格林公式的几何意义是什么?

马同学
数学话题下的优秀回答者

格林公式阐述了一个简单而又重要的物理事实，守恒。

比如，打台球：

它的能量守恒是这样的：

击球产生的能量＝桌面消耗的能量＋桌边消耗的能量

击球的能量产生在桌面上，所以调整一下守恒式，就得到了格林公式：

桌边消耗的能量＝击球产生的能量－桌面消耗的能量

桌边的能量和 ＝ 桌边围成区域内的能量和

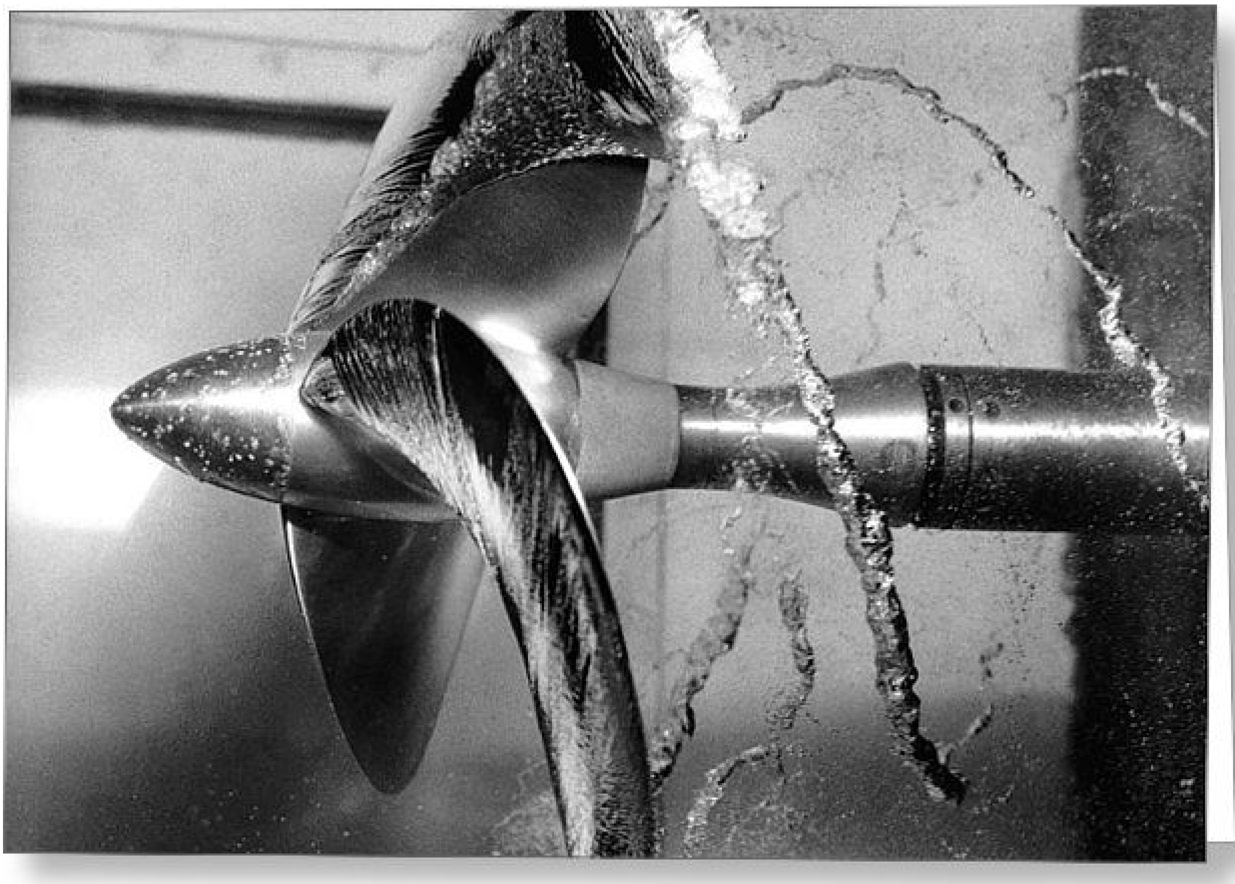
下面让我们一步步建立物理模型来解读上面的描述，并推导出格林公式。

本人不才，下面的物理都主要重视直观理解，不求严格性，恳请物理大咖指点纠正。

1 关于旋转的物理问题

在剑桥大学的小路上，正在思考的乔治・格林被一个学生拦住了，学生愁眉苦脸的说：“老师，您好，有个问题我一直没有想清楚，……合计。”

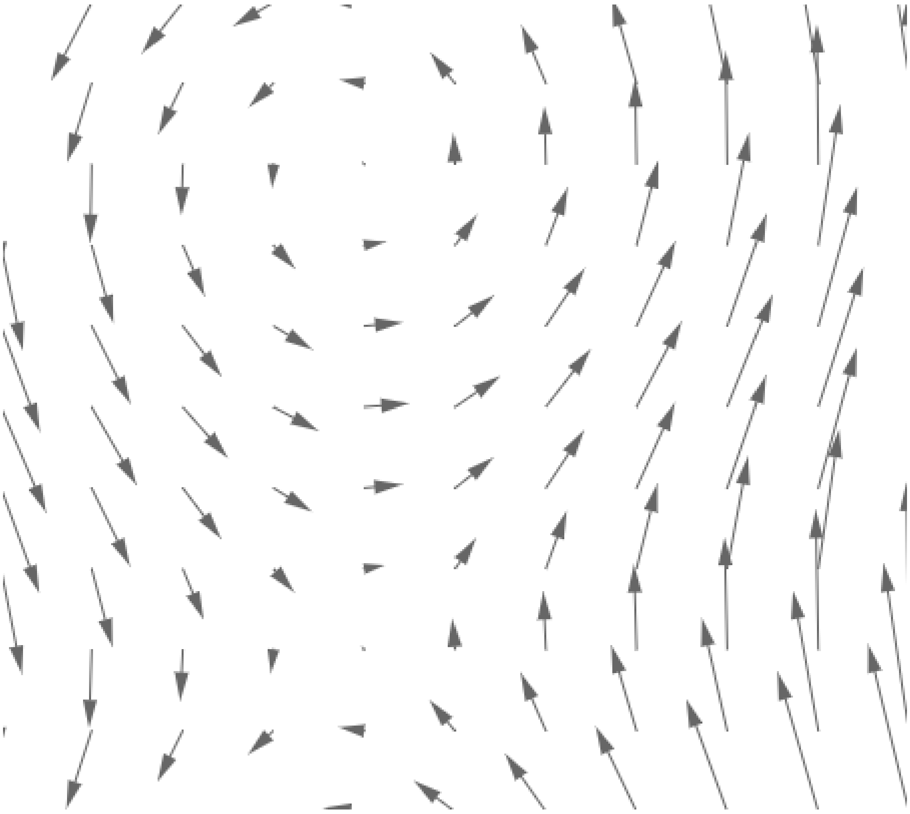
学生继续说道：“这个问题就是，我应该怎么去分析水流中，螺旋桨的做功情况？”



