

**Міністерство освіти і науки України  
Дніпропетровський національний університет  
ім. Олеся Гончара**

## **ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ**

**2010**

**Міністерство освіти і науки України  
Дніпропетровський національний університет  
ім. Олеся Гончара**

---

**Кафедра математичного забезпечення ЕОМ**

# **ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ**

**Лабораторний практикум**

**Дніпропетровськ  
РВВ ДНУ  
2010**

Уміщені лабораторні роботи з курсу «Методи теорії масового обслуговування». Наведені деякі теоретичні відомості й методичні рекомендації до виконання робіт.

Для студентів і аспірантів факультету прикладної математики ДНУ, а також студентів інших факультетів, які навчаються за спеціальностями інженерного й технічного напрямків.

Темплан 2010, поз. 31

## **Теорія масового обслуговування**

### **Лабораторний практикум**

Укладачі: д-р техн. наук, проф. О.П. Приставка  
канд. техн. наук Т.Г. Ємел'яненко  
канд. техн. наук О.М. Мацуга

Редактор О.В. Бец  
Техредактор Л.П. Замятіна  
Коректор А.А. Гриженко

---

Підписано до друку 25.05.10. Формат 60х84/16. Папір друкарський. Друк плоский.  
Ум. друк. арк. 2,6. Ум. фарбовідб. 2,6. Обл.-вид. арк. 1,44. Тираж 100 пр. Зам. №  
РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.  
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

## Передмова

Одним із фундаментальних та прикладних напрямів сучасної математики є теорія масового обслуговування (ТМО). Це математична дисципліна, що вивчає системи, які обслуговують потоки подій випадкового характеру. Практично в усіх галузях людської діяльності тією чи іншою мірою реалізовані методи, моделі й системи масового обслуговування. Особливої актуальності ТМО набуває у зв'язку з інформатизацією суспільства. Комп'ютерні мережі, різноманітні автоматизовані системи керування й аналогічні їм технічні засоби втілюють у собі численні ідеї й методи ТМО. Прикладом цього є, зокрема, мережа з комунікацією пакетів. Функції такої мережі – це пакетування, збереження інформації в запам'ятовуючих пристроях, передача інформації, вибір маршруту, упорядкування руху інформації, контроль помилок, розміщення пам'яті, керування потоками даних та ін. При цьому час виконання даних функцій має випадковий характер. Ефективним методом дослідження систем масового обслуговування, для яких характерні функціонування в умовах дії випадкових факторів, складність функцій, виконуваних системою, та складні взаємозв'язки між її елементами, може бути імітаційне моделювання.

У пропонованому виданні висвітлені основи теорії масового обслуговування в рамках лабораторного практикуму з курсу «Методи теорії масового обслуговування». Перша лабораторна робота присвячена обробці та аналізу потоку подій, який являє собою складову частину будь-якої системи масового обслуговування. Друга та третя лабораторні роботи присвячені імітаційному моделюванню систем масового обслуговування. У додатку подані обчислювальні процедури моделювання випадкових чисел та оцінки їх якості, що є основою імітаційного моделювання. Наведений у роботі матеріал викладено в рамках обчислювальних процедур та орієнтовано на застосування в сучасних інформаційних технологіях.

## **Загальні вимоги до виконання лабораторних робіт**

Результатом кожної лабораторної роботи має бути роботоздатна **програма**, що має виконувати зазначені у відповідній роботі функції та задовольняти такі основні вимоги:

1. Програма повинна бути незалежна від даних. Вхідний файл має обиратися в діалозі з користувачем. Передбачається, що вхідні дані знаходяться в текстовому файлі.
2. Результати виконання всіх обчислень мають виводитись у вигляді таблиць, графіків і текстових коментарів.
3. Для кожного графіка слід виконати автоматичне масштабування, зобразити шкалу й показати одиниці виміру.
4. Відображення результатів повинне відповідати точності обчислень (кількість знаків після коми не повинна перевищувати 4).

За результатами виконання лабораторної роботи має бути оформлений **звіт**, що складається з таких частин:

1. Постановка задачі.
  2. Опис програми (вхідні та вихідні параметри, основні функції, особливості реалізації (якщо є), інтерфейс, порядок роботи з програмою).
  3. Тестування (наведення одержаних результатів у вигляді графіків і таблиць із коментарями).
  4. Висновки.
- Звіт слід подати в роздрукованому вигляді разом із роботоздатною програмою.

## Лабораторна робота 1. Обробка потоку подій

**Мета роботи** – вивчити методи обробки потоків подій, створити алгоритми та програмне забезпечення для обробки потоків подій, набуті навичок розв’язання конкретних задач указанного типу в діалоговому режимі, провести обчислювальні експерименти.

### Постановка задачі

Створити програмне забезпечення для обробки потоку подій, у якому реалізувати такі обчислювальні процедури:

1. Дослідження розподілу інтервалів між подіями.
2. Аналіз тенденції до зміни інтервалів між подіями.
3. Визначення параметра потоку та довірчих інтервалів для нього.
4. Побудова графіка кусково-сталої функції інтенсивності та довірчих інтервалів для неї.

5. Апроксимація кусково-сталої функції інтенсивності неперервною функцією  $\lambda(t)$  та побудова за нею графіка функції розподілу

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) \text{ за варіантами (табл. 1).}$$

6. Побудова графіка сплайн-експоненціальної функції розподілу.

7. Порівняння пуассонівських потоків за варіантами (табл. 1).

За результатами виконання лабораторної роботи скласти звіт.

Таблиця 1

### Індивідуальні варіанти завдань

Варіант	Неперервна функція	Порівняння пуассонівських потоків
1	$\lambda(t) = a + bt$	Два потоки, фіксується кількість подій
2	$\lambda(t) = a + bt + ct^2$	Те саме
3	$\lambda(t) = at^b$	Те саме
4	$\lambda(t) = ab^t$	Те саме
5	$\lambda(t) = \exp(a + bt)$	Те саме
6	$\lambda(t) = a + bt$	Два потоки, фіксуються інтервали часу
7	$\lambda(t) = a + bt + ct^2$	Те саме
8	$\lambda(t) = at^b$	Те саме
9	$\lambda(t) = ab^t$	Те саме
10	$\lambda(t) = \exp(a + bt)$	Те саме

Варіант	Неперервна функція	Порівняння пуассонівських потоків
11	$\lambda(t) = a + bt$	$k$ потоків
12	$\lambda(t) = a + bt + ct^2$	Те саме
13	$\lambda(t) = at^b$	Те саме
14	$\lambda(t) = ab^t$	Те саме
15	$\lambda(t) = \exp(a + bt)$	Те саме

### Теоретичні положення

**Потоком подій** (вимог, заявок) називається послідовність подій, що відбуваються одна за одною. Залежно від фізичних принципів та сутності потоки поділяються на однорідні та неоднорідні. Потоки також бувають регулярними та нерегулярними. **Потік** називається **регулярним**, якщо події відбуваються одна за одною через строго визначені проміжки часу. **Потік** називається **нерегулярним (випадковим)**, якщо проміжки часу між подіями та кількість подій за ці проміжки є випадковими. Надалі розглядаються виключно однорідні нерегулярні потоки подій. Кожен такий потік може характеризуватися стаціонарністю, відсутністю післядії та ординарністю.

**Стаціонарний потік** – це потік, для якого ймовірність настання  $k_1, \dots, k_n$  подій для будь-якої групи скінченної кількості відрізків, що не перетинаються, залежить від довжини відрізків, кількості подій на відрізку, але не залежить від їх розташування на часовій осі, тобто від початку відліку. Формально це означає, що функція розподілу має вигляд

$$F(t_1, \dots, t_n, k_1, \dots, k_n) = P\{n(t_1) < k_1, \dots, n(t_n) < k_n\} = \\ = P\{n(t_1 + \tau) - n(\tau) < k_1, \dots, n(t_n + \tau) - n(\tau) < k_n\}.$$

Окремий випадок – це  $P\{n(t) = k\} = P\{n(t) - n(\tau) = k\}$ .

Потік називається **потоком без післядії**, якщо ймовірність настання  $k$  подій протягом часу  $[t; t + \tau]$  не залежить від того, скільки подій відбулося до цього проміжку. З імовірнісного погляду це означає, що умовна ймовірність настання  $k$  подій за час  $[t; t + \tau]$  збігається з безумовною (немає впливу попередньої інформації на теперішню та теперішньої на майбутню).

**Потік** називається **ординарним**, якщо неможливе настання двох або більше подій в один і той же момент часу:

$$\frac{P_{>1}(t, \Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ або } P_{>1}(t, \Delta t) = o(\Delta t).$$

Потік подій, що має властивості стаціонарності, відсутності післядії та ординарності, називається **найпростішим або пуассонівським**.

Важливі характеристики потоків, у тому числі найпростіших, – це параметр потоку та функція інтенсивності.

Границя

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_0(t, \Delta t)}{\Delta t},$$

якщо вона існує, називається **параметром потоку**.

**Функція інтенсивності** визначається як

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

де  $f(t)$  – функція густини;  $F(t)$  – функція розподілу інтервалів часу між подіями.

Інтенсивність  $\lambda(t)$  в момент часу  $t$  інтерпретується як середня кількість подій, що припадають на одиницю часу в правому півоколі точки  $t$ . Для довільного потоку інтенсивність пов'язана з параметром такою нерівністю:

$$\lambda(t) \geq \mu(t).$$

Для ординарного потоку слушне співвідношення

$$\lambda(t) = \mu(t).$$

Якщо потік не лише ординарний, а й найпростіший, то правдиве таке:

$$\lambda(t) = \mu(t) = \text{const}.$$

На практиці потік подій може бути поданий у вигляді послідовності:

1) інтервалів часу між подіями  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$ , де  $\tau_1$  – інтервал між початком відліку та настанням першої події;  $\tau_i$  – інтервал між настанням  $(i-1)$ -ї та  $i$ -ї подій;  $n$  – кількість подій за весь час спостереження;

2) моментів часу  $\{t_i; i = \overline{1, n}\}$ , де  $t_1 = \tau_1$  – момент настання першої події;  
 $t_i = \sum_{j=1}^i \tau_j$  – момент настання  $i$ -ї події;

3) чисел  $\{k_i; i = \overline{1, n}\}$ , що визначають кількість подій, які відбуваються протягом заданих відрізків часу  $[t_0; t_1), [t_1; t_2), \dots, [t_{n-1}; t_n]$ .

Надалі припускається, що потік заданий у вигляді  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$ .

Наводяться процедури обробки такого потоку, які дозволяють:

- 1) перевірити, чи є він найпростіший;
- 2) виявити тренд у зміні інтервалів часу для не найпростішого потоку;
- 3) провести оцінювання й аналіз параметра потоку та функції інтенсивності;
- 4) здійснити порівняння найпростіших потоків із метою формування єдиного потоку та його подальшої обробки.



Перевірка того, чи є потік найпростіший, зводиться до дослідження розподілу інтервалів між подіями, який має бути експоненціальний. Для перевірки гіпотези  $H_0: F(\tau) = 1 - \exp(-\lambda\tau)$  про те, що інтервали між подіями розподілені за експоненціальним законом, використовують критерій Манна.

**Процедура 1.** Ранжують  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , у порядку зростання. Обчислюють значення величин  $d_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , де  $\tau_0 = 0$  за визначенням. Знаходять значення нормованих величин  $\bar{d}_i = (n - i + 1)d_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Обчислюють величину  $V$  як кількість пар  $i < j$ , для яких  $\bar{d}_i > \bar{d}_j$ , причому у випадку рівності вказаних величин до  $V$  додають 0,5:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n I(\bar{d}_i, \bar{d}_j),$$

де

$$I(\bar{d}_i, \bar{d}_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \bar{d}_i > \bar{d}_j, \\ 0,5, & \text{якщо } \bar{d}_i = \bar{d}_j, \\ 0, & \text{якщо } \bar{d}_i < \bar{d}_j. \end{cases}$$

Знаходять математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення величини  $V$ :

$$E(V) = \frac{n(n-1)}{4},$$

$$\sigma(V) = \sqrt{\frac{(2n+5)(n-1)n}{72}}.$$

Визначають статистику в такому вигляді:

$$u = \frac{V + 0,5 - E(V)}{\sigma(V)}.$$

За заданого критичного значення  $\alpha$  обчислюють квантиль стандартного нормального розподілу  $u_{\alpha/2}$ , який порівнюють зі значенням статистики  $u$ . Якщо  $|u| \leq u_{\alpha/2}$ , то гіпотезу  $H_0$  щодо експоненціального закону розподілу інтервалів між подіями приймають. Якщо ж  $|u| > u_{\alpha/2}$ , вважають, що закон розподілу інтервалів між подіями відмінний від експоненціального і потік не є найпростіший.

