S_1}, e_{S_2}),\\
&(c) \qquad \tau(e_{S_1}^\circ, e_{S_2}) := (-1)^{|S_2|}\tau'(e_{S_1}, e_{S_2}),\\
&(d) \qquad \tau(e_{S_1}^\circ, e_{S_2}^\circ) := q(e_n)(-1)^{|S_2|}\tau'(e_{S_1}, e_{S_2}).
\end{aligned}
$$

för alla $e_{S_1}, e_{S_2} \in \mathcal{N}', \quad e_{S_1}^\circ, e_{S_2}^\circ \in \mathcal{N}^\circ$.

Om S_1 eller S_2 är $\varnothing$ så är (d) aldrig applicerbar eftersom $\varnothing \notin \mathcal{N}^\circ$. Induktionsantagandet ger att krav (iii) gäller för (a)–(c) eftersom $(-1)^{|\varnothing|} = 1$.

För krav (i) är bara regel (a) och (d) applicerbara eftersom $\mathcal{N}'$ och $\mathcal{N}^\circ$ är disjunkta. Regel (a) uppfyller (i) via induktionsantagandet. Om (d) används så fås

$$
\begin{aligned}
\tau(e_{S_1}^\circ, e_{S_2}^\circ) &= q(e_n)(-1)^{|S_2|}\tau'(e_{S_1}, e_{S_2})\\
\tau(e_{\{n\}}, e_{\{n\}}) &= q(e_n)(-1)^{|\varnothing|}\tau'(e_\varnothing, e_\varnothing) = q(e_n)
\end{aligned}
$$

på grund av basfallet (2.5) och (i) är uppfyllt.

För krav (ii) är regel (d) aldrig applicerbar eftersom $e_{\{i\}}$ och $e_{\{j\}}$ ska vara olika basvektorer. Om $i, j \neq n$ så ger (a) att regel (ii) uppfylls via induktionsantagandet. Annars kan vi låta $j = n \neq i$. Regel (b) ger då

$$\tau(e_{\{i\}}, e_{\{j\}}) = \tau'(e_{\{i\}}, e_\varnothing) = 1$$

och (c) ger

$$\tau(e_{\{j\}}, e_{\{i\}}) = (-1)^{|\{i\}|}\tau'(e_\varnothing, e_{\{i\}}) = -\tau'(e_\varnothing, e_{\{i\}}) = -1$$

på grund av krav (iii). Alltså är krav (ii) alltid uppfyllt.

För krav (v) är regel (d) aldrig applicerbar eftersom $S \cap T = \varnothing$. Reglerna (a)–(c) uppfyller (v) via induktionsantagandet.

Beviset att (iv) uppfylls är lite mer invecklat. Totalt får vi 8 fall beroende på vilka av mängderna S, T, U som innehåller n.

Om $S, T, U \not\ni n \Leftrightarrow e_S, e_T, e_U, e_{S\triangle T}, e_{T\triangle U} \in \mathcal{N}'$ så är endast (a) applicerbar och (iv) gäller därför via induktionsantagandet.

Om $S, T, U \ni n \Leftrightarrow e_S, e_T, e_U \in \mathcal{N}^\circ$ så är $e_{S \triangle T}, e_{T \triangle U} \in \mathcal{N}'$. Låt

$$e^\circ_{S_1} = e_S, \quad e^\circ_{S_2} = e_T, \quad e^\circ_{S_3} = e_U, \quad e_{S_1 \triangle S_2} = e_{S \triangle T}, \quad e_{S_2 \triangle S_3} = e_{T \triangle U}.$$

Vänsterledet i (iv) blir då

$$\begin{aligned} VL &= \tau(e_S, e_T)\tau(e_{S \triangle T}, e_U) = \tau(e_{S_1^\circ}, e_{S_2^\circ})\tau(e_{S_1 \triangle S_2}, e_{S_3^\circ}) \\ &= q(e_n)(-1)^{|S_2|}\tau'(e_{S_1}, e_{S_2})\tau'(e_{S_1 \triangle S_2}, e_{S_3}) \end{aligned}$$

via (b) och (d). Högerledet blir

$$\begin{aligned} HL &= \tau(e_S, e_{T \triangle U})\tau(e_T, e_U) = \tau(e^\circ_{S_1}, e_{S_2 \triangle S_3})\tau(e^\circ_{S_2}, e^\circ_{S_3}) \\ &= (-1)^{|S_2 \triangle S_3|}\tau'(e_{S_1}, e_{S_2 \triangle S_3})q(e_n)(-1)^{|S_3|}\tau'(e_{S_2}, e_{S_3}) \\ &= q(e_n)(-1)^{|S_2 \triangle S_3| + |S_3|}\tau'(e_{S_1}, e_{S_2 \triangle S_3})\tau'(e_{S_2}, e_{S_3}) \end{aligned}$$

via (c) och (d). Både HL och VL innehåller varsin faktor $q(e_n)$ och deras τ'-faktorer är lika på grund av induktionsantagandet. Ekvation (2.4) ger dessutom att de har samma tecken

$$|S_2 \triangle S_3| + |S_3| = |S_2| + 2|S_3| - 2|S_2 \cap S_3| \equiv |S_2| \pmod 2$$

så $VL = HL$ och (v) gäller för detta fall. För de övriga fallen kan det verifieras att HL och VL får samma tecken och att antingen båda eller ingen dem får en faktor $q(e_n)$. □

Definition 8. Cliffordalgebran genererad av $\mathbb{F}$-vektorrummet V och den kvadratiska formen q skrivs $\mathcal{C}l(V, q)$ och är en associativ $\mathbb{F}$-algebra med enhet. Den består av multivektorrummet $\mathcal{M}(V)$, som vektorrum över $\mathbb{F}$, tillsammans med Cliffordprodukten, vars definition är

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(V) \times \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}(V) \\ &\qquad (e_S, e_T) \mapsto e_S e_T = \tau(e_S, e_T)e_{\{S \triangle T\}} \end{aligned}$$

för basblad och utvidgas linjärt till resten av multivektorrummet. Funktionen τ definieras som i beviset av Lemma 1. För att produkten ska vara unik krävs att en orientering på basen införs. Med indexmängden $J = \{1, \ldots, n\}$ så fås automatiskt orienteringen som beskrivs i (2.3) om vi börjar med att definiera τ på span$\{e_1\}$ och utökar med e_i i ordning efter stigande index.

Det följer att den multiplikativa enheten är **enhetsskalären** $1e_\varnothing = 1$. Den additiva identiteten är $0e_\varnothing = 0e_{\{1\}} + 0e_{\{2\}} + 0e_{\{3\}} = 0$. Alltså representeras nollvektorn i V och och nollan i $\mathbb{F}$ av samma multivektor. Notera att 0 ingår i alla de graderade delrummen, det vill säga $0 \in \mathcal{C}l^k(V, q)$ för alla $k \in J$.

2.5 Grundläggande operationer

Cliffordprodukten mellan två multivektorer $x, y \in \mathcal{C}l(V,q)$ ges av

$$xy = \sum_{S\subseteq J}\sum_{T\subseteq J} x^S y^T e_S e_T$$

där $x^S, y^T \in \mathcal{C}l^0(V,q)$ är deras koordinater i en godtycklig naturlig bas. Detta kommer direkt från den distributiva lagen, samt att koordinaterna är skalärer som kommuterar med hela $\mathcal{C}l(V,q)$.

Det finns ett antal andra produkter som kan definieras i en Cliffordalgebra. De kan definieras på ett basoberoende sätt [9, s. 22]. Men det blir enklare att förstå dem om de ses som Cliffordprodukten tillsammans med en extra regel som förkastar vissa komponenter utifrån förhållandet mellan mängderna som faktorerna indexeras med.

Dessa regler kan uttryckas med Iversons parentesnotation. För ett påstående P definieras

$$[P] := \begin{cases} 1: & \text{om } P \text{ är sant,} \\ 0: & \text{om } P \text{ är falskt.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Definition 9. Låt $x \in \mathcal{C}l^k(V,q)$, $y \in \mathcal{C}l^l(V,q)$ vara två multivektorer som i någon naturlig bas $\{e_S\}_{S\subseteq J}$ ges av

$$x = \sum_{S\subseteq J} x^S e_S, \qquad y = \sum_{T\subseteq J} y^T e_T.$$

Vi definierar deras **skalärprodukt** som

$$\begin{aligned} x * y &:= \sum_{S\subseteq J}\sum_{T\subseteq J} x^S y^T e_S e_T [S = T] \\ &= \sum_{S\subseteq J} x^S y^S e_S^2, \end{aligned}$$

deras **vänster inre produkt** som

$$\begin{aligned} x \llcorner y &:= \sum_{S\subseteq J}\sum_{T\subseteq J} x^S y^T e_S e_T [S \subseteq T] \\ &= \sum_{S\subseteq T\subseteq J} x^S y^T e_S e_T, \end{aligned}$$

deras **höger inre produkt** som

$$\begin{aligned} x \lrcorner y &:= \sum_{S\subseteq J}\sum_{T\subseteq J} x^S y^T e_S e_T [S \supseteq T] \\ &= \sum_{T\subseteq S\subseteq J} x^S y^T e_S e_T, \end{aligned}$$

deras (tvåsidiga) **inre produkt** som

$$\begin{aligned} x \bullet y &:= \sum_{S \subseteq J} \sum_{T \subseteq J} x^S y^T e_S e_T [S \subseteq T \text{ eller } S \supseteq T] \\ &= x \lrcorner y + x \llcorner y - x * y, \end{aligned}$$

och deras **yttre produkt** som

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= \sum_{S \subseteq J} \sum_{T \subseteq J} x^S y^T e_S e_T \, [S \cap T = \varnothing] \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq J \\ T \subseteq J \setminus S}} x^S y^T e_S e_T. \end{aligned}$$

Anmärkning. I delar av litteraturen används istället $\rfloor$ för vänster och $\lfloor$ för höger inre produkt. Jag kommer använda symbolerna $\llcorner$ och $\lrcorner$ (från [9]) som kan särskiljas med följande minnesregel. Produkterna $\llcorner$ och $\lrcorner$ liknar undre halvan av $\subset$ respektive $\supset$ och $\llcorner$ har formen av ett L för 'left'.

Oavsett notationen så beror vänster inre produkt av de delprodukter där den vänstra operandens basblad är en faktor till (finns inuti) den högra operandens basblad. På samma sätt beror höger inre produkt på de delprodukter där den högra operandens basblad finns inuti den vänstras basblad.

Om q är fullständigt degenererad blir Cliffordprodukten lika med den yttre produkten och en sådan Cliffordalgebra är isomorf med den yttre algebran genererad av samma vektorrum:

$$\mathcal{C}l(V, 0) \cong \bigwedge V.$$

För alla multivektorer $x \in \mathcal{C}l(V, q)$ gäller

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x \bullet 1 = 1 \bullet x = x \lrcorner 1 = 1 \llcorner x = x$$

men för $x \in \mathcal{C}l(V, q) \setminus \mathcal{C}l^0(V, q)$ är

$$x \llcorner 1 = 1 \lrcorner x = x * 1 = 1 * x = 0.$$

Skalärprodukten av två multivektorer $x, y \in \mathcal{C}l(V, q)$ är alltid symmetrisk och ger skalärdelen av deras Cliffordprodukt:

$$x * y = \langle xy \rangle_0 = y * x.$$

De inre produkterna uppfyller alltid följande identitet:

$$x \bullet y = x \lrcorner y \; + \; x \llcorner y \; - \; x * y.$$

Om x och y är homogena multivektorer med samma grad så är höger-, vänster- och tvåsidiga inre produkten samt skalärprodukten identiska

$$x \lrcorner y = x \llcorner y = x * y = x \bullet y. \tag{2.7}$$

För två vektorer $x, y \in \mathcal{C}l^1(V, q)$ fås

$$x * y = \beta_q(x, y). \tag{2.8}$$

Yttre produkten är associativ men de inre produkterna och skalärprodukten är inte. Exempelvis:

$$\begin{aligned}(e_1 \bullet e_1) \bullet (e_2 \bullet e_2) &= q(e_1)q(e_2)\\ e_1 \bullet (e_1 \bullet e_2) \bullet e_2 &= 0.\end{aligned}$$

Sats 2. *För två homogena multivektorer $x \in \mathcal{C}l^k(V, q)$ $y \in \mathcal{C}l^l(V, q)$ gäller*

$$x \wedge y = \langle xy \rangle_{k+l}\,, \qquad x \bullet y = \langle xy \rangle_{|k-l|}\,.$$

Bevis. I en godtycklig naturlig bas kan x och y skrivas

$$x = \sum_{S \subseteq \{1,\dots,n\}} x^S e_S, \qquad y = \sum_{T \subseteq \{1,\dots,n\}} y^T e_T$$

där $n = \dim V$, $|S| = k$ och $|T| = l$. Den yttre produkten $x \wedge y$ består av de termer i xy där $S \cap T = \varnothing$. För de S och T som uppfyller detta gäller

$$\operatorname{grd}(e_S e_T) = |S \triangle T| = k + l - 0 = k + l,$$

via Cliffordproduktens definition och Ekvation (2.4).

Den inre produkten $x \bullet y$ består av de termer i Cliffordprodukten där $S \subseteq T$ eller $T \subseteq S$. För de S och T som uppfyller detta gäller

$$\operatorname{grd}(e_S e_T) = |S \triangle T| = k + l - 2\min(k, l) = |k - l|.$$

□

Sats 3. *För en vektor $v \in \mathcal{C}l^1(V, q)$ och en multivektor $x \in \mathcal{C}l(V, q)$ så gäller*

$$vx = v \llcorner x + v \wedge x$$

Bevis. I en godtycklig naturlig bas kan v och x skrivas

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_{\{i\}}, \qquad x = \sum_{S \subseteq \{1,\dots,n\}} x^S e_S$$

där $n = \dim V$. Då $|\{i\}| = 1$ så finns bara två fall för varje term i produkten:

$$\begin{aligned}
\{i\} \subseteq S \Leftrightarrow i \in S \qquad &\rightarrow \qquad (v^i e_{\{i\}})(x^S e_S) = (v^i e_{\{i\}}) \llcorner (x^S e_S), \\
\{i\} \cap S = \varnothing \Leftrightarrow i \notin S \qquad &\rightarrow \qquad (v^i e_{\{i\}})(x^S e_S) = (v^i e_{\{i\}}) \wedge (x^S e_S).
\end{aligned}$$

Alltså ingår varje term i vx antingen in $v \llcorner x$ eller i $v \wedge x$ så

$$vx = v \llcorner x + v \wedge x.$$

□

Ett motsvarande resonemang ger

$$xv = x \lrcorner v + x \wedge v \qquad \forall v \in \mathcal{C}l^1(V,q), \forall x \in \mathcal{C}l(V,q).$$

För vektorer $u, v \in \mathcal{C}l^1(V,q)$ gäller

$$\begin{aligned}
u \bullet v &= v \bullet u \qquad & u \llcorner v &= v \llcorner u \\
u \wedge v &= -v \wedge u \qquad & u \lrcorner v &= v \lrcorner u.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Detta tillsammans med Sats 3 och Ekvation (2.7) ger sambanden

$$\begin{aligned}
u * v &= \frac{1}{2}(uv + vu), \\
u \wedge v &= \frac{1}{2}(uv - vu).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Om v istället byts mot en bivektor $B \in \mathcal{C}l^2(V,q)$ gäller

$$\begin{aligned}
u \bullet B &= \frac{1}{2}(uB - Bu) = -B \bullet u, \\
u \wedge B &= \frac{1}{2}(uB + Bu) = u \wedge B.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Produkten av två multivektorer med grad ≥ 2 innehåller termer som missas av både yttre och inre produkten. Till exempel:

$$(e_1e_2)(e_2e_3) = q(e_2)e_1e_2, \qquad (e_1e_2) \bullet (e_2e_3) = 0, \qquad (e_1e_2) \wedge (e_2e_3) = 0.$$

Definition 10. Ett k-**blad** b är den yttre produkten av k stycken vektorer

$$b = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, \qquad v_i \in \mathcal{C}l^1(V,q).$$

Mängden av k-blad skrivs $\mathcal{B}^k$ och mängden av samtliga blad i Cliffordalgebran skrivs $\mathcal{B}$.

Cliffordprodukten av k stycken ortogonala vektorer är alltid ett k-blad [9, s. 27]. Om vektorfaktorerna v_i inte är linjärt oberoende så fås $b = 0$. Då 0 ingår i $\mathcal{B}^k$ för alla k låter vi grd(0) vara odefinierat.

Skalärer, vektorer, pseudovektorer och pseudoskalärer är alltid blad:

$$\mathcal{B}^k = \mathcal{C}l^k(V,q) \qquad \forall k \in \{0,\, 1,\, n-1,\, n\}$$

där n är vektorrummets dimension. Men om $n \geq 4$ tillkommer homogena multivektorer som inte är blad, till exempel $e_1e_2 + e_3e_4$.

Allmänt så kan multivektorer alltid skrivas som en summa av blad $\sum_i b_i$. Om en bas är given kan de skrivas som en linjär kombination av basbladen $\sum_{S\subseteq J} x^S e_S$.

Definition 11. Varje blad $b \in \mathcal{B}$ med $\mathrm{grd}(b) = k \geq 1$ sägs spänna upp det k-dimensionella delrummet

$$\mathrm{span}(b) := \{u \in \mathcal{C}l^1(V,q) \colon u \wedge b = 0\} \subseteq \mathcal{C}l^1(V,q).$$

Rummet span(b) är ett kvadratiskt rum och ärver sin kvadratiska form från $\mathcal{C}l^1(V,q)$.

Om

$$b = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$$

där $v_i \in \mathcal{C}l^1(V,q)$ så gäller

$$\mathrm{span}(b) = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Definition 12. För ett k-blad $b \in \mathcal{B}^k$ ges dess **gradinvolution** av

$$b^\star := (-1)^k b = \begin{cases} b\colon & k \equiv 0 \pmod 2 \\ -b\colon & k \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

och dess **reversion** av[2].

$$\tilde{b} := (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} b = \begin{cases} b\colon & k \equiv 0,1 \pmod 4 \\ -b\colon & k \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases},$$

vilket utvidgas linjärt till multivektorer.

[2] En annan vanligt förekommande beteckning för reversionen är $\cdot^\dagger$

Båda dessa operationer är sina egna inverser. Gradinvolutionen distribuerar över Cliffordprodukten

$$(xy)^\star = x^\star y^\star \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}l(V,q), \tag{2.12}$$

men för reversionen gäller istället

$$(xy)^\sim = \tilde{y}\tilde{x} \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}l(V,q). \tag{2.13}$$

Gradinvolutionen av en multivektor fås alltså genom att byta tecken på de termer som har udda grad. Man kan även se det som att gradinvolutionen vänder alla koordinataxlar eftersom

$$\cdot^\star \colon e_i \mapsto -e_i,$$

där $E = \{e_i\}$ är någon bas till vektorrummet.

Anmärkning. Exakt samma teckenbyten sker när en vektor $u \notin \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ kommuterar igenom ett blad $b = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \mathcal{B}^k$. Det är precis detta som ger skillnaden mellan fall (b) och (c) i beviset av Lemma 1. Enligt Ekvation (2.3) ska $e_n \in \mathcal{C}l^1(V,q)$ flyttas längst till höger för att få ett basblad. Så fallen (b)–(d) motsvarar

$$\begin{aligned}
&(b) \qquad e_{S_1}e^\circ_{S_2} = (e_{S_1})(e_{S_2}e_n) = e_{S_1}e_{S_2}e_n,\\
&(c) \qquad e^\circ_{S_1}e_{S_2} = (e_{S_1}e_n)(e_{S_2}) = e_{S_1}e^\star_{S_2}e_n = (-1)^{|S_2|}e_{S_1}e_{S_2}e_n,\\
&(d) \qquad e^\circ_{S_1}e^\circ_{S_2} = (e_{S_1}e_n)(e_{S_2}e_n) = e_{S_1}e^\star_{S_2}e_ne_n = q(e_n)(-1)^{|S_2|}e_{S_1}e_{S_2}e_n.
\end{aligned}$$

Praktiskt innebär reversionsoperationen att basvektorerna får omvänd ordning i alla basblad. Alltså är $\tilde{e}_S = \pm e_S$ beroende på om vändningen kräver ett jämnt eller udda antal kommutationer. För ett basblad med grad k krävs det $k-1$ kommutationer för att flytta den första vektorn längst till höger. Efter detta är den näst första vektorn längst till vänster och det krävs $k-2$ kommutationer för att flytta den näst längst till höger.

$$\begin{aligned}
e_S &= e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}\ldots e_{i_k}\\
&= (-1)^{k-1}e_{i_2}e_{i_3}\ldots e_{i_k}e_{i_1}\\
&= (-1)^{k-1}(-1)^{k-2}e_{i_3}\ldots e_{i_k}e_{i_2}e_{i_1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Totalt kommer det krävas $\sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{k(k-1)}{2}$ stycken kommutationer för att vända hela bladet.

Om ett blad $b = v_1 v_2 \dots v_k$ ($v_i \in \mathcal{C}l^1(V, q)$ ortogonala) multipliceras med sin revers $\tilde{b}$ så kommer vektorfaktorerna möta sig själva i mitten

$$\tilde{b}b = (v_k \dots v_2 v_1)(v_1 v_2 \dots v_k) = q(v_1)q(v_2)\dots q(v_k)$$

och kvar blir bara en skalär.

Därför är kvadraten av ett blad alltid en skalär och specifikt för ett k-blad $b = v_1 v_2 \dots v_k \in \mathcal{B}^k$ gäller

$$b^2 = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} b\tilde{b} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{i=1}^{k} q(v_i). \tag{2.14}$$

Definition 13. Ett blad $b \in \mathcal{B}$ sägs vara **inverterbart** om $b^2 \neq 0$. Dess invers skrivs b^{-1} och ges av

$$b^{-1} = \frac{1}{b^2} b$$

där $1/b^2 \in \mathcal{C}l^0(V, q)$. Mängden av **inverterbara blad** skrivs $\mathcal{B}^\times$.

Om q är anisotrop så är alla blad inverterbara, $\mathcal{B}^\times = \mathcal{B}$, vilket följer av Ekvation (2.14).

3 Geometrisk algebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$

För ett reellt kvadratiskt rum $(\mathbb{R}^n, q)$ så kan q representeras av en reell symmetrisk matris $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genom

$$q \colon v \mapsto v^\top Q v.$$

Matrisen Q kommer ha n stycken reella egenvärden, räknat med multiplicitet. Låt $p, m, z \in \mathbb{N}$ vara antalet egenvärden till Q som är positiva, negativa respektive noll. Tupeln (p, m, z) kallas **signaturen** till q. Sylvesters tröghetslag medför att signaturen är invariant under basbyte. Alltså gäller i varje given bas att $q(e_i) > 0$ för p stycken basvektorer, $q(e_i) < 0$ för m stycken och $q(e_i) = 0$ för z stycken.

En icke-degenererad kvadratisk form har signatur $(p, m, 0)$ och sägs ha **isotropi-index**

$$\iota = \min(p, m).$$

En sådan form är alltså anisotrop om $\iota = 0$.

Eftersom två reella kvadratiska rum med samma signatur är lika upp till en skaltransformation så kan vi beteckna dem $\mathbb{R}^{p,m,z}$. Följaktligen gäller

$$\dim \mathbb{R}^{p,m,z} = p + m + z.$$

Om $z = 0$ räcker det med att skriva $\mathbb{R}^{p,m}$.

Olika författare menar olika saker med 'geometrisk algebra'. Vi kommer använda följande definition.

Definition 14. En **geometrisk algebra** $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$ är en Cliffordalgebra över ett reellt vektorrum med icke-degenererad kvadratisk form. Alltså gäller

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m}) = \mathcal{C}l(\mathbb{R}^n, q)$$

där q är en godtycklig kvadratisk form med signaturen $(p, m, 0)$.