“这是一道应用题，”格林眉毛一拧：“肯定是先建模啊。”

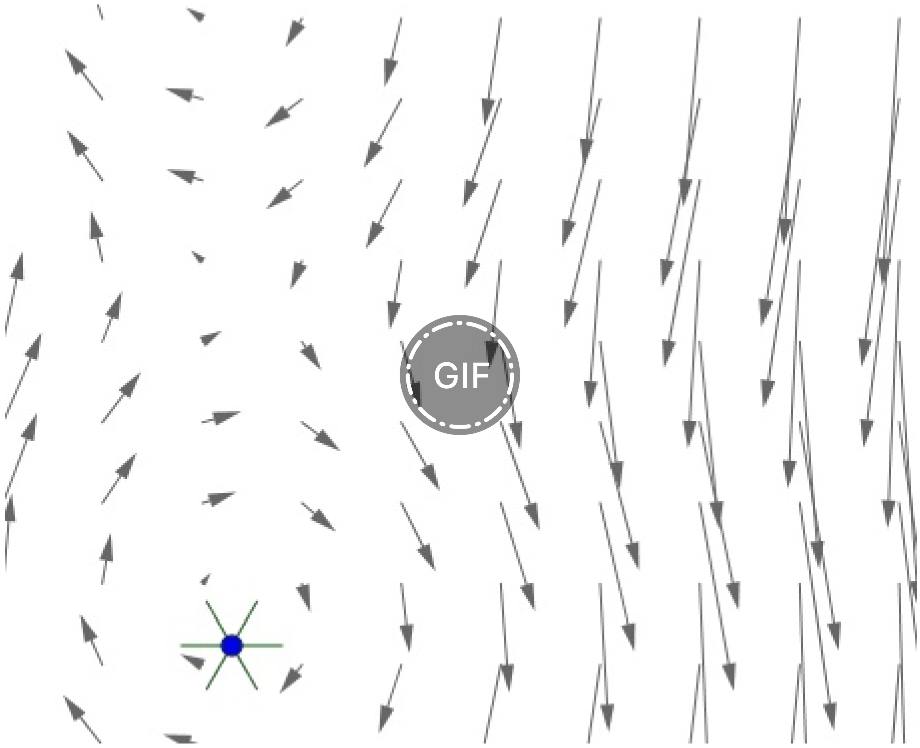
2 模型的建立

首先，水流作用到螺旋桨上，表现为力，因此先把水流转为力场 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$：