Якщо на основі процедури 1 встановлено, що потік не найпростіший, то задача зводиться до виявлення тенденції до зміни інтервалів між подіями.

### *Тенденція до зміни інтервалів між подіями*

Інтервали між подіями можуть збільшуватися або зменшуватися з часом. Наприклад, інтервали між відмовами в технічних системах можуть збільшуватися в результаті усунення дефектів, підвищення якості технічного обслуговування, а зменшення цих інтервалів може бути наслідком зносу, старіння, поганого технічного обслуговування.

Визначення тенденції до зміни інтервалів між подіями проводять за вхідним масивом за допомогою критерію Манна.

**Процедура 2.** На основі  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$  обчислюють значення величини  $W$ , яке дорівнює кількості випадків, коли більш ранній інтервал менший одного з більш пізніх, тобто кількості нерівностей  $\tau_i < \tau_j$  за  $i < j$ . Якщо два інтервали рівні, до значення величини  $W$  додають 0,5:

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n I(\tau_i, \tau_j),$$

де

$$I(\tau_i, \tau_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \tau_i < \tau_j, \\ 0,5, & \text{якщо } \tau_i = \tau_j, \\ 0, & \text{якщо } \tau_i > \tau_j. \end{cases}$$

Розраховують значення величин

$$E(W) = \frac{n(n-1)}{4},$$
$$\sigma(W) = \sqrt{\frac{(2n+5)(n-1)n}{72}}.$$

Визначають статистику Манна

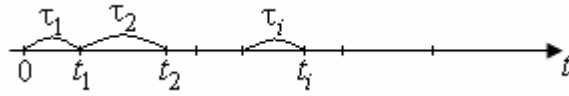
$$u = \frac{W + 0,5 - E(W)}{\sigma(W)}.$$

Для заданого  $\alpha$  обчислюють квантиль стандартного нормального розподілу  $u_{\alpha/2}$ . Якщо  $|u| \leq u_{\alpha/2}$ , то говорять, що істотної тенденції до зміни інтервалів між подіями немає. У протилежному разі говорять про наявність тенденції до зміни інтервалів. При цьому якщо  $u > u_{\alpha/2}$ , то існує тенденція до збільшення інтервалів, а якщо  $u < -u_{\alpha/2}$  – до зменшення.

### *Статистичне оцінювання параметра потоку*

Оцінювання параметра потоку може бути виконане так, як показано нижче.

**Процедура 3.** Початковий масив  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$  переформовують на масив  $\{t_i; i = \overline{1, n}\}$ , де  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_i = \tau_i + t_{i-1}$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Потік вимог

Масив  $\{t_i; i = \overline{1, n}\}$  розбивають на  $m$  класів, кожен шириною

$$\Delta t = \frac{t_n}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \tau_i,$$

і для кожного класу визначають  $n_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , як кількість значень  $t_i$ , що потрапили до нього. Розраховують статистичну оцінку параметра потоку для  $s$ -го класу у вигляді

$$\hat{\mu}_s = \frac{n_s}{n \Delta t}, \quad s = \overline{1, m}.$$

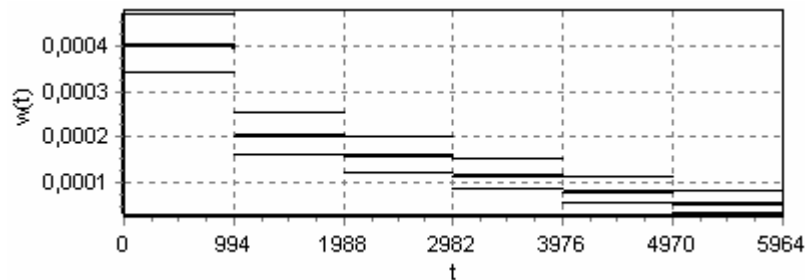
Здійснюють довірче оцінювання параметра потоку відповідно до співвідношення

$$\mu_{s,1} \leq \mu_s \leq \mu_{s,2}, \quad s = \overline{1, m},$$

де

$$\mu_{s,1,2} = \hat{\mu}_s + \frac{1}{n \Delta t} \left( \frac{1}{2} u_{\alpha/2}^2 \mp u_{\alpha/2} \sqrt{n_s + \frac{1}{4} u_{\alpha/2}^2} \right).$$

Відтак одержують масив  $\{\hat{\mu}_s, s = \overline{1, m}\}$  значень параметра потоку, який візуалізують на проміжку  $[0; t_n]$  (рис. 2).



**Рис. 2.** Графік параметра потоку та довірчих інтервалів на нього

**Зауваження 1.** У загальному випадку класи, у межах яких розраховують значення параметра потоку, можуть мати різну ширину.

Якщо встановлено, що потік найпростіший, то функція інтенсивності є стала, а її оцінка дорівнює

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n}, \quad (1)$$

де  $t_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$  – загальний час спостереження.

Для ненайпростішого потоку функція інтенсивності є кусково-стала. Її оцінювання виконують за нижчеописаною процедурою.

**Процедура 4.** Масив  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$  розбивають на  $m$  класів, кожен шириною

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{m},$$

де  $\tau_{\max}, \tau_{\min}$  – відповідно максимальне та мінімальне значення масиву  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$ , і для кожного класу визначають  $n_s, s = \overline{1, m}$ , як кількість значень  $\tau_i$ , що потрапили до цього класу. Інтенсивність потоку для  $s$ -го класу оцінюють відповідно до формули

$$\hat{\lambda}_s = \frac{n_s}{(n - N_s)\Delta\tau}, \quad s = \overline{1, m-1},$$

де  $N_s = \sum_{j=1}^s n_j$  – кількість подій, накопичена до  $s$ -го класу. Призначають довірчий інтервал на інтенсивність потоку:

$$\lambda_{s,1} \leq \lambda_s \leq \lambda_{s,2}, \quad s = \overline{1, m-1},$$

де

$$\lambda_{s,1} = \hat{\lambda}_s \frac{\chi_{1-\alpha/2, 2n_s}^2}{2n_s}, \quad \lambda_{s,2} = \hat{\lambda}_s \frac{\chi_{\alpha/2, 2n_s}^2}{2n_s}.$$

У такий спосіб одержують кусково-сталу функцію інтенсивності у вигляді масиву  $\{\hat{\lambda}_s; s = \overline{1, m-1}\}$ , яку візуалізують на проміжку  $[\tau_{\min}; \tau_{\max} - \Delta\tau]$  (рис. 3).

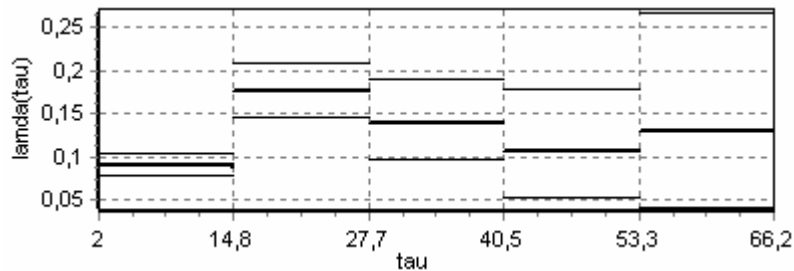


Рис. 3. Графік кусково-сталої функції інтенсивності потоку та довірчих інтервалів на неї

**Зауваження 2.** Під час формування масиву  $\{\hat{\lambda}_s; s = \overline{1, m-1}\}$  останній клас вилучають із метою уникнення ділення на нуль.

За результатами візуалізації масиву  $\{\hat{\lambda}_s; s = \overline{1, m-1}\}$  може бути прийняте рішення, чи є функція інтенсивності монотонна. Якщо функція є монотонна, то за процедурою 5 у заданий масив вписують певний тип даної функції:

$$\begin{aligned} \lambda(t; a, b) &= a + bt, & \lambda(t; a, b, c) &= a + bt + ct^2, \\ \lambda(t; a, b) &= at^b, & \lambda(t; a, b) &= ab^t, & \lambda(t; a, b) &= \exp(a + bt). \end{aligned}$$

**Процедура 5** реалізує метод найменших квадратів. Процедурю застосовують у такий спосіб. Спочатку формують залишкову дисперсію

$$S^2 = \frac{1}{m-1-p} \sum_{s=1}^{m-1} \left( \hat{\lambda}_s - \lambda(t_s; \theta_1, \dots, \theta_p) \right)^2,$$

де  $\theta_1, \dots, \theta_p$  – параметри функції інтенсивності;  $p$  – їх кількість;  $t_s$  – середини  $s$ -го класу, що їх можна обчислити як

$$t_s = \tau_{\min} + (s - 0,5) \Delta \tau.$$

Далі знаходять оцінки параметрів  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$  в аналітичному вигляді з умови мінімуму  $S^2$ , тобто розв'язуючи систему рівнянь

$$\frac{\partial S^2}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial S^2}{\partial \theta_p} = 0.$$

Коли оцінки параметрів функції інтенсивності знайдені, аналітично обчислюють функцію розподілу

$$F(t) = 1 - \exp \left( - \int_0^t \lambda(\tau; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p) d\tau \right).$$

Слід зауважити, що графіки функції інтенсивності  $\lambda(t; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$  та розподілу  $F(t)$  будують на проміжку  $[\tau_{\min}; \tau_{\max} - \Delta \tau]$ .

Якщо за результатами візуальної ідентифікації масиву  $\{\hat{\lambda}_s; s = \overline{1, m-1}\}$  доходять висновку, що функція інтенсивності не монотонна, то під час наступного оцінювання знаходять вірогідну кусково-сталу функцію інтенсивності у вигляді  $\{\hat{\lambda}'_s; s = \overline{1, r}\}$ , де  $r \leq m-1$ , за нижчеописаною процедурою.

**Процедура 6.** Спочатку перевіряють гіпотезу  $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ . Якщо її приймають, то перші два класи об'єднують і для об'єданого класу обчислюють значення інтенсивності, одержуючи  $\hat{\lambda}'_1$ . Тоді перевіряють

гіпотезу  $H_0: \lambda'_1 = \lambda_3$ . У випадку її прийняття раніше об'єднаний клас об'єднують із третім і знову обчислюють  $\hat{\lambda}'_1$ . У випадку відхилення гіпотези  $H_0: \lambda'_1 = \lambda_3$  висувають гіпотезу  $H_0: \lambda_3 = \lambda_4$ .

У разі відхилення початкової гіпотези  $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$  вважають, що  $\hat{\lambda}'_1 = \hat{\lambda}_1$ , і перевіряють гіпотезу  $H_0: \lambda_2 = \lambda_3$ . Якщо останню приймають, то об'єднують другий і третій класи з обчисленням  $\hat{\lambda}'_2$  та подальшою перевіркою гіпотези  $H_0: \lambda'_2 = \lambda_4$ . У випадку відхилення  $H_0: \lambda_2 = \lambda_3$  висувають гіпотезу  $H_0: \lambda_3 = \lambda_4$ . Так продовжують доти, поки не будуть перевірені значення всіх інтенсивностей.

Перевірка гіпотези  $H_0: \lambda_s = \lambda_{s+1}$  може бути виконана на основі статистичної характеристики

$$t = \frac{\hat{\lambda}_{s+1} - \hat{\lambda}_s}{\sqrt{(n_s - 1)\hat{\lambda}_{s+1}^2 + (n_{s+1} - 1)\hat{\lambda}_s^2}} \sqrt{\frac{n_s n_{s+1} (n_s + n_{s+1} - 2)}{n_s + n_{s+1}}},$$

яка має  $t$ -розподіл з числом степенів вільності  $\nu = n_s + n_{s+1} - 2$ .

