高等数学学的时间有点久远了，最近需要推倒一些公式，以前高数学的时候这公式那定理的都没说什么物理意义，现在接触的问题都是具有一定物理意义的， 感觉对不上，回来找找资料好好理解一下，在知乎上看到一些比较通俗易懂的答案，所以摘抄到这里给大家分享一下。

我在数学书中看到散度和旋度的时候，如果不结合物理来理解这两个数学公式的话，不过是平平无奇的曲线积分、曲面积分的一个应用而已。数学书上提到这两个公式的目的应该也是为了加深对曲线积分、曲面积分的理解。

有句名言怎么说的来着：

> 数学没有物理是瞎子，物理没有数学是跛子

下面就让我们结合物理来理解下散度和旋度。我是学数学的并非学物理的，我之后涉及的物理知识很可能是非常直觉的、不严格的，望大家多多包涵。

1 通量与散度

要理解散度，先要理解通量。

1.1 通量

通量简单来说，就是单位时间内通过的某个曲面的量。

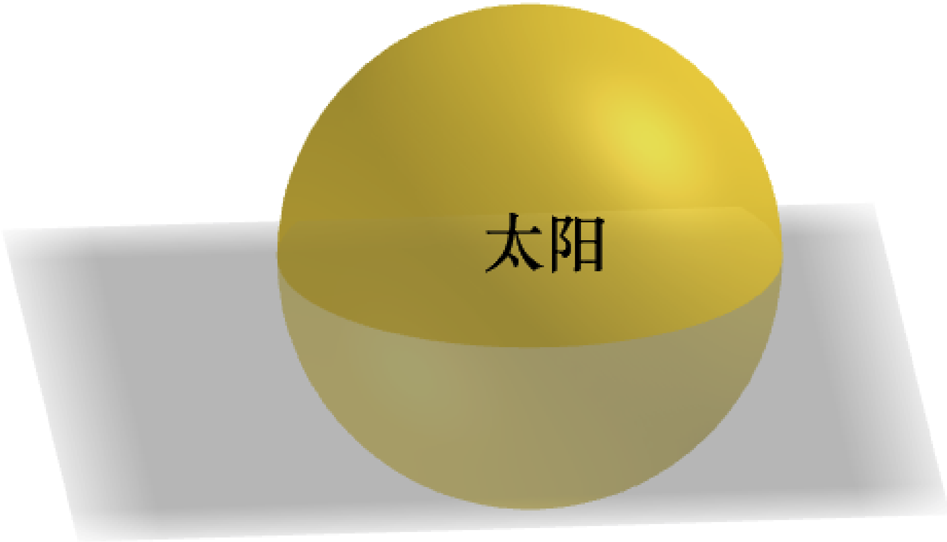
1.1.1 太阳辐射与通量

听起来有点抽象，我们举个例子：

我们都知道，人类离不开太阳。因为每时每刻我们都在接收太阳带给我们的能量。那太阳每秒钟到底会向外辐射多少能量呢？