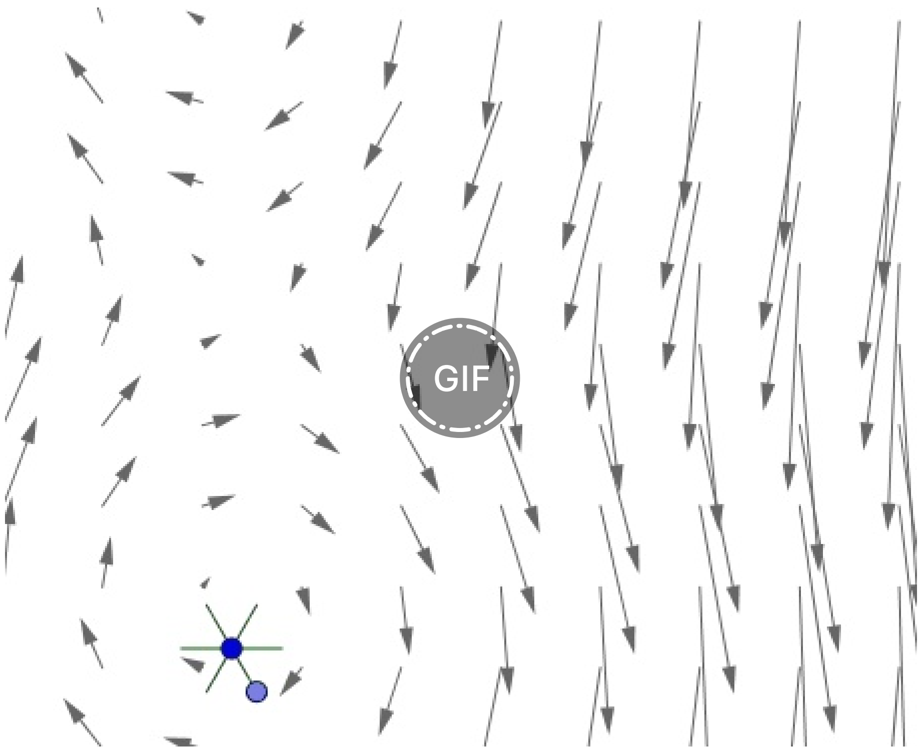
把这样的螺旋桨：

抽象一下，放入到力场中去，就会旋转起来（手动移动下螺旋桨的位置，还会发现在不同的位置旋转速度不一样）：



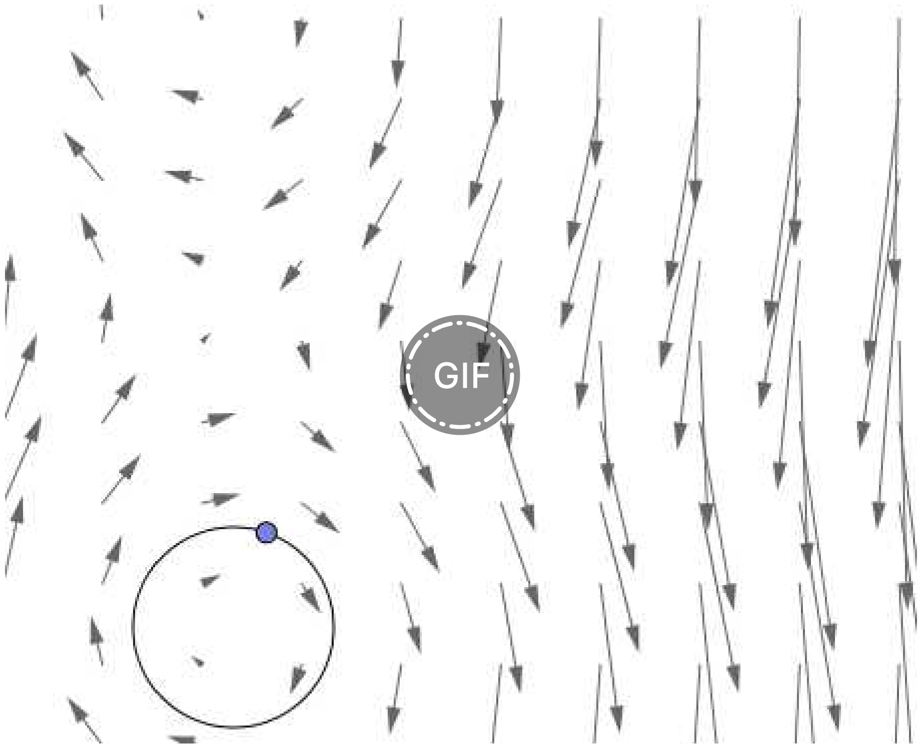
> 此处有互动内容，点击此处前往操作。

进一步简化一下，我们只研究其中某一个点的在旋转中的做功：



等价于研究某一点在圆形路径上的做功：

App 内打开

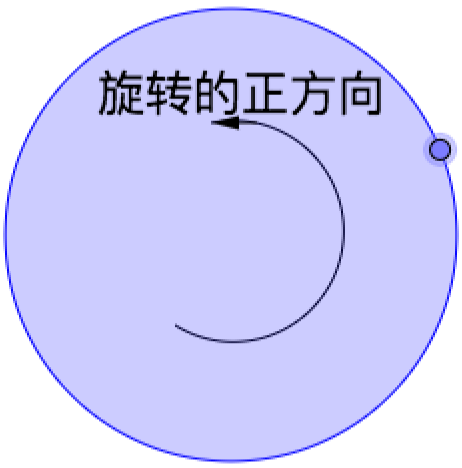


格林说：“问题就被转化为了沿路径做功了，我们看看物理层面怎么解答。”