Якщо  $|t| \leq t_{\alpha/2, \nu}$ , то гіпотеза  $H_0$  є правильна. Тоді перераховують значення інтенсивності

$$\hat{\lambda}'_s = \frac{n_s \hat{\lambda}_s + n_{s+1} \hat{\lambda}_{s+1}}{n_s + n_{s+1}}.$$

Таким чином формують масив статистично значущих інтенсивностей  $\{\hat{\lambda}'_s; s = \overline{1, r}\}$ , де  $r \leq m - 1$ , та визначають закон розподілу інтервалів між подіями типу сплайн-експоненціального з  $(r - 1)$ -м вузлом склеювання  $t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,r-1}$  (рис. 4):

$$F(t; \hat{\lambda}'_1, \dots, \hat{\lambda}'_r) = \begin{cases} 1 - \exp(-\hat{\lambda}'_1 t), & \text{якщо } 0 \leq t \leq t_{0,1}, \\ 1 - \exp(-\hat{\lambda}'_2 t - (\hat{\lambda}'_1 - \hat{\lambda}'_2) t_{0,1}), & \text{якщо } t_{0,1} \leq t \leq t_{0,2}, \\ \dots \\ 1 - \exp\left(-\hat{\lambda}'_i t - \sum_{s=1}^{i-1} (\hat{\lambda}'_s - \hat{\lambda}'_{s+1}) t_{0,s}\right), & \text{якщо } t_{0,i-1} \leq t \leq t_{0,i}, \\ \dots \\ 1 - \exp\left(-\hat{\lambda}'_r t - \sum_{s=1}^{r-1} (\hat{\lambda}'_s - \hat{\lambda}'_{s+1}) t_{0,s}\right), & \text{якщо } t_{0,r-1} \leq t < \infty. \end{cases}$$

Сплайн-розподіл реалізується як у схемах систем масового обслуговування, так і в теорії надійності.

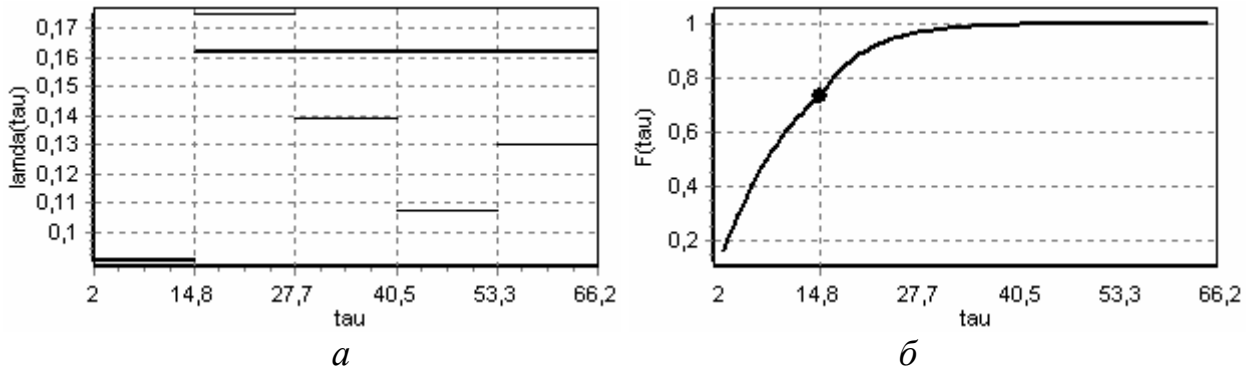


Рис. 4. Графік вірогідної кусково-сталюї функції інтенсивності (а) та функції сплайн-експоненціального розподілу (б)

### Порівняння пуассонівських потоків

Розглянемо процедури порівняння двох та  $k$  потоків, для яких припускається, що вони пуассонівські. Задача порівняння двох пуассонівських потоків зводиться до перевірки гіпотези про збіг їх інтенсивностей

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2.$$

Під час реалізації процедур перевірки даної гіпотези розрізняють випадки, коли фіксуються інтервали часу та кількості подій.

Дослідимо спочатку випадок, коли фіксуються інтервали часу. Нехай спостерігаємо два незалежні пуассонівські потоки протягом фіксованих періодів часу  $t'_0, t''_0$ . Позначимо через  $n_1, n_2$  кількість подій, що відбулися за ці проміжки часу. Порівняння потоків можемо здійснити за процедурою 7 або 8.

**Процедура 7.** Якщо  $n_1, n_2 < 10$ , то для перевірки головної гіпотези  $H_0$  обчислюють значення функції біномного розподілу

$$P(n_2) = \sum_{r=n_2}^{n_1+n_2} C_{n_1+n_2}^r \Theta_0^r (1-\Theta_0)^{n_1+n_2-r},$$

де

$$\Theta_0 = \frac{t'_0}{t'_0 + t''_0}, \text{ коли } n_1 \approx n_2,$$

або

$$\Theta_0 = \frac{\rho_0}{1+\rho_0}; \rho_0 = \frac{n_2}{n_1}, \text{ коли } t'_0 \approx t''_0.$$

Якщо  $P(n_2) > \alpha$ , то головну гіпотезу приймають, у противному разі – відхиляють.

У випадку, коли  $n_1, n_2 > 10$ , обчислюють статистику

$$U = \frac{|n_2 - n\Theta_0| - 0.5}{\sqrt{n\Theta_0(1-\Theta_0)}},$$

де  $n = n_1 + n_2$ , яка має нормальний розподіл  $N(U; 0; 1)$ .

Якщо  $|U| \leq u_{\alpha/2}$ , гіпотеза  $H_0$  є правильна.

Інколи замість основної гіпотези  $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$  вводять гіпотезу  $H_0: \lambda_1 - \lambda_2 = 0$  за будь-якої альтернативи. Для її перевірки може бути реалізована нижченаведена процедура.

**Процедура 8.** Обчислюють статистику

$$U = \frac{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2}{\sigma(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)},$$

де

$$\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 = \frac{n_1}{t'_0} - \frac{n_2}{t''_0}; \quad \sigma(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2) = \sqrt{\frac{n_1}{t'^2_0} + \frac{n_2}{t''^2_0}},$$

яка має нормальний розподіл  $N(U; 0; 1)$ .

Якщо  $|U| \leq u_{\alpha/2}$ , гіпотезу  $H_0$  приймають і вважають, що пуассонівські потоки збігаються.

Подані нижче процедури 9 та 10 реалізують у випадку фіксування кількості подій. При цьому потоки спостерігають доти, поки не відбудуться задані кількості подій, і розглядають  $t_1$ ,  $t_2$  як спостережувані інтервали часу, за які відбулися  $n'_0$ ,  $n''_0$  подій.

**Процедура 9** ґрунтується на застосуванні статистики

$$R = \frac{n'_0 t_2}{n''_0 t_1},$$

яка має розподіл Фішера з числом степенів вільності  $v_1 = 2n''_0$ ,  $v_2 = 2n'_0$ .

Відповідно до стандартної процедури для заданого критичного рівня  $\alpha$  обчислюють квантиль  $f_{\alpha, v_1, v_2}$ , який порівнюють з  $R$ . Якщо  $R \leq f_{\alpha, v_1, v_2}$ , то основна гіпотеза правильна й пуассонівські потоки на двох відрізках календарного часу збігаються.

**Процедуру 10** реалізують, коли  $n'_0$  та  $n''_0$  досить великі ( $n'_0, n''_0 > 30$ ). Для перевірки головної гіпотези вводять статистику

$$U = \frac{z - E\{z\}}{\sigma\{z\}},$$

де

$$z = \ln R = \ln \frac{n'_0 t_2}{n''_0 t_1};$$

$$E\{z\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n'_0} - \frac{1}{n''_0} \right); \quad \sigma\{z\} = \sqrt{\frac{1}{n'_0} + \frac{1}{n''_0}}.$$



Якщо для заданого критичного рівня  $\alpha$  виконується нерівність  $|U| \leq u_{\alpha/2}$ , то гіпотезу  $H_0$  приймають і вважають, що потоки збігаються.

Розглянемо тепер задачу порівняння  $k$  пуассонівських потоків, що зводиться до перевірки гіпотези про збіг інтенсивностей

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k .$$

Тут також можуть фіксуватися інтервали часу або кількості подій, але статистики, на застосуванні яких ґрунтуються процедури 11 та 12 перевірки головної гіпотези, однакові. Тому розглянемо лише випадок, коли фіксуються інтервали часу. Припустимо, що протягом фіксованих проміжків часу  $t_1, t_2, \dots, t_k$  відбулося  $n_1, n_2, \dots, n_k$  подій.

**Процедура 11.** Обчислюють статистику

$$H = 2 \left( \sum_{i=1}^k n_i \log \frac{n_i}{t_i} - n_0 \log \frac{n_0}{t_0} \right),$$

де

$$n_0 = \sum_{i=1}^k n_i, \quad t_0 = \sum_{i=1}^k t_i .$$

Ця статистика має  $\chi^2$ -розподіл з числом степенів вільності  $\nu = k - 1$ .

Якщо  $H \leq \chi_{\alpha, \nu}^2$ , то основну гіпотезу приймають.

Як доповнення до даної процедури реалізують процедуру 12.

**Процедура 12.** Обчислюють статистику

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2 t_0}{t_i n_0} - k n_0 ,$$

яка має  $\chi^2$ -розподіл з числом степенів вільності  $\nu = k - 1$ . Якщо  $d \leq \chi_{\alpha, \nu}^2$ , то основну гіпотезу приймають.

Слід відзначити, що процедура 11 потужніша.

### Методичні рекомендації до виконання роботи

Створення програми доцільно виконувати в такій послідовності:

1. Реалізувати завантаження даних у вигляді масиву інтервалів між подіями  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$  з текстового файла.

2. Вивести завантажений масив у табл. 2 та на графік, на якому за горизонтальною віссю відобразити порядковий номер події, а за вертикальною – відповідне значення масиву.

Таблиця 2

**Інтервали між подіями**

Номер події	Інтервал
1	
...	
$n$	

3. Реалізувати процедуру 1 для перевірки гіпотези про те, що інтервали між подіями розподілені за експоненціальним законом. Результати перевірки гіпотези подати у вигляді табл. 3.

Таблиця 3

**Результати перевірки потоку на найпростішість**

$V$	$u$	$u_{\alpha/2}$	Висновок

4. Реалізувати процедуру 2 для перевірки гіпотези про наявність тенденції до зміни інтервалів між подіями. Результати перевірки гіпотези навести у вигляді табл. 4.

Таблиця 4

**Дані аналізу тенденції до зміни інтервалів між подіями**

$W$	$u$	$u_{\alpha/2}$	Висновок

5. Визначити за процедурою 3 параметр потоку та довірчі інтервали для нього і вивести їх у табл. 5 та на графік. При цьому необхідно мати можливість змінювати кількість класів  $m$ , для кожного з яких буде обчислюватися параметр потоку.

Таблиця 5

**Значення параметра потоку з довірчими інтервалами**

Номер класу	Нижня межа	Значення параметра потоку	Верхня межа
1			
...			
$m$			

6. Обчислити значення кусково-сталої функції інтенсивності та довірчі інтервали для неї за процедурою 4. Потрібно мати можливість задавати кількість класів  $m$ . Результати вивести у табл. 6 та на графік.

Таблиця 6

**Значення кусково-сталої функції інтенсивності з довірчими інтервалами**

Номер класу	Нижня межа	Значення інтенсивності потоку	Верхня межа
1			
...			
$m-1$			

7. Апроксимувати кусково-сталу функцію інтенсивності неперервною функцією  $\lambda(t; \theta_1, \dots, \theta_p)$  за індивідуальним варіантом (див. табл. 1). Для цього:

а) знайти оцінки параметрів неперервної функції за процедурою 5 і вивести їх на екран;

б) вивести графік відтвореної функції  $\lambda(t; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$  на одному рисунку з графіком кусково-сталої функції інтенсивності;

в) побудувати окремо графік функції розподілу

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p) d\tau\right).$$

8. Виконати побудову графіка сплайн-експоненціальної функції розподілу. При цьому побудувати:

а) масив вірогідних інтенсивностей потоку за процедурою 6, які вивести у табл. 7 та на графік;

б) графік сплайн-експоненціальної функції розподілу.