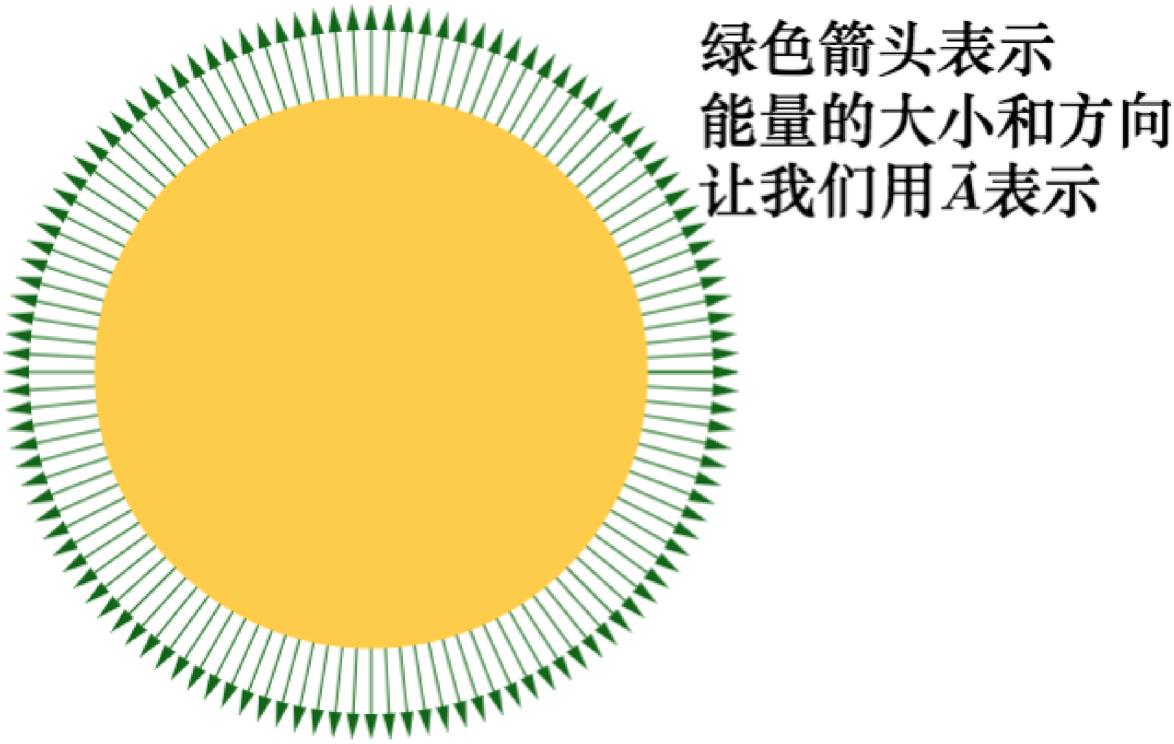
一种比较直观的办法，就是计算到底有多少能量通过太阳的表面。什么意思呢？

这个有着耀眼光芒的就是太阳：

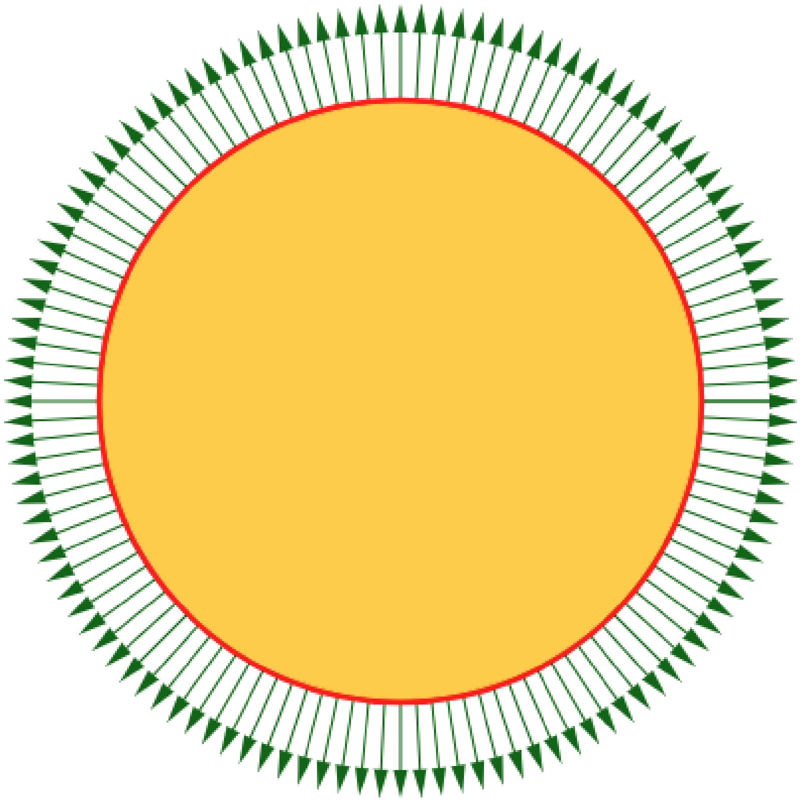


为了方便观看，我们只看它在二维平面上的投影图，这并不影响我们的讨论：

太阳每时每刻都在向外辐射能量。



沿着太阳表面，作一条封闭曲线（其实是封闭的曲面，因为太阳实际上是一个球体）：



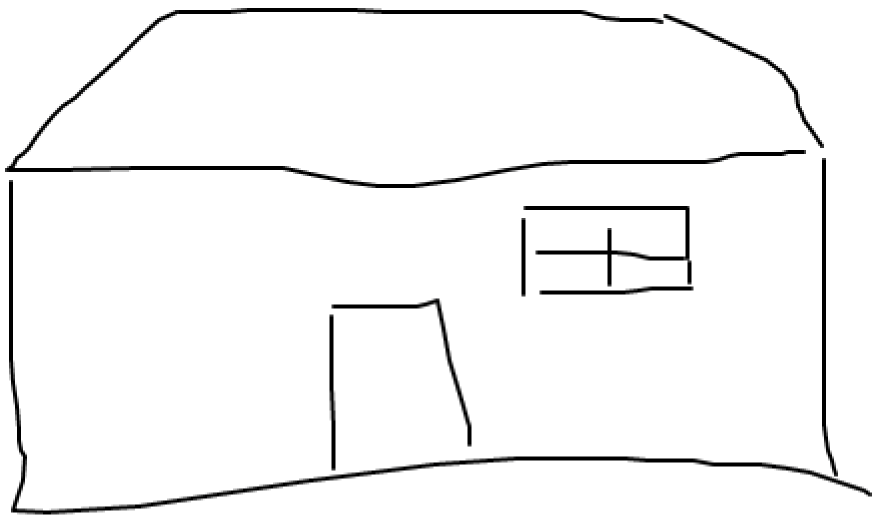
粗略来说，我们把曲面上的 $\vec{A}$ 给加起来就是通过此曲面的通量。

但是这里有个细节问题， $\vec{A}$ 在曲面上的不同的点的方向是不一样的，我们应该怎么相加？

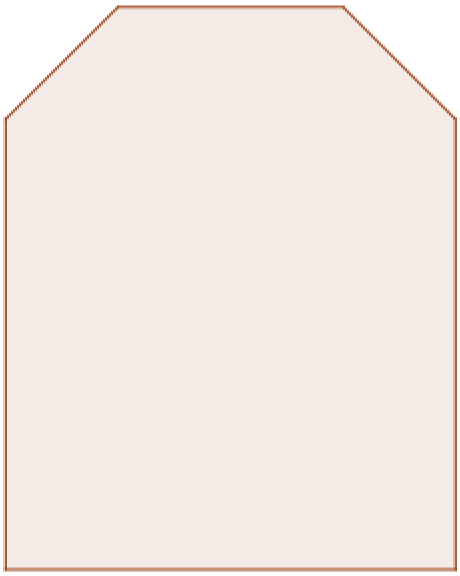
1.1.2 $\vec{A}$ 的方向

这里用太阳辐射的模型不太好说明，我们换一个模型来描述。

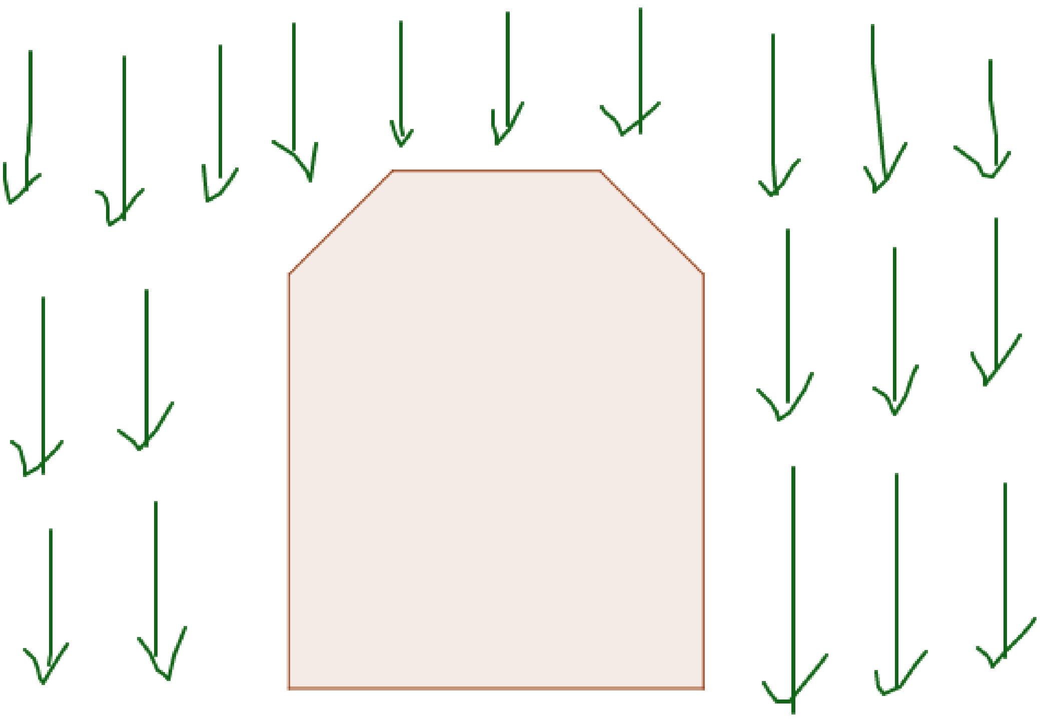