3 物理的解答

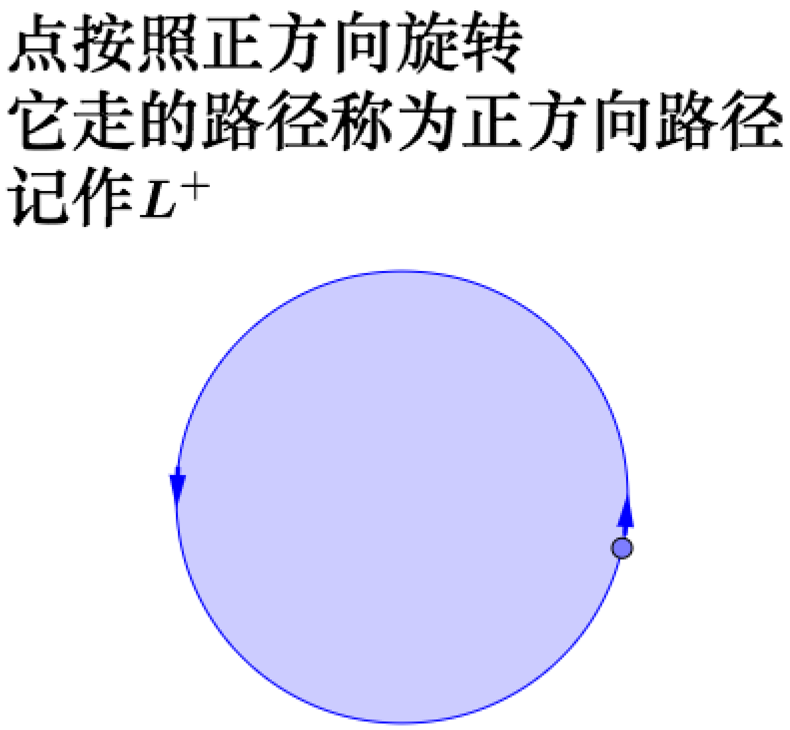
3.1 旋转方向与有向路径

首先，规定逆时针旋转为正方向：



旋转有了方向之后，此点走过的路径也就有了方向，我们称为“有向路径”。

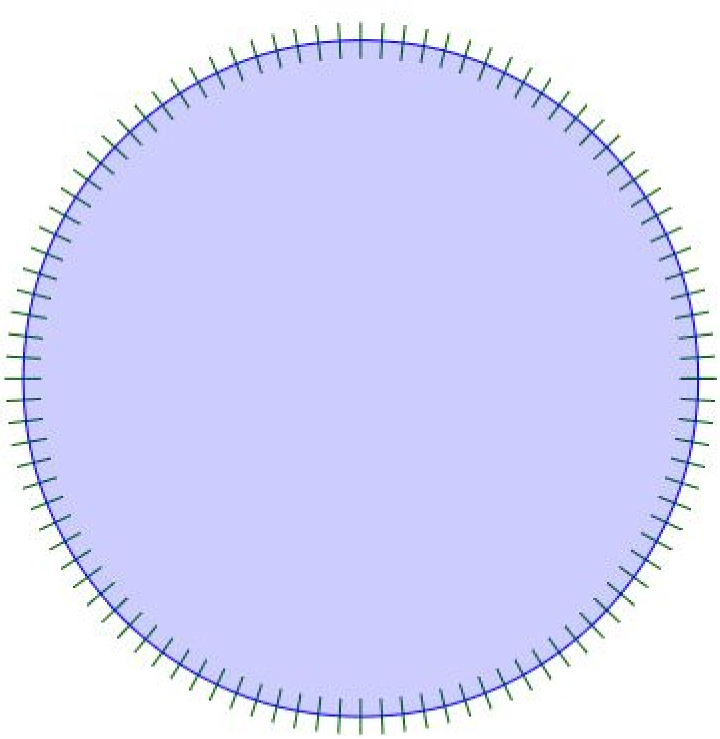
根据旋转的正方向，就可定义点走过的路径的正方向：



点要是反着转，那么走过的路径自然就是 L^- 。

3.2 做功分析

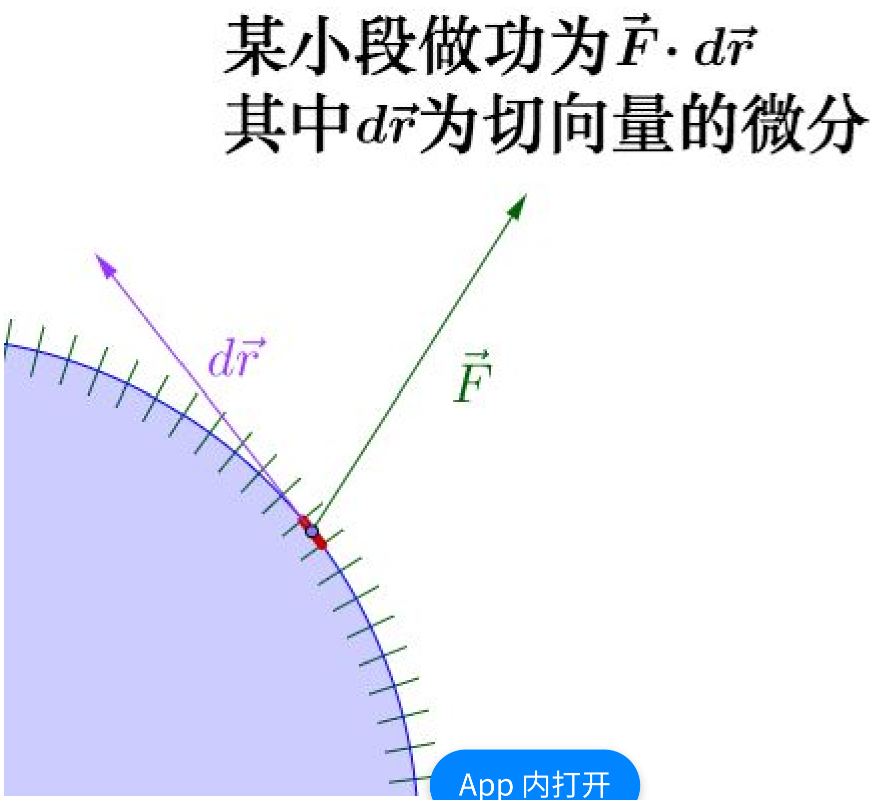
根据微积分的思想，我们把路径切成无数个微小的曲线段：



根据我们已知的两个知识（已知的意思，其实是我不想解释了）：

- 根据微积分“以直代曲”的思想，这些微小的曲线段可以用切线来代替
- 根据物理知识，我们知道，力只在路径方向做功

结合上述两点，我们可以得到，每个微小的曲线段上做的功为：



那么，很明显，整段封闭曲线做功可以表示为如下：

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

“哇，清晰多了！”同学搓搓手，递上一只大前门香烟：“老师，可是怎么计算呢？”

格林抽出笔来，刷刷地写道：“就这么算！”

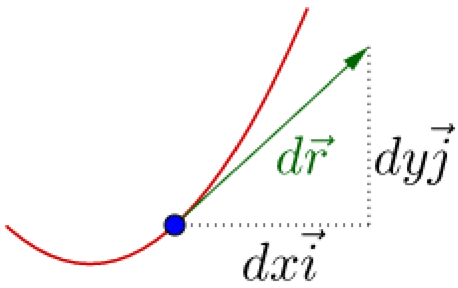
4 数学计算

4.1 矢量形式转为标量形式

矢量形式 $\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ 不太好计算，让我们转为标量形式。

根据我们一元微积分的知识，我们知道 $d\overrightarrow{r}$ 在 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ 方向的分量为：

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$



那么，有 $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$ 和 $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$，所以，$\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = Pdx + Qdy$，所以：

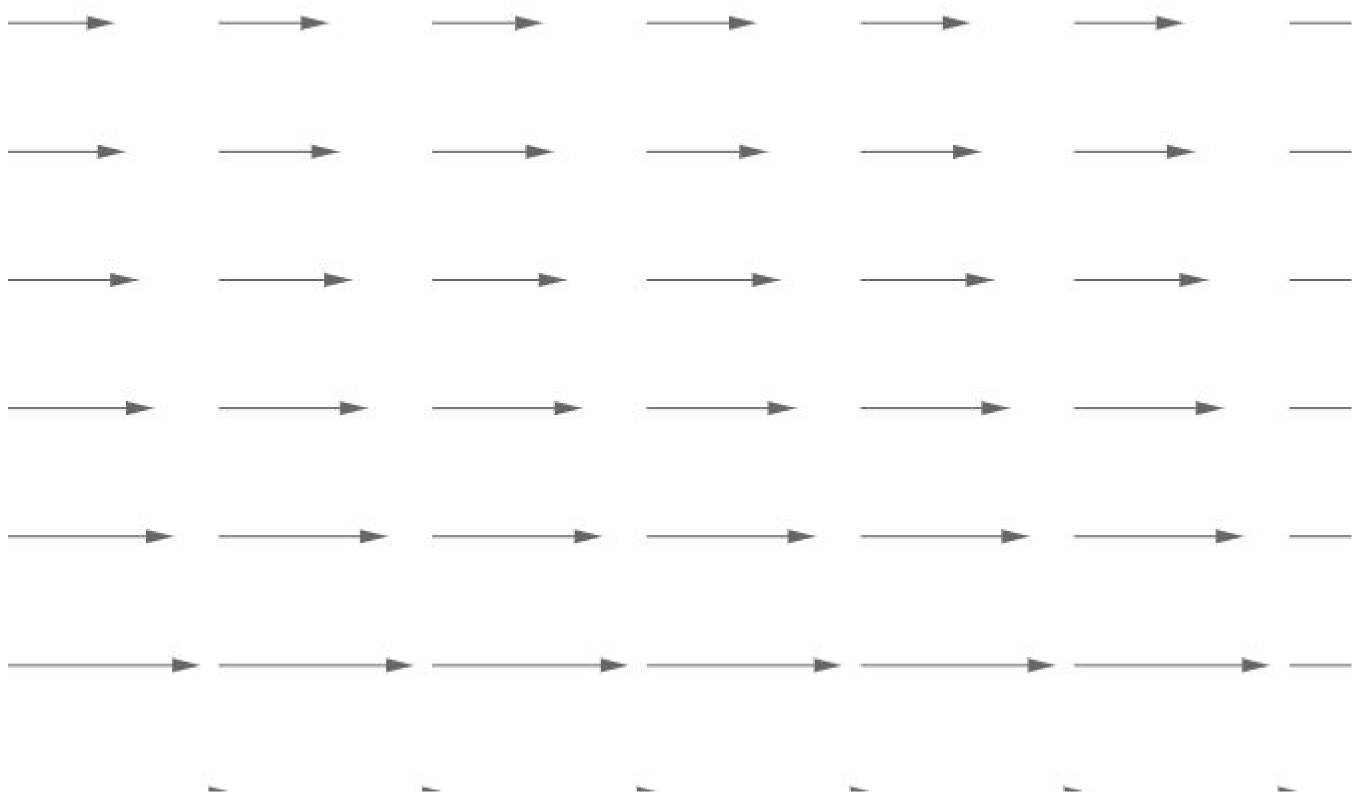
$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{L^+} Pdx + Qdy$$