Таблиця 7

**Значення вірогідних інтенсивностей потоку**

Порядковий номер	Значення інтенсивності	Номери об'єднаних класів

9. Порівняти пуассонівські потоки (за процедурами 7–12, залежно від варіанта). Для цього вихідний потік, заданий масивом  $\{\tau_i; i = \overline{1, n}\}$ , розбити на  $k$  потоків ( $k$  задається користувачем). Розбиття проводити таким чином, щоб одержати потоки з однаковим часом спостереження (якщо за варіантом фіксуються інтервали часу) або з однаковою кількістю подій (якщо фіксуються кількості подій). Результати навести у вигляді табл. 8.

Таблиця 8

**Пуассонівські потоки для порівняння**

Потік 1	Потік 2	...	Потік $k$

Для кожного з потоків обчислити інтенсивність за формулою (1) і вивести дані в табл. 9.

Таблиця 9

**Інтенсивність пуассонівських потоків**

Номер потоку	Значення інтенсивності
1	
...	
$k$	

Результати перевірки гіпотези про збіг потоків звести в табл. 10.

Таблиця 10

**Результати порівняння пуассонівських потоків**

Статистика	Квантиль	Висновок

Створена програма має також задовольняти загальні вимоги.

## Лабораторна робота 2. Моделювання одноканальної системи масового обслуговування

**Мета роботи** – вивчити методи моделювання одноканальної системи масового обслуговування (СМО), створити алгоритми та програмне забезпечення для моделювання одноканальної системи масового обслуговування, оволодіти навичками розв’язання конкретних задач указанного типу в діалоговому режимі та проведення обчислювальних експериментів.

### Постановка задачі

Написати програмне забезпечення для моделювання одноканальної СМО, яка задана одним вхідним потоком вимог, однією чергою та одним обслуговуючим приладом і характеризується тим, що:

- 1) інтервал часу між надходженням вимог на вхід системи – випадкова величина з функцією розподілу  $\Phi(x)$ ;
- 2) час обслуговування вимоги на приладі – випадкова величина з функцією розподілу  $F(x)$ ;
- 3) для черги задана максимально допустима довжина (визначається користувачем) та дисципліна черги (LIFO або FIFO);
- 4) стан системи в початковий момент  $t=0$  визначається кількістю вимог у системі.

#### *Загальний опис функціонування системи*

На вхід одноканальної СМО подається вимога. Якщо прилад вільний, то вона обслуговується на приладі; якщо прилад зайнятий і в черзі є вільні місця (поточна довжина черги менша максимально допустимої), то вона стає останньою в чергу; якщо в черзі немає вільних місць (поточна довжина черги дорівнює максимально допустимій), то вимога виходить із системи необслугованою. Якщо вимога обслугована на приладі, то вона виходить із системи обслугованою; якщо черга не є пуста, то місце на приладі займає вимога з черги згідно з дисципліною черги; якщо черга є пуста, прилад простоює, доки на вхід системи не подасться нова вимога.

Необхідно промоделювати роботу одноканальної СМО на часовому інтервалі  $[0, T]$  ( $T$  визначається користувачем). Задана періодичність збору статистики  $\Delta t = \frac{T}{K}$  ( $K$  – кількість моментів збору статистики). Для кожного моменту часу  $t = \Delta t \cdot i$ ,  $i = \overline{0, K}$ , обчислити:

- 1) час простою приладу  $t_{\Pi}$ , імовірність простою приладу  $P_{\Pi} = \frac{t_{\Pi}}{t}$ ;

2) час завантаження приладу  $t_3$ , імовірність завантаження приладу

$$P_3 = \frac{t_3}{t};$$

3) кількість вимог  $N_0$ , обслугованих до моменту часу  $t$ , імовірність обслуговування  $P_0 = \frac{N_0}{N}$  ( $N$  – кількість вимог, що надійшли до системи до моменту  $t$ );

4) кількість вимог  $N_H$ , що вийшли із системи необслугованими до моменту  $t$ , імовірність відмови  $P_H = \frac{N_H}{N}$ ;

5) кількість вимог, що знаходяться в системі та окремо на приладі й у черзі в момент часу  $t$ ;

6) максимальну та середньозважену довжину черги;

7) середній час перебування вимог у системі та окремо на приладі й у черзі.

Роботу виконати відповідно до варіанта (табл. 11), за результатами виконання написати звіт.

Таблиця 11

**Індивідуальні варіанти завдань**

Варіант	Закон розподілу функції $\Phi(x)$	Закон розподілу функції $F(x)$	Дисципліна черги	Кількість вимог у системі на початку функціонування
1	Експоненціальний ( $\lambda = 0,5$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,7$ )	FIFO	0
2	Експоненціальний ( $\lambda = 0,6$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,5$ )	FIFO	Визначається користувачем
3	Експоненціальний ( $\lambda = 0,8$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,8$ )	LIFO	0
4	Експоненціальний ( $\lambda = 0,9$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,7$ )	LIFO	Визначається користувачем
5	Вейбулла ( $\alpha = 4; \beta = 1,2$ )	Вейбулла ( $\alpha = 3; \beta = 1,1$ )	FIFO	0
6	Вейбулла ( $\alpha = 3,4; \beta = 1,3$ )	Вейбулла ( $\alpha = 5; \beta = 1$ )	FIFO	Визначається користувачем
7	Вейбулла ( $\alpha = 4,5; \beta = 1,2$ )	Вейбулла ( $\alpha = 5; \beta = 1,1$ )	LIFO	0
8	Вейбулла ( $\alpha = 4,8; \beta = 1,2$ )	Вейбулла ( $\alpha = 3,5; \beta = 1$ )	FIFO	Визначається користувачем

Варіант	Закон розподілу функції $\Phi(x)$	Закон розподілу функції $F(x)$	Дисципліна черги	Кількість вимог у системі на початку функціонування
9	Нормальний ( $m = 10; \sigma = 3$ )	Нормальний ( $m = 12; \sigma = 3,5$ )	FIFO	0
10	Нормальний ( $m = 20; \sigma = 4$ )	Нормальний ( $m = 25; \sigma = 4,5$ )	FIFO	Визначається користувачем
11	Нормальний ( $m = 15; \sigma = 3$ )	Нормальний ( $m = 15; \sigma = 2$ )	LIFO	0
12	Нормальний ( $m = 20; \sigma = 4,5$ )	Нормальний ( $m = 15; \sigma = 3$ )	LIFO	Визначається користувачем
13	Експоненціальний ( $\lambda = 0,5$ )	Вейбулла ( $\alpha = 2,5; \beta = 1$ )	FIFO	0
14	Експоненціальний ( $\lambda = 0,7$ )	Вейбулла ( $\alpha = 2; \beta = 1,1$ )	FIFO	Визначається користувачем
15	Експоненціальний ( $\lambda = 0,9$ )	Вейбулла ( $\alpha = 1,5; \beta = 1,2$ )	LIFO	0
16	Експоненціальний ( $\lambda = 0,6$ )	Вейбулла ( $\alpha = 1,5; \beta = 0,9$ )	LIFO	Визначається користувачем
17	Нормальний ( $m = 2; \sigma = 0,4$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,7$ )	FIFO	0
18	Нормальний ( $m = 3; \sigma = 0,5$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,5$ )	FIFO	Визначається користувачем
19	Нормальний ( $m = 2; \sigma = 0,2$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,8$ )	LIFO	0
20	Нормальний ( $m = 2,5; \sigma = 0,2$ )	Експоненціальний ( $\lambda = 0,4$ )	LIFO	Визначається користувачем
21	Нормальний ( $m = 5; \sigma = 0,3$ )	Вейбулла ( $\alpha = 3; \beta = 0,9$ )	FIFO	0
22	Нормальний ( $m = 7; \sigma = 1$ )	Вейбулла ( $\alpha = 5; \beta = 1$ )	FIFO	Визначається користувачем
23	Нормальний ( $m = 5; \sigma = 0,7$ )	Вейбулла ( $\alpha = 4; \beta = 1,1$ )	LIFO	0
24	Нормальний ( $m = 4; \sigma = 0,3$ )	Вейбулла ( $\alpha = 5; \beta = 1,2$ )	LIFO	Визначається користувачем

### Теоретичні положення

У загальному випадку система масового обслуговування (рис. 5) містить такі елементи: вхідний потік вимог; прилади (канали) обслуговування; черги вимог, які очікують обслуговування; вихідний потік

вимог. Сукупність черги та приладів обслуговування являє собою систему обслуговування.

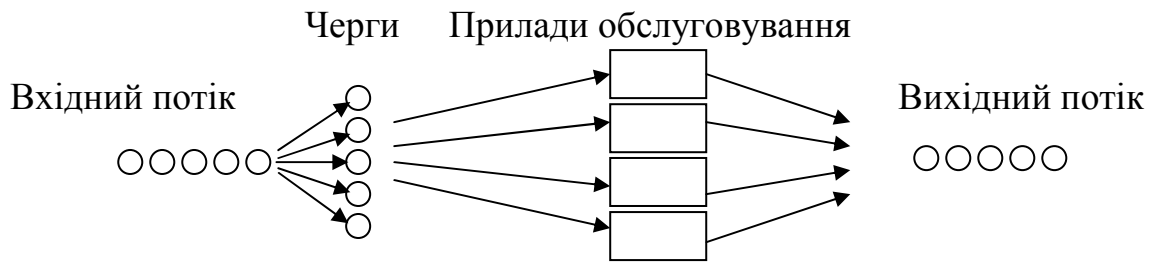


Рис. 5. Загальна схема СМО

Як правило, кількість приладів обслуговування в багатоканальній системі обмежена. Багатоканальні СМО можуть складатися з однакових або різних приладів, які можуть відрізнятися продуктивністю під час обслуговування.

**Черги** утворюються перед приладами у зв'язку з тим, що процес надходження вимог на обслуговування та час обслуговування є випадкові. Черги можна поділити на **обмежені** та **необмежені**. Обмежені черги виникають за обмеження кількості місць чекання.

За часом перебування вимоги в системі до початку обслуговування СМО поділяються на такі групи систем: з відмовами (втратами); з необмеженим часом чекання; змішаного типу.

У **системах з відмовами** вимога, що надійшла в момент часу, коли всі прилади були зайняті, дістає відмову та покидає систему.

У **системах із необмеженим часом обслуговування** в черзі вимога, що потрапила до системи та застала всі прилади зайнятими, вимушена чекати своєї черги доти, поки який-небудь із приладів обслуговування не звільниться.

У **змішаних системах** вимога, що потрапила в систему та застала всі прилади зайнятими, стає в чергу, але в ній вона знаходиться обмежений час, після чого, не дочекавшись обслуговування, покидає її.

Одна з важливих характеристик СМО – **дисципліна черги**, що визначає порядок поставлення вимог до черги та виходу з черги. Можна виділити такі дисципліни черги:

- «першим прийшов – першим обслуговується» (FIFO);
- «останнім прийшов – першим обслуговується» (LIFO);
- випадковий вибір вимог із черги.

**Пріоритети** – характеристика СМО, що визначає послідовність обслуговування вимог. Пріоритет присвоюється кожній вимозі, що потрапляє до СМО. Вимоги більш високого пріоритету обслуговуються в першу чергу. Основні різновиди пріоритетів – **абсолютні** та **відносні**. Надходження до СМО вимоги з абсолютним пріоритетом зумовлює миттєве припинення

обслуговування будь-якої вимоги нижчого пріоритету, при цьому система починає обслуговувати вимогу з абсолютним пріоритетом. У випадку приходу до СМО вимоги з відносним пріоритетом обслуговування попередньої вимоги з нижчим пріоритетом доводиться до кінця, після чого починається обслуговування вимог більш високого пріоритету.

Важливою характеристикою функціонування багатоканальної СМО є дисципліна каналів обслуговування, тобто правило, згідно з яким залучаються до обслуговування вільні канали СМО. Дисципліна визначає порядок залучення до обслуговування вільних каналів СМО, який може бути випадковий.