Exempel 3. Den geometriska algebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$ kallas **rumsalgebran**. Den har en naturlig bas

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{array}{rrr} 1, & & \\ e_1, & e_2, & e_3, \\ e_1e_2, & e_1e_3, & e_2e_3, \\ e_1e_2e_3 & & \end{array} \right\} \tag{3.1}$$

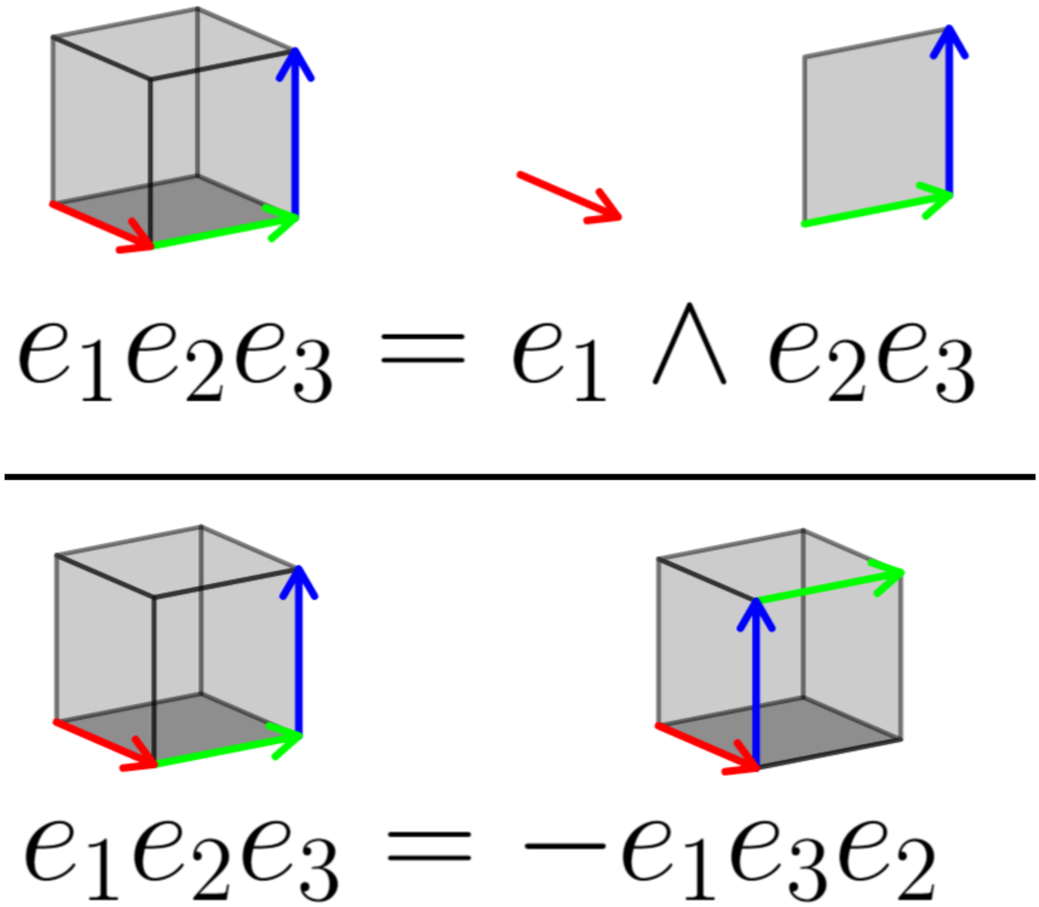
och alla basvektorer kvadrerar till $+1$. En bivektor

$$B = ae_1e_2 + be_1e_3 + ce_2e_3, \qquad a, b, c \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{3,0})$$

kan ses som en riktad area, på samma sätt som en vektor kan ses som en riktad längd. En trivektor

$$T = ae_1e_2e_3, \qquad a \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{3,0})$$

kan ses som en riktad volym. Fast eftersom delrummet $\mathcal{G}^3(\mathbb{R}^{3,0})$ är 1-dimensionellt så finns bara två riktningar: positiv eller negativ volym.



Figur 1: Visualisering av några element i rumsalgebran. Röd: e_1, grön: e_2, blå: e_3. I denna algebra beror tecknet för en trivektor på om dess vektorfaktorer bildar ett höger- eller vänsterhänt koordinatsystem.

3.1 Pseudoskalärer och dualitet

Definition 15. Låt $\mathcal{G}$ vara en geometrisk algebra och $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ en ortonormal bas till $\mathcal{G}^1$. Den naturliga basen $\mathcal{N}(E)$ innehåller alltid ett enda element med grad n. Detta basblad kallas för **enhetspseudoskalären** i $\mathcal{G}$ och betecknas

$$I := e_1e_2 \cdots e_n. \tag{3.2}$$

Anmärkning. Denna definition är entydig givet orienteringskonventionen i Ekvation (2.3). Enhetspseudoskalären I är invariant under rotationer men ett basbyte som permuterar E med en udda permutation kommer skicka $I \mapsto -I$ [9, s. 12].

Egentligen har I ingen specifik geometrisk form. Men dess centrala egenskap är att den har hypervolymen $+1$. Därför kan I visualiseras som den parallellotop som ramas in av samtliga basvektorer (se Figur 1).

Om vi multiplicerar I med en basvektor e_i från vänster så krävs det $i-1$ kommutationer för att den ska hamna bredvid det e_i som redan fanns i I. Om I multipliceras med e_i från höger så krävs istället $n-i$ kommutationer.

Om n är udda gäller

$$n - i \equiv 1 - i \equiv i - 1 \pmod{2}$$

vilket medför $e_i I = I e_i$. Då kommuterar I även med alla blad eftersom den kan passera en vektor i taget. Eftersom Cliffordprodukten distribuerar över addition så betyder detta att I kommuterar hela $\mathcal{G}$.

Om n är jämn gäller

$$n - i \not\equiv i - 1 \pmod{2}$$

så istället antikommuterar I med vektorer. Därför följer

$$Iuv = -uIv = uvI$$

för linjärt oberoende vektorer $u, v \in \mathcal{G}^1$. Alltså kommuterar I med 2-blad och det blir inget teckenbyte om den passerar två vektorer i taget. Därför kommuterar I med hela $\mathcal{G}^+$.

I den geometriska algebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$, vars genererande vektorrum har dimension $n = p + m$, gäller därför

$$Ix = (-1)^{k(n-1)} xI \qquad \forall x \in \mathcal{G}^k(\mathbb{R}^{p,m}). \tag{3.3}$$

Enhetspseudoskalärens invers är också en pseudoskalär och ges av

$$I^{-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} I, \tag{3.4}$$

på grund av (2.14).

Definition 16. I en geometrisk algebra $\mathcal{G}$ genererad av ett n-dimensionellt vektorrum med enhetspseudoskalär I kallas avbildningen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^k &\to \mathcal{G}^{n-k} \qquad\qquad \forall k \in \{0, \ldots, n\} \\ x &\mapsto Ix \end{aligned}$$

för **dualitetstransformationen** i $\mathcal{G}$. För en k-vektor $x \in \mathcal{G}^k$ kallas

$$x^{\mathsf{C}} := Ix \in \mathcal{G}^{n-k} \tag{3.5}$$

för det **ortogonala komplementet** till x.

Dualitetstransformationen skickar skalärer till pseudoskalärer, 1-vektorer till pseudovektorer, 2-vektorer till $(n-2)$-vektorer och så vidare. Notera dock att den inte alltid är sin egen invers eftersom (3.4) ger

$$\left(x^{\complement}\right)^{\complement} = I^2 x = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} x.$$

Exempel 4. En geometrisk algebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$ där $p + m = n > 0$ har en 2-dimensionell delalgebra som endast består linjärkombinationer av skalärer och pseudoskaläerer. Denna ges av

$$\mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^n = \left\{ a + bI \colon a, b \in \mathbb{R},\ I^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} \right\}.$$

I fallet då $I^2 = -1$ fås algebraisomorfin

$$\mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^n \cong \mathbb{C}.$$

Detta gäller exempelvis i rumsalgebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$ och rumtidsalgebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3})$. För vissa fysikaplikationer är det praktiskt att ha de komplexa talen inbyggda i rummets geometri.

En viktig skillnad är att en transformation av rummet som vänder basens orientering har följande verkan:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^n &\to \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^n \qquad & \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ a + bI &\mapsto a - bI, & c + di &\mapsto c + di. \end{aligned}$$

Alltså komplexkonjugeras $\mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^n$ av spegeltransformationer, medan $\mathbb{C}$ är invariant under alla transformationer av vektorrummet $\mathcal{G}^1$.

Sats 4. *Låt $x \in \mathcal{G}^k(\mathbb{R}^{p,m})$, $y \in \mathcal{G}^l(\mathbb{R}^{p,m})$ vara två homogena multivektorer. Då gäller*

$$x^{\complement} \bullet y = (x \wedge y)^{\complement} \qquad \textit{om} \quad k + l \leq n$$

och

$$x^{\complement} \wedge y = (x \bullet y)^{\complement} \qquad \textit{om} \quad k \geq l$$

där $n = p + m$ är vektorrummets dimension.

Bevis. Enligt (3.5) gäller $z^{\complement} = \langle Iz \rangle_{n-\mathrm{grd}(z)}$ för homogena multivektorer. Med Sats 2 så kan den övre likheten verifieras

$$\begin{aligned} x^{\complement} \bullet y &= \langle Ix \rangle_{n-k} \bullet y = \langle Ixy \rangle_{|(n-k)-l|} = \langle Ixy \rangle_{n-(k+l)} = \left(\langle xy \rangle_{k+l}\right)^{\complement} \\ &= (x \wedge y)^{\complement} \end{aligned}$$

eftersom $n-(k+l)\geq 0$ och $\operatorname{grd}(x\wedge y)=k+l$. På liknande sätt kan den undre likheten verifieras

$$\begin{aligned}x^{\complement}\wedge y&=\langle Ix\rangle_{n-k}\wedge y=\langle Ixy\rangle_{(n-k)+l}=\langle Ixy\rangle_{n-|k-l|}=\Big(\langle xy\rangle_{|k-l|}\Big)^{\complement}\\&=(x\bullet y)^{\complement}\end{aligned}$$

eftersom $k-l\geq 0$ och $\operatorname{grd}(x\bullet y)=|k-l|=k-l$. □

3.2 Godtyckliga baser

I ortogonala baser är produkten av två olika basvektorer endast en bivektor. I en icke-ortogonal bas får produkten av två olika basvektorer även en skalärkomponent.

Definition 17. Basbladen e_S i den naturliga basen $\mathcal{N}(E)$ genererad av en godtycklig bas $E=\{e_i\}_{i\in J}$, med indexmängd $J=\{1,\ldots,n\}$ ges av

$$e_S := e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k} \tag{3.6}$$

där $S=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq J$ och $i_1<i_2<\cdots<i_k$.

Proposition 1. *Låt $\mathcal{G}$ vara en geometrisk algebra och $E=\{e_i\}_{i\in J}$ en godtycklig bas till $\mathcal{G}^1$. Då existerar en* ***reciprok bas*** *$E^*=\{e^i\}_{i\in J}$ som uppfyller*

$$e^i * e_j=\delta_i^j \qquad \forall i,j\in J.$$

Om $J=\{1,\ldots,n\}$ ges elementen i E^* av

$$e^i := (-1)^{i-1}e_{J\setminus\{i\}}e_J^{-1}\in\mathcal{G}^1.$$

Bevis. Då basvektorerna e_i är linjärt oberoende så har $e_{J\setminus\{i\}}$ grad $n-1$ och e_J grad n. Eftersom e_J är en pseudoskalär så gäller $e_J=aI$ för något $a\in\mathbb{R}$. Ekvation (3.3) ger

$$\begin{aligned}e^i&=(-1)^{i-1}(e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n)\frac{a}{e_J^2}I\\&=(-1)^{i-1}(-1)^{(n-1)^2}\frac{a}{e_J^2}I(e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n)\\&=(-1)^{i-1}(-1)^{n-1}\frac{a}{e_J^2}(e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n)^{\complement}.\end{aligned}$$

Alltså gäller $e^i \in \mathcal{G}^1$ eftersom den är det ortogonala komplementet till en pseudovektor. Eftersom e^i har samma grad som e_j gäller $e^i * e_j = e^i \bullet e_j$. Sats 4 ger nu

$$
\begin{aligned}
e^i \bullet e_j &= (-1)^{i-1}(-1)^{n-1}\frac{a}{e_J^2}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n)^{\complement} \bullet e_j \\
&= (-1)^{n+i-2}\frac{a}{e_J^2}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n \wedge e_j)^{\complement} \\
&= (-1)^{n+i}\frac{a}{e_J^2}I(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n \wedge e_j).
\end{aligned}
$$

Om $i \neq j$ fås att

$$e^i \bullet e_j \propto e_j \wedge e_j = 0.$$

Om $i = j$ behöver e_j passera $n - i$ stycken vektorer för att hamna rätt i ordningen:

$$
\begin{aligned}
e^i \bullet e_j &= (-1)^{n+i}(-1)^{n-i}\frac{a}{e_J^2}I(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_j \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n) \\
&= (-1)^{2n}\frac{a}{e_J^2}Ie_J = e_J^{-1}e_J = 1.
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$e^i * e_j = \delta^i_j.$$

□

Anmärkning. Om E är ortogonal så är $e_i \wedge e_j = e_i e_j$ för $i \neq j$. Därför får $\mathcal{N}(E)$ samma form som använts tidigare i till exempel (3.1). Den reciproka basen E^* ges i detta fall av

$$
\begin{aligned}
e^i &= (-1)^{i-1}e_{J\setminus\{i\}}e_J^{-1} = (-1)^{i-1}(e_1 \cdots e_{i-1}e_{i+1} \cdots e_n)I^{-1} \\
&= (-1)^{i-1}\frac{1}{q(e_i)}(e_i e_i)(e_1 \cdots e_{i-1}e_{i+1} \cdots e_n)I^{-1} \\
&= (-1)^{i-1}\frac{1}{q(e_i)}(-1)^{i-1}e_i(e_1 \cdots e_{i-1}e_i e_{i+1} \cdots e_n)I^{-1} \\
&= \frac{1}{q(e_i)}e_i I I^{-1} = \frac{1}{q(e_i)}e_i = (e_i)^{-1}
\end{aligned}
$$

eftersom $e_i e_i / q(e_i) = 1$. Om den kvadratiska formen q är positiv definit så gäller $e^i = e_i$ i ortonormala baser.

Lemma 2. *Låt $\mathcal{G}$ vara en geometrisk algebra. För vektorer $u_i, v_j \in \mathcal{G}^1$, för $1 \leq i, j \leq k$ gäller likheten*

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k) * (v_k \wedge \cdots \wedge v_2 \wedge v_1) = \det \begin{bmatrix} u_1 * v_1 & u_1 * v_2 & \cdots & u_1 * v_k \\ u_2 * v_1 & u_2 * v_2 & \cdots & u_2 * v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_k * v_1 & u_k * v_2 & \cdots & u_k * v_k \end{bmatrix}.$$

där $k \leq n = \dim \mathcal{G}^1$.

Bevis. Då både yttre produkten och skalärprodukten är bilinjära så är vänsterledet en multilinjär avbildning

$$\begin{array}{rccl} VL\colon & \bigoplus_{i=1}^{2k} \mathcal{G}^1 & \to & \mathcal{G}^0, \\ & (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & (u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) * (v_k \wedge \cdots \wedge v_1). \end{array}$$

Högerledet är också en multilinjär avbildning

$$\begin{array}{rccl} HL\colon & \bigoplus_{i=1}^{2k} \mathcal{G}^1 & \to & \mathcal{G}^0, \\ & (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \det \left[u_i * v_j\right]_{1 \leq i,j \leq k} \end{array}$$

eftersom determinanten av en matris är linjär i raderna och i kolumnerna.

Låt $E = \{e_i\}_{i=1}^n$ vara en ortonormal bas till $\mathcal{G}^1$. Avbildningarna är identiska om de avbildar samma kartesiska produkt av basvektorer till samma skalär i $\mathcal{G}^0$. Alltså behöver vi visa att

$$VL(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = HL(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$$

för alla $i_l, j_m \in \{1, \ldots, n\}$, där $l, m \in \{1, \ldots, k\}$.

Båda avbildningarna är alternerande inom de första k argumenten samt inom de sista k argumenten. Om $i_l = i_m$ eller $j_l = j_m$ för $l \neq m$ så blir vänsterledet noll eftersom $w \wedge w = 0$ för $w \in \mathcal{G}^1$ och högerledet blir noll eftersom matrisen får linjärt beroende rader eller kolumner. För att $HL, VL \neq 0$ måste därför $|\{i_l\}_{l=1}^k| = |\{j_l\}_{l=1}^k| = k$.

Då E är ortonormal så gäller

$$\begin{aligned} VL &= (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) * (e_{j_k} \wedge \cdots \wedge e_{j_1}) = (e_{i_1} \cdots e_{i_k}) * (e_{j_k} \cdots e_{j_1}) \\ &= \langle (e_{i_1} \cdots e_{i_k})(e_{j_k} \cdots e_{j_1}) \rangle_0 = \pm \left\langle (e_{\{i_1, \ldots, i_k\}})(e_{\{j_k, \ldots, j_1\}}) \right\rangle_0 \\ &= \pm \left\langle \tau(e_{\{i_1, \ldots, i_k\}}, e_{\{j_1, \ldots, j_k\}}) e_{\{i_1, \ldots, i_k\} \triangle \{j_1, \ldots, j_k\}} \right\rangle_0 \end{aligned}$$

där tecknet beror på vektorfaktorernas ordning. Om $\{i_l\}_{l=1}^k \neq \{j_l\}_{l=1}^k$ så blir

$$\operatorname{grd}\left(e_{\{i_1,\dots,i_k\}\triangle\{j_1,\dots,j_k\}}\right) > 0$$

och $VL = 0$ på grund av gradprojektionen. Om $\{e_{i_l}\}_{l=1}^k \neq \{e_{j_l}\}_{l=1}^k$ så kommer det finnas något e_{i_l} som är ortogonal mot alla e_j. Då kommer kolumn l i matrisen bara innehålla nollor, vilket medför $HL = 0$.

Om $j_l = \sigma(i_l)$ där $\sigma \in S_k$ är en permutation får vi slutligen

$$VL = (e_{i_1} \cdots e_{i_k})(e_{\sigma(i_k)} \cdots e_{\sigma(i_1)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_1}^2 e_{i_2}^2 \cdots e_{i_k}^2$$

och

$$\begin{aligned}
HL &= \det \begin{bmatrix} e_{i_1} * e_{\sigma(i_1)} & e_{i_1} * e_{\sigma(i_2)} & \cdots & e_{i_1} * e_{\sigma(i_k)} \\ e_{i_2} * e_{\sigma(i_1)} & e_{i_2} * e_{\sigma(i_2)} & \cdots & e_{i_2} * e_{\sigma(i_k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{i_k} * e_{\sigma(i_1)} & e_{i_k} * e_{\sigma(i_2)} & \cdots & e_{i_k} * e_{\sigma(i_k)} \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma) \det \begin{bmatrix} e_{i_1} * e_{i_1} & e_{i_1} * e_{i_2} & \cdots & e_{i_1} * e_{i_k} \\ e_{i_2} * e_{i_1} & e_{i_2} * e_{i_2} & \cdots & e_{i_2} * e_{i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{i_k} * e_{i_1} & e_{i_k} * e_{i_2} & \cdots & e_{i_k} * e_{i_k} \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma) \det \operatorname{diag}(e_{i_1}^2, e_{i_2}^2, \dots, e_{i_k}^2) = \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_1}^2 e_{i_2}^2 \cdots e_{i_k}^2 \\
&= VL
\end{aligned}$$

□

Proposition 2. *Låt $\mathcal{G}$ vara en geometrisk algebra och låt $E = \{e_i\}_{i\in J}$ vara en godtycklig bas till $\mathcal{G}^1$. Om basen $E^* = \{e^i\}_{i\in J}$ är reciprok till E så är då den naturliga basen*

$$\mathcal{N}(E^*) = \{e^S\}_{S\subseteq J}$$

reciprok till

$$\mathcal{N}(E) = \{e_T\}_{T\subseteq J}.$$

Det vill säga

$$e^S * e_T = \delta_T^S = \begin{cases} 1: & S = T \\ 0: & S \neq T \end{cases}.$$

De reciproka basbladen kommer ges av

$$e^S := e^{i_k} \wedge \cdots \wedge e^{i_2} \wedge e^{i_1} \in \mathcal{G}^{|S|} \tag{3.7}$$

där $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq J$ och $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Notera att vektorerna i produkten är sorterade efter fallande index, till skillnad från (3.6).

Bevis. Låt $k = |S|$ och $l = |T|$. Sats 2 ger

$$e^S * e_T = \left\langle e^S \bullet e_T \right\rangle_0 = \left\langle \left\langle e^S e_T \right\rangle_{|k-l|} \right\rangle_0 .$$

Om $k \neq l$ är detta uttryck noll. I fallet $k = l$ kan vi låta

$$\begin{aligned} S &= \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}: & \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ T &= \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}: & \qquad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} e^S * e_T &= (e^{i_k} \wedge \cdots \wedge e^{i_1}) * (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}) \\ &= \det \begin{bmatrix} e^{i_k} * e_{j_k} & \cdots & e^{i_k} * e_{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i_1} * e_{j_k} & \cdots & e^{i_1} * e_{j_1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta^{i_k}_{j_k} & \cdots & \delta^{i_k}_{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{i_1}_{j_k} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

via Proposition 1 och Lemma 2. Detta uttryck är noll om $S \neq T$. Om $S = T$ fås en enhetsmatris, vars determinant är 1. Alltså gäller

$$e^S * e_T = \delta^S_T$$

□

I en godtycklig bas $E = \{e_i\}_{i \in J}$ kan nu Einsteins summakonvention användas för vektorer $v \in \mathcal{G}^1$ med

$$v = v^i e_i := \sum_{i \in J} (v * e^i) e_i \tag{3.8}$$

och även för allmänna multivektor $x \in \mathcal{G}$ med

$$x = x^S e_S := \sum_{S \subseteq J} (x * e^S) e_S. \tag{3.9}$$

Om inget annat anges kommer vi från och med nu implicit summera över indexsymboler som förekommer två gånger i samma term. Versaler som S, T itererar över alla delmängder till indexmängden. Gemener som i, j itererar över indexmängdens element.

Specifikt för rumtidsalgebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3})$, vars indexmängd är $J = \{0, 1, 2, 3\}$, så itererar i, j bara över de rumsliga indexen $\{1,2,3\}$. Istället används grekiska gemener som μ, ν för att iterera över hela J. Men i övriga algebror itererar i, j över hela indexmängden.

3.3 Grupper och gruppverkan

En geometrisk algebra $\mathcal{G}$ har typiskt flera delmängder som bildar grupper under Cliffordprodukten.

Definition 18. Gruppen av inverterbara multivektorer skrivs

$$\mathcal{G}^\times := \{x \in \mathcal{G} \colon \exists y \in \mathcal{G} \colon xy = 1 = yx\}.$$

Att $\mathcal{G}^\times$ är en grupp följer av att Cliffordprodukten är associativ.

Definition 19. Två viktiga gruppverkningar av $\mathcal{G}^\times$ på $\mathcal{G}$ är **adjungerad verkan**

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} \colon \mathcal{G}^\times &\to \mathrm{GL}(\mathcal{G}) \\ x &\mapsto \left(\mathrm{Ad}_x \colon y \mapsto xyx^{-1}\right), \end{aligned}$$

och **vriden adjungerad verkan**[3]

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ad}} \colon \mathcal{G}^\times &\to \mathrm{GL}(\mathcal{G}) \\ x &\mapsto \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x \colon y \mapsto x^\star y x^{-1}\right) \end{aligned}$$

där $\mathrm{GL}(\mathcal{G})$ är gruppen av inverterbara linjära avbildningar från $\mathcal{G}$ till sig själv.