我有一间房子，请无视我的灵魂画法：



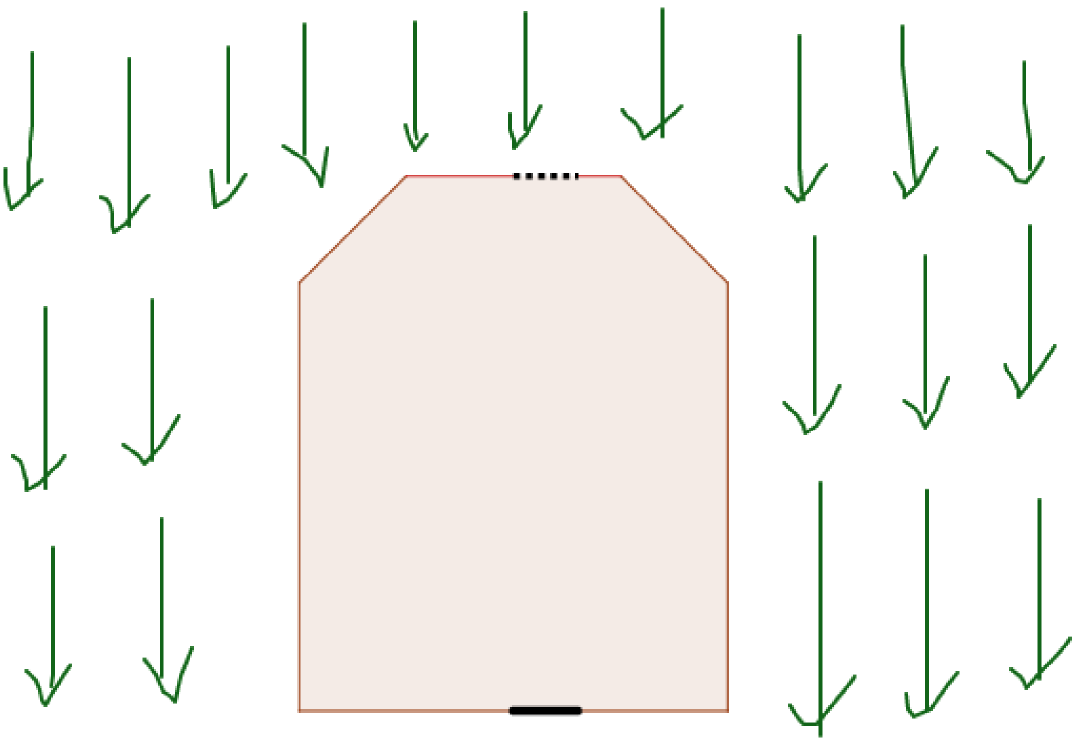
为了方便数学建模，我把它表示为一个多边形：



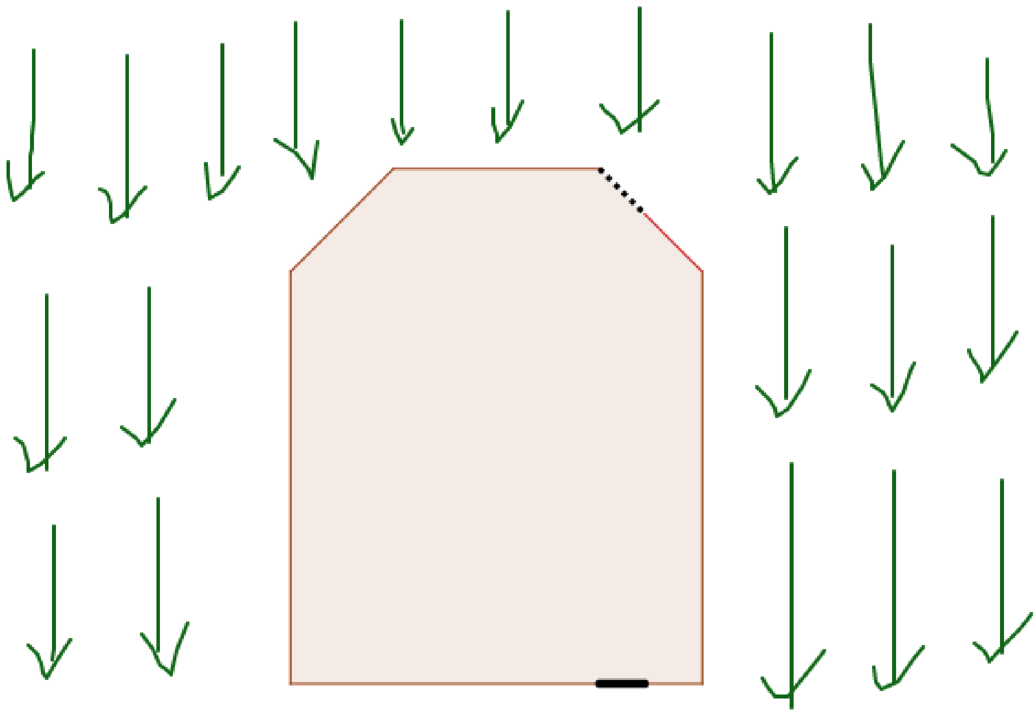
屋外下着垂直于地面的雨滴：



如果屋顶有一个天窗忘了关，地面就会有一滩水渍：



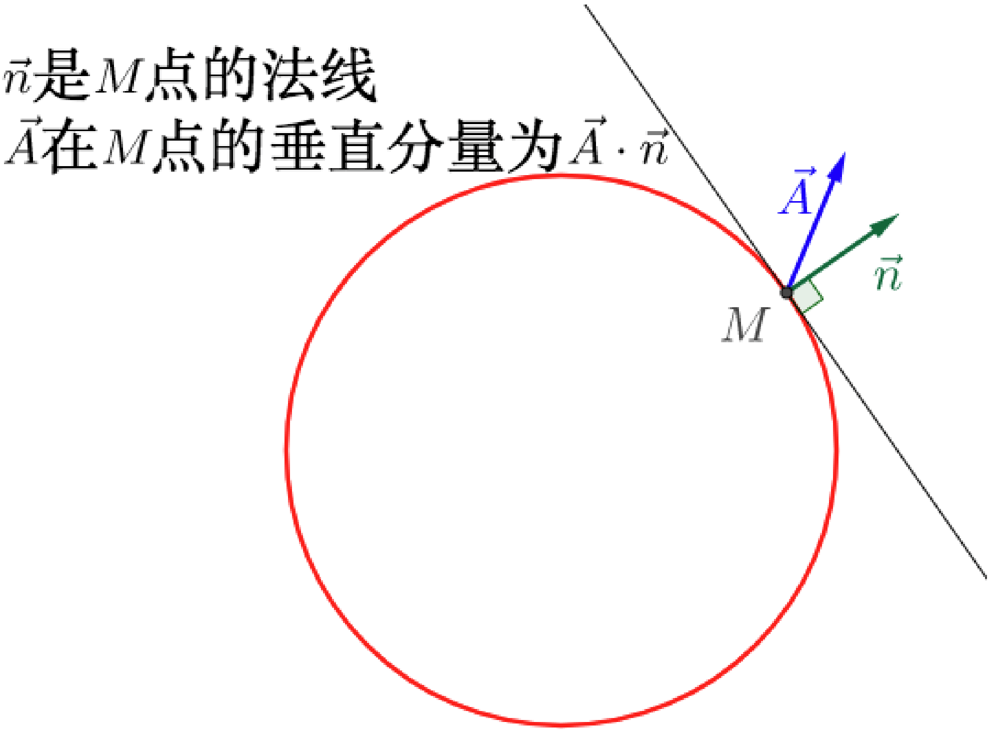
如果是侧面的屋顶有同样大小的天窗忘了关，地上的水渍就会小一些：



如果是在垂直的墙壁上的窗户忘了关，可以想见，地上是不会有水渍的。

可以观察到，水渍在雨水和窗户垂直的时候取到最大值，相切的时候取到最小值。在中间的时候水渍的大小是窗户在与雨水垂直方向的投影。

所以我们只需要关注 $\vec{A}$ 垂直于曲面的分量就可以了：



1.1.3 小结

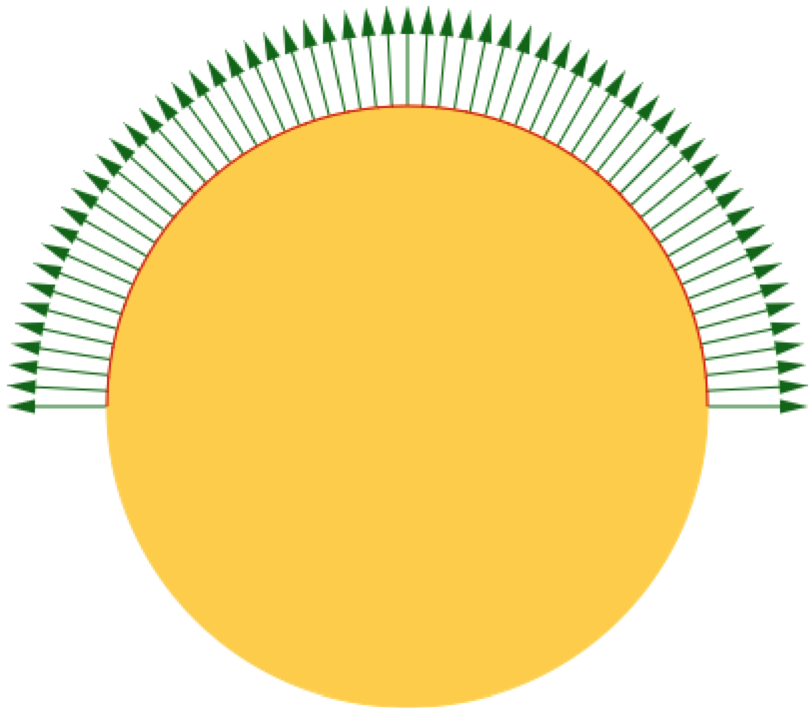
根据上面所述，通量就是把曲面上的 $\vec{A}\cdot\vec{n}$ 通过积分积起来。