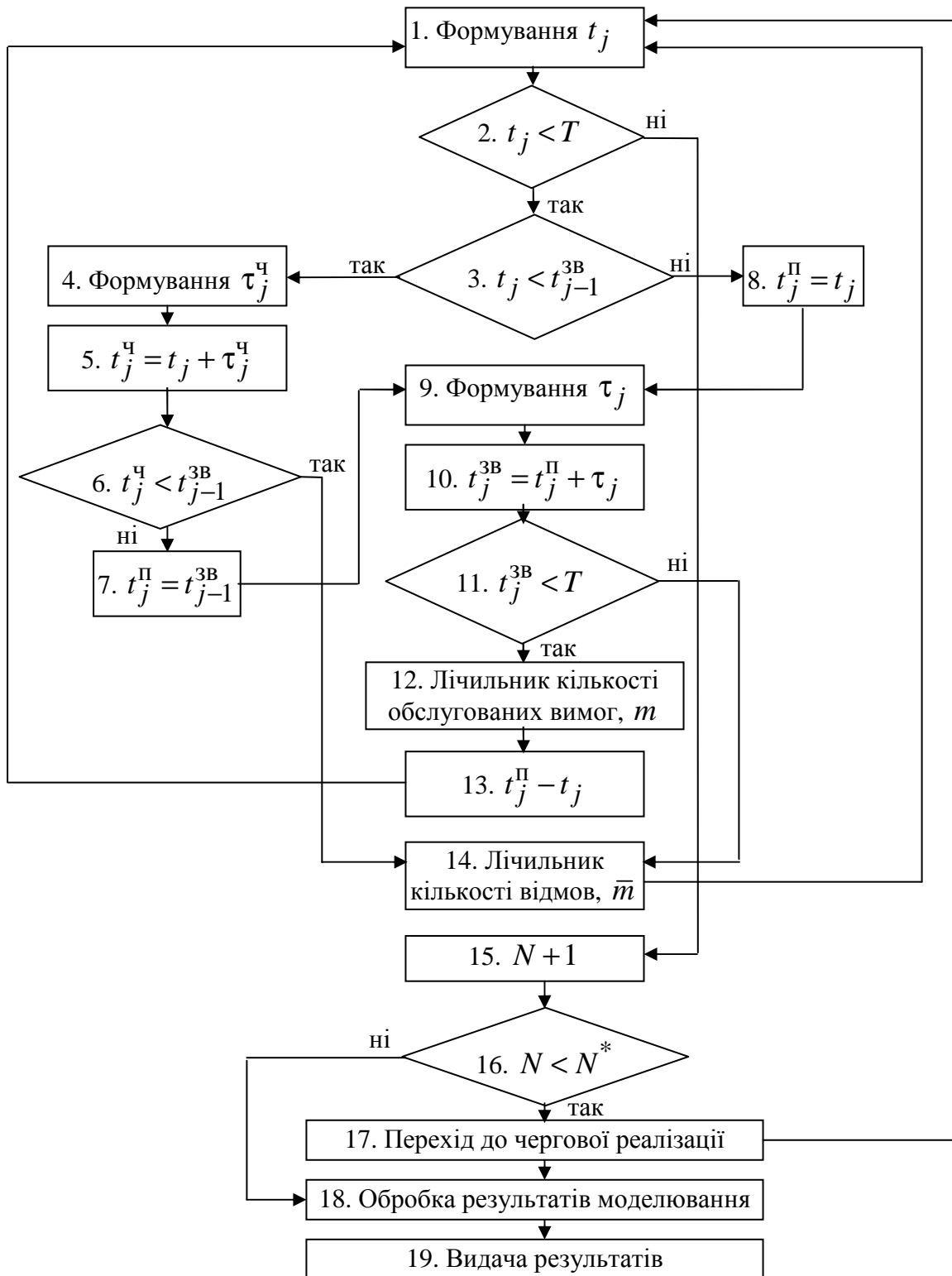
Розглянемо моделювання одноканальної СМО. Нехай у СМО надходить ординарний потік вимог із заданим законом розподілу довжини інтервалів надходження вимог. Граничний час чекання вимоги в черзі  $\tau^ч$  – випадкова величина з законом розподілу  $\Phi(\tau^ч)$ . Тривалість обслуговування задана законом розподілу  $F(\tau)$ .

Процес функціонування СМО розглянемо за період часу  $[0; T]$ , тобто вважатимемо, що вимоги, для яких момент надходження  $t_j > T$ , до системи не потрапляють та не обслуговуються. Вимоги, для яких час чекання обслуговування більший  $T$ , будемо вважати такими, що дістали відмову.

Блок-схема моделюючого алгоритму наведена на рис. 6. Він побудований за принципом послідовного проведення вимог, тобто процес проходження кожної вимоги відстежується від входу до виходу з СМО. Оператор 1 формує випадкові числа  $t_j$ , що імітують однорідний потік подій відповідно до заданого закону розподілу. Випадкове число, одержане на виході оператора 1, надходить на вхід оператора 2 для перевірки умови  $t_j < T$ . У разі виконання цієї умови число-вимога розглядається як претендент на обслуговування та потрапляє на вхід оператора 3 для перевірки умови  $t_j < t_{j-1}^{3B}$ , де  $t_{j-1}^{3B}$  – момент звільнення каналу від обслуговування попередньої вимоги. Якщо ця умова виконується (канал обслуговування зайнятий), то керування передається оператору 4, де формується випадкове число, яке дорівнює часу  $\tau_j^ч$  чекання  $j$ -ї вимоги.

Оператор 5 обчислює момент  $t_j^ч = t_j + \tau_j^ч$  очікуваного надходження на обслуговування  $j$ -ї вимоги згідно з заданою дисципліною черги. Оператор 6 перевіряє, чи може дана вимога бути обслугованою з урахуванням часу чекання та обслуговування. Для цього в операторі порівнюються очікуваний час  $t_j^ч$  початку обслуговування  $j$ -ї вимоги та час  $t_{j-1}^{3B}$  завершення обслуговування попередньої вимоги.





**Рис. 6. Блок-схема процесу моделювання одноканальної СМО**

Якщо умова, яка перевіряється оператором 6, виконується, то  $j$ -та вимога не може бути обслугована й дістає відмову, керування передається оператору 14 підрахунку кількості відмов. Якщо ж умова не виконується, то керування передається оператору 7 обчислення моменту  $t_j^{\Pi} = t_{j-1}^{3В}$  початку обслуговування. Число з виходу цього оператора потрапляє на вхід оператора

9, що формує час  $\tau_j$  обслуговування  $j$ -ї вимоги. На цей же оператор надходить число від оператора 8, який формує момент  $t_j^{\Pi} = t_j$  початку обслуговування  $j$ -ї вимоги, якщо в момент її надходження канал обслуговування вільний (умова, що перевіряється оператором 3, не виконується).

Оператор 10 формує момент  $t_j^{3B} = t_j^{\Pi} + \tau_j$  звільнення каналу від  $j$ -ї вимоги. Значення часу знову надходить на оператор 11 для перевірки умови  $t_j^{3B} < T$ . Якщо канал звільняється пізніше цього часу, то керування передається оператору 14 підрахунку кількості відмов. Якщо ж умова, що перевіряється оператором 11, виконується, керування передається оператору 12 підрахунку кількості обслугованих вимог.

Оператор 13 потрібен для підрахунку часу  $t_j^{\Pi} - t_j$  чекання обслуговування. Від цього оператора керування передається оператору 1 для формування наступної вимоги, тобто канал звільняється. Якщо умова, яка перевіряється оператором 11, не виконується, то вимога вважається такою, що дістала відмову, і ця команда використовується для початку моделювання наступної вимоги.

У разі невиконання умови, яка перевіряється оператором 2, до кількості реалізацій додається одиниця (оператор 15), і якщо це число не перевищує заданого значення  $N^*$  (оператор 16), необхідного для забезпечення заданої точності розрахунків, то дається команда для переходу до наступної реалізації (оператор 17). Після того як буде виконане моделювання  $N^*$  реалізацій процесу, здійсниться обробка результатів моделювання та подача результатів на друк (оператори 18, 19).

### **Методичні рекомендації до виконання роботи**

Створення програмного забезпечення доцільно виконувати з дотриманням нижченаведених вимог:

1. Параметри моделювання (параметри функцій розподілу, час функціонування, довжина черги, періодичність збору статистики, кількість вимог, якщо необхідно) має задавати користувач.

2. Результат моделювання системи слід подати у вигляді календаря, що відображає її функціонування (табл. 12).

3. Зазначені в постановці задачі характеристики роботи системи необхідно вивести як у таблицю, так і на графік. Кількісні та ймовірнісні характеристики слід відображати на окремих графіках (рис. 7, 8).

## Календар роботи одноканальної СМО

Характеристики вимоги	Номер вимоги		
	1	...	$n$
Момент часу надходження в систему			
Час перебування в черзі			
Момент часу надходження на канал			
Час обслуговування			
Час перебування в системі			
Момент часу виходу з системи			
Результат обслуговування вимоги (обслугована чи ні)			

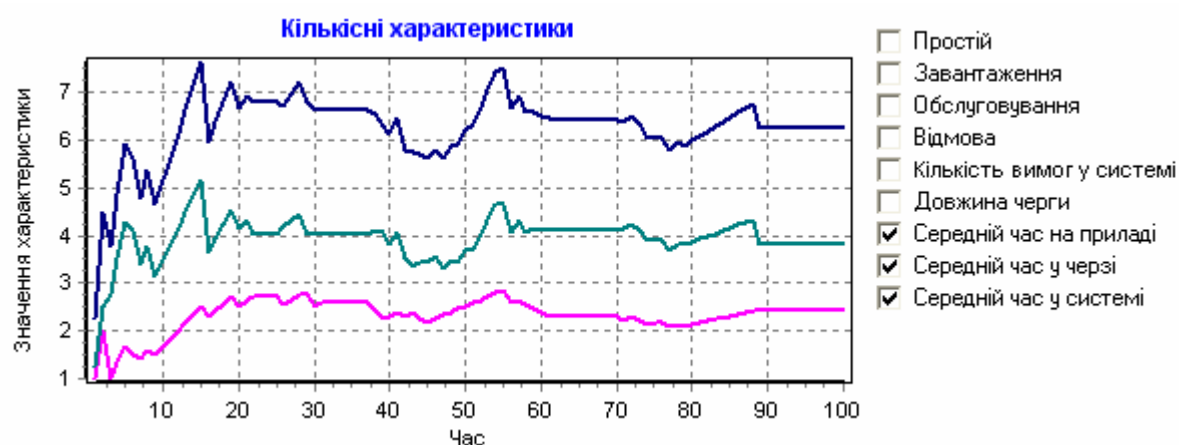


Рис. 7. Кількісні характеристики одноканальної СМО

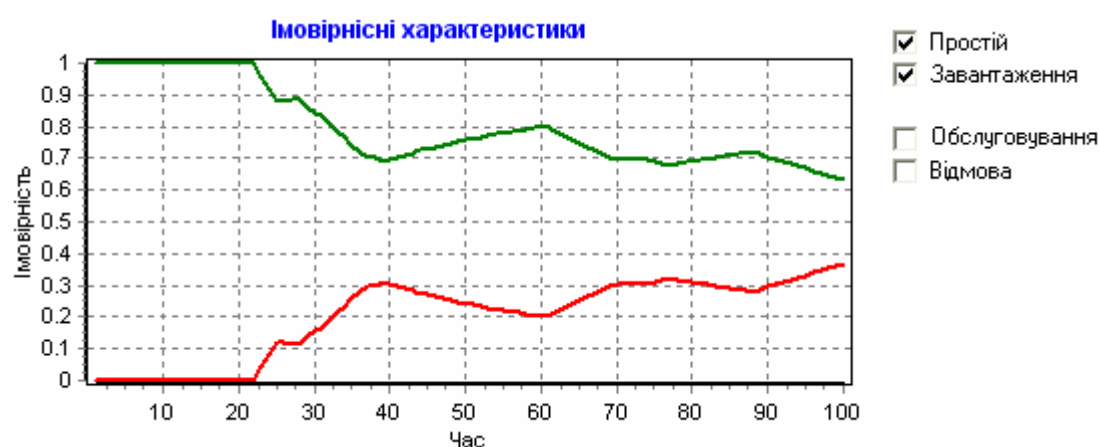


Рис. 8. Імовірнісні характеристики одноканальної СМО

Створена програма має також задовольняти загальні вимоги.