4.2 非常简单的加减运算

我们给出一个简单的力场，这个力场的特点是：

- 只有水平方向的力
- 在同一个垂直高度上，力的大小一样
- 随着垂直高度的增加，力逐渐减小

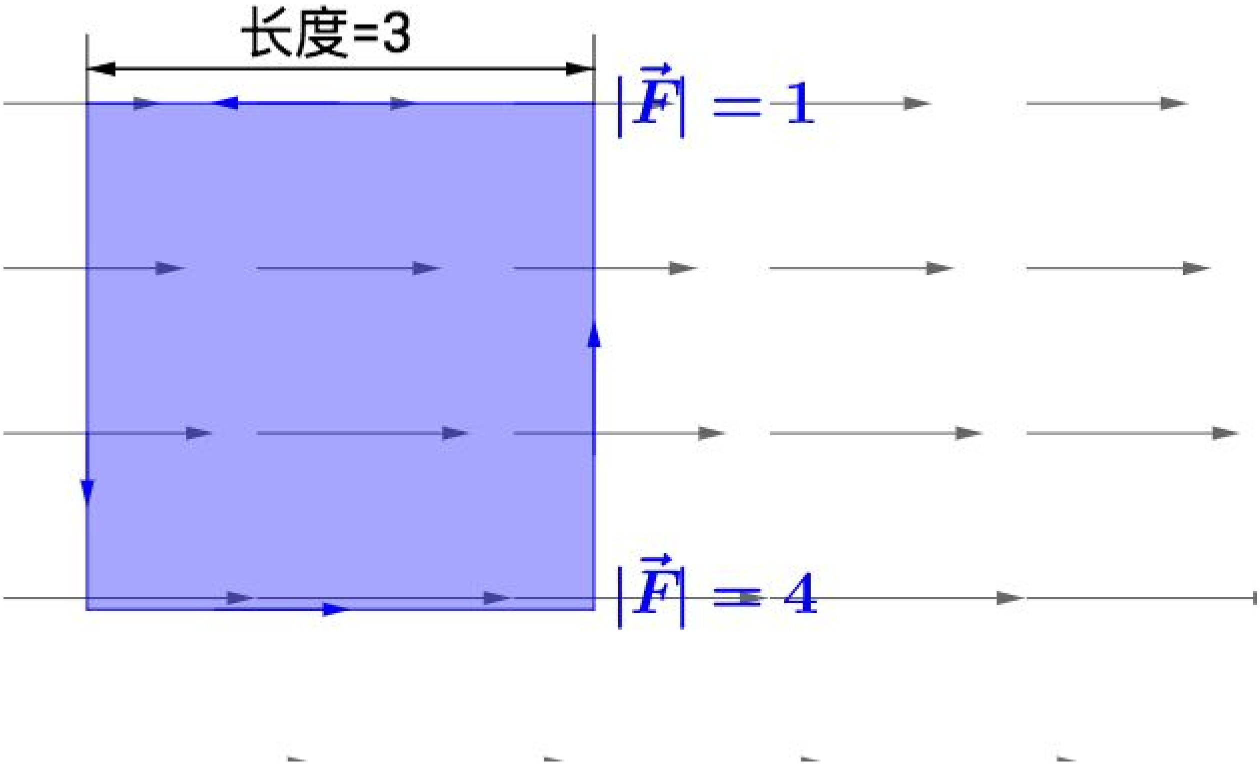
画出来就是这样的（矢量的方向表示力的方向，矢量的长度表示力的大小）：



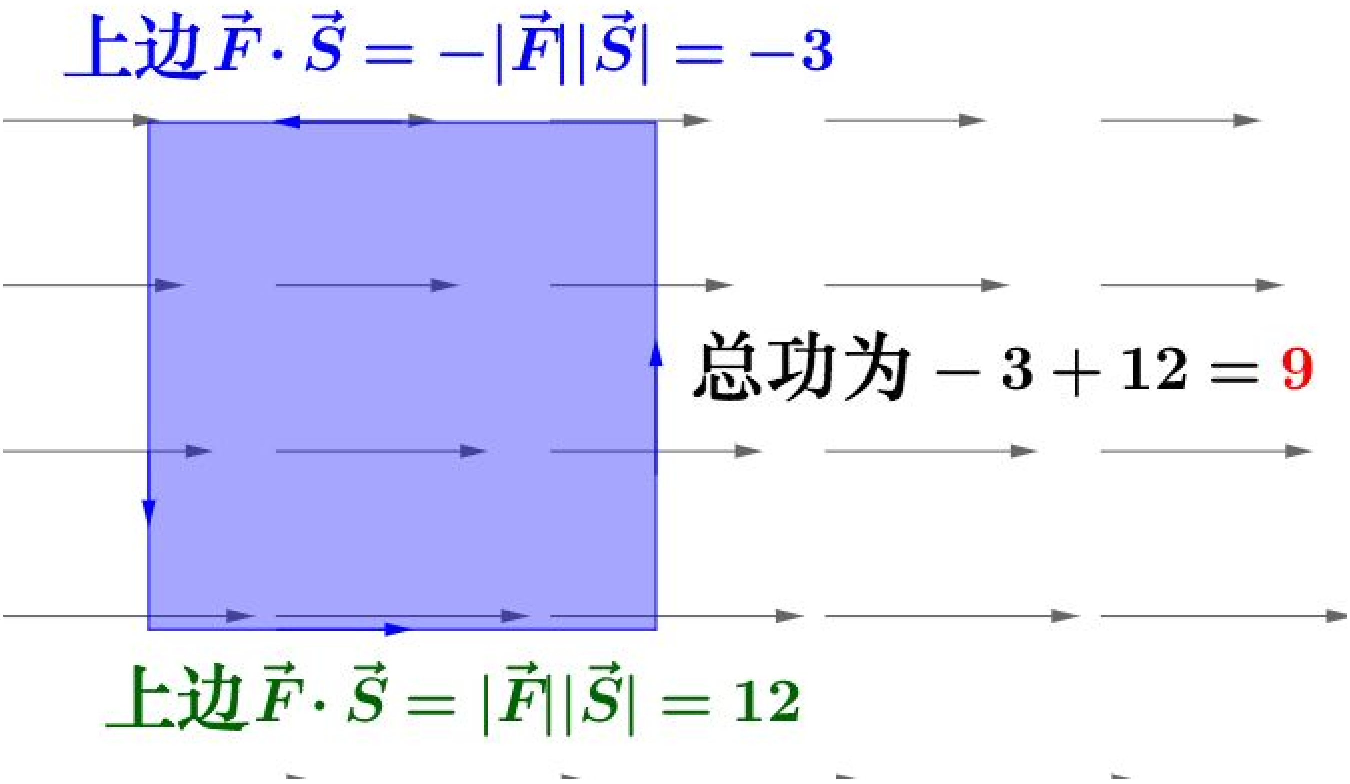
计算在此力场中，某点围绕正方形路径一圈所做的功，已知：