Både Ad_x och $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ är linjära avbildningar så givet en naturlig bas är deras verkan på hela $\mathcal{G}$ unikt bestämda av hur de verkar på basbladen. Med $y = y^S e_S$ enligt (3.9) gäller alltså

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_x(y) &= xy^S e_S x^{-1} = y^S x e_S x^{-1} = y^S \,\mathrm{Ad}_x(e_S)\,, \\ \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(y) &= x^\star y^S e_S x^{-1} = y^S x^\star e_S x^{-1} = y^S \,\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(e_S)\,. \end{aligned}$$

En viktig skillnad är att Ad_x dessutom är unikt bestämd av hur den verkar på $\mathcal{G}^1$. Med $e_S = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$, $|S| = k$ följer

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_x(e_S) &= x\left(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}\right) x^{-1} = x\left(e_{i_1}(x^{-1}x) e_{i_2}(x^{-1}x) \cdots (x^{-1}x) e_{i_k}\right) x^{-1} \\ &= \left(x e_{i_1} x^{-1}\right)\left(x e_{i_2} x^{-1}\right) \cdots \left(x e_{i_k} x^{-1}\right) = \mathrm{Ad}_x(e_{i_1}) \cdots \mathrm{Ad}_x(e_{i_k})\,. \end{aligned}$$

Detta gäller i allmänhet inte för $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$. Om $x \in \mathcal{G}^\times \cap \mathcal{G}^\pm$ så gäller $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x = \pm \mathrm{Ad}_x$. Men om x innehåller både termer med udda grad och termer med jämn grad så är förhållandet mer komplicerat.

[3] Det finns ingen djupare mening bakom att både $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ och reversionen $\tilde{\cdot}$ skrivs med ett tilde-tecken.

Definition 20. **Lipschitzgruppen** eller **versorgruppen** skrivs

$$\Gamma := \{v_1 v_2 \dots v_k \in \mathcal{G}^\times : v_i \in V^\times,\ k \geq 0\}.$$

där $V^\times = \{v \in \mathcal{G}^1 : v^2 \neq 0\}$ är mängden av inverterbara vektorer. Dess element kallas **versorer**. För att se till att $1 \in \Gamma$ så tolkas $k = 0$ som den tomma produkten.

Från (2.12) följer att gradinvolutionen av en versor $x = v_1 v_2 \cdots v_k \in \Gamma$, $v_i \in \mathcal{G}^1$ blir

$$x^\star = (v_1 v_2 \cdots v_k)^\star = v_1^\star v_2^\star \cdots v_k^\star = (-1)^k x. \tag{3.10}$$

Alltså är alla versorer antingen jämna eller udda multivektorer, beroende på om de består av ett jämnt eller udda antal vektorfaktorer: $\Gamma \subseteq (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-)$.

Sats 5. *Grupphomomorfin*

$$\widetilde{\mathrm{Ad}} \colon \Gamma \to \mathrm{GL}(\mathcal{G})$$

har kärnan $\Gamma^0 := \Gamma \cap \mathcal{G}^0$ *.*

Bevis. Versorn $x \in \Gamma$ tillhör homomorfins kärna om och endast $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ är identitetsavbildningen. Det vill säga

$$x^\star y x^{-1} = y \qquad \forall y \in \mathcal{G}. \tag{3.11}$$

Om $y = x$ fås

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(x) = x^\star x x^{-1} = x^\star$$

och eftersom

$$x^\star = x \Leftrightarrow x \in \mathcal{G}^+$$

så kärnan kan endast innehålla versorer med jämn grad. Om $x \in \mathcal{G}^+$ så är (3.11) ekvivalent med

$$xy = yx \qquad \forall y \in \mathcal{G}.$$

Detta gäller om x är en skalär eftersom $\mathcal{G}^0$ kommuterar med hela $\mathcal{G}$. Därför ligger Γ^0 i kärnan.

Vi behöver även visa att kärnan inte innehåller några fler element som inte är skalärer. Givet en ortogonal naturlig bas $\{e_S\}_{S \subseteq J}$ så kan x skrivas som en linjärkombination av basbladen, $x = x^S e_S$. För att kommutera med x så måste y kommutera med varje term som ingår i linjärkombinationen, det vill säga

$$y e_S = e_S y \qquad \forall S \subseteq J \colon x^S \neq 0.$$

Antag att $x^S \neq 0$ för något $S \subseteq J$ där $k = |S|$ är jämn. Om $k > 0$ kan basbladet som koordinaten x^S hör till skrivas

$$e_S = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$$

där $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Vi väljer $y = e_{i_k}$. Antalet kommutationer som krävs för att e_{i_k}:na ska hamna bredvid varandra kommer vara 0 om y är till höger och $k - 1$ om y är till vänster. Eftersom k är jämn antikommuterar alltså detta y med e_S. Exempelvis:

$$\begin{aligned} &e_4(e_1e_2e_3e_4) = (-1)^3 e_1e_2e_3e_4e_4 = -e_1e_2e_3(e_4)^2 \\ &(e_1e_2e_3e_4)e_4 = e_1e_2e_3(e_4)^2. \end{aligned}$$

Alltså kan x bara kommutera med y om alla dess koordinater $x^S : |S| > 0$ är noll. Därför är den mest allmänna formen på x som tillåts:

$$x = x^{\varnothing} e_{\varnothing} \in \mathcal{G}^0$$

så Γ^0 är hela kärnan. □

Anmärkning. Om vektorrummet som genererar $\mathcal{G}$ är 0-dimensionellt så är $\Gamma^0 = \Gamma = \{1\}$ eftersom det inte finns några vektorer att bilda icke-tomma produkter av. Annars kan vi alltid hitta en inverterbar vektor $e_1 \in V^\times$ och faktorisera en godtycklig skalär $c \in \mathcal{G}^0$ enligt:

$$c = c(e_1 e_1^{-1}) = (ce_1)(e_1^{-1}).$$

Därför gäller $\Gamma^0 = \mathcal{G}^0 \setminus \{0\}$ för icke-triviala algebror.

Det visar sig [9, s. 71–73] att versorerna är precis de multivektorer vars vridna adjungerade verkan alltid avbildar vektorer på vektorer:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{x \in \mathcal{G}^\times : \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v) \in \mathcal{G}^1 \quad \forall v \in \mathcal{G}^1\} \\ &\subseteq \{x \in \mathcal{G}^\times : \mathrm{Ad}_x(v) \in \mathcal{G}^1 \quad \forall v \in \mathcal{G}^1\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Denna egenskap antyder att $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ tar hänsyn till gradstrukturen i $\mathcal{G}$ på ett mer naturligt sätt än Ad.

Exempel 5. I rumsalgebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$ är den inhomogena multivektorn

$$x = 2e_1 + e_2e_3$$

inverterbar, med

$$x^{-1} = \frac{2e_1 - e_2e_3}{5}.$$

Dess verkan på vektorrummet $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{3,0}) = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ ges av

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_x \colon e_1 &\mapsto e_1 & \qquad \widetilde{\mathrm{Ad}}_x \colon e_1 &\mapsto \frac{-3e_1 + 4e_2e_3}{5} \\ e_2 &\mapsto -e_2 & e_2 &\mapsto \frac{3e_2 + 4e_1e_3}{5} \\ e_3 &\mapsto -e_3 & e_3 &\mapsto \frac{3e_3 - 4e_1e_2}{5} \end{aligned}$$

Alltså är $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{3,0})$ sluten under Ad_x, trots att x inte är en versor. Men som väntat av (3.12) så är $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{3,0})$ inte sluten under $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$.

Definition 21. Gruppen av **enhetsversorer** skrivs

$$\mathrm{Pin} := \{x \in \Gamma \colon \tilde{x}x \in \{-1, 1\}\}$$

och gruppen av **jämna enhetsversorer** skrivs

$$\mathrm{Spin} := \mathcal{G}^+ \cap \mathrm{Pin}\,.$$

En enhetsversor $x \in \mathrm{Pin}$ kan faktoriseras i enhetsvektorer, det vill säga

$$x = u_1u_2 \cdots u_k, \qquad u_i^2 \in \{-1, 1\}$$

och om k är jämn är $x \in \mathrm{Spin}$.

Definition 22. **Rotorgruppen** skrivs

$$\mathrm{Spin}^+ := \{x \in \mathrm{Spin} \colon x\tilde{x} = 1\}$$

och dess element kallas **rotorer**.

Anmärkning. Plus-tecknet i Spin^+ syftar på att $x\tilde{x} = +1$ och har inget med jämna multivektorer att göra. Om kravet att $x \in \mathcal{G}^+$ tas bort från Spin^+ så fås gruppen Pin^+.

Rotorer används för att uttrycka generaliserade rotationer. Mer om detta i del 4.

Om vektorrummet har dimension 5 eller mindre gäller

$$\mathrm{Spin}^+(p, m) = \{x \in \mathcal{G}^+\left(\mathbb{R}^{p,m}\right) : x\tilde{x} = 1\} \tag{3.13}$$

där $p + m \leq 5$ [9, s. 80]. Men i högre dimensioner tillkommer multivektorer som inverteras av reversion, utan att de är versorer.

Exempel 6. Betrakta den inhomogena multivektorn

$$x = \frac{3e_1e_2 + 4e_3e_4e_5e_6}{5} \in \mathcal{G}\left(\mathbb{R}^{6,0}\right).$$

Dess revers är

$$\tilde{x} = \frac{-3e_1e_2 + 4e_3e_4e_5e_6}{5}$$

och

$$x\tilde{x} = \frac{16(e_3e_4e_5e_6)^2 - 9(e_1e_2)^2}{25} = \frac{16+9}{25} = 1.$$

Men

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(e_1) = x^\star e_1 \tilde{x} = \frac{7e_1 - 24e_2e_3e_4e_5e_6}{25} \notin \mathcal{G}^1.$$

Alltså ligger x inte i Lipschitzgruppen $\Gamma\left(\mathbb{R}^{6,0}\right)$ och ingår därför inte heller i den motsvarande rotorgruppen $\mathrm{Spin}^+(6,0)$.

De fem grupperna som definierats är delgrupper till varandra enligt:

$$\mathrm{Spin}^+ \subseteq \mathrm{Spin} \subseteq \mathrm{Pin} \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{G}^\times.$$

De inverterbara bladen $\mathcal{B}^\times$ är en delmängd av $\mathcal{G}^\times$ men de bildar bara en grupp om $\dim V \leq 1$. Följande exempel reder ut skillnaden mellan blad och versorer.

Exempel 7. Vi väljer algebran $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{2,2})$ och en bas $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ så att $e_0^2 = e_2^2 = 1$, $e_1^2 = e_3^2 = -1$. Den blandade signaturen gör att det finns icke-inverterbara vektorer, till exempel $e_0 + e_1$, som kvadrerar till 0.

Ett blad är en produkt av ortogonala vektorer eller en yttre produkt av godtyckliga vektorer. En versor är en produkt av inverterbara vektorer. Följande multivektorer är både blad och versorer:

$$\{1, \quad 2, \quad e_0, \quad e_1, \quad e_0 + e_2, \quad e_0(e_1 + e_3), \quad e_0e_1e_2e_3\} \subseteq \mathcal{B} \cap \Gamma.$$

Följande multivektorer är blad men inte versorer:

$$\{0, \quad e_0 + e_1, \quad (e_0 + e_1)e_2\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \Gamma.$$

Följande multivektorer är versorer men inte blad:

$$\{1 + e_0e_2 = e_0(e_0 + e_2), \quad -e_0 + e_0e_1e_3 = e_0e_1(e_1 + e_3)\} \subseteq \Gamma \setminus \mathcal{B}.$$

Följande multivektorer är varken blad eller versorer:

$$\{1 + e_0e_1 = e_0(e_0 + e_1), \quad e_0e_1 + e_2e_3, \quad e_0e_2 + e_1e_3\} \subseteq \mathcal{G} \setminus (\mathcal{B} \cup \Gamma).$$

3.4 Projektion och reflektion

För ett inverterbart blad $b \in \mathcal{B}^\times(\mathbb{R}^{p,m})$ så är $\mathrm{span}(b)$ alltid ett icke-degenererat kvadratiskt rum. Vi kan därför generera den geometriska algebran

$$\mathcal{G}(\mathrm{span}(b)),$$

som är en delalgebra till $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$. Bladet b kommer alltid att vara en pseudoskalär i $\mathcal{G}(\mathrm{span}(b))$.

Men om $b^2 = 0$ och den ursprungliga algebrans kvadratisk form har isotropi-index

$$\iota = \min(p, m) \geq 2$$

så kan $\mathrm{span}(b)$ bli degenererat och kan då endast generera en degenererad Cliffordalgebra. Det är delvis på grund av denna problematik som vi bara kommer definiera generaliserade rotationer i rum med $\iota \leq 1$ (del 4).

Definition 23. Givet en multivektor $x \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$ och ett inverterbart blad $b \in \mathcal{B}^\times(\mathbb{R}^{p,m})$ så definieras **projektionen** av x på b med

$$\mathcal{P}_b(x) := (x \llcorner b)\, b^{-1}$$

och **rejektionen** av x från b med

$$\mathcal{P}_b^\perp(x) := x - \mathcal{P}_b(x).$$

Projektion kan definieras på enklare sätt i specialfall. Men med denna definition gäller alltid

$$\mathcal{P}_b(x) \in \mathcal{G}(\mathrm{span}(b)), \qquad \mathcal{P}_b^\perp(x) \in \mathcal{G}\left(\mathrm{span}(b)^\complement\right), \qquad \mathcal{P}_b(\mathcal{P}_b(x)) = \mathcal{P}_b(x)$$

för godtyckliga $x \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$ och $b \in \mathcal{B}^\times(\mathbb{R}^{p,m})$ [3, s. 42].

Exempel 8. Vi väljer rumsalgebran $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$. Låt $v = e_1 + 2e_2 + e_3$ och $B = 3e_1e_2$. Projektionen av v på B blir

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_B(v) &= ((e_1 + 2e_2 + e_3) \llcorner 3e_1e_2)B^{-1} = 3(e_2 - 2e_1)B^{-1} \\ &= 3(e_2 - 2e_1)\frac{3e_1e_2}{9e_1e_2e_1e_2} = (e_2 - 2e_1)\frac{e_1e_2}{-1} \\ &= -(e_2e_1e_2 - 2e_1e_1e_2) = e_1 + 2e_2.\end{aligned}$$

och vi ser att $\mathcal{P}_B(v) \in \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$.

För en vektor $w \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ och en inverterbar vektor $u \in V^\times(\mathbb{R}^{p,m})$ återfås den vanliga projektionsoperationen från linjär algebra:

$$\mathcal{P}_u(w) = (w \llcorner u)\, u^{-1} = (w * u)\, u \frac{1}{u^2} = \frac{\beta_q(w,u)}{q(u)} u.$$

Med sats 3 så kan rejektionen av w skrivas

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_u^\perp(w) &= w - (w \llcorner u)\, u^{-1} = (wu - w \llcorner u)\, u^{-1} \\ &= ((w \llcorner u + w \wedge u) - w \llcorner u)\, u^{-1} \\ &= (w \wedge u)\, u^{-1}.\end{aligned}$$

Om vi nu skriver w som summan av projektionen på- och rejektionen från u

$$w = \mathcal{P}_u(w) + \mathcal{P}_u^\perp(w) \tag{3.14}$$

så kan w speglas mot linjen $\operatorname{span}(u)$ genom att byta tecken på rejektionen. Med Ekvation (2.9) kan en sådan reflektion uttryckas på en mycket smidig form:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_u(w) - \mathcal{P}_u^\perp(w) &= (w \llcorner u)u^{-1} - (w \wedge u)u^{-1} \\ &= (w \llcorner u - w \wedge u)u^{-1} \\ &= (u \llcorner w + u \wedge w)u^{-1} \\ &= uwu^{-1}.\end{aligned}$$

Om vi nu sätter in Ekvation (3.14) igen

$$\mathcal{P}_u(w) - \mathcal{P}_u^\perp(w) = u\mathcal{P}_u(w)u^{-1} + u\mathcal{P}_u^\perp(w)u^{-1}$$

så ser vi att $\mathcal{P}_u(w)$ kommuterar med u och $\mathcal{P}_u^\perp(w)$ antikommuterar med u. Avbildningen

$$w \mapsto uwu^{-1}$$

bevarar projektionstermen och byter tecken på rejektionstermen medan avbildningen

$$w \mapsto u^\star wu^{-1} = -uwu^{-1}$$

bevarar rejektionstermen och byter tecken på projektionstermen.

Definition 24. Reflektionen av vektorn $w \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ **längs** den inverterbara vektorn $u \in V^\times(\mathbb{R}^{p,m})$ ges av

$$\operatorname{refl}_u(w) := \widetilde{\operatorname{Ad}}_u(w) = u^\star wu^{-1}. \tag{3.15}$$

Detta kan ses som att w speglas mot hyperplanet $\operatorname{span}\left(u^\complement\right)$, som representeras av pseudovektorn $u^\complement = Iu$.

Anmärkning. Anledningen att vi utgår från $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ istället för Ad är att avbildningen som speglar det n-dimensionella vektorrummet V mot en linje har determinant $(-1)^n$, medan en spegling mot ett $(n-1)$-dimensionellt hyperplan alltid har determinant -1. Om n är udda representerar därför Ad_u en rotation, inte en reflektion.

Sats 6 (Cartan–Dieudonné)**.** *Samtliga ortogonala transformationer av ett n-dimensionellt icke-degenererat kvadratiskt rum är sammansättningen av högst n olika reflektioner.*

Ett bevis av denna sats finns i del 6.2 av [9, s. 65–71].

3.5 Vektorderivatan

Vektorderivatan ∇ är en differentialoperator som är definierad för multivektorfält, det vill säga funktioner som associerar en multivektor till varje punkt (vektor) i rummet.

Vektorderviatan kan ses som en generalisering av gradient, rotation och divergens. I del 6.6 kommer den användas för användas för att uttrycka Maxwells ekvationer på en mycket enkel form.

En viktig egenskap är att den är inverterbar. Det innebär att givet ∇F så kan F hittas upp till en konstant. Med randvillkor så kan F bestämmas exakt.

För ett skalärfält f är vektorderivatan ∇f ett vektorfält som alltid är lika med gradienten av f.

För ett vektorfält F är vektorderivatan ∇F summan av ett skalärfält och ett bivektorfält. Skalärfältet är alltid lika med vektorfältets divergens. I $\mathbb{R}^{3,0}$ så är bivektorfältet alltid det ortogonala komplementet till $\mathrm{curl}(F)$. Enligt Helmholtz sats så innehåller $\mathrm{div}(F)$ och $\mathrm{curl}(F)$ tillsammans tillräckligt med information för att rekonstruera F.

3.5.1 Konstruktion

Definition 25. Låt $\mathcal{G}$ vara en geometrisk algebra, $F\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}$ en funktion och $w \in \mathcal{G}^1$ en vektor. Förutsatt att gränsvärdet existerar för alla $u \in \mathcal{G}^1$ så definieras **riktningsderivatan** av F i punkten w, i riktning längs u som

$$\nabla_u[F](w) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon u) - F(w)}{\varepsilon},$$

där ε är en skalär och endast tillåts anta värden i $\mathcal{G}^0$.

Funktionen F kallas för ett **multivektorfält** och sägs vara **kontinuerligt deriverbar** i w om $\nabla_u[F](w)$ existerar och är en kontinuerlig funktion av u i en omgivning till w [6, s. 45].

Som väntat för en derivata så är $\nabla_u[F]$ linjär i F. Men riktningsdervatan är även linjär på ett annat sätt.

Sats 7. *Låt F vara ett multivektorfält som är kontinuerligt deriverbart. Då är riktningsdervatan $\nabla_u[F](w)$ linjär i riktningsvektorn $u \in \mathcal{G}^1$.*

Bevis. För en skalär $c \in \mathcal{G}^0$ har vi

$$\begin{aligned}
\nabla_{cu}[F](w) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon cu) - F(w)}{\varepsilon} = c \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon cu) - F(w)}{c\varepsilon} \\
&= c \lim_{(c\varepsilon) \to 0} \frac{F(w + (c\varepsilon)u) - F(w)}{(c\varepsilon)} = c\nabla_u[F](w).
\end{aligned}$$

Om $u_1, u_2 \in \mathcal{G}^1$ är vektorer gäller

$$\begin{aligned}
\nabla_{u_1+u_2}[F](w) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon(u_1 + u_2)) - F(w)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon u_1 + \varepsilon u_2) - F(w + \varepsilon u_1)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon u_1) - F(w)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F((w + \varepsilon u_1) + \varepsilon u_2) - F(w + \varepsilon u_1)}{\varepsilon} + \nabla_{u_1}[F](w).
\end{aligned}$$

Men eftersom F är kontinuerligt deriverbar kan vi taylorutveckla i punkten $(w + \varepsilon u_1)$ och i riktningen u_2, vilket ger

$$F((w + \varepsilon u_1) + \varepsilon u_2) = F(w + \varepsilon u_1) + \varepsilon \nabla_{u_2}[F](w + \varepsilon u_1) + K\varrho(\varepsilon)$$

där $K \in \mathcal{G}$ är någon konstant multivektor och $\varrho(\varepsilon) \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Detta leder till att

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F((w + \varepsilon u_1) + \varepsilon u_2) - F(w + \varepsilon u_1)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\nabla_{u_2}[F](w + \varepsilon u_1) + K \frac{\varrho(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \\
&= \nabla_{u_2}[F](w).
\end{aligned}$$

Sammantaget gäller alltså

$$\nabla_{c(u_1+u_2)}[F](w) = c\nabla_{u_1}[F](w) + c\nabla_{u_2}[F](w).$$

$\square$

Denna linjäritet medför att riktningsderivatorna bildar ett vektorrum. Givet en bas $\{e_i\}$ till $\mathcal{G}^1$ så utgör differentialoperatorerna

$$\partial_i \colon F \mapsto (w \mapsto \nabla_{e_i}[F](w)) \tag{3.16}$$

en bas för detta rum. Alltså är $\partial_i F = \nabla_{e_i}[F]$.

Definition 26. Givet en bas $\{e_i\}$, med reciproka element $\{e^i\}$, så kallas differentialoperatorn

$$\nabla := e^i\partial_i \colon F \mapsto e^i \left(w \mapsto \nabla_{e_i}[F](w)\right)$$

för **vektorderivatan**. Om F är kontinuerligt deriverbar så är ∇F basoberoende. Endast sådana multivektorfält kommer behandlas i denna rapport.

Riktningsderivatan kan nu skrivas

$$\nabla_u[F](w) = u * \nabla F(w) = (u * e^i)\partial_i F(w).$$

Produktregeln för två multivektorfält F och G blir

$$\nabla(FG) = e^i\partial_i(FG) = e^i\left(\partial_i(F)G + F\partial_i(G)\right) = e^i\partial_i(F)G + e^iF\partial_i(G).$$

Uttrycket blir invecklat eftersom vektorderivatans tre beståndsdelar e^i, ∂_i och F i allmänhet inte kommuterar med varandra. För att få ordning på detta används överpricksnotation:

$$\begin{aligned}\nabla FG &= e^i\partial_i(F)G,\\ \dot{\nabla}F\dot{G} &= e^iF\partial_i(G),\end{aligned}$$

I en term gäller alltså att ∇-symbolen anger positionen för e^i och endast funktionen med prick ovanför deriveras. Om det inte finns några prickar så deriveras endast funktionen direkt till höger om ∇. Produktregeln kan nu skrivas

$$\nabla(FG) = \nabla FG + \dot{\nabla}F\dot{G}.$$

Vektorderivatan kan i flera avseenden behandlas som en multivektor med grad 1. Från (3.16) och Definition 25 följer att

$$\operatorname{grd}(\partial_i F) = \operatorname{grd}(F)$$

Därför gäller

$$(\nabla F)^\star = (e^i)^\star(\partial_i F)^\star = -e^i\partial_i F^\star = -\nabla F^\star \tag{3.17}$$

och

$$(\nabla F)^\sim = (\partial_i F)^\sim(e^i)^\sim = (\partial_i \tilde{F})e^i = \dot{\tilde{F}}\dot{\nabla}$$

För ett k-vektorfält $F \colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^k$, där $k \geq 1$, kan vi använda Sats 2 för att konstruera **inre derivatan**

$$\nabla \bullet F := e^i \bullet (\partial_i F) = \langle \nabla F \rangle_{k-1}$$

och **yttre derivatan**

$$\nabla \wedge F := e^i \wedge (\partial_i F) = \langle \nabla F \rangle_{k+1}$$

så att vi kan skriva

$$\nabla F = \nabla \bullet F + \nabla \wedge F. \tag{3.18}$$

3.5.2 Andra analyskoncept

Vektorderivatan och angränsande koncept går under paraplybegreppet 'Geometric calculus'. En sammanfattning finns på Wikipedia [10].