### Лабораторна робота 3. Моделювання багатоканальної системи масового обслуговування

**Мета роботи** – вивчити методи моделювання багатоканальної системи масового обслуговування, створити алгоритми та програмне забезпечення для моделювання багатоканальної системи масового обслуговування, навчитися розв’язувати конкретні задачі вказаного типу в діалоговому режимі та проводити обчислювальні експерименти.

#### Постановка задачі

Створити програмне забезпечення для моделювання багатоканальної СМО, заданої  $M$  вхідними потоками вимог,  $M$  чергами та  $L$  обслуговуючими приладами й характеризується тим, що:

1) інтервал часу між надходженнями вимог на вхід системи для кожного з потоків – випадкова величина з функцією розподілу  $F(X)$  (параметри розподілу однакові для кожного потоку);

2) час обслуговування вимоги на кожному з приладів – випадкова величина з функцією розподілу  $G(X)$  (параметри розподілу однакові для кожного приладу);

3) для кожної черги задані максимально допустима довжина та дисципліна черги (LIFO або FIFO) (для всіх черг можна задати однакову максимальну довжину та дисципліну);

4) стан системи в початковий момент  $t = 0$  визначається кількістю вимог у ній.

#### *Опис функціонування системи*

На вхід багатоканальної СМО подається вимога. Якщо хоча б один із приладів вільний, вимога обслуговується на цьому приладі. Якщо вільні одразу декілька приладів, вибір серед них здійснюється випадковим чином. Якщо всі прилади зайняті й хоча б в одній із черг є вільні місця (поточна довжина черги менша максимально допустимої), то вимога ставиться останньою в дану чергу. Якщо вільні місця є в декількох чергах, серед них обирається найменша або здійснюється випадковий вибір (за бажанням користувача). Якщо в жодній із черг немає вільних місць (поточна довжина всіх черг дорівнює максимально допустимій довжині), то вимога виходить із системи необслугованою. Якщо вимога обслугована на приладі, то вона виходить із системи обслугованою. Якщо один із приладів звільнився та хоч би одна з черг непушта, то місце на приладі займає вимога з черги відповідно до дисципліни черги. Якщо непусти одразу декілька черг, на прилад надходить вимога або з найдовшої черги, або з вибраної випадковим чином (за бажанням користувача). Якщо після звільнення одного з приладів усі черги пусті, то прилад простоє, доки на вхід системи не подасться нова вимога.

Необхідно промодельовати роботу багатоканальної СМО на часовому інтервалі  $[0, T]$  ( $T$  визначається користувачем). Задана періодичність збору статистики  $\Delta t = \frac{T}{K}$  ( $K$  – кількість моментів збору статистики). Для кожного моменту часу  $t = \Delta t \cdot i$ ,  $i = \overline{0, K}$ , необхідно обчислити:

1) час простою кожного приладу  $t_{\Pi}$ , імовірність простою кожного приладу  $P_{\Pi} = \frac{t_{\Pi}}{t}$ ;

2) час завантаження кожного приладу  $t_3$ , імовірність завантаження кожного приладу  $P_3 = \frac{t_3}{t}$ ;

3) час повного завантаження системи  $t_{\Pi 3}$  (час, коли завантажені всі прилади), імовірність повного завантаження системи  $P_{\Pi 3} = \frac{t_{\Pi 3}}{t}$ ;

4) час неповного завантаження системи  $t_{\Pi 3}$  (час, коли частина приладів завантажена, а частина простоює), імовірність неповного завантаження системи  $P_{\Pi 3} = \frac{t_{\Pi 3}}{t}$ ;

5) кількість вимог  $N_0$ , обслугованих до моменту часу  $t$ , імовірність обслуговування  $P_0 = \frac{N_0}{N}$  ( $N$  – кількість вимог, що надійшли в систему до моменту часу  $t$ );

6) кількість вимог  $N_H$ , які вийшли із системи необслугованими до моменту  $t$ , імовірність відмови  $P_H = \frac{N_H}{N}$ ;

7) кількість вимог у системі, а також на кожному приладі й у кожній черзі;

8) максимальну та середню довжину кожної черги;

9) середній час перебування вимог у системі та окремо на кожному приладі й у кожній черзі.

Характеристики, стосовні приладів, слід визначати для кожного приладу окремо, те саме здійснювати для черг. Дані всіх обчислень звести в таблицю та подати у вигляді графіків. За результатами виконання лабораторної роботи написати звіт. Індивідуальні варіанти завдань аналогічні запропонованим у лабораторній роботі 2.

## Теоретичні положення

Розглянемо структуру моделюючого алгоритму для багатоканальної СМО. Нехай в СМО, що має  $n$  рівноцінних каналів, надходить ординарний потік вимог із заданим законом розподілу довжини інтервалів надходження вимог. Час  $\tau^1$  можливого чекання до початку обслуговування – випадкова величина з законом розподілу  $\Phi(\tau^1)$ . Тривалість обслуговування  $\tau$  має закон розподілу  $F(\tau)$ . Процес функціонування СМО розглядається в інтервалі часу  $[0; T]$ . Вимоги приймаються до обслуговування по черзі. Якщо для обслуговування даної вимоги є декілька вільних каналів, то канали залучаються до обслуговування по черзі.

Оскільки моделюючий алгоритм (рис. 9) для багатоканальної СМО працює аналогічно алгоритму для одноканальної системи (див. рис. 6), відзначимо тільки суттєві особливості. Спочатку оператор 11 визначає момент  $t_{lk}^{3B}$  закінчення обслуговування  $l$ -ї вимоги  $k$ -м каналом. Потім  $t_{lk}^{3B}$  порівнюється з  $T$  (оператор 13), де  $T$  – час функціонування СМО. Якщо умова, що перевіряється оператором 13, не виконується, то вимога не вважається обслугованою й керування передається оператору 16 для підрахунку кількості відмов. Якщо ж умова, яка перевіряється оператором 13, виконується, то керування передається оператору 14 для підрахунку кількості обслугованих вимог. Крім того,  $t_{lk}^{3B}$  розглядається як момент звільнення  $k$ -го каналу. У цей момент вільними можуть бути й інші канали. Моменти їх звільнення зберігаються в масиві в порядку їх зростання. Оператор 12 зберігає в масиві чергове значення  $t_{lk}^{3B}$ , одержане оператором 11.

На відміну від блок-схеми моделюючого алгоритму одноканальної системи, від оператора 2 по гілці «так» керування передається оператору 3, який обирає найменше з масиву  $t_{lk}^{3B}$  та передає керування оператору 4. Таким чином, наявність вільного каналу визначається порівнянням  $t_j$  (моменту надходження чергової вимоги) з  $\min t_{lk}^{3B}$  (мінімальним часом звільнення одного з каналів). Якщо в момент надходження вимоги всі канали зайняті, то з'ясовується можливість обслуговування вимоги (оператор 7). Якщо вимога може бути обслугованою, то як момент початку обслуговування вибирається  $\min t_{lk}^{3B}$  (оператор 8).

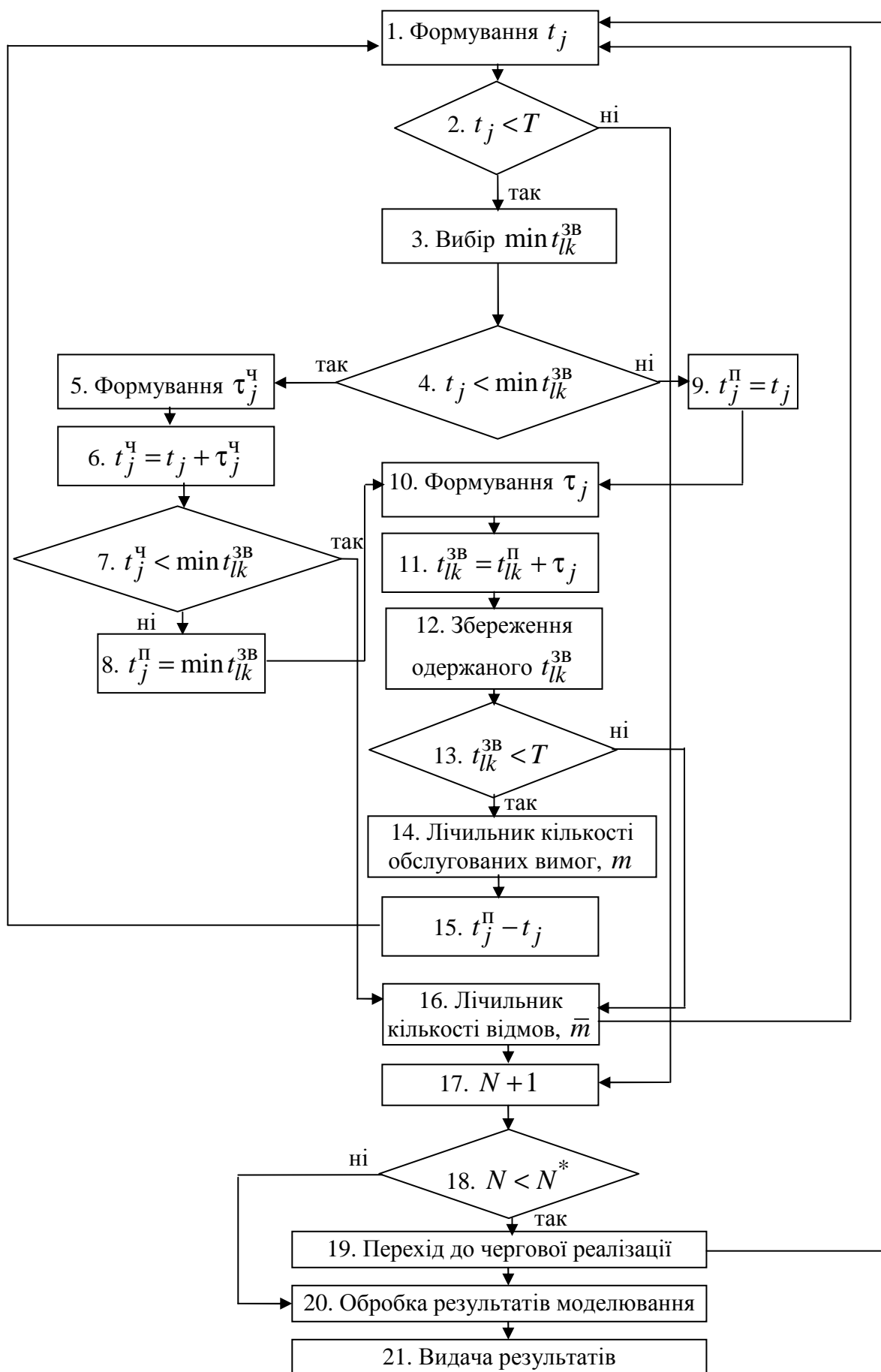


Рис. 9. Блок-схема процесу моделювання багатоканальної СМО

## Методичні рекомендації до виконання роботи

Створення програмного забезпечення необхідно виконувати з дотриманням таких вимог:

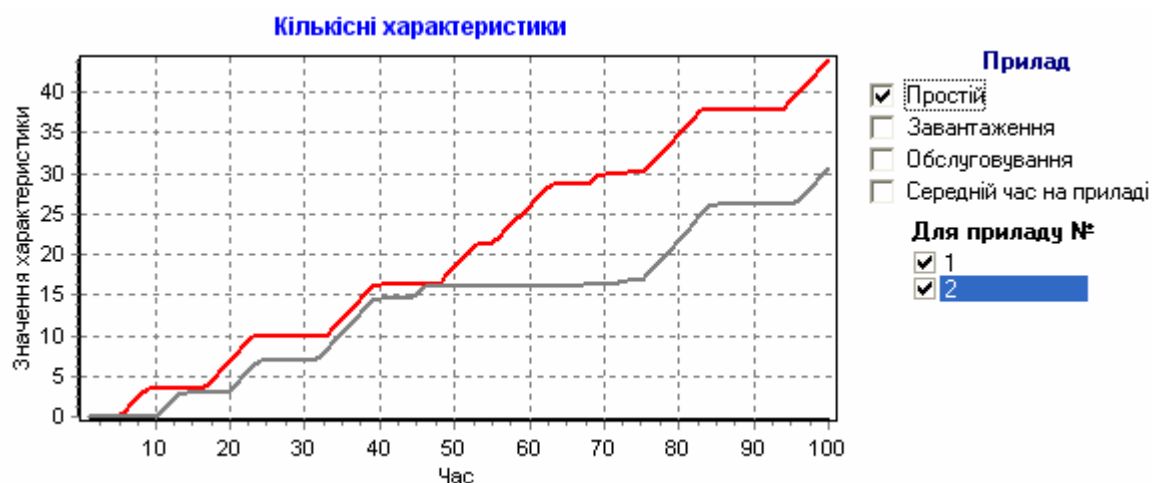
1. Параметри моделювання (параметри функцій розподілу, час функціонування, кількість та довжини черг; кількість приладів, періодичність збору статистики, кількість вимог, якщо необхідно) має задавати користувач.
2. Результат моделювання системи слід подати у вигляді календаря, що відображає її функціонування (табл. 13).