我们很容易推出，对于曲面 Σ ，它的通量为：

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

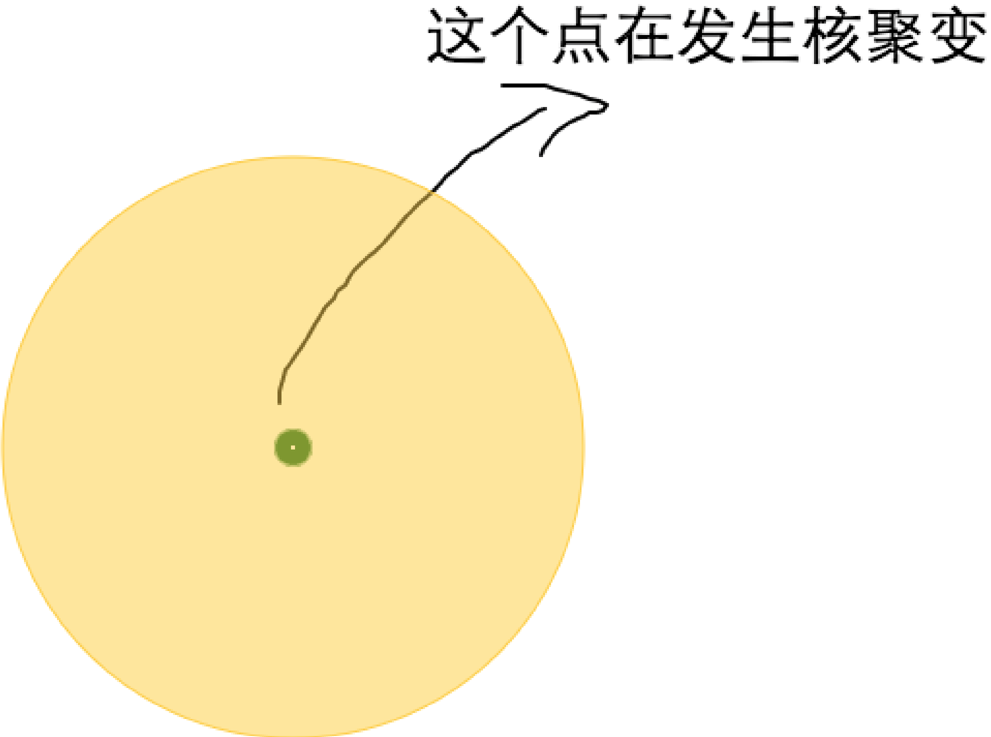
1.2 散度

实际上还有一种计算太阳表面辐射的办法，只是这个办法有点局限性，如果我们计算的表面不封闭的话就不能用，比如下面这样只计算一半的曲面的通量的话就不能使用：

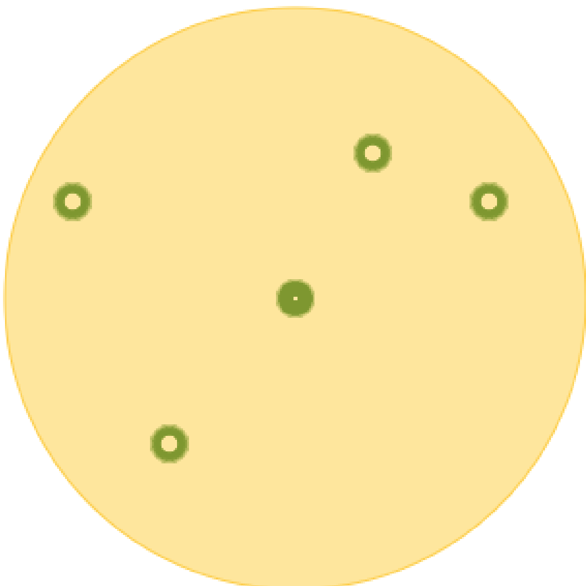


为什么不能用？你看了后面的讲解就可以知道了。

我们知道，其实太阳之所以会产生辐射，是因为太阳内部随时都在发生核聚变。



当然了，每时每刻有许许多多的点都在发生核聚变。

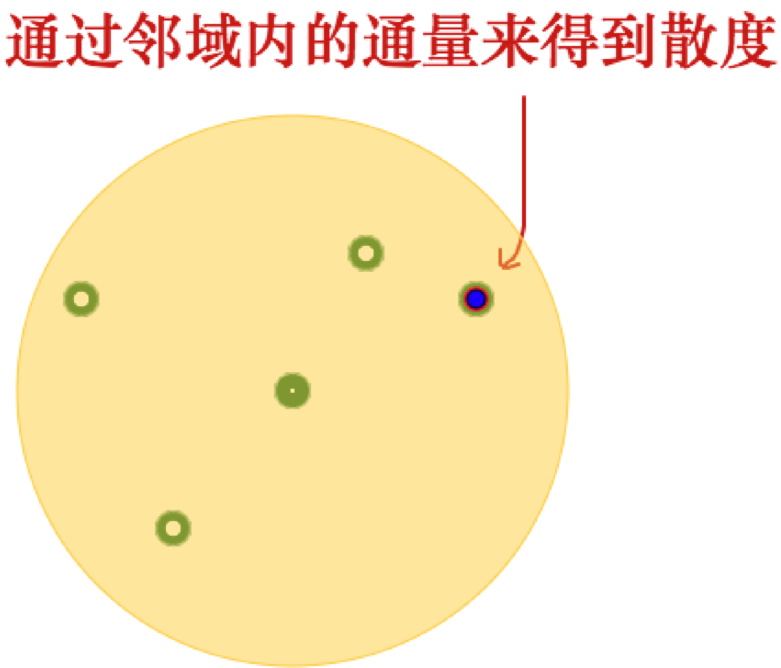


粗略地说，因为我们要计算整个太阳表面的辐射，每个点核聚变产生的辐射最终都会穿过太阳表面，因此我们把每个点的辐射加起来就可以得到太阳的表面辐射，即通量了。

当然，如果我们像之前说的一样只计算太阳一半的表面辐射的话，那么我刚才说的就不成立了。

为了通过这个思想来计算通量，我们就需要知道每个点的辐射强度（这其实就是高斯公式了），那么如何计算每一点的辐射强度呢？

根据微积分的基本思想，把将之前的封闭曲面缩小到极限为0，即几乎和辐射点重合时，用此时的通量，除以封闭曲面所围体积，就能得到此点的强度：



而此点的辐射强度就是散度。

所以散度的公式我们也很好推导，假设要求在向量场 $\vec{A}$ 中 M 点的散度：

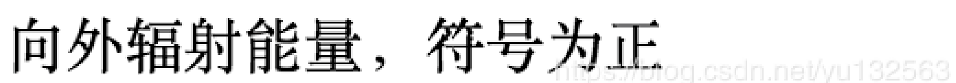
$$div\vec{A}(M)=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