Det går att definiera integration över multivektorrummet genom ta fram ett mått utifrån k-bladen. Denna integration agerar invers till vektorderivatan via en generalisering av analysens fundamentalsats [2, s. 183, 188].

Vektorderivatan kan generaliseras till **multivektorderivatan** som tillåter funktioner som är definierade för godtyckliga $x \in \mathcal{G}$. Dessutom kan denna derivering ske längs generaliserade riktningar $y \in \mathcal{G}$ [2, s. 394]. Vektorderivatan är alltså ett specialfall av multivektorderivatan där $x = w \in \mathcal{G}^1$ och $y = u \in \mathcal{G}^1$. Ett annat specialfall är om vi väljer $y = 1$ och $x = c \in \mathcal{G}^0$. Då får vi istället den vanliga (totala) derivatan av $F\colon \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}$, det vill säga

$$\frac{dF(c)}{dc}.$$

Det går också att konstruera en **kovariant derivata** för differentiering i krökta rum. Översiktligt så kan vi betrakta en k-dimensionell differentierbar mångfald M som inbäddad i det n-dimensionella vektorrummet $\mathcal{G}^1$. I varje punkt $p \in M$ på mångfalden definieras ett enhetstangentblad

$$b(p) \in \mathcal{G}^k\colon \qquad b(p)^2 \in \{-1, 1\}$$

som tas fram på ett liknande sätt som egenhastigheten $v(\lambda)$ i del 5.1. Tangentrummet ges då av $\operatorname{span}(b(p))$ och $b(p)$ fungerar som en lokal enhetspseudoskalär enligt Definition 11. Sedan används projektionsoperatorn $\mathcal{P}_{b(p)}$ för att ta fram den kovarianta derivatan [2, s. 202–219].

4 Generaliserade rotationer i rum med $\iota \leq 1$

Definition 27. Det finns fyra kategorier av geometriska algebror som genereras av kvadratiska rum med isotropi-index $\iota \leq 1$. En sådan algebra $\mathcal{G}$ sägs vara

$$\begin{aligned} \textbf{euklidisk} \quad &\text{om} \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,0}), \\ \textbf{anti-euklidisk} \quad &\text{om} \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{0,m}), \\ \textbf{lorentzisk} \quad &\text{om} \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,m}), \\ \textbf{anti-lorentzisk} \quad &\text{om} \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,1}). \end{aligned}$$

Samma terminologi används även för de kvadratiska rummen.

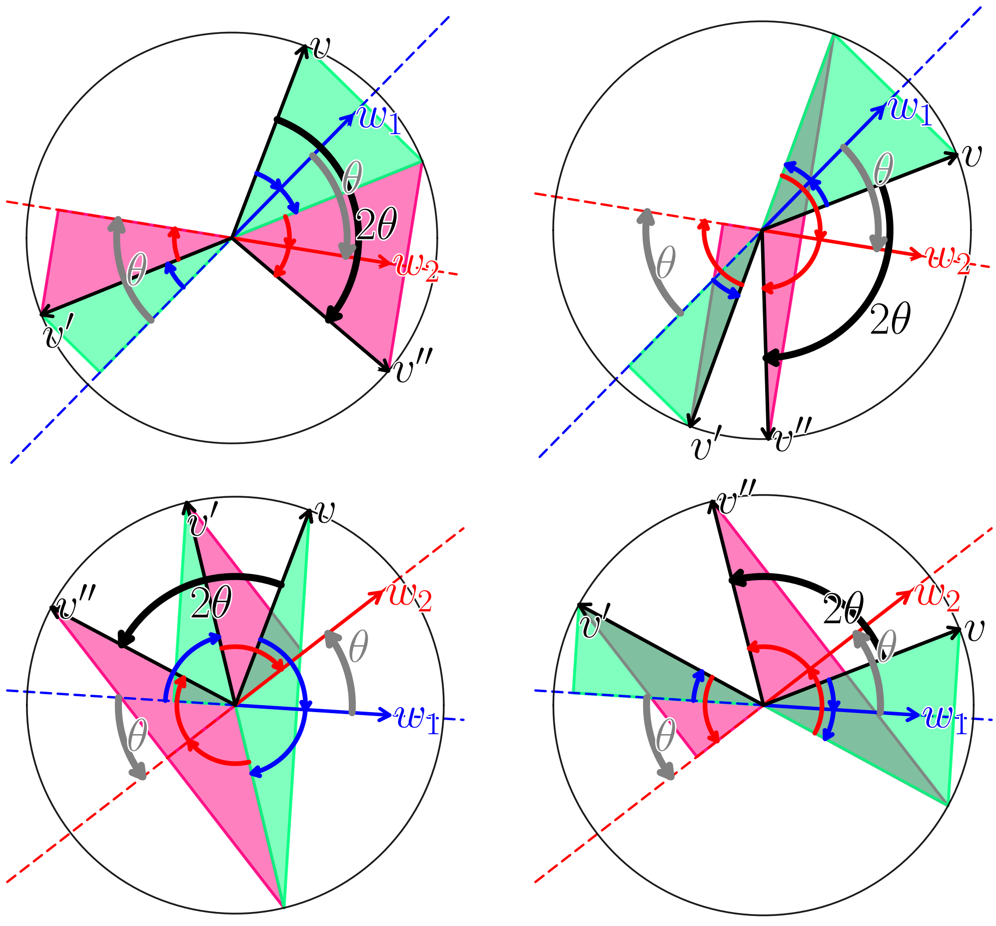
I det euklidiska fallet blir den associerade bilinjära formen β_q den euklidiska metriska tensorn, som kan representeras med en identitetsmatris. Vektorrummet $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{n,0})$ har därför samma geometri som $\mathbb{R}^n$.

4.1 Rotation via dubbel reflektion

I matrisrepresentation har en reflektion determinant -1 och en rotation determinant $1 = (-1)^2$.

Inom vanlig euklidisk geometri finns följande resultat. Låt v, w_1, w_2 vara tre vektorer i samma plan $W \cong \mathbb{R}^2$. Om v först reflekteras längs w_1 och sedan längs w_2 så kommer v att roteras med dubbla vinkeln från w_1 till w_2. Exempel på detta visas i Figur 2.

Denna konstruktion är praktisk för högre dimensioner eftersom vi bara behöver bry oss om den relativa vinkeln mellan w_1 och w_2, samt vilket plan $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de spänner upp. Ett kompakt sätt att lagra denna information med en bivektor.



Figur 2: Vektorn v speglas först längs $\text{span}(w_1)$ och sedan längs $\text{span}(w_2)$. Vinkeln mellan v och v'' blir dubbla vinkeln mellan w_1 och w_2.

Om vi använder reflektionsoperationen från Definition 24 så kan detta generaliseras till geometrisk algebra, förutsatt att $w_1, w_2 \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ är inverterbara. Algebraiskt fås

$$\mathrm{refl}_{w_2}(\mathrm{refl}_{w_1} v) = (w_2^\star w_1^\star)v(w_1^{-1}w_2^{-1}) = \frac{(w_2w_1)v(w_1w_2)}{q(w_1)q(w_2)} = (\hat{w}_2\hat{w}_1)v(\hat{w}_1\hat{w}_2),$$

där

$$\hat{w}_i := \frac{w_1}{\sqrt{|q(w_1)|}}, \qquad q(\hat{w}_i) \in \{-1, 1\}.$$

Vi väljer nu en ortonormal bas $\{e_1, e_2\}$ till planet $W = \mathrm{span}\{w_1, w_2\}$ med $e_1 = \hat{w}_1$ och e_2 som uppfyller $e_1 \bullet e_2 = 0$, $q(e_2) \in \{-1, 1\}$. I denna bas kan vi skriva $\hat{w}_2 = Ae_1 + Be_2$ där $A, B \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{p,m})$. Produkten med $\hat{w}_1$ blir

$$\hat{w}_1\hat{w}_2 = e_1(Ae_1 + Be_2) = q(e_1)A + Be_1e_2. \tag{4.1}$$

och dess kvadrat blir

$$\begin{aligned} q(\hat{w}_2) &= (Ae_1 + Be_2)^2 = A^2e_1^2 + B^2e_2^2 + AB(e_1e_2 + e_2e_1) \\ &= A^2q(e_1) + B^2q(e_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Om basvektorerna har samma signatur $q(e_1) = q(e_2)$ så är planet antingen euklidiskt $W \cong \mathbb{R}^{2,0}$ eller anti-euklidiskt $W \cong \mathbb{R}^{0,2}$. Alltså är q anisotrop i W och $q(\hat{w}_2)$ måste ha samma tecken som $q(e_1)$ och $q(e_2)$. Ekvation (4.2) reduceras därför till

$$A^2 + B^2 = 1$$

som kan parametriseras med $A = q(e_1)\cos(\alpha)$, $B = \sin(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{p,m})$, eftersom $q(e_1)^2 = 1$. Att A väljs på detta sätt garanterar att första termen i (4.1) får rätt tecken. Vi får nu

$$\begin{aligned} \hat{w}_2 &= q(e_1)\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2, \\ \hat{w}_1\hat{w}_2 &= \cos(\alpha) + \sin(\alpha)e_1e_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Om basvektorerna har olika signatur $q(e_1) = -q(e_2)$ så är planet både lorentziskt[4] $W \cong \mathbb{R}^{1,1}$. Nu är q isotrop och Ekvation (4.2) ger två fall:

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = 1: & q(\hat{w}_2) = q(e_1), \\ B^2 - A^2 = 1: & q(\hat{w}_2) = q(e_2) \end{cases}$$

beroende på var i planet $\hat{w}_2$ ligger (se Figur 3). Det undre fallet kan göras om till det övre med bytet $e_1 \leftrightarrow e_2$, vilket vänder basens orientering. Sedan

[4]Det är dessutom även anti-lorentziskt.

kan det övre fallet parametriseras med $A = q(e_1)\cosh(\alpha)$, $B = \sinh(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{p,m})$ vilket ger

$$\begin{aligned}\hat{w}_2 &= q(e_1)\cosh(\alpha)e_1 + \sinh(\alpha)e_2,\\ \hat{w}_1\hat{w}_2 &= \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)e_1e_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Låt $K := q(e_1)q(e_2) \in \{-1, 1\}$ beskriva om basvektorerna har samma eller omvänt tecken. Allmänt gäller då $(e_1e_2)^2 = -q(e_1)q(e_2) = -K$. Betrakta nu serieutvecklingen

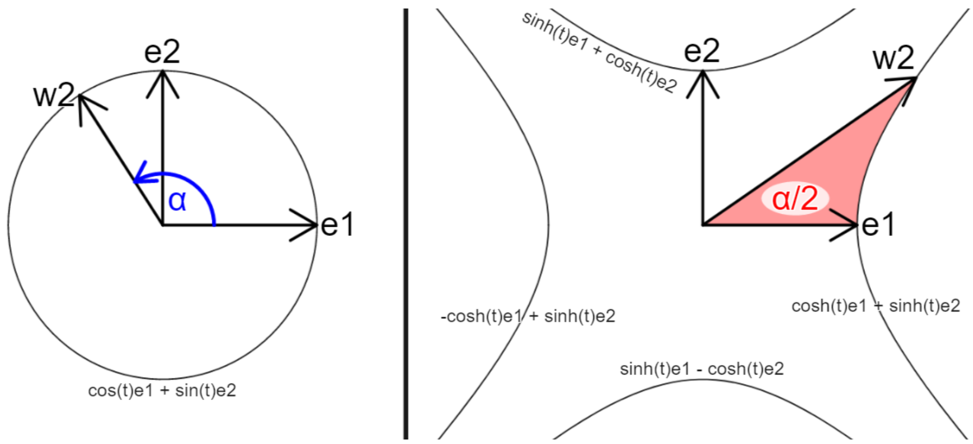
$$\begin{aligned}\exp(\alpha e_1e_2) &= 1 + \alpha e_1e_2 + \frac{(\alpha e_1e_2)^2}{2} + \frac{(\alpha e_1e_2)^3}{6} + \frac{(\alpha e_1e_2)^4}{24} + \frac{(\alpha e_1e_2)^5}{120} + \cdots\\ &= 1 + \alpha e_1e_2 - \frac{K\alpha^2}{2} - \frac{K\alpha^3}{6}e_1e_2 + \frac{(K)^2\alpha^4}{24} + \frac{(K)^2\alpha^5}{120}e_1e_2 + \cdots\\ &= \left(1 - \frac{K\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} + \cdots\right) + \left(\alpha - \frac{K\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} + \cdots\right)e_1e_2\\ &= \begin{cases}\cos(\alpha) + \ \sin(\alpha)e_1e_2\colon & K = 1,\\ \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)e_1e_2\colon & K = -1.\end{cases}\end{aligned}$$

Oavsett K så kan vi nu identifiera

$$\hat{w}_1\hat{w}_2 = \exp(\alpha e_1e_2)$$

via (4.3) och (4.4).

Den geometriska innebörden av parametern α visas i Figur 3.



Figur 3: Om $K = 1$ (vänster) så motsvarar α vinkeln från $\hat{w}_1$ till $\hat{w}_2$. Om $K = -1$ (höger) så motsvarar $\alpha/2$ den röda arean innesluten av $\hat{w}_1$, $\hat{w}_2$ samt den hyperboliska kurvan. Om $\hat{w}_2$ skulle ligga på den övre eller nedre kurvdelen så behövs ett basbyte $e_1 \leftrightarrow e_2$. I fallet som visas är $e_1 = \hat{w}_1$. Men om $q(e_1) = -1$ så är $e_1 = -\hat{w}_1$.

Om någon av w_1 och w_2 inte är inverterbara så blir reflektionerna odefinierade. Men det är ändå värt att titta på hur exponentialen av ett icke-inverterbart 2-blad beter sig. För $b \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^{p,m})$ med $b^2 = 0$ gäller

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha b)^k}{k!} = 1 + \alpha b + b^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} b^{k-2} \\
&= 1 + \alpha b.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sats 8. *Exponentialen av ett 2-blad $b \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^{p,m})$ är alltid en rotor.*

Bevis. Vi behöver visa att $\exp(b)$ är en versor samt att dess reversion är dess invers. Då b är ett blad kan den skrivas som produkten av ortogonala vektorer.

Antag först att $b^2 \neq 0$. Vi kan då välja en ortonormal bas $\{e_1, e_2\}$ sådan att $b = \theta e_1 e_2$, $\theta \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{p,m})$. Med notationen

$$\cos_+ = \cos, \quad \cos_- = \cosh, \qquad \sin_+ = \sin, \quad \sin_- = \sinh$$

och $q(e_1)q(e_2) = \pm 1$ så kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\exp(b) &= \cos_\pm(\theta) + \sin_\pm(\theta) e_1 e_2 \\
&= e_1 \left(q(e_1) \cos_\pm(\theta) e_1 + \sin_\pm(\theta) e_2 \right) \in \Gamma(\mathbb{R}^{p,m}).
\end{aligned}$$

Reversionen ges av

$$\exp(b)^\sim = \cos_\pm(\theta) + \sin_\pm(\theta) e_2 e_1$$

vilket medför

$$\begin{aligned}
\exp(b)\exp(b)^\sim &= (\cos_\pm(\theta) + \sin_\pm(\theta) e_1 e_2)(\cos_\pm(\theta) + \sin_\pm(\theta) e_2 e_1) \\
&= \cos_\pm^2(\theta) + \cos_\pm(\theta)\sin_\pm(\theta)(e_1 e_2 + e_2 e_1) + \sin_\pm^2(\theta) e_1 e_2 e_2 e_1 \\
&= \cos_\pm^2(\theta) + \sin_\pm^2(\theta) q(e_1) q(e_2) \\
&= \cos_\pm^2(\theta) \pm \sin_\pm^2(\theta) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Om $b^2 = 0$ så gäller istället

$$\exp(b) = 1 + b, \qquad \exp(b)^\sim = 1 - b$$

och

$$\exp(b)\exp(b)^\sim = (1 - b)(1 + b) = 1 - b + b - b^2 = 1.$$

Enligt (3.12) så är $\exp(b)$ en versor om $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ är sluten under $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\exp(b)}$. För en godtycklig vektor $v \in \mathcal{G}^1$ så ger (2.11) och Sats 2

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\exp(b)}(v) &= (1+b)^\star v(1+b)^{-1} = (1+b)v(1-b) = v + bv - vb - b^2 \\ &= v + 2b \bullet v = v + \langle 2bv \rangle_1 \in \mathcal{G}^1.\end{aligned}$$

Alltså är $\exp(b) \in \Gamma(\mathbb{R}^{p,m})$. □

Satsen gäller även för allmänna bivektorer så

$$\exp\left(\mathcal{G}^2(\mathbb{R}^{p,m})\right) \subseteq \mathrm{Spin}^+(p,m).$$

Men detta är svårare att visa eftersom bivektorer som inte är blad alltid består av fler än en term. Identiteten

$$\exp(b_1 + b_2) = \exp(b_1)\exp(b_2)$$

gäller bara om b_1 och b_2 kommuterar. Ett bevis för den allmänna satsen ges i [9, s. 76].

Definition 28. Den **generaliserade rotationen** av en vektor $v \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ längs bivektorn $B \in \mathcal{G}^2(\mathbb{R}^{p,m})$ ges av

$$\mathrm{rot}_B(v) := \exp(-B)v\exp(B). \tag{4.6}$$

Om B skrivs på formen $B = \frac{\theta}{2}\hat{w}_1 \wedge \hat{w}_2$, där $q(\hat{w}_1) = q(\hat{w}_2) = 1$ så är θ vinkeln som v roteras med, i riktning från $\hat{w}_1$ till $\hat{w}_2$. I det anti-euklidiska fallet är rotationsriktningen omvänd.

Med denna definition gäller

$$\mathrm{rot}_B = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{\exp(-B)} = \mathrm{Ad}_{\exp(-B)}.$$

I en geometrisk algebra med $\iota \leq 1$ kan varje rotor skrivas som (±)exponentialen av en bivektor [8, s. 150], [9, s. 77]. Alltså gäller

$$\mathrm{Spin}^+(p,m) = \pm\exp(\mathcal{G}^2(\mathbb{R}^{p,m})) \qquad \text{om} \qquad \min(p,m) \leq 1. \tag{4.7}$$

4.2 Exempel

Exempel 9. Vi väljer rumsalgebran $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$. Att rotera rummet med vinkeln θ i planet $\mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ i riktning från e_1 till e_2 representeras av bivektorn

$$B = \frac{\theta}{2}e_1 \wedge e_2 = \frac{\theta}{2}e_1e_2.$$

Då q är positiv definit i denna algebra så gäller $(e_1e_2)^2 = -1$. Vi kan därför skriva om rotorn $R = \exp(B)$ och dess invers i termer av trigonometriska funktioner med Eulers identitet

$$\begin{aligned} R &= \exp\left(+\frac{\theta}{2}e_1e_2\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ R^{-1} &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}e_1e_2\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

En godtycklig vektor $v = ae_1 + be_2 + ce_3$ kommer skickas till

$$\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)(ae_1 + be_2 + ce_3)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Då e_3 kommuterar med alla termer i R så kommer ce_3 skickas till

$$R^{-1}ce_3R = ce_3RR^{-1} = ce_3.$$

De andra komponenterna kommuterar inte med e_1e_2. Termen be_2 skickas till

$$\begin{aligned} R^{-1}be_2R &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)v_2e_2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= v_2\left(e_2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e_1e_2^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_1e_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= v_2\left(e_2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - e_1^2e_2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &\quad + v_2\left(e_2e_1e_2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - e_1\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= v_2\left(e_2\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - 2e_1\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= v_2(-\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2). \end{aligned}$$

Motsvarande beräkning för ae_1 ger

$$R^{-1}ae_1R = v_1(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2).$$

Alltså får vi en helt vanlig **rumslig rotation** då $e_1^2 = e_2^2 = 1$. Allmänt så kommer komposanter som är ortogonala mot rotationsplanet alltid kommutera med R och R^{-1}; därmed påverkas de inte av rotationen. Det är detta som gör att rotorformalismen enkel att generalisera till högre dimensioner. Rotorn R bryr sig bara om vektorernas projektion på dess plan och struntar i hur stort resten av vektorrumet är.

Exempel 10. Vi väljer $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,1})$. Denna algebra kallas **Lorentzplanet**. Vektorrummet spänns upp av $\{e_0, e_1\}$, där $q(e_0) = 1$, $q(e_1) = -1$. En vektor $H \in \mathcal{G}^1$ kan ses som en händelse

$$h = te_0 + xe_1$$

i en 2-dimensionell rumtid. För enkelhetens skull använder vi naturliga enheter så att ljusets hastighet $c = 1$. Varje bas E representerar referensram så t och x är händelsens tidpunkt respektive position då $h = \{e_0, e_1\}$.

En rotation av vektorrumet längs bivektorn $B = \frac{\alpha}{2}e_0e_1$ skickar händelsen $h = te_0 + xe_1$ till

$$\begin{aligned}
&\left(\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - e_0e_1 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)(te_0 + xe_1)\left(\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + e_0e_1 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\\
&= t\left(\cosh(\alpha)e_0 + \sinh(\alpha)e_1\right) + x\left(\cosh(\alpha)e_1 + \sinh(\alpha)e_0\right)\\
&= \left(t\cosh(\alpha) + x\sinh(\alpha)\right)e_0 + \left(t\sinh(\alpha) + x\cosh(\alpha)\right)e_1\\
&= \begin{bmatrix}\cosh(\alpha) & \sinh(\alpha)\\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ x\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Detta är en **Lorentzboost** med gammafaktor $\gamma = \cosh(\alpha)$ och **rapiditet** α. Hastigheten som boostas till har magnitud $\tanh(\alpha)$ och dess riktning ges av bivektorn e_1e_0. En del av förklaringen till denna identifiering är att e_1e_0 är invariant under alla boosts i planet $\operatorname{span}(e_0e_1)$, medan e_1 byter riktning.

Allmänna Lorentztransformationer får även innehålla rumsliga rotationer. För detta krävs minst en till rumslig dimension. En rumslig rotations riktning identifieras också med en bivektor som spänner upp rotationsplanet. Mer om detta i del 5.3.

Exempel 11. Om dimensionen är större än 3 så finns det bivektorer som inte är blad. Till exempel $B = e_1e_2 + e_3e_4$. Dessa kan representera samtidig rotation i två plan som är ortogonala mot varandra. Ett verkligt exempel på sådan rörelse är en raket som accelererar framåt och samtidigt snurrar med konstant vinkelhastighet kring sin axel.

4.3 Problemet med rum där $\iota \geq 2$

Sats 6 (Cartan–Dieudonné) gäller bara i icke-degenererade rum. Låt $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{p,m})$ vara en geometrisk algebra med bas

$$\{e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_m\}$$

där $e_i^2 = 1$ och $f_i^2 = -1$. Vi kan nu konstruera ι stycken vektorer

$$v_j = e_j + f_j \qquad j \in \{1, \ldots, \min(p, m)\}$$

som är linjärt oberoende och ortogonala mot varandra. Men då

$$v_j^2 = e_j^2 + f_j e_j + e_j f_j + f_j^2 = 1 - 1 = 0$$

så spänner de upp ett ι-dimensionellt delrum av $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{p,m})$ som är fullständigt degenererat. Om $\iota \geq 2$ så finns det alltså plan där Cartan–Dieudonné inte gäller.