- 正方形边长为3
- 上边受力大小为1，下边受力大小为4
- 力与左右两边垂直，所以在这两边不做功

如图：

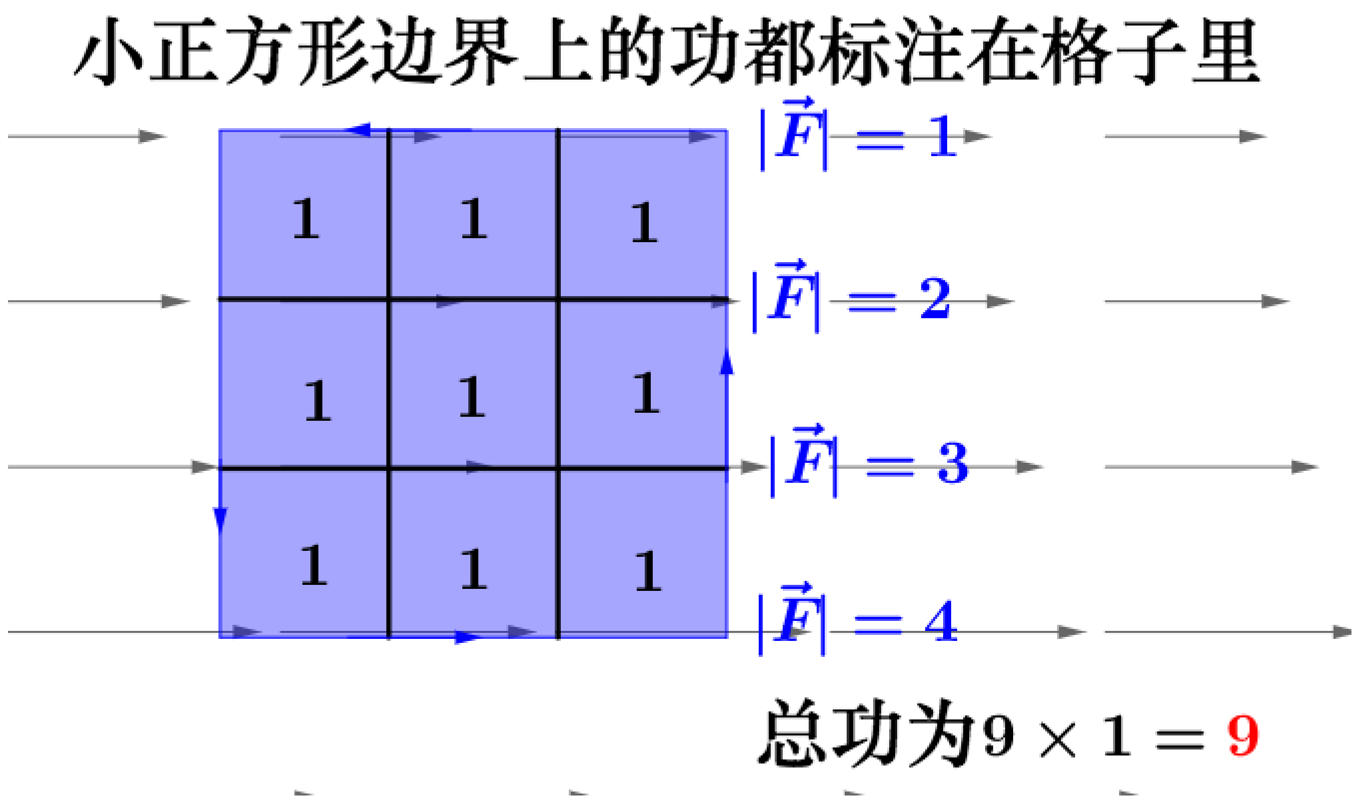


所以，算出某点围绕正方形路径一圈所做的功为：



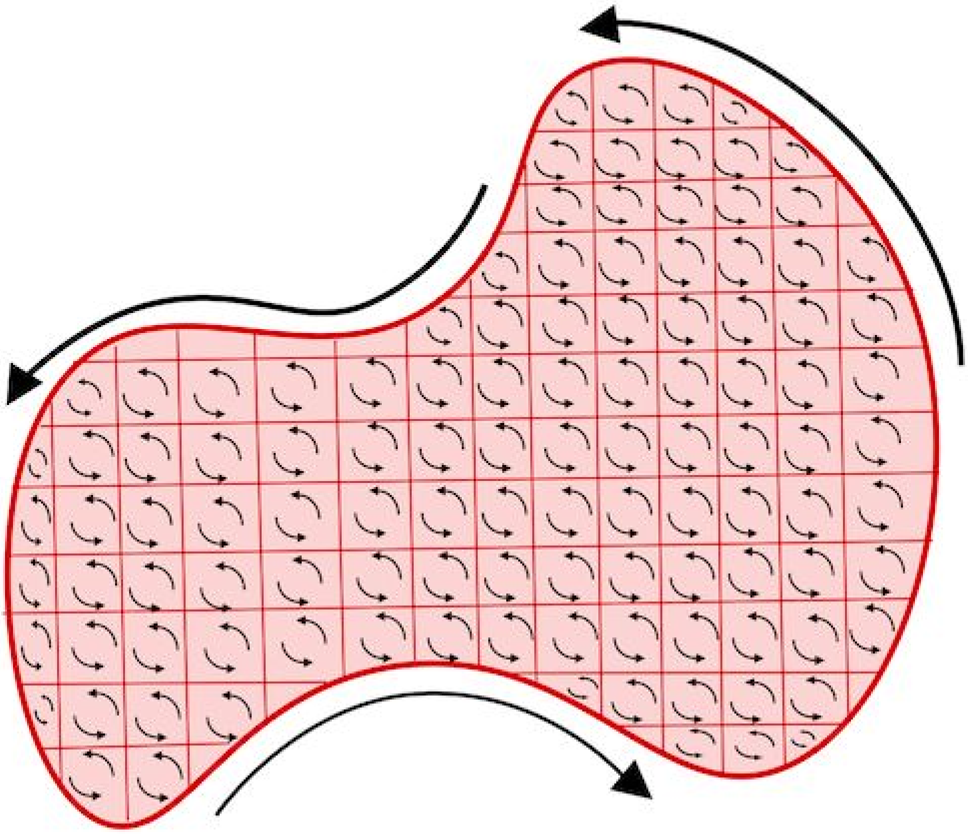
把正方形均分为9宫格，每块都是变长为1的正方形，每条正方形的边所在力场的大小我也标注在图里了：