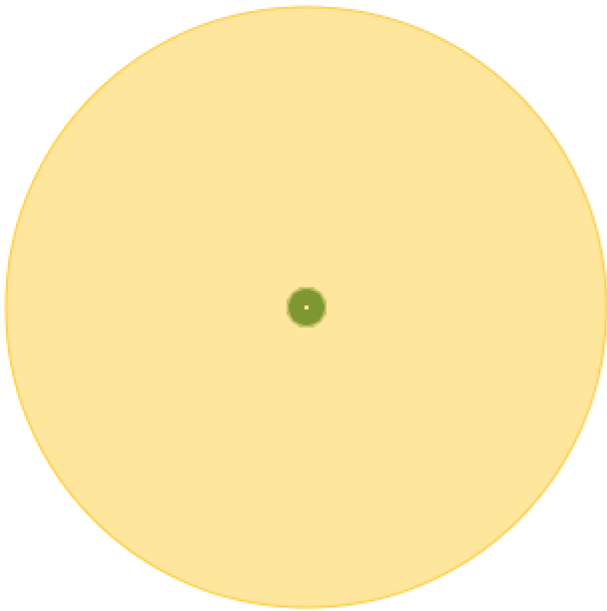
其中， Ω 为封闭曲面 Σ 围成的区域， V 为 Ω 的体积。

1.3 散度以及通量的符号

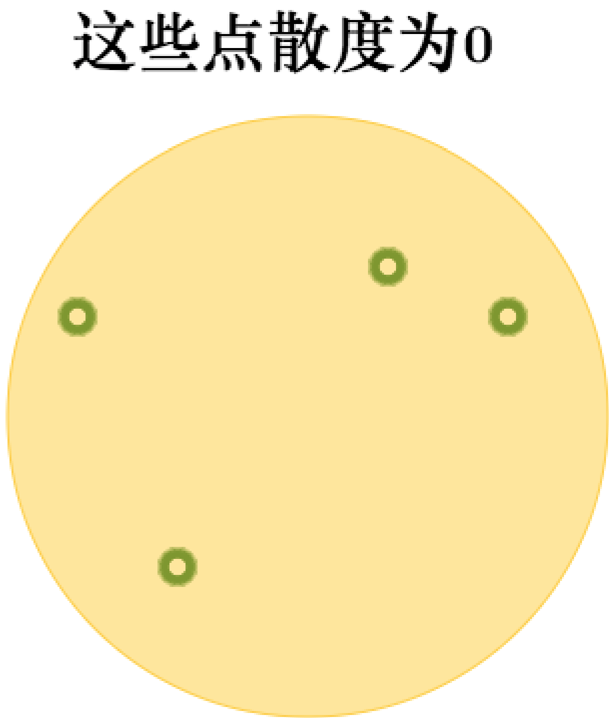
介于散度和通量的关系，所以下面就只介绍散度的符号，通量是一样的道理。

比如对于太阳中正在进行核聚变的点：





太阳中，有些点并不产生核聚变（有可能此点是真空），辐射只是经过此点：



而黑洞，能量进去了就不会出来，那么它的散度就为负。

好了，以后说“正能量”，可以文艺点说，“散度为正”。

2 环流量与旋度

环流量、旋度和通量、散度挺像的，下面的讲解就比较简略了，可以对比理解。

中国有句名言叫"水能载舟，亦能覆舟"。描述的是水的威力。

不过水不仅能使船上下颠簸，而且还能让船旋转。

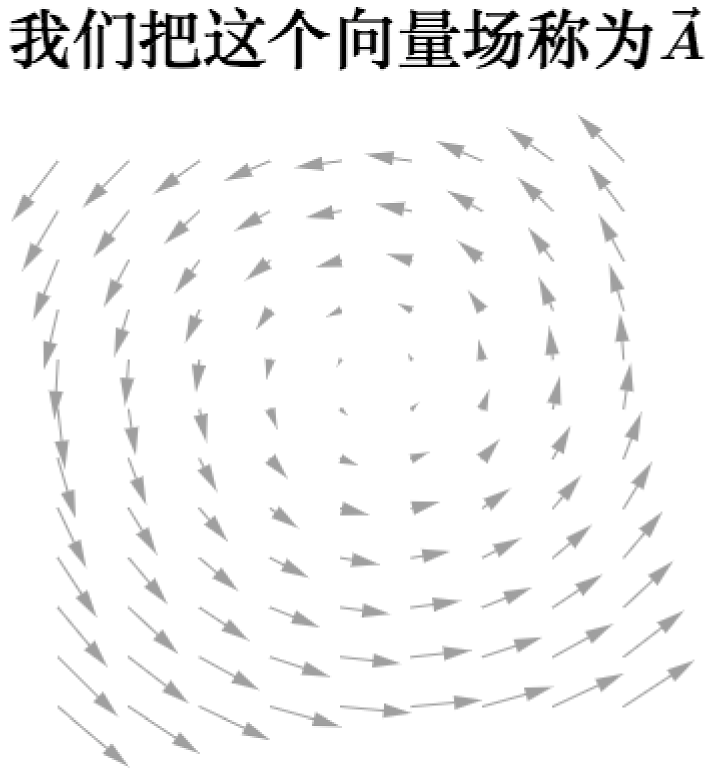
为了描述旋转，我们就有了环流量和旋度。

2.1 环流量

环流量简单来说，就是单位时间内环绕的某个曲线的量。

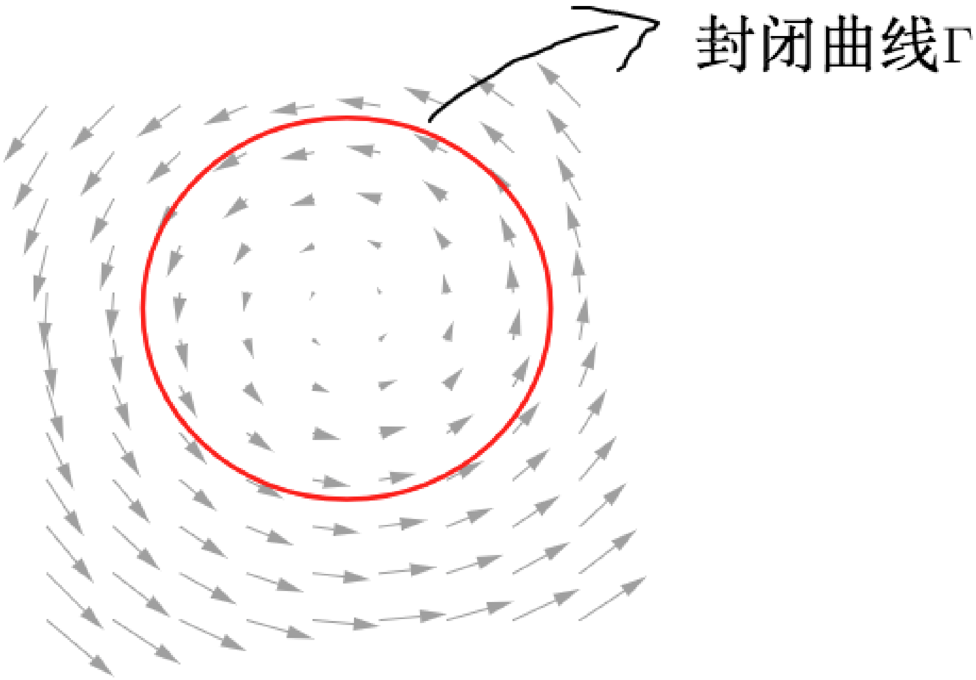
我下面描述的都是在二维向量场中的情况，三维向量场中的情况类似，但是要更复杂一些。