5 Rumtidsalgebran (STA)

Minkowskis rumtid kan modelleras med rumtidsalgebran $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3})$, som förkortas till STA efter engelskans 'spacetime algebra'. STA är Cliffordalgebran genererad av $\mathbb{R}^4$ med den kvadratiska formen

$$q \colon x \mapsto \eta(x, x),$$

där η är Minkowskimetriken[5] med signatur $(1, 3, 0)$. Rumtidsalgebran är alltså en är lorentzisk geometrisk algebra.

Enligt konvention används bokstaven γ till konstanta ortonormala basvektorer. Grekiska index (t.ex. μ,ν) används för alla fyra dimensioner medan latinska index (t.ex. i, j) används för de tre rumsliga dimensionerna. Om inget annat anges så finns det ett implicit $(\forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\})$ till varje μ och ett implicit $(\forall i \in \{1, 2, 3\})$ till varje i.

En ortonormal bas till vektorrummet $\mathcal{G}^1$ skrivs därmed

$$\{\gamma_\mu\} = \{\gamma_0\} \cup \{\gamma_i\} = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$$

och uppfyller

$$\gamma_\mu * \gamma_\nu = \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu}{2} = \eta(\gamma_\mu, \gamma_\nu) = \begin{cases} 1\colon & \mu = \nu = 0 \\ -1\colon & \mu = \nu \in \{1, 2, 3\} \\ 0\colon & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{5.1}$$

på grund av (2.8) och (2.10). Den reciproka basen till $\{\gamma_\mu\}$ ges av

$$\gamma^0 = \gamma_0, \qquad \gamma^i = -\gamma_i.$$

Detta gäller i naturliga enheter ($c := 1$), som vi kommer utgå från. I SI-enheter måste ljushastigheten $c = 299\ 792\ 458$ m/s tas hänsyn till, vilket ger $\eta(\gamma_0, \gamma_0) = c^2$ och $\gamma^0 = \gamma_0 / c$.

Enhetspseudoskalären i STA är $I = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. Då $\operatorname{grd}(I) = 4$ gäller $\tilde{I} = I$ och (3.4) ger

$$I^{-1} = (-1)^{\frac{4(4+1)}{2} + 3} I = -I.$$

[5] Minkowskimetriken är en metrisk tensor, inte en metrik.

Definition 29. Ett blad $b \in \mathcal{B}^k$ där $k \in 1, 2$ kallas

$$\begin{array}{ccc} \textbf{tidlik} & \text{om} & b^2 > 0, \\ \textbf{rumslik} & \text{om} & b^2 < 0, \\ \textbf{ljuslik} & \text{om} & b^2 = 0. \end{array}$$

I en ortogonal bas $\{\gamma_\mu\}$ så är γ_0 tidlik och anger tidens riktning. Enhetsvektorerna γ_i är rumslika och spänner upp 3D-rummet.

5.1 Världslinjer

En allmän vektor $x \in \mathcal{G}^1$ kan skrivas

$$x = x^\mu \gamma_\mu,$$

där $x^\mu = x * \gamma^\mu$ enligt (3.8). Om x representerar en punkt i rumtiden så kallas den för **händelse**.

I euklidiska rum $\mathbb{R}^n$ kan den inre produkten av en vektor $\vec{x} = x^i e_i$ med sig själv identifieras med kvadraten av vektorns längd

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = (x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 = |\vec{x}|^2$$

via Pythagoras sats.

I STA ges det motsvarande 'kvadrerade avståndet' från en händelse x till origo av

$$\begin{aligned} x \bullet x = x^\mu \gamma_\mu \bullet x^\nu \gamma_\nu = x^\mu x^\nu \eta(\gamma_\mu, \gamma_\nu) \\ (x)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \end{aligned}$$

på grund av (5.1).

Definition 30. Rumtidsintervallet Δs mellan två händelser $x, y \in \mathcal{G}^1$ i rumtiden ges av

$$(\Delta s)^2 = (x - y)^2 = \eta(x - y, x - y).$$

Om avståndsvektorn $(x - y)$ är ljuslik så är $\Delta s = 0$. Om den är tidlik så är intervallet reellt: $\Delta s \in \mathcal{G}^0 \cong \mathbb{R}$. Om den är rumslik så är intervallet imaginärt: $\Delta s \in \mathcal{G}^4 \cong i\mathbb{R}$.

För den som vill hålla sig till reella storheter så går det att bara titta på det **kvadrerade intervallet** $(\Delta s)^2$, som har tecken enligt Definition 29.

En kurva genom rumtiden kan skrivas som en (differentierbar) funktion

$$\begin{aligned} x\colon \mathcal{G}^0 &\to \mathcal{G}^1, \\ \lambda &\mapsto x^\mu(\lambda)\gamma_\mu \end{aligned}$$

där λ är en kurvparameter.

Ett objekts **världslinje** är en sådan kurva som beskriver dess rörelse genom rumtiden. Tangenten till en världslinje ges av

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\gamma_\mu \in \mathcal{G}^1.$$

som alltid är tidlik för massiva objekt och ljuslik för masslösa objekt. En kurva med rumslik tangent kan inte vara en världslinje eftersom ett objekt som följer en sådan kurva skulle färdas snabbare än ljusets hastighet.

Rumtidsintervallet från $\lambda = \lambda_1$ till $\lambda = \lambda_2$ längs en världslinje fås med (linje)integralen

$$\Delta s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \bullet \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}} d\lambda. \tag{5.2}$$

Rumtidsintervallet Δs är alltid noll längs en världslinje med ljuslik tangent och reell för massiva partiklars världslinjer.

Definition 31. För ett massivt objekt vars rörelse genom rumtiden beskrivs av $x = x^\mu\gamma_\mu$ kan vi definiera **egenhastigheten** v och **egentiden** τ genom

$$v = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\gamma_\mu : \quad v^2 = 1.$$

Egenhastigheten v är alltså världslinjens enhetstangent och egentiden τ är den kurvparameter som ser till att v hålls normerad.

Ett objekt som i en given bas $\{\gamma_\mu\}$ är stationärt i rumsliga origo har världslinjen

$$x(\tau) = \tau\gamma_0$$

och egenhastigheten

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \gamma_0.$$

De rumsliga komponenterna v^i är i detta fall noll. I allmänhet beskriver de objektets hastighet relativt referensramen (basen) $\{\gamma_\mu\}$.

Vi kan identifiera tidriktningen i en referensram som följer med ett rörligt objekt med objektets egenhastighet v. Tidkoordinaten i en sådan medföljande referensram ges av världslinjens egentid τ. Då ett objekt aldrig förflyttar sig i sin egen referensram så fås

$$\Delta\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau'$$

via (5.2). Mer om detta i del 6.1.

5.2 Jämna delalgebran och relativa vektorer

För geometriska algebror är

$$\mathcal{G}^+(\mathbb{R}^{p,m}) \cong \mathcal{G}(\mathbb{R}^{m,p-1})$$

en algebraisomorfi [9, s. 55]. Det betyder att den jämna delalgebran till STA är rumsalgebran $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$.

En bas till $\mathcal{G}^+(\mathbb{R}^{1,3})$ kan skrivas

$$\{1\} \cup \{\gamma_0\gamma_i\} \cup \{\gamma_i\gamma_j\}_{i<j} \cup \{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$$

och en bas till $\mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$ kan skrivas

$$\{1\} \cup \{\boldsymbol{\sigma}_i\} \cup \{\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j\}_{i<j} \cup \{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3\}$$

där $\boldsymbol{\sigma}_i^2 = 1$.

Vi kan identifiera[6] $\boldsymbol{\sigma}_i := \gamma_i\gamma_0$, som tyvärr bryter mot orienteringskonventionen (2.3) som hittills använts. Detta medför att de tidlika bivektorerna i STA blir rumsalgebrans 1-vektorer:

$$\boldsymbol{\sigma}_i^2 = (\gamma_i\gamma_0)^2 = \gamma_i\gamma_0\gamma_i\gamma_0 = -\gamma_i^2\gamma_0^2 = 1$$

och de rumslika bivektorerna i STA blir rumsalgebrans bivektorer:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j)^2 &= \gamma_i\gamma_j\gamma_i\gamma_j = -\gamma_i^2\gamma_j^2 = -1\\ \boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j &= \gamma_i\gamma_0\gamma_j\gamma_0 = -\gamma_i\gamma_j\gamma_0^2 = -\gamma_i\gamma_j\end{aligned}$$

för $i \neq j$, vilket stämmer med (2.14). Anledningen till att vi behöver bryta mot orienteringskonventionen är för att rumsalgebran ska få samma pseudoskalär som STA:

$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = \gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_3\gamma_0^2 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = I.$$

[6]Notationen att basvektorer skrivs med γ och σ kommer från kvantmekaniken. Matrisrepresentationen av $\{\gamma_\mu\}$ är Diracs gamma-matriser och matrisrepresentationen av $\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$ är Paulis spinnmatriser. På grund av detta kallas rumsalgebran ibland för Paulialgebran.

Implikationen av detta är att varje val av tidriktning γ_0 fixerar ett visst koordinatsystem för 3D-rummet. Referensramar med olika egenhastigheter v kommer få olika skalningar i sina koordinatsystem. Detta fenomen kallas längdkontraktion.

Definition 32. Det **relativa rummet** till egenhastigheten (tidriktningen) $\gamma_0 \in \mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{1,3})\colon \gamma_0^2 = 1$ är en geometrisk algebra och skrivs

$$\mathcal{R}(\gamma_0) := \mathcal{G}\left(\operatorname{span}\{\boldsymbol{\sigma}_i\}^{3,0}\right) \cong \mathcal{G}^+(\mathbb{R}^{1,3})$$

där $\boldsymbol{\sigma}_i = \gamma_i\gamma_0$ och $\{\gamma_i\}$ är någon ortonormal bas till $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{1,3})/\operatorname{span}\{\gamma_0\}$. Dess element med grad 1 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^1(\gamma_0)$ kallas **relativa vektorer** och skrivs med fetstilta bokstäver.

Generellt så beskriver multivektorer i $\mathcal{R}(\gamma_0)$ direkt mätbara observatörsberoende storheter som längder, elektriska fält och tidsintervallet mellan två händelser.

Med en vald tidriktning γ_0 kan en händelse x i STA skrivas

$$x = t\gamma_0 + x^i\gamma_i$$

där tidskoordinaten ges av $t = x \bullet \gamma_0$ och rumskoordinaterna ges av $x^i = x \bullet \gamma^i$ enligt (3.8). Den rumsliga komposanten kan skrivas om till

$$x^i\gamma_i = x - t\gamma_0 = (x\gamma_0 - t)\gamma_0 = (x \bullet \gamma_0 + x \wedge \gamma_0 - x \bullet \gamma_0)\gamma_0 = (x \wedge \gamma_0)\gamma_0$$

med Sats 3.

Multiplikation med γ_0 från höger ger

$$\begin{aligned} x &= t\gamma_0 + x^i\gamma_i = (x \bullet \gamma_0)\gamma_0 + (x \wedge \gamma_0)\gamma_0 && \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3}), \\ x\gamma_0 &= t(\gamma_0)^2 + x^i\boldsymbol{\sigma}_i = t + \boldsymbol{x} && \in \mathcal{R}(\gamma_0). \end{aligned}$$

Alltså associeras varje händelse x till en γ_0-beroende skalär tidskoordinat

$$x \mapsto t := x \bullet \gamma_0 \quad \in \mathcal{R}^0(\gamma_0)$$

och en relativ positionsvektor

$$x \mapsto \boldsymbol{x} := x \wedge \gamma_0 \quad \in \mathcal{R}^1(\gamma_0).$$

Tidskoordinaten t och den relativa vektorn $\boldsymbol{x}$ anger när och var olika händelser sker enligt en observatör med egenhastighet γ_0. Vänstermultiplikation ger istället

$$\gamma_0 x = t - \boldsymbol{x} \qquad \in \mathcal{R}(\gamma_0).$$

Givet en tidlik enhetsvektor $v \in \mathcal{G}^1 : v^2 = 1$ så kan en multivektor $x \in \mathcal{G}^+$ kan skrivas som en relativ multivektor via Sats 3 genom

$$x = xvv = (x \lrcorner v + x \wedge v)v = (x \lrcorner v)v + (x \wedge v)v \qquad \in \mathcal{R}(v)$$

Detta kallas **implicit rumtidssplittning** relativt v. En udda multivektor $x \in \mathcal{G}^-$ kan skickas till en relativ multivektor genom höger eller vänstermultiplikation med v. Detta kallas **explicit rumtidssplittning** relativt v.

En användbar bas för $\mathcal{R}(\gamma_0)$ är

$$\left\{\begin{matrix} 1, & & \\ \boldsymbol{\sigma}_1, & \boldsymbol{\sigma}_2, & \boldsymbol{\sigma}_3, \\ \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3, & \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1, & \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2, \\ I & & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1, & & \\ \boldsymbol{\sigma}_1, & \boldsymbol{\sigma}_2, & \boldsymbol{\sigma}_3, \\ I\boldsymbol{\sigma}_1, & I\boldsymbol{\sigma}_2, & I\boldsymbol{\sigma}_3, \\ I & & \end{matrix}\right\}.$$

Den motsvarar de jämna bladen i följande bas till STA:

$$\left\{\begin{matrix} 1, & & & & & \\ \gamma_0, & \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 & & \\ -\gamma_0\gamma_1, & -\gamma_0\gamma_2, & -\gamma_0\gamma_3, & -\gamma_2\gamma_3, & +\gamma_1\gamma_3, & -\gamma_1\gamma_2, \\ -\gamma_1\gamma_2\gamma_3, & -\gamma_0\gamma_2\gamma_3, & +\gamma_0\gamma_1\gamma_3, & -\gamma_0\gamma_1\gamma_2, & & \\ \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 & & & & & \end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{matrix} 1, & & & & & \\ \gamma_0, & \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 & & \\ \boldsymbol{\sigma}_1, & \boldsymbol{\sigma}_2, & \boldsymbol{\sigma}_3, & I\boldsymbol{\sigma}_1, & I\boldsymbol{\sigma}_2, & I\boldsymbol{\sigma}_3, \\ I\gamma_0, & I\gamma_1, & I\gamma_2, & I\gamma_3, & & \\ I & & & & & \end{matrix}\right\}.$$

Utifrån detta kan en allmän multivektor $X \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3})$ skrivas på formen

$$X = a + y + \boldsymbol{u} + I\boldsymbol{w} + Iz + Ib$$

där $a, b \in \mathcal{G}^0$, $y, z \in \mathcal{G}^1$ och $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{R}^1$.

Baselementen $\{\gamma_\mu\}$, $\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$ uppfyller

$$\gamma_\mu \boldsymbol{\sigma}_i = \begin{cases} -\boldsymbol{\sigma}_i\gamma_\mu : & \mu = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_i\gamma_\mu : & \mu \neq i, \mu \neq 0 \\ -\boldsymbol{\sigma}_i\gamma_\mu : & \mu = i \end{cases} \tag{5.3}$$

och

$$I\gamma_\mu = -\gamma_\mu I, \tag{5.4}$$
$$I\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i I. \tag{5.5}$$

Som tidigare nämnts gäller

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\gamma_i\gamma_j & i \neq j \end{cases}.$$

I fallet $i \neq j$ kan vi multiplicera med $1 = \boldsymbol{\sigma}_k^2$. Om vi väljer $i \neq k \neq j$ fås

$$-\gamma_i\gamma_j = -\gamma_i\gamma_j(\gamma_k\gamma_0)(\boldsymbol{\sigma}_k) = \gamma_0\gamma_i\gamma_j\gamma_k\boldsymbol{\sigma}_k = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\sigma}_k$$

så i allmänhet är

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\sigma}_k. \tag{5.6}$$

Den reciproka basen till $\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$ ges av

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{\sigma}_i = \gamma_i\gamma_0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i$$

vilket stämmer överens med (3.7).

Då det relativa rummet till en given tidriktning är en euklidisk geometrisk algebra så skriver vi längden av en relativ vektor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^1(\gamma_0)$ med

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}}.$$

Denna storhet är reell och positiv definit. Men till skillnad från rumtidsintervallet så är den observatörsberoende.

5.3 Rotorgruppen i STA

Rumtidsalgebrans rotorgruppen skrivs $\mathrm{Spin}^+(1,3)$. I denna del ska vi reda ut hur den förhåller sig till Lorentzgruppen $\mathrm{O}(1,3)$.

5.3.1 Kategorisering av bivektorerna

I STA förekommer fyra sorters bivektorer. Alla 2-blad är antingen tidlika, rumslika eller ljuslika. De bivektorer som inte är blad kan kallas **skruvbivektorer**, efter Exempel 11.

Tidlika bivektorer (exempelvis $\gamma_0\gamma_1$) kvadrerar till positiva skalärer. Deras rotorer kan skrivas med hyperboliska funktioner och representerar Lorentzboosts. Rumslika bivektorer (exempelvis $\gamma_1\gamma_2$) kvadrerar till negativa skalärer. Deras rotorer kan skrivas med trigonometriska funktioner och de representerar rumsliga rotationer. Se Exempel 9 och 10.

Ett exempel på en ljuslik bivektor är

$$L = \alpha(\gamma_0 + \gamma_1)\gamma_2 \in \mathcal{G}^2.$$

Då $L^2 = 0$ ges rotorn till L ges av det enkla uttrycket

$$R = \exp(L) = 1 + L = 1 + \alpha(\gamma_0 + \gamma_1)\gamma_2$$

eftersom potensserien terminerar efter andra termen, (4.5). Med lite algebra fås att dess generaliserade rotation har följande verkan:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_L\colon \gamma_0 + \gamma_1 &\mapsto \gamma_0 + \gamma_1 \\
\gamma_0 &\mapsto \gamma_0 + 2\alpha^2(\gamma_0 + \gamma_1) + 2\alpha\gamma_2 \\
\gamma_1 &\mapsto \gamma_1 - 2\alpha^2(\gamma_0 + \gamma_1) - 2\alpha\gamma_2 \\
\gamma_2 &\mapsto \gamma_2 + 2\alpha(\gamma_0 + \gamma_1) \\
\gamma_3 &\mapsto \gamma_3.
\end{aligned}$$

Den fjärde och sista sorten är skruv-bivektorer. Eftersom de inte är blad tillkommer en pseudoskalärterm i kvadraten

$$B^2 = a + bI, \qquad a, b \in \mathcal{G}^0\colon b \neq 0.$$

Men då $I^2 = -1$ kan detta skrivas på polär form

$$B^2 = \rho \exp(I\phi), \qquad \rho, \phi \in \mathcal{G}^0\colon \rho > 0,$$

(se Exempel 4). Vi kan nu normera B till

$$\hat{B} = \frac{\exp(-I\phi/2)}{\sqrt{\rho}} B \tag{5.7}$$

så att

$$\hat{B}^2 = \frac{\exp(-I\phi/2)}{\sqrt{\rho}} B \frac{\exp(-I\phi/2)}{\sqrt{\rho}} B = \frac{\exp(-I\phi/2 - I\phi/2)}{\rho} B^2 = 1$$

eftersom $B \in \mathcal{G}^2$ kommuterar med $\exp(-I\phi/2) \in \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^4$. Följandevis är $\hat{B} \in \mathcal{G}^2$ en tidlik bivektor. Dess ortogonala komplement $I\hat{B}$, som kvadrerar till

$$I\hat{B}I\hat{B} = II\hat{B}\hat{B} = -1,$$

är en rumslik bivektor. Ekvation (5.7) kan inverteras till

$$B = \sqrt{\rho}\exp(I\phi/2)\hat{B} = \alpha\hat{B} + \beta I\hat{B}, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{G}^0. \tag{5.8}$$

Då I alltid kommuterar med jämna multivektorer gäller

$$(\alpha\hat{B})(\beta I\hat{B}) = \alpha\beta I = (\beta I\hat{B})(\alpha\hat{B})$$

vilket medför

$$\exp(B) = \exp(\alpha\hat{B})\exp(\beta I\hat{B}) = \exp(\beta I\hat{B})\exp(\alpha\hat{B}).$$

Slutligen får vi att rot_B alltid kan skrivas som sammansättningen av en rumslig rotation $\mathrm{rot}_{\beta I\hat{B}}$ och en boost $\mathrm{rot}_{\alpha\hat{B}}$, förutsatt att $B^2 \neq 0$. Omskrivningen

$$B = \alpha\hat{B} + \beta I\hat{B}$$

kallas för den **kanoniska dekompositionen** av skruv-bivektorn B.

Exempel 12. Vi vill faktorisera rotorn $R = \exp(B)$, där

$$B = \gamma_0\gamma_1 + \sqrt{2}\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3,$$

genom kanonisk dekomposition. Kvadrering av bivektorn ger

$$B^2 = -2 + 2I$$

och $a = -2$, $b = 2$. Delalgebran $\mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^4$ är isomorf med $\mathbb{C}$ så

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2^{\frac{3}{2}}, \qquad \phi = 3\pi/4.$$

Ekvation (5.8) ger

$$\alpha + \beta I = \sqrt{\rho}\exp(I\phi/2) = 2^{\frac{3}{4}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + I\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

och Ekvation (5.7) ger

$$\hat{B} = \frac{\exp(-I\phi/2)}{\sqrt{\rho}}B = 2^{-\frac{3}{4}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - I\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)B$$

vilket tillsammans medför

$$\begin{aligned}
\alpha\hat{B} &= 2^0\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - I\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)B \\
&= \frac{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - I\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}B = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - I\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}B \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\gamma_0\gamma_1 + \sqrt{2}\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-\gamma_0\gamma_1 - \sqrt{2}\gamma_0\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_0\left(\gamma_1 + \gamma_3\right) + \left(\sqrt{2} - 1\right)\gamma_1\gamma_2 + \left(1 - \sqrt{2}\right)\gamma_2\gamma_3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_0 - \left(\sqrt{2} - 1\right)\gamma_2\right)\left(\gamma_1 + \gamma_3\right)
\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}
\beta I\hat{B} &= 2^0 I\left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - I\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)B \\
&= \frac{I\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - I^2\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2}B = \frac{I\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}B \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-\gamma_0\gamma_1 - \sqrt{2}\gamma_0\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3}{2} + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\gamma_0\gamma_1 + \sqrt{2}\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_3 + \left(\sqrt{2}+1\right)(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_0 - \left(\sqrt{2}+1\right)\gamma_2\right)(\gamma_1 - \gamma_3)\,.
\end{aligned}$$

Vi kan se att $\alpha\hat{B}$ är ett tidlikt blad och $\beta I\hat{B}$ är ett rumslikt blad, med

$$\begin{aligned}
(\alpha\hat{B})^2 &= \sqrt{2}-1 \\
(\beta I\hat{B})^2 &= -(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

och dessutom kommuterar de

$$(\alpha\hat{B})(\beta I\hat{B}) = (\beta I\hat{B})(\alpha\hat{B}) = I.$$

Alltså är

$$R = \exp(\alpha\hat{B})\exp(\beta I\hat{B}) = \exp(\beta I\hat{B})\exp(\alpha\hat{B}).$$

5.3.2 Kategorisering av rotorerna

Då STA är lorentzisk kan alla rotorer skrivas som $\pm$exponentialen av en bivektor, (4.7). Alltså kan de antingen skrivas på formen

$$R = \pm\exp(L) = \pm(1+L)$$

där $L \in \mathcal{G}^2 \colon L^2 = 0$, eller på formen

$$\begin{aligned}
R &= \pm\exp(\alpha\hat{B} + \beta I\hat{B}) = \pm\exp(\alpha\hat{B})\exp(\beta I\hat{B}) \\
&= \pm\left(\cosh(\alpha) + \hat{B}\sinh(\alpha)\right)\left(\cos(\beta) + I\hat{B}\sin(\beta)\right)
\end{aligned}$$

där $\alpha, \beta \in \mathcal{G}^0$ och $\hat{B} \in \mathcal{G}^2 \colon \hat{B}^2 = 1$. Om $\alpha = \beta = 0$ fås identitetsrotorn $\exp(0) = 1$.