Таблиця 13

**Календар роботи багатоканальної СМО**

Характеристики вимоги	Номер вимоги		
	1	...	<i>n</i>
Номер черги			
Номер приладу			
Момент часу надходження в систему			
Час перебування в черзі			
Момент часу надходження на прилад			
Час обслуговування			
Час перебування в системі			
Момент часу виходу з системи			
Результат обслуговування вимоги (обслугована чи ні)			

3. Зазначені в постановці задачі характеристики роботи системи необхідно подати у вигляді таблиці й графіків. Кількісні та ймовірнісні характеристики слід відображати на окремих графіках (рис. 10–13). Характеристики мають виводитися окремо для кожного приладу, кожної черги та всієї системи в цілому.



**Рис. 10. Кількісні характеристики приладу багатоканальної СМО**



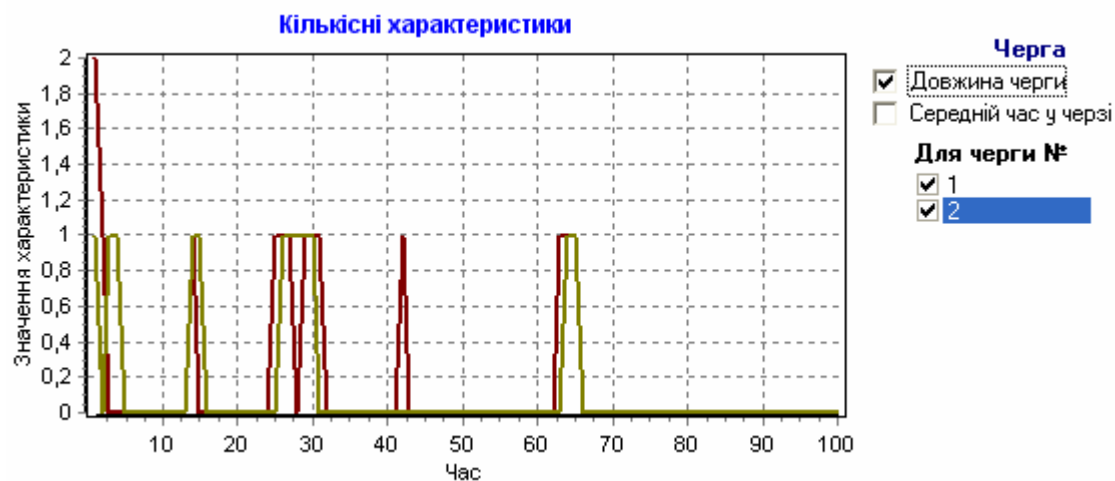


Рис. 11. Кількісні характеристики черги багатоканальної СМО



Рис. 12. Кількісні характеристики багатоканальної СМО

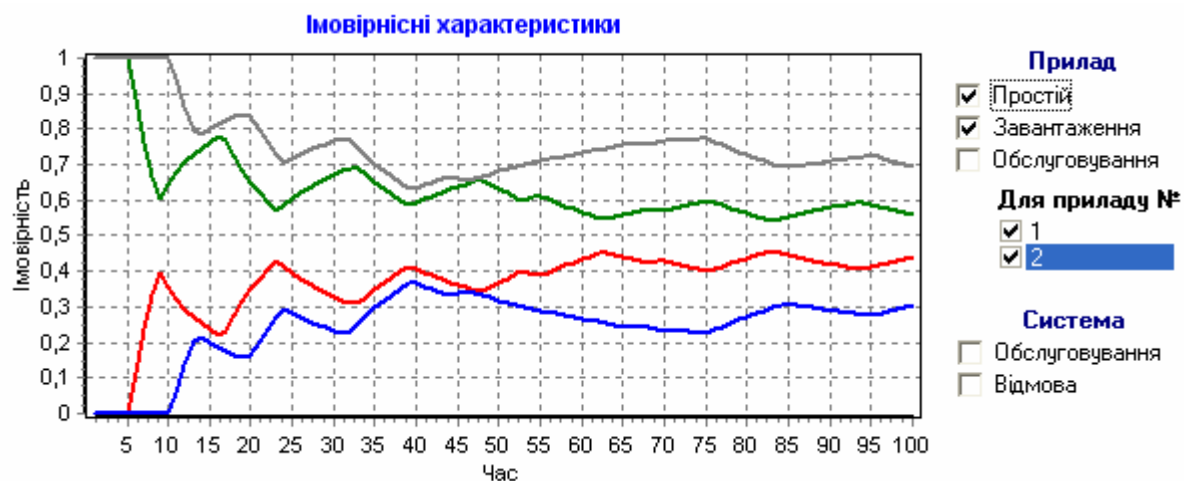


Рис. 13. Імовірнісні характеристики багатоканальної СМО

Створена програма має також задовольняти загальні вимоги.

## Додаток

### Моделювання випадкових чисел

В інформаційному забезпеченні систем імітаційного моделювання систем масового обслуговування базові є процедури формування масивів реалізацій випадкових величин за заданим типом розподілу ймовірностей. При цьому розв'язання задачі формування таких масивів поділяється на два етапи. Спочатку здійснюється генерування так званих псевдовипадкових чисел  $r_i \in [0;1]$ , що мають рівномірний розподіл, а далі – алгоритмічний перехід до випадкових значень заданого типу розподілу.

#### Моделювання рівномірно розподілених випадкових чисел

Моделювання рівномірно розподілених чисел (РРЧ) може бути виконане за допомогою таблиць випадкових чисел, апаратним або програмним способом. Для реалізації на комп'ютері більш придатний програмний спосіб. Він полягає в тому, що РРЧ одержують за рекурентною формулою: кожне наступне число  $r_{i+1}$  утворюється з попереднього  $r_i$  (або групи попередніх чисел) шляхом застосування алгебричних або логічних операцій:

$$r_{i+1} = f(r_i).$$

Строго кажучи, така послідовність чисел не буде випадкова. Однак вона може задовольняти різні статистичні критерії випадковості. Тому ці числа використовують як випадкові й називають **псевдовипадковими**.

Головний недолік псевдовипадкових чисел – зациклювання. Тобто перші  $L$  послідовно одержаних псевдовипадкових чисел, починаючи з першого  $r_1$ , будуть усі різні, а  $(L+1)$ -ше псевдовипадкове число буде збігатися з  $r_1$ ,  $(L+2)$ -ге – з числом  $r_2$  і т.д. Величина  $L$  називається **періодом** псевдовипадкової послідовності. Він залежить від розрядності слова ЕОМ та методу формування псевдовипадкових чисел.

Усі розглянуті нижче алгоритми дозволяють одержувати цілі числа  $\beta_i$ , що знаходяться в проміжку від нуля до  $m$ . Одержати  $r_i \in [0;1]$  можна за співвідношенням

$$r_i = \frac{\beta_i}{m}.$$

Один із перших алгоритмів одержання псевдовипадкових чисел на ЕОМ був запропонований Джоном фон Нейманом у 1946 р. Він називається **методом середин квадратів** і полягає в такому. Беруть довільне число, наприклад чотиризначне:  $\beta_1 = 9\,876$ . Його підносять до квадрата й одержують восьмизначне число  $\beta_1^2 = 97\,535\,376$ , із якого виділяють середні цифри. Ці середні цифри використовують як чергове випадкове число  $\beta_2 = 5\,353$  і т.д.

Даний метод не дає задовільної послідовності випадкових чисел, розподіл одержаних за його допомогою чисел може відрізнятися від рівномірного. Крім того, одержана за його допомогою послідовність часто вироджується в нуль.

На сьогодні майже всі стандартні генератори псевдовипадкових чисел ґрунтуються на конгруентних **алгоритмах**, розроблених Д. Лемером у 1948 р. **Лінійний** конгруентний алгоритм задається формулою

$$\beta_{i+1} = (a\beta_i + c) \bmod m,$$

де  $m, a, c$  – цілі невід’ємні числа;  $0 \leq a, c < m$ ;  $\beta_0$  – початкове значення;  $(x) \bmod m$  – оператор модульної арифметики, який обчислює остачу від ділення цілого числа  $x$  на цілий модуль  $m$ .

Алгоритм називається конгруентним, оскільки використовує операцію «обчислення остачі» (у теорії чисел – одержання конгруентного числа). Якщо  $c = 0$ , конгруентний алгоритм називається **мультиплікативним**, а якщо  $c \neq 0$  – **змішаним**.

Числа  $m, a, c$  й  $\beta_0$  слід обирати так, щоб забезпечити період  $L$  максимальної довжини та випадковість послідовності (друга умова не менш важлива, ніж перша, оскільки можна одержати датчик, що дозволяє генерувати послідовність із досить великим періодом, але не випадкову).

Оскільки  $\beta_i$  – це остача від ділення на  $m$ , то  $0 \leq \beta_i < m$  і кількість усіх можливих остач від 0 до  $m-1$  дорівнює  $m$ . Тобто у псевдовипадковій послідовності може бути не більше ніж  $m$  різних значень ( $L \leq m$ ).

Виходячи з наведених міркувань, число  $m$  необхідно вибирати досить великим. Звичайно беруть  $m = p^q$ , де  $p$  – основа системи числення, використовувана в ЕОМ (як правило,  $p = 2$ );  $q$  – кількість розрядів машини (наприклад,  $q = 32$ ). Оскільки  $L = m$  – це максимально можливий період, виникає питання, чи може бути досягнутий такий період і за яких значень величин  $m, a, c$  й  $\beta_0$ . Відповідь дає нижченаведена теорема.

**Теорема.** Лінійна конгруентна послідовність, визначена числами  $m, a, c$  та  $\beta_0$ , має період  $L = m$  тоді й тільки тоді, коли:

- 1) числа  $c$  і  $m$  взаємно прості;
- 2) число  $b = a - 1$  кратне  $k$  для кожного простого  $k$ , що є дільником  $m$ ;
- 3)  $b$  кратне 4, якщо  $m$  кратне 4.

Із теореми випливає, що коли  $c = 0$ , максимальний період не може бути досягнутий. Але за спеціальних умов можна досягти прийнятної довжини. Попри те що за  $c = 0$  генеровані числа мають менший період, вважають, що мультиплікативний алгоритм працює швидше й дозволяє одержувати більш якісні послідовності.

Лінійні конгруентні алгоритми становлять основу багатьох обчислювальних процедур генерування псевдовипадкових чисел, наприклад:

$$r_{j+1} = 2^{-31} \beta_{j+1}, \beta_{j+1} = (7^5 \beta_j) \bmod 2^{31};$$

$$\begin{aligned}
r_{j+1} &= 10^{-11} \beta_{j+1}, \beta_{j+1} = (7^{4k+1} \beta_j) \bmod 10^{11}; \\
r_{j+1} &= 10^{-10} \beta_{j+1}, \beta_{j+1} = (7 \beta_j) \bmod 10^{10}; \\
r_{j+1} &= 10^{-8} \beta_{j+1}, \beta_{j+1} = (1\,001 \beta_j + 231) \bmod 10^8; \\
r_{j+1} &= 2^{-32} \beta_{j+1}, \beta_{j+1} = (214\,013 \beta_j + 2\,531\,011) \bmod 2^{32}; \\
r_{j+1} &= 2^{-k} \beta_{j+1}, \beta_{j+1} = (\beta_j^2 + \beta_j) \bmod 2^k, k = 21.
\end{aligned}$$

Узагальненням лінійного конгруентного методу є **квадратичний конгруентний метод**:

$$\beta_{i+1} = (d\beta_i^2 + a\beta_i + c) \bmod m.$$

Наприклад, Р.Р. Ковей запропонував квадратичний конгруентний метод:

$$\beta_{i+1} = (\beta_i^2 + \beta_i) \bmod 2^q, \beta_0 \bmod 4 = 2.$$

Існує також **адитивний** конгруентний метод, що використовує формулу

$$\beta_{i+1} = (\beta_i + \beta_{i-1}) \bmod m \quad \text{або} \quad \beta_{i+1} = (\beta_i + \beta_{i-k}) \bmod m,$$

де  $k$  – лаг, або запізнення.