比如，这是一汪湖水，其中箭头所指方向为水流方向，长短为水流的力量大小：



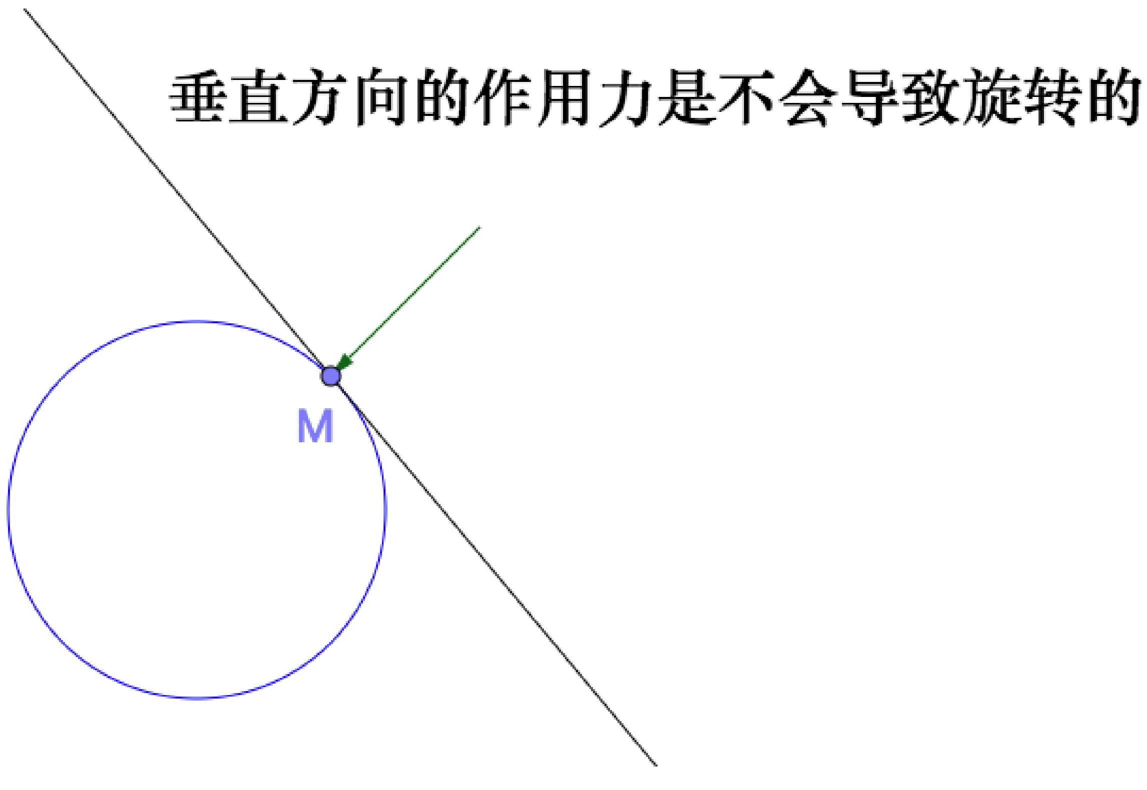
要计算一艘船在水流中受到多少旋转的力，就把这艘船丢到水里去。

船的轮廓曲线抽象为封闭曲线，我们称为 Γ：

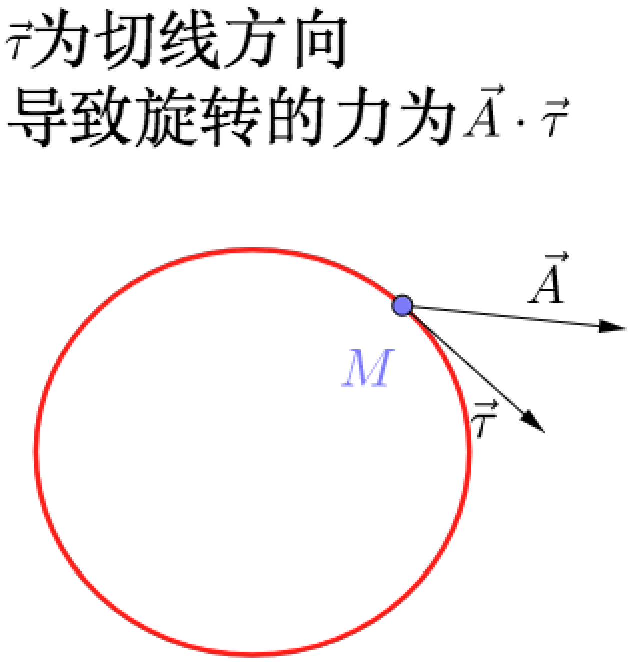


单位时间内，这艘船在水场中受到旋转的力就称为环流量。

对于一个圆，我们可以比较直观的感受到：



所以和通量类似的，我们只需要切线方向的力：



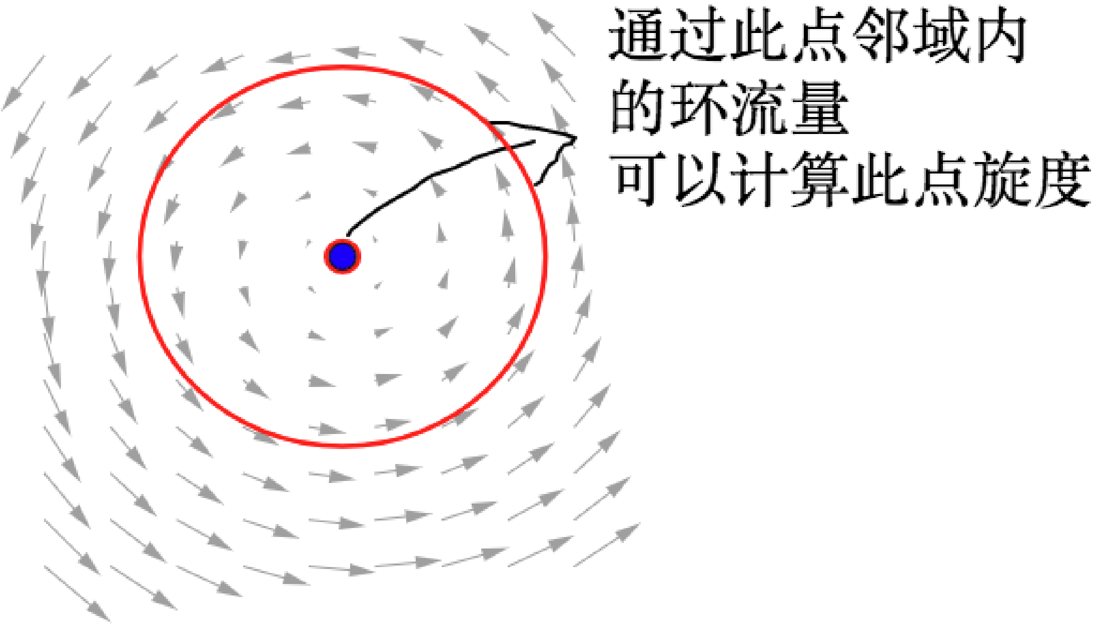
因此整个环流量的表达式为：

$$\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}dl$$

2.2 旋度

类似于通量，我们也可以把各个点环流量的强度加起来，得到环流量。

而通过不断缩小封闭区域就可以得到环流量的强度，即旋度：



我们也很容易推出此点旋度， M 点的旋度表达式为:

$$\lim_{\Sigma \to M} \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{\tau} dl$$

其中， Σ 为封闭曲面 Γ 围成的区域， S 为 Σ 的面积。

当然，旋度还有方向，下面再解释一下方向。

2.3 方向

旋转都是有方向的，那么封闭曲线是顺时针还是逆时针旋转呢？

先看看什么是右手定则：

大拇指所指方向为旋度的方向，知道大拇指的方向就知道封闭曲线是顺时针还是逆时针旋转了。

维基百科上有一幅图特别直观，一架农业飞机翼尖激起的气流。烟雾成顺时针或逆时针方向运动，对应的旋度在飞机前行的方向上：

3 总结

通过物理来理解这四个概念还是比较容易的。

- 通量是单位时间内通过的某个曲面的量
- 散度是通量强度
- 环流量是单位时间内环绕的某个曲线的量
- 旋度是环流量强度

其实，这些概念本来就是在物理学领域产生的，物理学家发明完了之后，就问数学家，“您看怎么计算？”

数学家翻一翻白眼，你知不知道这得死多少脑细胞！！

梯度的旋度问题

梯度的旋度不为零得话。。