Eftersom $\dim V = 4 < 6$ gäller

$$\mathrm{Spin}^+(1,3) = \left\{x \in \mathcal{G}^+\left(\mathbb{R}^{1,3}\right) : x\tilde{x} = 1\right\}$$

enligt (3.13).

5.3.3 Lorentzgruppen

Definition 33. Lorentzgruppen $\mathrm{O}(1,3)$ är gruppen av origo-fixerande isometrier av Minkowskis rumtid, det vill säga $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{1,3})$. Den består av **Lorentztransformationer**, som är linjära avbildningar som bevarar Minkowskimetriken η. Dess verkan kan utvidgas till bladen genom att definiera

$$\begin{aligned} f(\gamma_\mu\gamma_\nu) &:= f(\gamma_\mu)f(\gamma_\nu) \qquad && \forall \gamma_\mu \neq \gamma_\nu \\ f(c) &:= c && \forall c \in \mathcal{G}^0(\mathbb{R}^{1,3}) \end{aligned}$$

för alla $f \in \mathrm{O}(1,3)$. Då alla Lorentztransformationer är linjära kan deras verkan utvidgas linjärt till hela STA. Detta medför att $\mathrm{O}(1,3)$ är en delgrupp till $\mathrm{GL}(\mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3}))$.

Definition 34. En funktion f är en isometri för rumtiden $(\mathcal{G}^1, \eta)$ om

$$\eta(f(u), f(v)) = \eta(u, v)$$

för alla $u, v \in \mathcal{G}^1$.

Från Definition 2 ser vi att

$$\eta(u, v) = \frac{\eta(u+v, u+v) - \eta(u,u) - \eta(v,v)}{2}$$

så det räcker med att titta på fallet $u = v$. En isometri bevarar alltså rumtidsintervallen mellan alla händelser.

Sats 9. *Adjungerad verkan och vriden adjungerad verkan av en versor $x \in \Gamma$ är en isometri för rumtiden $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^{1,3})$.*

Bevis. Låt $x \in \Gamma$ vara en versor. Ekvation (3.12) och (3.10) ger då att $\mathcal{G}^1$ sluten under Ad_x och $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ samt att $x^\star = \pm x$. För $u \in \mathcal{G}^1$ gäller därför

$$\begin{aligned} \eta\left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(u), \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(u)\right) &= \left(x^\star u x^{-1}\right)^2 = \left(\pm x u x^{-1}\right)^2 \\ &= \left(x u x^{-1}\right)^2 = \eta\left(\mathrm{Ad}_x(u), \mathrm{Ad}_x(u)\right) \end{aligned}$$

och

$$\left(xux^{-1}\right)^2 = xux^{-1}xux^{-1} = xu^2x^{-1} = \eta(u,u)xx^{-1} = \eta(u,u).$$

$\square$

Den ortogonala gruppen $\mathrm{O}(n)$ är en Liegrupp, vilket innebär att dess element bildar en differentierbar mångfald. Mångfalden av $\mathrm{O}(n)$ är unionen av två sammanhängande komponenter. Den ena är speciella ortogonala gruppen $\mathrm{SO}(n)$, som representeras av matriser med determinant 1. Den andra är[7] $\text{Ƨ}\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$ och representeras av matriser med determinant -1. Båda dessa är slutna under gruppverkan med rotationsmatriser från $\mathrm{SO}(n)$, men $\text{Ƨ}\mathrm{O}(n)$ är inte en grupp. Multiplikation med reflektionsmatrisen

$$\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{O}(n)$$

avbildar $\mathrm{SO}(n) \to \text{Ƨ}\mathrm{O}(n)$ och $\text{Ƨ}\mathrm{O}(n) \to \mathrm{SO}(n)$. Varje euklidisk rotation kan skrivas som sammansättningen av två reflektioner (Sats 6). Därför kan varje element i $\mathrm{SO}(n)$ kan faktoriseras till ett jämnt antal reflektioner och varje element i $\text{Ƨ}\mathrm{O}(n)$ kan faktoriseras till ett udda antal.

Lorentzgruppen är också en Liegrupp men den består av fyra sammanhängande komponenter. Den komponent som sitter ihop med identitetsavbildningen kallas för den **speciella ortokrona Lorentzgruppen** $\mathrm{SO}^+(1, 3)$.

Precis som för $\mathrm{O}(n)$ så är den **speciella Lorentzgruppen** $\mathrm{SO}(1, 3)$ de element i $\mathrm{O}(1, 3)$ som kan faktoriseras i ett jämnt antal reflektioner. De resterande elementen finns i den **ospeciella komponenten** $\text{Ƨ}\mathrm{O}(1, 3)$. En speciell Lorentztransformation bevarar alltså vektorrummets totala orientering.

Ett sätt att ta reda på om en Lorentztransformation är speciell eller inte är att representera dess verkan på $\mathcal{G}^1$ med en matris $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ och se om $\det(M)$ är 1 eller -1. Men eftersom vi har en hel Cliffordalgebra så finns det ett smidigare sätt att veta om totala orienteringen är bevarad. Nämligen om enhetspseudoskalären byter tecken eller är invariant. Alltså kan vi skriva de formella definitionerna

$$\begin{aligned}
\mathrm{SO}(1, 3) &:= \{f \in \mathrm{O}(1, 3) \colon f(I) = I\}, \\
\text{Ƨ}\mathrm{O}(1, 3) &:= \{f \in \mathrm{O}(1, 3) \colon f(I) = -I\}.
\end{aligned}$$

Eftersom $\cosh(\mathbb{R}) > 0$ så kan en Lorentzboost aldrig byta tecken på en tidlik vektors γ_0-komponent. Det är därför omöjligt för en vektor inuti den framtida ljuskonen att skickas till den dåtida ljuskonen genom generaliserad rotation. Men det går att konstruera avbildningar som vänder ljuskonen upp-ochned på ett sätt som bevarar η. Vi får därför ytterligare en uppdelning av $\mathrm{O}(1, 3)$ i den **ortokrona Lorentzgruppen** $\mathrm{O}^+(1, 3)$ och den **anortokrona komponenten** $\mathrm{O}^-(1, 3) = \mathrm{O}(1, 3) \setminus \mathrm{O}^+(1, 3)$. En anortokron Lorentztransformation skickar alltså framtidsriktade tidlika vektorer till dåtidsriktade tidlika vektorer och vice versa. Mängderna av framtidsriktade respektive dåtidsriktade tidlika vektorer är slutna under ortokrona Lorentztransformationer. En

[7] Denna notation är egenpåhittad och anspelar på att bokstaven S har en rotationsymmetri men ingen spegelsymmetri.

mer formell definition är

$$\mathrm{O}^{\pm}(1,3) := \{f \in \mathrm{O}(1,3)\colon\ \mathrm{sgn}(f(u) * u) = \pm 1 \quad \forall u \in \mathcal{G}^1\colon u^2 > 0\}. \tag{5.9}$$

Uppdelningen i (o)speciella och (an)ortokrona Lorentztransformationer ger de fyra sammanhängande komponenterna $\mathrm{SO}^{\pm}(1,3)$, $\text{Ƨ}\mathrm{O}^{\pm}(1,3)$.

Sats 10. *Avbildningarna*

$$\begin{array}{rlll} (i) & \widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \mathrm{Pin}(1,3) & \to & \mathrm{O}(1,3) \\ (ii) & \widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \mathrm{Spin}(1,3) & \to & \mathrm{SO}(1,3) \\ (iii) & \widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \mathrm{Spin}^{+}(1,3) & \to & \mathrm{SO}^{+}(1,3) \end{array}$$

är surjektiva grupphomomofrier med kärna $\{-1,1\}$.

Bevis. Låt $x \in \mathrm{Pin}(1,3)$ vara en godtycklig enhetsversor. Sats 9 medför att $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ är en isometri för rumtiden. Vi kan göra faktoriseringen $x = u_1 \cdots u_k$ där $u_i^2 \in \{-1,1\}$. För varje $w \in \mathcal{G}^1$ gäller därför

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(w) &= (u_1 \cdots u_k)^{\star} w (u_1 \cdots u_k)^{-1} = u_1^{\star} \cdots u_k^{\star} w u_k^{-1} \cdots u_1^{-1} \\ &= (\widetilde{\mathrm{Ad}}_{u_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_{u_k})(w) = (\mathrm{refl}_{u_1} \circ \cdots \circ \mathrm{refl}_{u_k})(w) \end{aligned}$$

så $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ är en sammansättning av reflektioner. Cartan–Dieudonnés Sats 6 ger därför att avbildning (i) är en homomorfi. Dess kärna är $\{-1,1\}$ eftersom de är de enda enhetsversorer som bevarar hela vektorrummet (för $x \in \Gamma$ är kärnan större). Insättning ger

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\pm 1}(w) = (\pm 1)^{\star} w (\pm 1)^{-1} = (\pm 1)^2 w = w$$

och allmänt gäller

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{-x}(w) = (-u_1 \cdots u_k)^{\star} w (-u_1 \cdots u_k)^{-1} = (-1)^2\, \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(w) = \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(w).$$

Från detta följer att varje Lorentztransformation motsvaras av två enhetsversorer. Detta kallas att att $\mathrm{Pin}(1,3)$ är en **dubbel övertäckning** av $\mathrm{O}(1,3)$.

Avbildning (ii) är också en grupphomomorfi, med samma kärna, eftersom $\mathrm{SO}(1,3)$ och $\mathrm{Spin}(1,3)$ är delgrupper av $\mathrm{O}(1,3)$ respektive $\mathrm{Pin}(1,3)$ som fås genom att begränsa till jämna antal reflektioner.

Det är lite mer invecklat att visa (iii). Låt $v \in \mathcal{G}^1\colon v^2 = 1$ vara en tidlik enhetsvektor och låt $x \in \mathrm{Spin}(1,3)$ vara en jämn enhetsversor. En allmän jämn multivektor och dess reversion kan skrivas

$$\begin{aligned} x &= a + \boldsymbol{u} + I\boldsymbol{w} + Ib \\ \tilde{x} &= a - \boldsymbol{u} - I\boldsymbol{w} + Ib \end{aligned}$$

där $a, b \in \mathcal{G}^0$ och $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{R}^1(v)$. För en enhetsversor ska $x\tilde{x} = \pm 1$ där tecknet beror på om den är en rotor ($x \in \mathrm{Spin}^+$) eller inte. Detta krav ger

$$\begin{aligned}
x\tilde{x} = {} & a^2 - \boldsymbol{u}^2 - I^2\boldsymbol{w}^2 + I^2b^2 + a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} + I\boldsymbol{w} - I\boldsymbol{w} + b(I + I)) \\
& - (\boldsymbol{u}I\boldsymbol{w} + I\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{u}I - I\boldsymbol{u}) + b(I\boldsymbol{w}I - II\boldsymbol{w}) \\
= {} & a^2 - \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 - b^2 + 2Iab - 2I\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}}{2} + Ib(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) - b(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}) \\
= {} & a^2 - \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 - b^2 + 2I(ab - \boldsymbol{u} * \boldsymbol{w}) = \pm 1
\end{aligned}$$

där vi använt (2.10) samt att I kommuterar med $\mathcal{R}^1$. Alltså gäller

$$x\tilde{x} = a^2 - \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 - b^2 = \pm 1, \qquad \boldsymbol{u} * \boldsymbol{w} = ab,$$

för $x \in \mathrm{Spin}(1, 3)$.

En jämn multivektorer är invariant under gradinvolution så $x^\star = x$ och dess invers ges av $x^{-1} = \pm\tilde{x}$. Därför gäller

$$v * \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v)\right) = v * \left(xvx^{-1}\right) = \left\langle vxvx^{-1}\right\rangle_0 = \pm \left\langle v(xv\tilde{x})\right\rangle_0. \tag{5.10}$$

Ekvation (5.3) och (5.4), med $\gamma_0 = v$, ger att v antikommuterar med $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ och I. Produkten i parentesen blir därför

$$\begin{aligned}
xv\tilde{x} = {} & ava - \boldsymbol{u}v\boldsymbol{u} - I\boldsymbol{w}vI\boldsymbol{w} + IbvIb - av\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}va - avI\boldsymbol{w} + I\boldsymbol{w}va \\
& + avIb + Ibva - \boldsymbol{u}vI\boldsymbol{w} - I\boldsymbol{w}v\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}vIb - Ibv\boldsymbol{u} + I\boldsymbol{w}vIb - IbvI\boldsymbol{w} \\
= {} & va^2 + v\boldsymbol{u}^2 - vI^2\boldsymbol{w}^2 - vI^2b^2v + a(-v\boldsymbol{u} - v\boldsymbol{u} - vI\boldsymbol{w} + vI\boldsymbol{w}) \\
& + vab(I - I) + v(I\boldsymbol{u}\boldsymbol{w} - I\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}) + vb\left(-I\boldsymbol{u} + I\boldsymbol{u} + I^2\boldsymbol{w} + I^2\boldsymbol{w}\right) \\
= {} & v\left(a^2 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 + b^2\right) - 2av\boldsymbol{u} + 2vI\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}}{2} - 2bv\boldsymbol{w} \\
= {} & v\left(a^2 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 + b^2 + 2(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{w}) + 2I(\boldsymbol{u} \wedge_{\mathcal{R}} \boldsymbol{w})\right)
\end{aligned}$$

där $\wedge_{\mathcal{R}}$ är den yttre produkten i det relativa rummet $\mathcal{R} \cong \mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$. Insättning i (5.10) ger

$$v * \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v)\right) = \pm \left\langle a^2 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 + b^2 + 2(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{w}) + 2I(\boldsymbol{u} \wedge_{\mathcal{R}} \boldsymbol{w})\right\rangle_0.$$

De första fyra termerna är skalärer och de två efterföljande är bivektorer i STA (vektorer i $\mathcal{R}$). Bladet

$$I(\boldsymbol{u} \wedge_{\mathcal{R}} \boldsymbol{w})$$

är komplementet det ortogonala komplementet till en relativ bivektor så (3.5) medför att den är en relativ 1-vektor och därför har grad 2 i STA. Därmed får vi

$$v * \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v)\right) = \pm\left(a^2 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 + b^2\right) = x\tilde{x}\left(a^2 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 + b^2\right).$$

Varje tidlik vektor kan skrivas $cv\colon c \in \mathcal{G}^0$ där v är en tidlik enhetsvektor. Linjäriteten hos skalärprodukten och $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ ger

$$cv * \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(cv)\right) = c^2 x\tilde{x}\left(a^2 + \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{w}^2 + b^2\right).$$

Slutligen får vi

$$\operatorname{sgn}\left(cv * \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(cv)\right)\right) = \operatorname{sgn}(x\tilde{x})$$

då a, b, c är reella skalärer och den kvadratiska formen i $\mathcal{R} \cong \mathcal{G}(\mathbb{R}^{3,0})$ är positiv definit. Detta matchar definitionen för ortokrona Lorentztransformationer i (5.9). Avbildning (iii) är därför en grupphomomorfi eftersom $\mathrm{SO}^+(1,3)$ är en delgrupp till $\mathrm{SO}(1,3)$ och $\mathrm{Spin}^+(1,3)$ är en delgrupp till $\mathrm{Spin}(1,3)$. Kärnan är fortfarande $\{-1, 1\}$ eftersom $-x \in \mathrm{Spin}^+(1,3)$ om $x \in \mathrm{Spin}^+(1,3)$. $\square$

Rotorverkan flyttar element inom de sammanhängande komponenterna. Låt $v \in \mathcal{G}^1 : v^2 = 1$ vara en godtycklig tidlik enhetsvektor. Vi har

$$v \in \mathrm{Pin}^+, \quad I \in \mathrm{Spin}, \quad Iv \in \mathrm{Pin}.$$

I en ortonormal bas $\{v\} \cup \{\gamma_i\}$ får vi matrisrepresentationerna

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ad}}_v &\sim \mathrm{diag}(-1, \quad 1, \quad 1, \quad 1)\\
\widetilde{\mathrm{Ad}}_I &\sim \mathrm{diag}(-1, -1, -1, -1)\\
\widetilde{\mathrm{Ad}}_{Iv} &\sim \mathrm{diag}(\ \ 1, -1, -1, -1)
\end{aligned}$$

och vi ser att alla tre avbildningar är sina egna inverser. Transformationen $\widetilde{\mathrm{Ad}}_v$ bevarar varken tidriktningens tecken eller basens totala orientering. Transformationen $\widetilde{\mathrm{Ad}}_I$ bevarar den totala orienteringen men inte tidriktningen. Transformationen $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{Iv}$ bevarar tidriktningen men inte den totala orienteringen. Detta sammanfattas i följande kommutativa diagram.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SO}^+(1,3) \arrow[rr, leftrightarrow, "\widetilde{\mathrm{Ad}}_v"] \arrow[dd, leftrightarrow, "\widetilde{\mathrm{Ad}}_I"'] & & \reflectbox{S}\mathrm{O}^+(1,3) \arrow[dd, leftrightarrow, "\widetilde{\mathrm{Ad}}_I"] \\
& \widetilde{\mathrm{Ad}}_{Iv} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{SO}^-(1,3) \arrow[rr, leftrightarrow, "\widetilde{\mathrm{Ad}}_v"] & & \reflectbox{S}\mathrm{O}^-(1,3)
\end{tikzcd} \tag{5.11}$$

Vi kan se att

$$\mathrm{O}(1,3)/\,\mathrm{SO}^+(1,3) = \{\widetilde{\mathrm{Ad}}_1, \widetilde{\mathrm{Ad}}_v, \widetilde{\mathrm{Ad}}_I, \widetilde{\mathrm{Ad}}_{Iv}\} \cong K_4$$

är Kleins fyrgrupp eftersom $\widetilde{\mathrm{Ad}}_1$ är identitetsavbildningen och

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_I(w) &= I^\star w I^{-1} = Iw(-I) = wI^2 = -w\\ (\widetilde{\mathrm{Ad}}_v \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_{Iv})(w) &= v^\star (Iv)^\star w (Iv)^{-1} v^{-1} = (-1)^2 vIvw(Iv)v = -v^2 IwI = -w\\ (\widetilde{\mathrm{Ad}}_{Iv} \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_v)(w) &= (Iv)^\star v^\star w v^{-1} (Iv)^{-1} = (-1)^2 Ivvwv(Iv) = -IwIv^2 = -w\end{aligned}$$

för alla vektorer $w \in \mathcal{G}^1$.

6 Tillämpningar

I denna del kommer rumtidsalgebran $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^{1,3})$ användas för att ta fram några resultat från speciell relativitetsteori och elektromagnetism. Naturliga enheter kommer att användas, så att

$$\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$$

gäller, där ϵ_0, μ_0 och c är permittiviteten, permeabiliteten respektive ljushastigheten i vakuum.

6.1 Rotorkinematik

För att studera ett massivt objekts rörelse genom rumtiden kan vi definiera en **medföljande bas** $\{e_\mu\}$ (engelska: comoving frame) som är en ortonormal bas vars tidriktning är objektets egenhastighet: $e_0 = v$. De rumsliga vektorerna e_i beror också på egentiden τ och roterar med objektet.

Givet en konstant ortonormal bas $\{\gamma_\mu\}$ så medför Sats 10 att det för varje värde på τ finns exakt två rotorer $\pm R$ sådana att $e_\mu = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{\pm R}(\gamma_\mu)$. Om vi väljer tecken finns därför en unik rotorvärd funktion $R\colon \mathcal{G}^0 \to \mathrm{Spin}^+$ som relaterar den medföljande basen till $\{\gamma_\mu\}$ via

$$e_\mu(\tau) = R(\tau)\gamma_\mu \tilde{R}(\tau),$$

längs hela objektets världslinje.

Detta arbete kommer inte hantera rotorkinematik och vektorderivatan samtidigt så vi är fria att använda Newtons pricknotation för derivator med avseende på egentiden τ. Objektets acceleration i sin egen referensram beskrivs av

$$\dot{e}_\mu = \dot{R}\gamma_\mu \tilde{R} + R\gamma_\mu \dot{\tilde{R}}$$

Då R är en rotor gäller $\tilde{R}R = 1$ så

$$0 = \frac{d(R\tilde{R})}{d\tau} = \dot{R}\tilde{R} + R\dot{\tilde{R}}. \tag{6.1}$$

Därför är

$$\dot{\tilde{R}} = -\tilde{R}\dot{R}\tilde{R}$$

vilket medför

$$\dot{e}_\mu = \dot{R}(\tilde{R}R)\gamma_\mu\tilde{R} - R\gamma_\mu(\tilde{R}\dot{R}\tilde{R}) = \dot{R}\tilde{R}e_\mu - e_\mu\dot{R}\tilde{R}.$$

Ekvation (6.1) samt att $\dot{\tilde{R}} = \tilde{\dot{R}}$ ger

$$\dot{R}\tilde{R} = -(R\dot{\tilde{R}}) = -(\tilde{\dot{\tilde{R}}}\tilde{R})^{\sim} = (\dot{R}\tilde{R})^{\sim},$$

vilket via Definition 12 i betyder att $\dot{R}\tilde{R}$ måste vara homogen med grad 2 eller 3. Men $\dot{R}\tilde{R}$ är ett algebraiskt uttryck av rotorer i $\mathrm{Spin}^+ \subseteq \mathcal{G}^+$. Då $\mathcal{G}^+$ är algebraiskt sluten måste därför $\dot{R}\tilde{R}$ ha jämn grad. Alltså är $\dot{R}\tilde{R}$ en bivektor och enligt (2.11) följer

$$\dot{e}_\mu = \dot{R}\tilde{R}e_\mu - e_\mu\dot{R}\tilde{R} = 2(\dot{R}\tilde{R}) \bullet e_\mu.$$

Nu kan vi definiera den **generaliserade rotationshastigheten**

$$\Omega = 2\dot{R}\tilde{R}$$

som är en bivektorvärd funktion av τ. Alltså beskriver Ω både objektets rumsliga rotationshastighet med

$$\dot{e}_i = \Omega \bullet e_i.$$

och dess **egenaccelerationen** (engelska: proper acceleration) med

$$\dot{v} = \Omega \bullet v. \tag{6.2}$$

Egenaccelerationen är ortogonal mot egenhastigheten och är världslinjens krökningsvektor. Detta kan visas med (2.10)

$$0 = \frac{d(vv)}{d\tau} = \dot{v}v + v\dot{v} = 2\dot{v} \bullet v$$

eftersom $v^2 = 1$.

Objektets världslinje kan hittas från $\Omega(\tau)$ genom att lösa ut $R(\tau)$ ur **rotorrörelseekvationen**

$$\dot{R} = \frac{1}{2}\Omega R, \tag{6.3}$$

och integrera egenhastigheten

$$v(\tau) = R(\tau)\gamma_0\tilde{R}(\tau).$$

6.1.1 Inertial rörelse

Ett enkelt fall är $\Omega = 0$. Detta medför att R är konstant och

$$\dot{e}_\mu = 0.$$

Objektet upplever alltså ingen acceleration och

$$e_\mu = R\gamma_\mu \tilde{R}$$

där $R \in \mathrm{Spin}^+$ är en konstant rotor längs hela världslinjen. Alltså är $\{e_\mu\}$ en konstant ortonormal bas och kallas även för en **inertial referensram**.

6.1.2 Hyperbolisk rörelse

I denna del ska vi titta på kinematiken för en massiv partikel som utsätts för konstant acceleration. Vi fixerar en ortogonal bas $\{\gamma_\mu\}$ och inför koordinatsystemet

$$(t,\, x) := t\gamma_0 + x\gamma_1$$

sådant att partikeln är stationär i origo vid $t = 0$. Om vi parametriserar $x = x(t)$ så får vi initialvillkoren

$$x(0) = 0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \tag{6.4}$$

I klassisk mekanik så är koordinattiden t invariant och kan användas som en global klocka. En konstant acceleration a i γ_1-riktningen ger därför differentialekvationen

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a$$

som med initialvillkoren (6.4) ger lösningen

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Partikeln följer därmed den paraboliska kurvan

$$t \mapsto (t,\, at^2/2).$$

Detta är en giltig världslinje för $t < 1/a$ men sedan överstiger dx/dt ljushastigheten. Problemet kommer från att operatorn d/dt inte är Lorentzinvariant.