App 内打开



可见，两种运算方法得到的结果都是一样的。

这是一个简单的演算，可以推广为，任意的路径边界上的功，等于路径围成的区域内的所有微分矩形（矩形也符合“以直代曲”的微积分思想）的边界上的功之和：

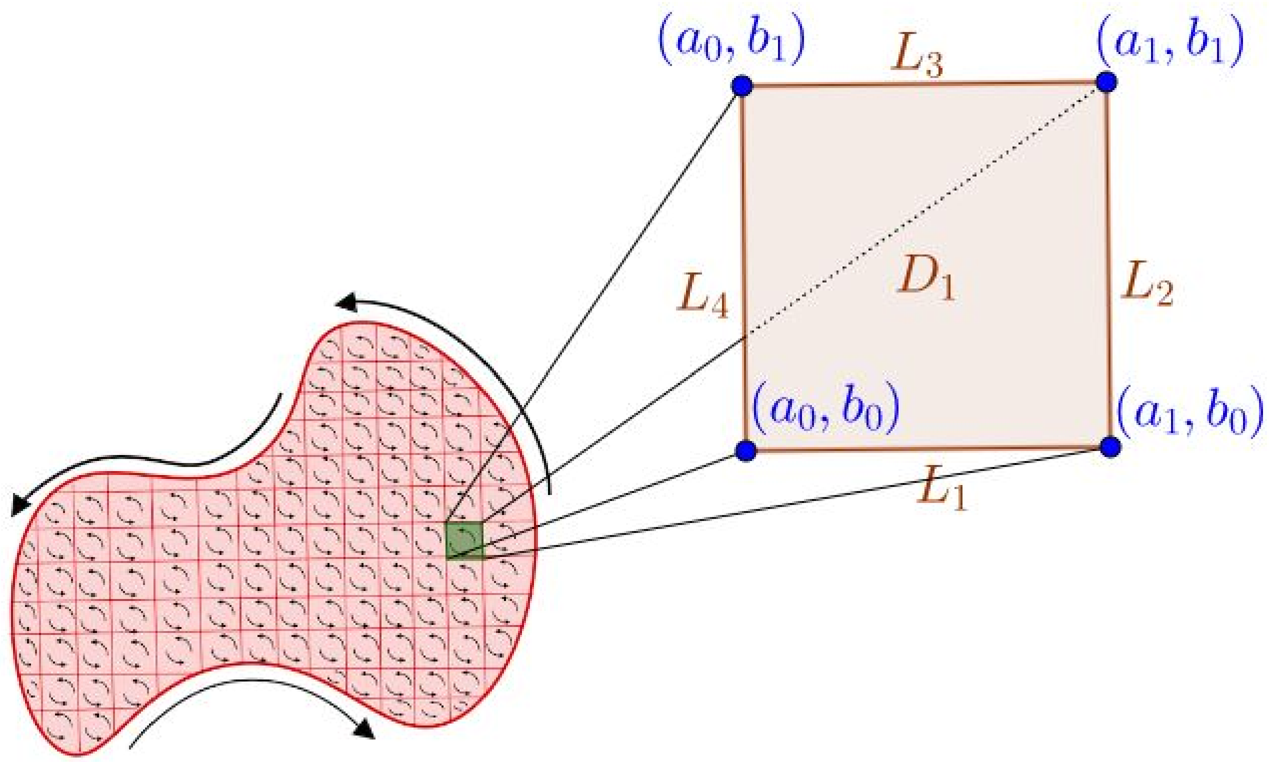


这也就是我刚开始说的守恒，虽然功和能量还不是一回事，不过也算紧密相关，允许我这个物理民科这么去直观理解。

4.3 计算微小矩形边界上的功

怎么计算微分矩形上做的功呢？让我取一个微分矩形出来，我把矩形的边和顶点、以及矩形的区域都标注出来了：

App 内打开



下面是代数推断了，我觉得过程还是很清晰明了的。

首先，注意到在 L_1^+, L_3^+ 上 dy 为0（因为 y 方向没有变化）， L_2^+, L_4^+ 上 dx 为0，然后我们继续推下去：

$$
\begin{aligned}
\oint_{L^+} Pdx + Qdy &= \int_{L_1^+} Pdx + \int_{L_2^+} Qdy + \int_{L_3^+} Pdx + \int_{L_4^+} Qdy \\
&= \int_{a_0}^{a_1} P(x, b_0)dx + \int_{b_0}^{b_1} Q(a_1, y)dy + \int_{a_1}^{a_0} P(x, b_1)dx + \int_{b_1}^{b_0} Q(a_0, y)dy \\
&= \int_{b_0}^{b_1} [Q(a_1, y) - Q(a_0, y)]dy + \int_{a_0}^{a_1} [P(x, b_0) - P(x, b_1)]dx \\
&= \int_{b_0}^{b_1} \int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \frac{\partial P}{\partial y} dydx \\
&= \int_{b_0}^{b_1} \int_{a_0}^{a_1} [\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}]dxdy \\
&= \iint_{D_1} [\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}]dxdy
\end{aligned}
$$

微分矩形的边界做功求出来了，结合我们之间的结论，边界的做功＝微分矩形做功之和我们可以得到最终的结论：

$$
\oint_{L^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy
$$

其中 D 为 L^+ 围成的区域。

同学之前听得屏息凝视，现在才有机会长出了口气：“真是精彩啊！”

格林反问道：“你知道 $\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{n}$ 会得到什么吗？”