我通俗地说一下矢量场那个吧。矢量场的旋度是用来描述场围绕中心旋转的程度的量，就是看一堆矢量绕中心转圈的部分多不多，是多少。而散度描述的是一堆矢量发散，也就是远离中心或者靠近中心(指向中心)的部分。在同一点上，分别被切向分量(绕圈)和径向分量(发散)来表示。这俩货相互垂直啊！所以乘起来就得零喽。物理意义举个例子，比如一坨质点在一个场中运动，对于速度矢量先旋度后散度的运算就是问你这一坨质点相对中心的角速度(也就是切向线速度)会让他在多大程度上远离中心。废话，当然是零了...

【电磁场】0.亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理是刻画电磁场唯一性的基本定理。

空间的一个矢量场由其散度、旋度和定解条件唯一确定。

更具体地说，一个矢量场可以表示为一个无旋的散度场和一个无散的旋度场的叠加。即

$$A=A_1+A_2$$

A=A_1+A_2

。其中

$$\nabla \times A_1=0,\nabla \cdot A_2=0$$

\nabla \times A_1=0,\nabla \cdot A_2=0

。若记

$$\nabla \cdot A_1=\rho, \nabla \times A_2=J$$

\nabla \cdot A_1=\rho, \nabla \times A_2=J

分别为矢量场的通量源和旋涡源，则矢量场

$$A$$

A

的源分布为

$$\nabla \cdot A=\nabla \cdot A_1=\rho$$

\nabla \cdot A=\nabla \cdot A_1=\rho

，

$$\nabla \times A=\nabla \times A_2=J$$

\nabla \times A=\nabla \times A_2=J

如果再给定了定解条件，矢量场

$$A$$

A

就唯一地确定了。

亥姆霍兹定理是研究电磁场理论的主线。无论是静态场还是时变场，都是围绕着其散度、旋度和边界条件展开分析的。电磁场的Maxwell方程组也正是给出了电场

$$E$$

E

和磁场

$$B$$

B

的散度和旋度，结合具体问题的定解条件，理论上就可以求解所有的宏观电磁场问题。

$$\nabla \cdot E=\frac{1}{\varepsilon }\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