Ett sätt att få fram en lösning som respekterar Lorentzsymmetri är med rotorkinematik. Låt $\{e_\mu\}$ vara en medföljande bas, vars tidriktning är partikelns egenhastighet: $e_0 = v$. En konstant acceleration a i e_1-riktningen motsvaras av

$$\dot{v}(\tau) = ae_1(\tau) = \Omega(\tau) \bullet v(\tau).$$

Den generaliserade rotationshastigheten Ω ska vara en bivektorvärd funktion så ett naturligt val är

$$\Omega = ae_1 v \tag{6.5}$$

som ger

$$\dot{e}_1 = \Omega \bullet e_1 = av.$$

På grund av initialvillkoren (6.4) definierar vi

$$e_\mu(0) = \gamma_\mu.$$

Om vi nu deriverar Ω

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = a(\dot{e}_1 v + e_1 \dot{v}) = a(avv + e_1 a e_1) = a^2(v^2 + e_1^2) = a^2(1-1) = 0 \tag{6.6}$$

så ser vi att den är konstant för alla τ. Därför gäller

$$\Omega = a\gamma_1\gamma_0.$$

Rotorrörelseekvationen ges nu av

$$\dot{R}(\tau) = \frac{1}{2}\Omega(\tau)R(\tau) = \frac{a\gamma_1\gamma_0}{2}R(\tau)$$

som har lösningen

$$R(\tau) = \exp\left(\frac{a\gamma_1\gamma_0}{2}\tau\right)$$

Egenhastigheten ges därför av

$$\begin{aligned}
v(\tau) &= R(\tau)\gamma_0\tilde{R}(\tau) \\
&= \left(\cosh\left(\frac{a\tau}{2}\right) + \gamma_1\gamma_0\sinh\left(\frac{a\tau}{2}\right)\right)\gamma_0\left(\cosh\left(\frac{a\tau}{2}\right) - \gamma_1\gamma_0\sinh\left(\frac{a\tau}{2}\right)\right) \\
&= \left(\cosh\left(\frac{a\tau}{2}\right) + \gamma_1\gamma_0\sinh\left(\frac{a\tau}{2}\right)\right)\left(\cosh\left(\frac{a\tau}{2}\right) + \gamma_1\gamma_0\sinh\left(\frac{a\tau}{2}\right)\right)\gamma_0 \\
&= \exp\left(a\gamma_1\gamma_0\tau\right)\gamma_0 \\
&= (\cosh(a\tau)\gamma_0 + \sinh(a\tau)\gamma_1)
\end{aligned}$$

vilket är samma beräkning som i Exempel 10. Efter integration får vi världslinjen

$$\tau \mapsto \left(\frac{\sinh(a\tau)}{a}, \frac{\cosh(a\tau)-1}{a}\right). \tag{6.7}$$

För små accelerationer $a \ll 1$ så kan vi göra en linjär approximation

$$\left(\frac{\sinh(a\tau)}{a}, \frac{\cosh(a\tau)-1}{a}\right) \approx \left(\frac{a\tau}{a}, \frac{1+\frac{a^2\tau^2}{2}-1}{a}\right) = \left(\tau, \frac{a\tau^2}{2}\right)$$

och vi återfår det klassiska paraboliska beteendet.

6.2 Tidsdilatation och gamma faktorn

Vi är intresserade av hur egentiden för ett accelererande objekt förhåller sig till egentiden för ett inertialt objekt. Vi kallar det inertiala objektets medföljande referensram $\{\gamma_\mu\}$ och dess egentid t. Eftersom γ_0 är konstant kommer dess världslinje ha formen av en faktisk linje

$$t \mapsto t\gamma_0.$$

Det accelererande objektets medföljande referensram kallas $\{e_\mu\}$, med $e_0 = v$ och dess egentid kallas τ. Dess världslinje ges av kurvan

$$\tau \mapsto x^\mu(\tau)\gamma_\mu = x(\tau).$$

Sats 3 ger

$$v\gamma_0 = v \bullet \gamma_0 + v \wedge \gamma_0.$$

Men då $\dot{x} = v$ och $\dot{\gamma_0} = 0$ så kan vi flytta in rumtidssplittningen inuti derivatan:

$$v\gamma_0 = \dot{x}\gamma_0 = \frac{d(x\gamma_0)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(t + \boldsymbol{x})$$

där $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(\gamma_0)$. Likheten

$$v \bullet \gamma_0 + v \wedge \gamma_0 = \frac{d}{d\tau}(t + \boldsymbol{x})$$

måste gälla separat för skalärtermerna och bivektortermerna så

$$\frac{dt}{d\tau} = v \bullet \gamma_0, \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = v \wedge \gamma_0.$$

Den rumsliga hastigheten $\boldsymbol{v}$ för det accelererande objektet relativt det inertiala objektet ges av t-derivatan av $\boldsymbol{x}$. Den kan alltså skrivas

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{v \wedge \gamma_0}{v \bullet \gamma_0}. \tag{6.8}$$

Vi ser att hastigheten av det inertiala objektet relativt det accelererande ges av $-\boldsymbol{v}$ eftersom $\wedge$ antikommuterar och $\bullet$ kommuterar för vektorer.

Slutligen kan vi skriva

$$\begin{aligned}1 = v^2 = v\gamma_0\gamma_0 v &= (v \bullet \gamma_0 + v \wedge \gamma_0)(v \bullet \gamma_0 - v \wedge \gamma_0)\\ &= (v \bullet \gamma_0)^2(1 + \boldsymbol{v})(1 - \boldsymbol{v}) = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 (1 - \boldsymbol{v}^2)\end{aligned}$$

och ser att det differentiella förhållandet mellan t och τ är γ-faktorn från vanlig speciell relativitetsteori:

$$\frac{dt}{d\tau} = v \bullet \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}} = \gamma(\boldsymbol{v}). \tag{6.9}$$

6.3 Ljusets hastighet i rinnande vatten

Ljusets hastighet i rinnande vatten mättes av Hippolyte Fizeau år 1851. Sambandet som upptäcktes stämde inte överens med den rådande eterteorin. Detta var ett av flera olösta problem som den speciella relativitetsteorin kunde förklara.

Låt $\{\gamma_\mu\}$ vara en inertial referensram som är en medföljande bas till mätutrustningen. Antag att vatten, med brytningsindex $n \approx 1.33$, flödar med konstant hastighet $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}(\gamma_0)$ relativt γ_0. De rumsliga basvektorerna $\{\gamma_i\}$ kan väljas så att vattnet rinner i riktningen $\boldsymbol{\sigma}_1 = \gamma_1\gamma_0$. Vi kan även välja en medföljande bas $\{v\} \cup \{e_i\}$ till vattnet sådan att

$$e_2 = \gamma_2, \qquad e_3 = \gamma_3, \qquad e_1 v = \gamma_1\gamma_0$$

på grund av (6.6). Vi är intresserade av hastigheten $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}(\gamma_0)$ relativt γ_0 för ljus som färdas i samma riktning som vattenflödet.

Låt u vara ljusets tidriktning genom vattnet. Den kommer vara tidlik och inte ljuslik eftersom ljuset bromsas in av vattnets brytningsindex. Med rotorkinematik så kan de tre egenhastigheterna γ_0, v och u relateras via

$$v = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right)\gamma_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right) \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\frac{\beta}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right) v \exp\left(-\frac{\beta}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right) \\ &= \exp\left(\frac{\beta}{2}e_1 v\right) v \exp\left(-\frac{\beta}{2}e_1 v\right) \\ &= \exp\left(\frac{\beta}{2}e_1 v\right) \exp\left(\frac{\beta}{2}e_1 v\right) v \\ &= \exp(\beta e_1 v)v = \cosh(\beta)v + \sinh(\beta)e_1. \end{aligned} \tag{6.11}$$

där $\alpha, \beta > 0$.

Låt $\boldsymbol{u}_v \in \mathcal{R}(v)$ beteckna ljusets hastighet relativt vattnet. I naturliga enheter ges ljushastighetens beroende på brytningsindex av $|\boldsymbol{u}_v| = n^{-1}$. Således fås

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_v &= \frac{u \wedge v}{u \bullet v} = \frac{\langle(\cosh(\beta)v + \sinh(\beta)e_1)v\rangle_2}{\langle(\cosh(\beta)v + \sinh(\beta)e_1)v\rangle_0} = \frac{\sinh(\beta)e_1 v}{\cosh(\beta)} = \tanh(\beta)\boldsymbol{\sigma}_1 \\ n^{-1} &= \tanh(\beta). \end{aligned}$$

På motsvarande vis är vattnets hastighet $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}(\gamma_0)$ relativt mätutrustningen

$$\boldsymbol{v} = \frac{v \wedge \gamma_0}{v \bullet \gamma_0} = \tanh(\alpha)\boldsymbol{\sigma}_1.$$

Insättning av (6.10) i (6.11) ger

$$\begin{aligned}
u &= \exp\left(\frac{\beta}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right)\exp\left(\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right)\gamma_0\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right)\exp\left(-\frac{\beta}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\right)\\
&= \exp\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\gamma_1\gamma_0\right)\gamma_0\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\gamma_1\gamma_0\right)\\
&= \cosh(\alpha+\beta)\gamma_0 + \sinh(\alpha+\beta)\gamma_1
\end{aligned}$$

eftersom $e_1 v = \gamma_1\gamma_0 = \boldsymbol{\sigma}_1$. Ljusets hastighet $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}(\gamma_0)$ relativt mätutrustningen är därför

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{u\wedge\gamma_0}{u\bullet\gamma_0} = \tanh(\alpha+\beta)\boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{\tanh(\alpha)+\tanh(\beta)}{1+\tanh(\alpha)\tanh(\beta)}\boldsymbol{\sigma}_1 \qquad (6.12)\\
|\boldsymbol{u}| &= \frac{|\boldsymbol{v}|+n^{-1}}{1+|\boldsymbol{v}|n^{-1}}.
\end{aligned}$$

För realistiska vattenflöden är $|\boldsymbol{v}| \ll 1 < n$ så binomialapproximationen ger

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u}| &\approx \left(n^{-1}+|\boldsymbol{v}|\right)\left(1-\frac{|\boldsymbol{v}|}{n}\right) = n^{-1}+|\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{v}|\frac{|\boldsymbol{v}|+n^{-1}}{n} \approx n^{-1}+|\boldsymbol{v}|\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\
|\boldsymbol{u}| &\approx |\boldsymbol{u}_v| + |\boldsymbol{v}|\left(1-\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

vilket är sambandet som Fizeau upptäckte.

6.4 Stjärnljusets aberration

För att ta reda på avståndet till närliggande stjärnor så kan man jämföra dess position på himlen med ett halvårs mellanrum. Den vinkelskillnad som uppmäts kommer då bero på förhållandet mellan jordens omloppsradie kring solen och avståndet till stjärnan. Men när detta fenomen studerades närmare visade det sig att vinkeln inte bara berodde på observatörens position, utan även på dess hastighet. Den positionsberoende vinkeländringen för det infallande stjärnsljuset kallas **parallax** och kan förklaras med grundläggande trigonometri. Den hastighetsberoende vinkeländringen kallas (astronomisk) **aberration** och kan förklaras med speciell relativitetsteori.

En stjärna betraktas genom ett teleskop. Antag att stjärnan är inertial och har en medföljande bas $\{\gamma_\mu\}$ som definieras sådan att vektorn

$$l = \gamma_0 + \cos(\theta)\gamma_1 + \sin(\theta)\gamma_2$$

är tangent till kurvan som ljuset följer från stjärnan till teleskopet. Vektorn l är ljuslik eftersom

$$l^2 = \gamma_0^2 + \cos^2(\theta)\gamma_1^2 + \sin^2(\theta)\gamma_2^2 = 1 - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 0$$

Om den relativa hastigheten mellan teleskopet och stjärnan var noll skulle teleskopet ha egenhastighet γ_0 och se vinkeln θ given av

$$\tan(\theta) = \frac{l \bullet \gamma_2}{l \bullet \gamma_1}.$$

Om teleskopet istället skulle röra sig med hastigheten $\boldsymbol{v} = \tanh(\alpha)\boldsymbol{\sigma}_1$ relativt γ_0 så kan dess medföljande bas $\{v\} \cup \{e_i\}$ väljas till

$$\begin{aligned} v &= \cosh(\alpha)\gamma_0 + \sinh(\alpha)\gamma_1 & e_2 &= \gamma_2 \\ e_1 &= \sinh(\alpha)\gamma_0 + \cosh(\alpha)\gamma_1 & e_3 &= \gamma_3 \end{aligned} \tag{6.13}$$

I detta fall skulle den observerade vinkeln θ_v ges av

$$\begin{aligned} \tan(\theta_v) &= \frac{l \bullet e_2}{l \bullet e_1} = \frac{(\gamma_0 + \cos(\theta)\gamma_1 + \sin(\theta)\gamma_2) \bullet \gamma_2}{(\gamma_0 + \cos(\theta)\gamma_1 + \sin(\theta)\gamma_2) \bullet (\sinh(\alpha)\gamma_0 + \cosh(\alpha)\gamma_1)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\sinh(\alpha) + \cos(\theta)\cosh(\alpha)} = \frac{\sin(\theta)}{\cosh(\alpha)(\tanh(\alpha) + \cos(\theta))}. \end{aligned}$$

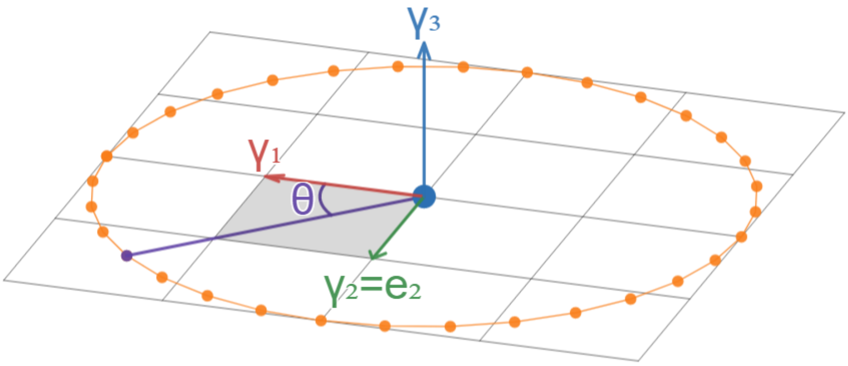
Via den hyperboliska ettan fås

$$\begin{aligned} \tanh(\alpha) &= \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)} = \operatorname{sgn}(\alpha)\frac{\sqrt{\cosh^2(\alpha) - 1}}{\cosh(\alpha)} = \operatorname{sgn}(\alpha)\sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2(\alpha)}} \\ \cosh(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}} = \gamma(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

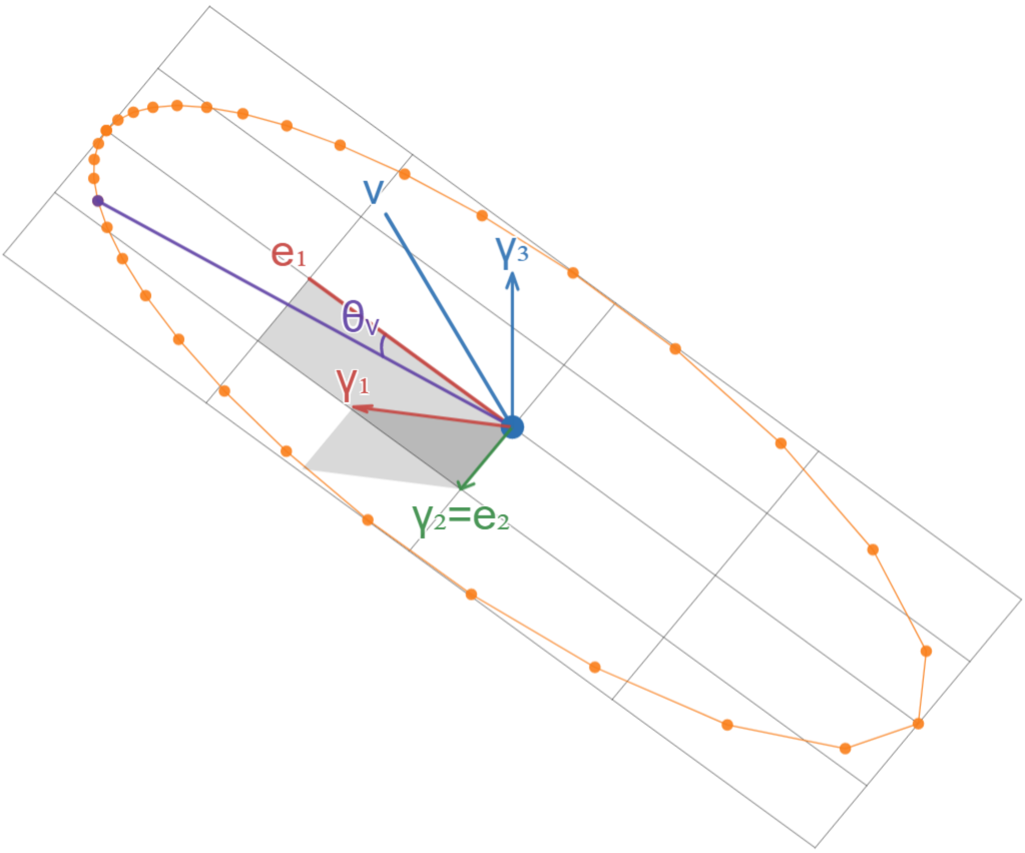
Alltså gäller sambandet

$$\tan(\theta_v) = \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{v})}\frac{\sin(\theta)}{|\boldsymbol{v}| + \cos(\theta)}$$

som ger en bra beskrivning av aberrationen efter att parallax (Figur 5) tagits hänsyn till. Hur riktningen till avlägsna stjärnor påverkas av hastigheten visas i Figur 4.

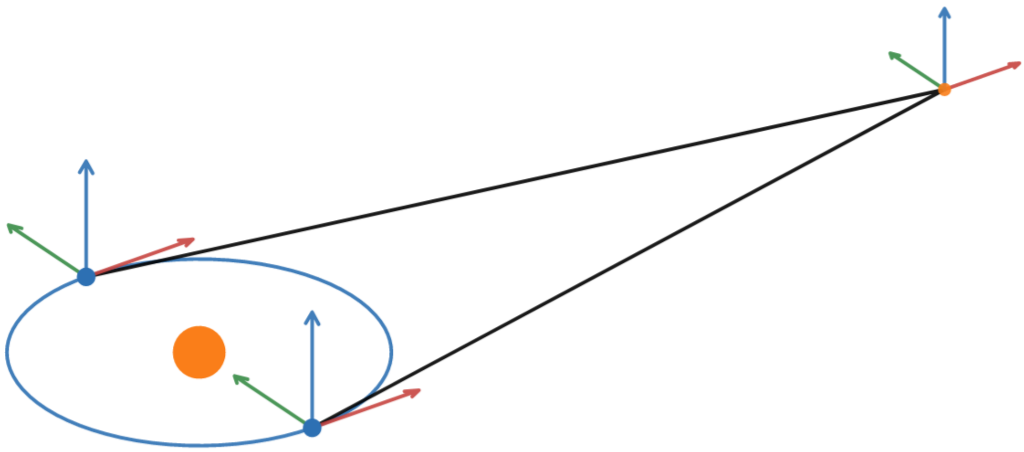


(a) Vinklarna till 32 stycken stjärnor är uniformt fördelade i basen $\{\gamma_\mu\}$.



(b) I basen $\{v\} \cup \{e_i\}$, given i (6.13), är riktningarna förskjutna så att samma stjärnor ser ut vara koncentrerade framåt i teleskopets färdriktning.

Figur 4: Astronomisk aberration. Vinkeln till en stjärna beror på teleskopets hastighet.



Figur 5: Parallax. Vinkeln till en stjärna beror på teleskopets position.

6.5 Rörelsemängd, energi och massa

En massiv partikels **egenrörelsemängd** $p \in \mathcal{G}^1$ definieras som

$$p := mv$$

där $m \in \mathcal{G}^0$ är partikelns **massa** och $v \in \mathcal{G}^1 \colon v^2 = 1$ är dess egenhastighet. Givet en tidriktning γ_0 så splittas p till

$$p\gamma_0 = E + \boldsymbol{p}$$

där

$$E = p \bullet \gamma_0 \in \mathcal{R}^0(\gamma_0)$$

är partikelns **relativistiska energi** och

$$\boldsymbol{p} = p \wedge \gamma_0 \in \mathcal{R}^1(\gamma_0)$$

är dess **rörelsemängd**. Massan är Lorentzinvariant och i en given referensram kan den beräknas med

$$\begin{aligned} p^2 &= p\gamma_0\gamma_0 p = (E + \boldsymbol{p})(E - \boldsymbol{p}) \\ m^2 &= E^2 - \boldsymbol{p}^2. \end{aligned}$$

Via (6.8) och (6.9) så kan $\boldsymbol{p}$ och E kopplas till partikelns relativa hastighet $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}^1(\gamma_0)$ genom

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= mv \wedge \gamma_0 = m\frac{v \wedge \gamma_0}{v \bullet \gamma_0}(v \bullet \gamma_0) = m\boldsymbol{v}\gamma(\boldsymbol{v}), \\ E &= mv \bullet \gamma_0 = m\gamma(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

6.6 Maxwells ekvation

Vi söker en differentialekvation som beskriver de elektromagnetiska fältens klassiska beteende.

Låt $F\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^2$ vara ett bivektorfält, alltså en funktion som tilldelar en bivektor till varje punkt i rumtiden. En observatör med egenhastighet γ_0 kommer mäta detta bivektorfält som summan av ett relativt vektorfält $\boldsymbol{E}$ och ett relativt pseudovektorfält $I\boldsymbol{B}$

$$F = \boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B},$$

där $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{R}^1(\gamma_0)$.

Anledningen till att F väljs på detta sätt är att dess kvadrat då blir

$$\begin{aligned} F^2 &= (\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2 + I(\boldsymbol{E}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{E}) \\ \left\langle F^2 \right\rangle_0 &= \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2 \\ \left\langle F^2 \right\rangle_4 &= 2I(\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

där $\bullet$ är relativa rummets inre produkt men gradprojektionerna görs med avseende på rumtidsalgebrans gradstruktur. Om vi identifierar $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ med de klassiska elektriska och magnetiska fälten så är dessa termer den elektromagnetiska fältstyrketensorns invarianter. Notera dock att skalärtermen är invariant under hela $\mathrm{O}(1,3)$ men att pseudoskalärtermen bara är invariant under $\mathrm{SO}(1,3)$.