$d\overrightarrow{n}$ 是法向量。

5 通量

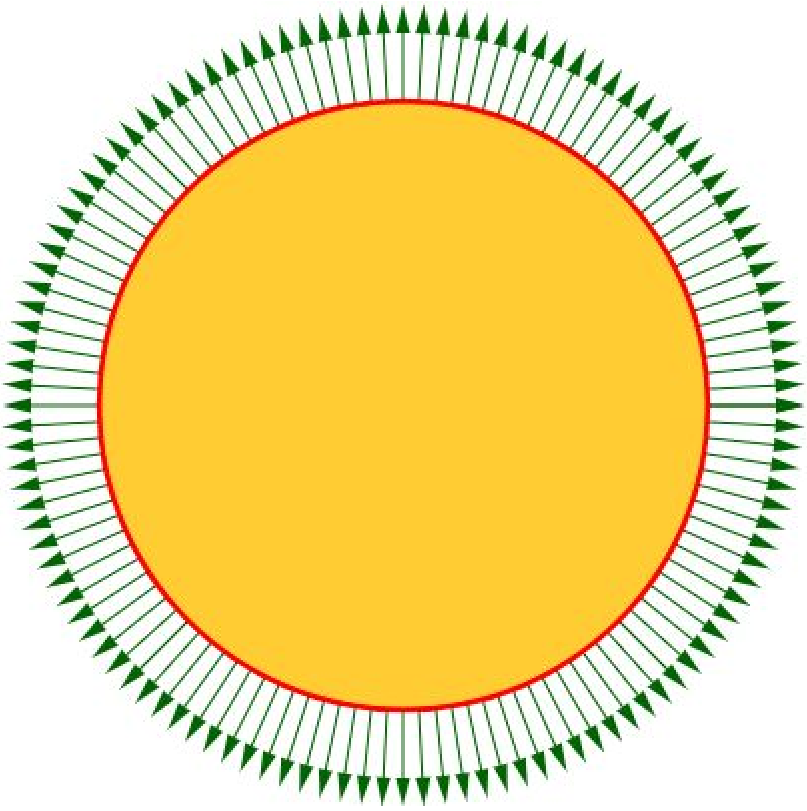
$\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ 代表力在运动方向做功，但是力并不会在与运动的垂直方向做功，那么 $\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{n}$ 代表了什么？

如果把 $\overrightarrow{F}$ 看作流速，或者电流密度，那么 $\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{n}$ 就在流体力学、电磁学中被称为通量。

关于通量更详细的可以看我另外一个回答 散度和旋度的物理意义是什么，其中回答了为什么是法向量方向。

比如，对于我们头顶上的太阳：

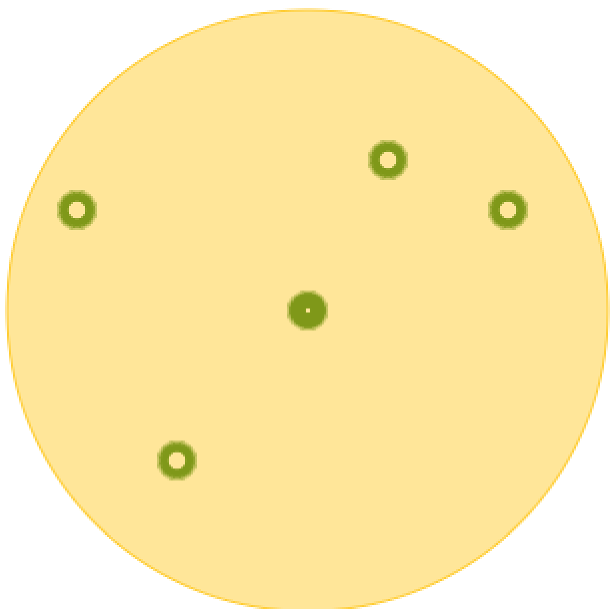
我们要计算穿过（包括射出和进入）太阳表面的能量总量：



这就是通量，记作：

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{n}$$

太阳内部时时都在发生核聚变，以及其他的能量活动：



根据能量守恒，内部的能量总量，必然等于穿过太阳表面的能量总量。

也就是说，通量和内部能量总量相等。

定了这个基调之后，然后按照之前分析做功的方式，最终我们可以得到：

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{n} = \oint_{L^+} Pdy - Qdx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy$$

格林说完之后，突然发现，自己发现了不得了的东西，对于数学有重要的意义，相当于把封闭曲线的线积分转为了二重积分。所以，赶快去发表论文吧。

6 总结

乔治·格林（1793 — 1841），英国科学家，格林公式的发明者。

根据不同的物理意义，格林得到了两种格林公式的形式：

做功的形式（电磁学、流体力学也可以把 $\overrightarrow{F}$ 看作流速，下面就称为环流量）：

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

通量的形式：

App 内打开

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{n} = \oint_{L^+} Pdy - Qdx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy$$

旋度和散度也出现在公式中了。

本文轻度调侃了乔治・格林，并非不敬。在我眼中科学家才是真正的英雄，希望我可以写出这些科学大咖风采的一二，借用《红楼梦》中的一句话，但使大家知道“科学界历历有人”。

编辑于 2017-06-19

热门推荐

百香果怎么吃啊?

2.7K 关注 • 175 回答



越来越容易讨厌一个人，接受不了别人开的恶意玩笑以及不尊重，是我自己变得狭隘了么?

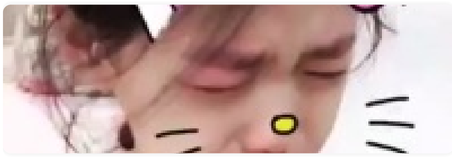
3.1K 关注 • 89 回答

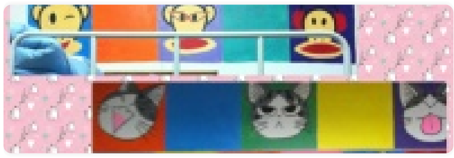
UZI是否能达到Faker 的高度?

2.4K 关注 • 1.5K 回答

做一个可爱的女孩子是种怎样的体验?

41.5K 关注 • 3.0K 回答





怎么才能追到一个自己有好感的男生啊?

18.7K 关注 • 1.0K 回答



你身边有没有特别帅的女生？帅炸天的那种！？

7.8K 关注 • 1.3K 回答


体育界有哪些著名的梗?

7.3K 关注 • 957 回答



为什么演员宁静那么美却没有红到一线?

1.0K 关注 • 286 回答

男生究竟如何分辨女生是否素颜?

3.8K 关注 • 939 回答