\nabla \cdot E=\frac{1}{\varepsilon }\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}

$$\nabla \times E=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

\nabla \times E=-\frac{\partial B}{\partial t}

$$\nabla \cdot B=0$$

\nabla \cdot B=0

$$\nabla \times B=\mu \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}+\mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

\nabla \times B=\mu \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}+\mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}

以下分别讨论场的散度，场的旋度和场的定解条件这三个概念。

1.场的散度

将矢量场垂直穿过某一曲面的量称为通量。综合考虑矢量场方向和曲面方向，以点积的形式进行定义。

$$\phi =\int_{S}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

\phi =\int_{S}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}

现在假设曲面是封闭的，那么曲面S就包围着一块空间区域V。容易理解，矢量场穿过封闭面S的通量应该是由场在区域V内的所有源产生（或吸收）的量的代数和。这个源就定义为场在某一点的散度，它表示场在空间一点的产生量（或吸收量）。

根据散度的定义，令体积V收缩至某一点M，可以得到散度在直角坐标中的计算公式

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0}{\frac{\Delta \phi }{\Delta V}}=\nabla \cdot \overrightarrow{A}= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

\lim_{\Delta V \rightarrow 0}{\frac{\Delta \phi }{\Delta V}}=\nabla \cdot \overrightarrow{A}= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}

即散度等于场函数在各个方向上的分量在其所在方向的变化率之和。

高斯公式揭示了通量和通量源（散度）的关系：

$$\oiint_{S}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}=\iiint_V (\nabla \cdot \overrightarrow{A}) \mathrm{d}V$$

\oiint_{S}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}=\iiint_V (\nabla \cdot \overrightarrow{A}) \mathrm{d}V

2.场的旋度

将矢量场平行沿某一闭合曲线绕行的量称为环量。综合考虑矢量场方向和曲线方向，以点积的形式进行定义。

$$\Gamma =\oint_{l}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}$$

\Gamma =\oint_{l}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}

现在考虑这条曲线所围成的曲面。最简单的一种情况是，以该曲线为周界的曲面在通过该曲线的平面内（对于其他以该曲线为轮廓的面，其投影都是这个“最小”的面）。从而，在矢量场沿某一闭合曲线绕行的环量，是这条曲线所围成曲面内矢量场旋转强度的加和。即

$$\oint_{l}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}=\iint_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

\oint_{l}^{} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l}=\iint_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \mathrm{d}\overrightarrow{S}

（斯托克斯公式）

那么怎样计算旋转强度

$$\nabla \times A$$

\nabla \times A

呢？这需要讨论矢量场在各个空间方向上的旋转程度。首先，考虑矢量场A在x方向的旋转程度。由方向x表示的这个旋转程度实际上是yOz平面上的旋转程度，显然，这是由

$$\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

\frac{\partial A_y}{\partial z}

和

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

\frac{\partial A_z}{\partial y}

这两项决定的。考虑到

$$\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

\frac{\partial A_y}{\partial z}

和

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

\frac{\partial A_z}{\partial y}

对矢量场A在yOz平面上旋转程度的贡献方向相反，根据右手定则可以确定矢量场A在x方向的旋度分量为

$$(\nabla \times A)_x=\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

(\nabla \times A)_x=\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}

同理可得

$$(\nabla \times A)_y=\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

(\nabla \times A)_y=\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}

$$(\nabla \times A)_z=\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}$$

(\nabla \times A)_z=\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}

这可以用理论分析来说明。令曲线圈越来越小，收缩到一点M，得到旋度在直角坐标中的计算公式为

$$\lim_{S \rightarrow 0}{\frac{\Delta \Gamma}{\Delta S}}= \nabla \times \overrightarrow{A} =\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y},\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)$$

\lim_{S \rightarrow 0}{\frac{\Delta \Gamma}{\Delta S}}= \nabla \times \overrightarrow{A} =\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y},\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)

这与推理结果是一致的。

3.场的定解条件

通过场的散度和旋度求解场的表达式是一个积分过程。只有给出定解条件，才能确定积分过程中产生的任意积分常数。定解条件分为空间上的边界条件和时间上的初始条件。

位函数

一个矢量的位函数是这样的一种函数，它的变化率（可以是梯度、旋度、散度）等于该矢量。例如，电位函数

$$\varphi$$

\varphi

满足

$$E=-\nabla \varphi$$

E=-\nabla \varphi

或

$$\varphi (x)=\int _{x}^{\infty }E\cdot \mathrm{d}l$$

\varphi (x)=\int _{x}^{\infty }E\cdot \mathrm{d}l

动态位函数A满足

$$B=\nabla \times A$$

B=\nabla \times A

位函数相当于是矢量函数的积分。由于提前进行了一步积分，因此它在求解某些问题时比直接求解场量要简单一些。同时，位函数也能用于描述场在边界上的定解条件。

场的定解条件有三类，分别是在边界（包括时间边界和空间边界）上的位函数值，在边界上位函数的法向导数，以及这两者的线性组合。

当空间中只有一种有限分布的场时，定解条件就是边界条件和初始条件。若场的分布区域及于无限远，则需要给出无穷远处的边界条件（特别地，当场源分布有限时，有所谓的自然边界条件，即位函数在无穷远处为有限值）。若空间中存在多种场，则需要给出不同场边界上的的衔接条件。

给定了这些条件，就可建立定解问题。求解这个定解问题，电磁场的分布问题从理论上来说就得到了解决。而这一切的依据就是亥姆霍兹定理。

散度和旋度常用关系式

$$(1)\ \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f;$$
$$(2)\ \nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f\nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla f\cdot\mathbf{A};$$
$$(3)\ \nabla\times(f\mathbf{A}) = f\nabla\times\mathbf{A} + \nabla f\times\mathbf{A};$$
$$(4)\ \nabla\times(\nabla f) = 0;$$
$$(5)\ \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0;$$
$$(6)\ \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} - (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{A};$$
$$(7)\ \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B};$$
$$(8)\ \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A};$$
$$(9)\ \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A};$$
$$(10)\ (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A};$$
$$(11)\ \nabla\cdot\mathbf{r} = 3;$$
$$(12)\ \nabla\times\mathbf{r} = 0;$$
$$(13)\ \nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r}) = 0;$$
$$(14)\ d\mathbf{F} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}dt \quad (\mathbf{F}\text{ a differentiable vector field quantity});$$
$$(15)\ d\varphi = d\mathbf{r}\cdot\nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt \quad (\varphi\text{ a differentiable scalar field quantity}).$$

更多信息请参见

http://boson4.phys.tku.edu.tw/fundamentals_of_math_phys/unit-03_Vector__grad-div-curl_n_coord-sys.html

最后，要说的是知乎是个好东西，好多学术性比较抽象的东西，知乎上有通俗易懂的解释。强烈推荐！！！

作者：Grit

链接：https://www.zhihu.com/question/29970414/answer/46292024

来源：知乎