Den enklaste inhomogena differentialekvationen som involverar F är

$$\nabla F = J$$

där $J\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$ är något vektorfält. I en bas med tidriktning γ_0 kan J skrivas

$$J = \rho\gamma_0 + J^i\gamma_i$$

och dess explicita rumtidssplittning är

$$\gamma_0 J = \gamma_0(\rho\gamma_0 + J^i\gamma_i) = \rho - \boldsymbol{J}.$$

Vektorderivatan i STA ges av

$$\nabla = \gamma^\mu\partial_\mu = (\gamma^0\partial_t + \gamma^i\partial_i)$$

och kan splittas i observatörsberoende termer via

$$\begin{aligned} \gamma_0\nabla &= \gamma_0(\gamma_0\partial_t - \gamma_i\partial_i) = (\gamma_0)^2\partial_t - \gamma_0\gamma_i\partial_i = \partial_t + \gamma_i\gamma_0\partial_i \\ &= \partial_t + \boldsymbol{\nabla} \end{aligned}$$

där

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\sigma}_i \partial_i = \boldsymbol{\sigma}^i \partial_i$$

kallas **relativa vektorderivatan**. Då $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ är homogengradiga multivektorfält ger (3.18) att vi kan expandera till:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \nabla F &= (\partial_t + \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) = \partial_t(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}) \\ &= \partial_t(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E}) + I(\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

Vidare kan vi använda (5.6) som medför

$$\begin{aligned} I\epsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma}_k = I(\boldsymbol{\sigma}_i \times \boldsymbol{\sigma}_j) &= \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \boldsymbol{\sigma}_j \\ -(\boldsymbol{\sigma}_i \times \boldsymbol{\sigma}_j) &= I(\boldsymbol{\sigma}_i \wedge \boldsymbol{\sigma}_j) \end{aligned} \tag{6.14}$$

där $\times$ är den vanliga kryssprodukten. Därför kan de yttre derivatorna göras om till curl-operatorer

$$\gamma_0 \nabla F = \partial_t(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} + I(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + I\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}).$$

Om den observatörsberoende differentialekvationen $\gamma_0 \nabla F = \gamma_0 J$ delas upp på det relativa rummets graderade delrum fås

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} &= \langle \gamma_0 J \rangle_{\mathbf{0}} = \rho \\ \partial_t \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} &= \langle \gamma_0 J \rangle_{\mathbf{1}} = -\boldsymbol{J} \\ I\partial_t \boldsymbol{B} + I\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= \langle \gamma_0 J \rangle_{\mathbf{2}} = 0 \\ I\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{B} &= \langle \gamma_0 J \rangle_{\mathbf{3}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} = \rho \\ &\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{B} = 0 \\ &\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B} \\ &\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \partial_t \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \end{aligned}\right.$$

vilket är Maxwells ekvationer i naturliga enheter. Det observatörsberoende skalärfältet ρ kallas **laddningstätheten** och det relativa vektorfältet $\boldsymbol{J}$ kallas **relativa strömmen**.

Alltså har rumtidsalgebran lyckats fånga in de klassiska EM-fältens beteende i den enkla differentialekvationen

$$\nabla F = J. \tag{6.15}$$

Vi kan kalla F för **Faradayfältet** och J för **rumtidsströmmen**. De motsvarar fältstyrketensorn respektive fyr-strömmen i tensorformuleringen av elektromagnetism.

Eftersom standardmodellen inte innehåller några masslösa laddningar så kan rumtidsströmmen skrivas

$$J = \rho_u u \tag{6.16}$$

där

$$\rho_u \colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0$$

är ett skalärfält och

$$u \colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^1$$

är ett tidlikt enhetsvektorfält: $u(x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathcal{G}^1$. Alltså beskriver $\rho_u(x)$ laddningstätheten i punkten x, i en referensram sådan att den relativa strömmen är noll. Tidriktningen för denna referensram ges av $u(x)$, vilket även kan ses som nettoegenhastigheten för laddningstätheten i punkten x.

Om denna form rumtidssplittas längs tidriktningen γ_0 fås

$$\begin{aligned} J\gamma_0 &= \rho_u u \gamma_0 = \rho_u \left(u \bullet \gamma_0 + u \wedge \gamma_0\right) = \rho_u (u \bullet \gamma_0) \left(1 + \frac{u \wedge \gamma_0}{u \bullet \gamma_0}\right) \\ \rho + \boldsymbol{J} &= \rho_u \gamma(\boldsymbol{u})(1 + \boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

och vi kan identifiera

$$\rho = \rho_u \gamma(\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{J} = \rho_u \gamma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}.$$

Lösningar till Maxwells ekvation (6.15) kan hittas med Greenfunktioner eftersom vektorderivatan är inverterbar [2, s. 241–242]

6.7 Punktladdningar i konstanta fält

I denna del ska vi titta på hur en punktladdning rör sig genom ett konstant Faradayfält. Med punktladdning menas en ett elektriskt laddat objekt, utan magnetiskt moment, som är litet nog att variationen av F över dess volym kan försummas. Ett möjligt exempel som uppfyller detta är en α-partikel (heliumkärna) i vakuum.

Faradayfältets bidrag till en partikels generaliserade rotationshastighet är

$$\Omega(\tau) = \frac{q}{m} F(x(\tau))$$

där m är partikelns massa och q är dess laddning [5, s. 18]. Parametrarna m och q är skalärer som antas vara konstanta längs hela världslinjen. Insättning i (6.2) ger rörelseekvationen

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \Omega \bullet v = \frac{q}{m} F \bullet v \\ m\dot{v} &= qF \bullet v \end{aligned}$$

som motsvarar Lorentzkraften [4, s. 8].

Om F är konstant ger rotorekvationen (6.3)

$$\begin{aligned} \dot{R}(\tau) &= \frac{1}{2}\Omega R(\tau) = \frac{q}{2m}FR(\tau) \\ R(\tau) &= \exp\left(\frac{q}{2m}F\tau\right)R(0). \end{aligned}$$

Om F inte är ljuslik kan dess kvadrat skrivas

$$F^2 = \left\langle F^2\right\rangle_0 + \left\langle F^2\right\rangle_4 = \left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right) + 2I(\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{B}) = \rho \exp\left(\phi I\right)$$

där $\rho > 0$. Vi kan därför göra den kanoniska dekompositionen

$$F = \sqrt{\rho}\exp(I\phi/2)\hat{F} = \alpha\hat{F} + \beta I\hat{F} \tag{6.17}$$

där $\alpha, \beta \in \mathcal{G}^0$, $\hat{F}^2 = 1$ och $\hat{F}$ kommuterar med $I\hat{F}$ (se Exempel 12). Nu följer

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \exp\left(\frac{q}{2m}(\alpha\hat{F} + \beta I\hat{F})\tau\right)R(0) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)R(0) \end{aligned}$$

och från (2.13) fås

$$\tilde{R}(\tau) = \tilde{R}(0)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right).$$

Egenhastigheten $v(\tau) = \dot{x}(\tau)$ blir därför

$$\begin{aligned} v(\tau) &= R(\tau)\gamma_0\tilde{R}(\tau) \\ &= \exp\Big(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\Big)\exp\Big(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\Big)R(0)\gamma_0\tilde{R}(0)\exp\Big(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\Big)\exp\Big(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\Big)\exp\Big(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\Big)v(0)\exp\Big(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\Big)\exp\Big(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\Big). \end{aligned}$$

Men v kan alltid skrivas som summan av en projektion på och en rejektion från bivektorn $\hat{F}$:

$$v(\tau) = v^{\|}(\tau) + v^{\perp}(\tau),$$

där

$$\begin{aligned} v^{\|} &= \mathcal{P}_{\hat{F}}v = \left(v \llcorner \hat{F}\right)\hat{F}^{-1} = (v \bullet \hat{F})\hat{F} & &\in \operatorname{span}\left(\hat{F}\right), \\ v^{\perp} &= \mathcal{P}^{\perp}_{\hat{F}}v = v - \mathcal{P}_{\hat{F}}v = v\hat{F}\hat{F} - (v \bullet \hat{F})\hat{F} = (v \wedge \hat{F})\hat{F} & &\in \operatorname{span}\left(\hat{F}^{\complement}\right). \end{aligned}$$

Från (2.11) följer nu att $v^{\|}$ antikommuterar med $\hat{F}$ och kommuterar med $I\hat{F} = \hat{F}^{\complement}$ medan $v^{\perp}$ kommuterar med $\hat{F}$ och antikommuterar med $I\hat{F}$. Så eftersom $\hat{F}$ är konstant följer

$$\begin{aligned}
v^{\|}(\tau) &= \exp\left(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)v^{\|}(0)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\\
&= v^{\|}(0)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\\
&= v^{\|}(0)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\\
&= v^{\|}(0)\exp\left(-\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right)
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
v^{\perp}(\tau) &= \exp\left(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)v^{\perp}(0)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\\
&= v^{\perp}(0)\exp\left(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}-\frac{\alpha q\tau}{2m}\hat{F}\right)\exp\left(-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}-\frac{\beta q\tau}{2m}I\hat{F}\right)v^{\perp}(0)\\
&= v^{\perp}(0)\exp\left(-\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)
\end{aligned}$$

Sammantaget blir världslinjens tangent

$$\dot{x}(\tau) = v(\tau) = v^{\|}(0)\exp\left(-\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right) + v^{\perp}(0)\exp\left(-\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right). \tag{6.18}$$

Om punktladdningen får börja i rumsliga origo då $\tau = 0$ blir initialvillkoren

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

där $v_0 \in \mathcal{G}^1 \colon v_0^2 = 1$ är en godtycklig tidlik enhetsvektor som är summan av

$$v^{\|}(0) = (v_0 \bullet \hat{F})\hat{F} \qquad \in \operatorname{span}\left(\hat{F}\right)$$

och

$$v^{\perp}(0) = (v_0 \wedge \hat{F})\hat{F} \qquad \in \operatorname{span}\left(\hat{F}^{\complement}\right).$$

Om $\boldsymbol{E}$-fältet och $\boldsymbol{B}$-fältet är ortogonala så blir F^2 en skalär och F ett blad. Om $\boldsymbol{E}^2 > \boldsymbol{B}^2$ blir F är ett tidlikt 2-blad och $\alpha \neq 0, \beta = 0$. I detta fall integreras (6.18) till

$$
\begin{aligned}
x_\alpha(\tau) &= (v_0 \bullet \hat{F})\hat{F}\left(-\frac{m}{\alpha q}\hat{F}^{-1}\right)\left(\exp\left(-\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right)-1\right)+v^\perp(0)\tau \\
&= -\frac{m}{\alpha q}(v_0 \bullet \hat{F})\left(\exp\left(-\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right)-1\right)+(v_0\wedge\hat{F})\hat{F}\tau.
\end{aligned}
$$

Om $\boldsymbol{B}^2 > \boldsymbol{E}^2$ blir F istället ett ett rumslikt 2-blad och $\beta \neq 0, \alpha = 0$. Världslinjen ges då av

$$
\begin{aligned}
x_\beta(\tau) &= (v_0 \wedge \hat{F})\hat{F}\left(-\frac{m}{\beta q}(I\hat{F})^{-1}\right)\left(\exp\left(-\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)-1\right)+v^\parallel(0)\tau \\
&= \frac{m}{\beta q}(v_0 \wedge \hat{F})I\left(\exp\left(-\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)-1\right)+(v_0\bullet\hat{F})\hat{F}\tau.
\end{aligned}
$$

Då reversionen bevarar grad $0, 1, 4$ och byter tecken på grad $2, 3$ så möjliggör (2.13) omskrivningarna

$$
\begin{aligned}
x_\alpha(\tau) = \tilde{x}_\alpha(\tau) &= -\frac{m}{\alpha q}\left(\exp\left(-\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right)^\sim - \tilde{1}\right)\left(\tilde{\hat{F}} \bullet \tilde{v}_0\right)+\tilde{\hat{F}}(\tilde{\hat{F}}\wedge\tilde{v}_0)\tau \\
&= -\frac{m}{\alpha q}\left(\exp\left(+\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right)-1\right)\left(-\hat{F}\bullet v_0\right)-\hat{F}(-\hat{F}\wedge v_0)\tau \\
&= \frac{\exp\left(\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right)-1}{\alpha q/m}\left(\hat{F}\bullet v_0\right)+\hat{F}(\hat{F}\wedge v_0)\tau
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
x_\beta(\tau) = \tilde{x}_\beta(\tau) &= \frac{m}{\beta q}\left(\exp\left(-\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)^\sim - \tilde{1}\right)\tilde{I}\left(\tilde{\hat{F}}\wedge\tilde{v}_0\right)+\tilde{\hat{F}}(\tilde{\hat{F}}\bullet\tilde{v}_0)\tau \\
&= \frac{m}{\beta q}\left(\exp\left(+\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)-1\right)I\left(-\hat{F}\wedge v_0\right)-\hat{F}(-\hat{F}\bullet v_0)\tau \\
&= -\frac{m}{\beta q}\left(\exp\left(+\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)-1\right)\left(\hat{F}\wedge v_0\right)^{\mathsf{C}}+\hat{F}(\hat{F}\bullet v_0)\tau \\
&= -\frac{\exp\left(\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right)-1}{\beta q/m}\left((I\hat{F})\bullet v_0\right)+\hat{F}(\hat{F}\bullet v_0)\tau
\end{aligned}
$$

där Sats 4 använts.

Världslinjen $x_\beta(\tau)$ får formen av en helix. Kurvan $x_\alpha(\tau)$ är en hyperbolisk världslinje med accelerationen $a = \alpha q/m$. Med $\hat{F} = \gamma_1\gamma_0$, $v_0 = \gamma_0$ så blir kurvan exakt samma som i (6.7).

Om F är en skruv-bivektor motsvaras det av att $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ inte är ortogonala men har olika magnitud $\boldsymbol{E}^2 \neq \boldsymbol{B}^2$. Då gäller $\alpha, \beta \neq 0$ så (6.18) integreras till världslinjen

$$\begin{aligned}
x(\tau) &= \frac{\exp\left(\frac{\alpha q}{m}\hat{F}\tau\right) - 1}{\alpha q/m}\left(\hat{F} \bullet v_0\right) - \frac{\exp\left(\frac{\beta q}{m}I\hat{F}\tau\right) - 1}{\beta q/m}\left((I\hat{F}) \bullet v_0\right) \\
&= x_\alpha(\tau) - \hat{F}(\hat{F} \wedge v_0)\tau + x_\beta(\tau) - \hat{F}(\hat{F} \bullet v_0) \\
&= x_\alpha(\tau) + x_\beta(\tau) - v_0\tau
\end{aligned}$$

vilket är summan av en hyperbel, en helix och en dåtidsriktad linje. Linjen $v_0\tau$ fås vid inertial rörelse, vilket motsvarar $F = 0$ överallt och $\alpha = \beta = 0$.

Den kanoniska dekompositionen (6.17) fungerar inte om $F^2 = 0$, vilket gäller om $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ är ortogonala och har samma magnitud. Från (4.5) följer att rotorekvationen för ett konstant ljuslikt faradayfält blir

$$R(\tau) = \exp\left(\frac{q}{2m}F\tau\right)R(0) = \left(1 + \frac{q}{2m}F\tau\right)R(0).$$

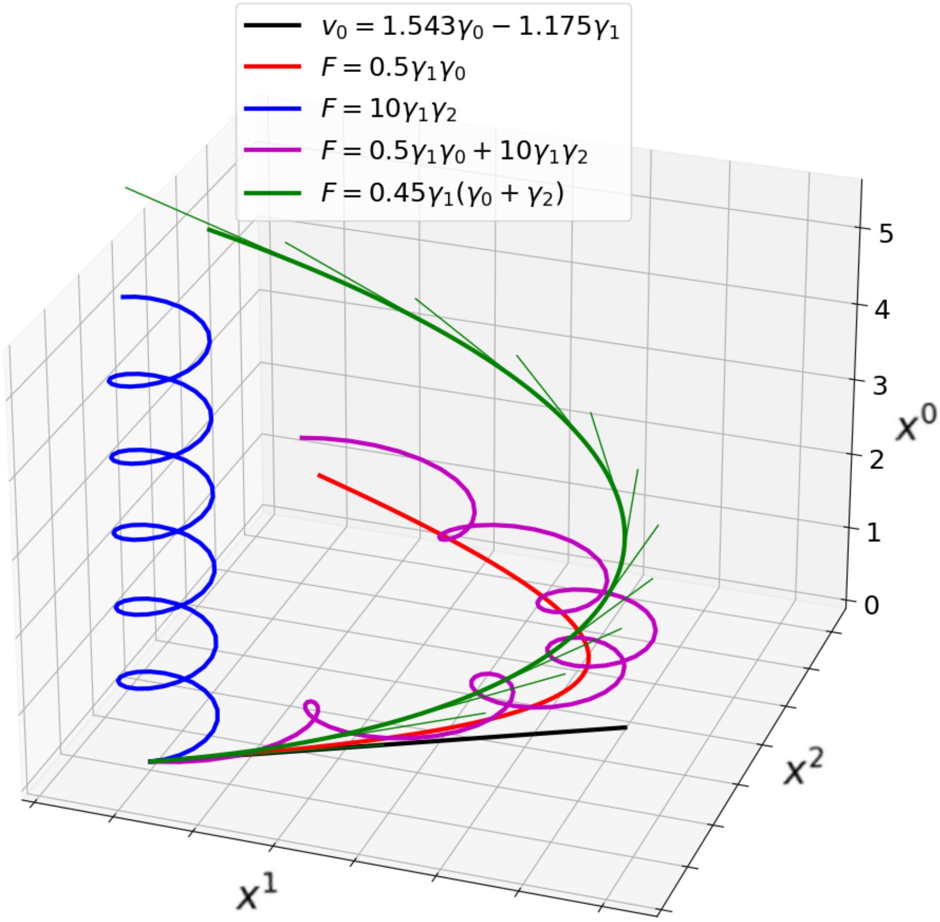
Egenhastigheten ges nu av

$$\begin{aligned}
v(\tau) &= R(\tau)\gamma_0\tilde{R}(\tau) \\
&= \left(1 + \frac{q}{2m}F\tau\right)R(0)\gamma_0\tilde{R}(0)\left(1 - \frac{q}{2m}F\tau\right) \\
&= \left(1 + \frac{q}{2m}F\tau\right)v_0\left(1 - \frac{q}{2m}F\tau\right) \\
&= v_0 + \frac{q}{2m}(Fv_0 - v_0F)\tau - \frac{q^2}{4m^2}Fv_0F\tau^2 \\
&= v_0 + \frac{q}{2m}(2F \bullet v_0)\tau - \frac{q^2}{4m^2}(FFv_0 - F(2F \bullet v_0))\tau^2 \\
&= v_0 + \frac{q}{2m}(F \bullet v_0)2\tau + \frac{q^2}{2m^2}F(F \bullet v_0)\tau^2
\end{aligned}$$

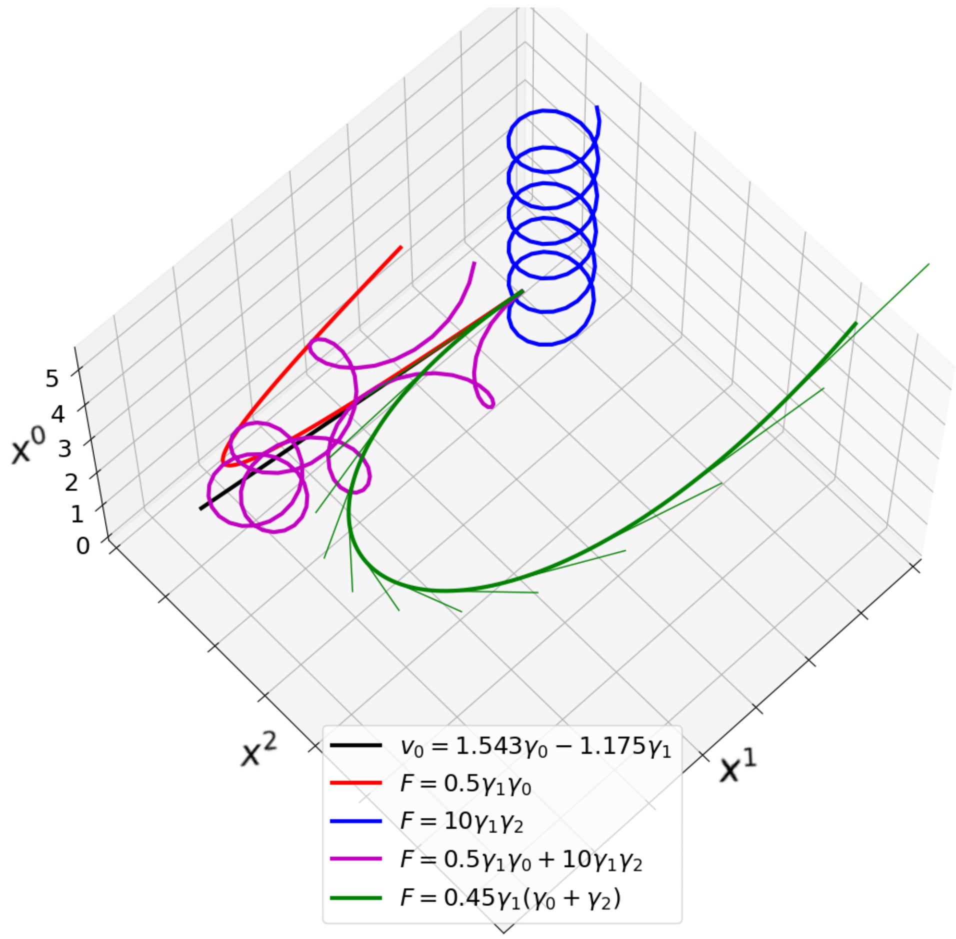
där (2.11) har använts. Givet $x(0) = 0$ blir världslinjen

$$x(\tau) = v_0\tau + \frac{q}{2m}(F \bullet v_0)\tau^2 + \frac{q^2}{6m^2}F(F \bullet v_0)\tau^3.$$

Figur 6 och 7 visar de olika typerna av världslinjer för en punktladdning i ett konstant Faradayfält. Båda figurerna visar samma kurvor, fast från olika perspektiv. Detta eftersom det kan vara svårt att tolka djup i en 3D-plot.



Figur 6: Perspektiv A. Världslinjer för en punktladdning i ett konstant Faradayfält F. Röd: $F^2 > 0$, hyperbel. Blå $F^2 < 0$, helix. Magenta: F är en skruv-bivektor och $F^2 \in \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^4$, ungefär en superposition av en hyperbel och en helix. Grön: $F^2 = 0$, tredjegradspolynom i τ. I alla fyra fall är den initiala egenhastigheten $v_0 = \exp(-\gamma_1\gamma_0)\gamma_0 = \cosh(-1)\gamma_0 + \sinh(-1)\gamma_1$.



Figur 7: Perspektiv B. Världslinjer för en punktladdning i ett konstant Faradayfält F. Röd: $F^2 > 0$, hyperbel. Blå $F^2 < 0$, helix. Magenta: F är en skruv-bivektor och $F^2 \in \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^4$, ungefär en superposition av en hyperbel och en helix. Grön: $F^2 = 0$, tredjegradspolynom i τ. I alla fyra fall är den initiala egenhastigheten $v_0 = \exp(-\gamma_1\gamma_0)\gamma_0 = \cosh(-1)\gamma_0 + \sinh(-1)\gamma_1$.

Referenser

[1] John W. Arthur. ”The Evolution of Maxwell’s Equations from 1862 to the Present Day”. I: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 55 (2013), s. 61–81. URL: https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6586627.

[2] Chris Doran och Anthony Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511807497.

[3] Leo Dorst. ”The Inner Products of Geometric Algebra”. I: *Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*. Utg. av Leo Dorst, Chris Doran och Joan Lasenby. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2002, s. 35–46. ISBN: 978-1-4612-0089-5. DOI: 10.1007/978-1-4612-0089-5_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0089-5_2.

[4] David Hestenes. *Proper particle mechanics*. 1974. URL: http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/Proper_mechanics.pdf.

[5] David Hestenes. *Spacetime Physics with Geometric Algebra*. 2007. URL: http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/SpacetimePhysics.pdf.

[6] David Hestenes och Garret Sobczyk. ”Differentiation”. I: *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1984, s. 44–62. ISBN: 978-94-009-6292-7. DOI: 10.1007/978-94-009-6292-7_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-94-009-6292-7_2.

[7] Pertti Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. ARKIVERAD: https://web.archive.org/web/20230423162336/http://ti.math.msu.su/wiki/lib/exe/fetch.php?media=specseminary:teor_informatika:pertti_lounesto_clifford-algebras-and-spinors.pdf. 1997.

[8] Pertti Lounesto. *Marcel Riesz's Work on Clifford Algebras*. Utg. av E. Folke Bolinder och Pertti Lounesto. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993. ISBN: 978-94-017-1047-3. DOI: 10.1007/978-94-017-1047-3_4. URL: https://doi.org/10.1007/978-94-017-1047-3_4.

[9] Douglas Lundholm och Lars Svensson. *Clifford algebra, geometric algebra, and applications*. 2016. URL: https://people.kth.se/~dogge/clifford/files/clifford.pdf (hämtad 2023-02-01).

[10] Wikipedia. *Geometric calculus*. ARKIVERAD: https://web.archive.org/web/20230307053622/https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_calculus. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_calculus.