Як показали теоретичні дослідження та результати комп'ютерних експериментів, дуже ефективним виявився адитивний генератор, розроблений Дж. Ж. Мітчеллом та Д.Ф. Муром:

$$\beta_{i+1} = (\beta_{i-24} + \beta_{i-55}) \bmod m, \quad i \geq 55,$$

де  $m$  – парне число.

Практично не поступається йому за якістю генератор, що його запропонував Дж. Марсалья:

$$\beta_{i+1} = (\beta_{i-24} \cdot \beta_{i-55}) \bmod m, \quad i \geq 55.$$

Інший важливий клас методів пов'язаний із комбінацією генераторів псевдовипадкових чисел. Припустимо, що наявні послідовності  $v_0, v_1, \dots$  та  $w_0, w_1, \dots$  випадкових чисел, які лежать між 0 та  $m-1$ , і ці послідовності генеровані різними методами. Тоді можна, наприклад, використати одну випадкову послідовність для зміни порядку елементів іншої. Такий метод називається **рандомізація перемішуванням**. Відомі різні варіанти методів перемішування. Однак усі вони мають певний дефект. Вони змінюють порядок наступності генерованих чисел, але не самі числа. Здебільшого порядок наступності – це вирішальний фактор, але якщо початковий матеріал «недостатньо якісний», не рівномірно розподілений, то стан якості цих чисел після перемішування не зміниться. Тому деякі дослідники пропонують об'єднувати послідовність  $v_0, v_1, \dots$  та  $w_0, w_1, \dots$  більш простим способом, зокрема так:

$$\beta_i = (v_i - w_i) \bmod m.$$

## Моделювання випадкових чисел окремих розподілів

Основний метод генерування неперервних випадкових чисел – **метод оберненої функції**. Нехай необхідно змоделювати випадкове число з розподілу  $F(x; \vec{\Theta})$ , де  $\vec{\Theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$  – вектор параметрів розподілу. Метод оберненої функції передбачає розв’язання рівняння

$$F(x_i; \vec{\Theta}) = r_i,$$

де  $r_i \in [0;1]$  – псевдовипадкові рівномірно розподілені числа.

Розв’язуючи рівняння, одержують випадкові числа

$$x_i = F^{-1}(r_i; \vec{\Theta}),$$

розподілені за потрібним законом.

Наприклад, для експоненціального розподілу

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x),$$

розв’язуючи рівняння

$$F(x_i) = r_i \quad \text{або} \quad 1 - \exp(-\lambda x_i) = r_i,$$

одержують формулу для генерування випадкових чисел:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i).$$

Нижче наводяться готові формули для моделювання випадкових чисел різних розподілів, одержані за методом оберненої функції (таблиця). Окремо розглянемо розподіли, для яких метод оберненої функції в явному вигляді не може бути застосований.

Для **гамма-розподілу**

$$F(x) = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

випадкове число може бути згенероване на основі формули

$$x_i = -\frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\alpha} \ln(1 - r_{i,j}).$$

**Розподіл  $\chi^2$  (Пірсона)** з функцією розподілу

$$F(x) = \frac{\gamma(v/2, x/2)}{\Gamma(v/2)}, \quad x \geq 0,$$

параметр якого  $v$  називають степенем вільності, визначає випадкові числа, що генеруються як

$$x_i \approx v \left( 1 - \frac{2}{9v} + u_i \sqrt{\frac{2}{9v}} \right)^3, \quad (1)$$

де  $u_i \in N(u; 0, 1)$  – випадкове число зі стандартного нормального розподілу.

### Моделювання випадкових чисел окремих розподілів

Закон розподілу	Функція розподілу	Формула для моделювання випадкового числа
Експоненціальний	$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), x \geq 0$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$
Вейбулла	$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^\beta}{\alpha}\right), x \geq 0$	$x_i = \left(-\alpha \ln(1 - r_i)\right)^{1/\beta}$
Рівномірний	$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a; b]$	$x_i = a + r_i(b-a)$
Релея	$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), x \geq 0$	$x_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - r_i)}$
Парето	$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^a, x \geq k$	$x_i = k(1 - r_i)^{1/a}$
Лапласа	$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(\lambda(x-\mu)), -\infty < x \leq \mu, \\ 1 - \frac{1}{2} \exp(-\lambda(x-\mu)), \mu < x < \infty \end{cases}$	$x_i = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \ln(2r_i) + \mu, x_i \leq \mu, \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(2(1-r_i)) + \mu, x_i > \mu \end{cases}$
Екстремальний (найбільшого значення)	$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-m}{\sigma}\right)\right)$	$x_i = m - \sigma \ln(-\ln(r_i))$
Із класу екстремальних	$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\exp(Bx^\beta) - 1\right)\right)$	$x_i = \left(\frac{1}{B} \ln(1 - \ln(1 - r_i))\right)^{1/\beta}$

**Розподіл Стюдента, функція щільності якого має вигляд**

$$f(x) = \frac{\Gamma((v+1)/2) (1 + x^2/v)^{-(v+1)/2}}{\sqrt{v\pi} \Gamma(v/2)},$$

а параметр  $v$  називають степенем вільності, визначає процедуру генерування випадкових чисел типу

$$x_i \approx u_i + \frac{1}{v} g_1(u_i) + \frac{1}{v^2} g_2(u_i) + \frac{1}{v^3} g_3(u_i) + \frac{1}{v^4} g_4(u_i), \quad (2)$$

де  $u_i \in N(u; 0, 1)$  – випадкове число зі стандартного нормального розподілу;

$$g_1(u_i) = \frac{1}{4}(u_i^3 + u_i); \quad g_2(u_i) = \frac{1}{96}(5u_i^5 + 16u_i^3 + 3u_i);$$

$$g_3(u_i) = \frac{1}{384}(3u_i^7 + 19u_i^5 + 17u_i^3 - 15u_i);$$

$$g_4(u_i) = \frac{1}{92160}(79u_i^9 + 779u_i^7 + 1482u_i^5 - 1920u_i^3 - 945u_i).$$

Для розподілу Фішера з функцією щільності

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} x^{\frac{v_1-2}{2}} \left(1 + \frac{v_1}{v_2}x\right)^{-\frac{v_1+v_2}{2}}, \quad x \geq 0,$$

де  $v_1, v_2$  – параметри розподілу, що їх називають степенями вільності, випадкові числа можуть бути одержані зі співвідношення

$$x_i = \exp(2z_i), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} z_i = & u_i \sqrt{\frac{\sigma}{2}} - \frac{1}{6} \delta (u_i^2 + 2) + \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \left( \frac{\sigma}{24} (u_i^2 + 3u_i) + \frac{1}{72} \frac{\delta^2}{\sigma} (u_i^3 + 11u_i) \right) - \\ & - \frac{\delta \sigma}{120} (u_i^4 + 9u_i^2 + 8) + \frac{\delta^3}{3 \cdot 240 \sigma} (3u_i^4 + 7u_i^2 - 16) + \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \left( \frac{\sigma^2}{1920} (u_i^5 + 20u_i^3 + 15u_i) + \right. \\ & \left. + \frac{\delta^4}{2 \cdot 880} (u_i^5 + 44u_i^3 + 183u_i) + \frac{\delta^4}{155 \cdot 520 \sigma^2} (9u_i^5 - 284u_i^3 - 1513u_i) \right); \\ & \sigma = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}; \quad \delta = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}; \end{aligned}$$

де  $u_i \in N(u; 0, 1)$  – випадкове число зі стандартного нормального розподілу.

**Зауваження 1.** Наведені вище вирази можуть бути застосовані для визначення квантилів  $\chi_{\alpha, v}^2$ ,  $t_{\alpha, v}$ ,  $f_{\alpha, v_1, v_2}$  розподілів  $\chi^2$ , Стюдента й Фішера відповідно. Для цього у формулах (1) і (3) необхідно  $u_i$  замінити на одnobічний квантиль нормального розподілу  $u_{1-\alpha}$ , а у формулі (2) – двобічний квантиль нормального розподілу на  $u_{\alpha/2}$ .

## Моделювання нормально розподілених випадкових чисел

Моделювання випадкових чисел із нормальним розподілом

$$N(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

здійснюється за формулою

$$x_i = m + \sigma u_i,$$

де  $u_i$  – випадкове число зі стандартного нормального розподілу  $N(u; 0, 1)$ .

Тобто задача зводиться до моделювання нормально розподілених випадкових чисел не з довільними параметрами  $m$  і  $\sigma$ , а з параметрами 0 і 1.

Існує низка методів генерування  $u_i$ . Одним з основних є **метод оберненої функції**, який передбачає розв'язання рівняння

$$F(u_i; 0, 1) = r_i \quad \text{або} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_i} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = r_i,$$

де  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_i} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \Phi(u_i)$  – функція Лапласа.

Розв'язком даного рівняння є число

$$u_i = \Phi^{-1}(r_i),$$

для обчислення якого застосовують апроксимаційні функції.

Якщо  $r_i \leq 0,5$ , то

$$u_i = \Phi^{-1}(r_i) \approx \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} - t,$$

де

$$t = \sqrt{-2 \ln(r_i)}; \quad c_0 = 2,515\,517; \quad c_1 = 0,802\,853; \quad c_2 = 0,010328; \\ d_1 = 1,432\,788; \quad d_2 = 0,189\,265\,9; \quad d_3 = 0,001\,308.$$

Якщо  $r_i > 0,5$ , то має місце співвідношення

$$u_i = \Phi^{-1}(r_i) \approx t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}, \quad (4)$$

де  $t = \sqrt{-2 \ln(1 - r_i)}$ .

Інший є **метод додавання**, в основі якого лежить центральна гранична теорема. Згідно з нею у випадку складання великої кількості випадкових величин з однаковими дисперсіями одержана випадкова величина буде асимптотично розподілена за нормальним законом.

Дослідження показали, що в разі складання 12 випадкових величин  $R_i \in [0; 1]$ , рівномірно розподілених на проміжку  $[0; 1]$ , їх добуток  $V = \sum_{i=1}^{12} R_i$  буде нормальною величиною з параметрами

$$E(V) = E\left(\sum_{i=1}^{12} R_i\right) = \sum_{i=1}^{12} E(R_i) = 12 \frac{1}{2} = 6, \\ D(V) = D\left(\sum_{i=1}^{12} R_i\right) = \sum_{i=1}^{12} D(R_i) = 12 \frac{1}{12} = 1.$$

Якщо пронормувати величину  $V$ , то одержана величина

$$U = \frac{V - E(V)}{\sqrt{D(V)}} = V - 6$$



буде нормально розподілена з параметрами 0 та 1. Звідси випливає, що

$$u_i = \sum_{j=1}^{12} r_{i,j} - 6,$$

де  $r_{i,j} \in [0;1]$  – рівномірно розподілені псевдовипадкові числа.

**Метод функціональних перетворень** реалізує таку процедуру:

1) моделювання двох РРЧ  $r_{i,1}, r_{i,2} \in [0;1]$ ;

2) обчислення пари нормально розподілених чисел

$$u_{i,1} = \sqrt{-2 \ln r_{i,1}} \sin(2\pi r_{i,2}), \quad u_{i,2} = \sqrt{-2 \ln r_{i,1}} \cos(2\pi r_{i,2}).$$

У такий спосіб можна одержати дві послідовності випадкових чисел  $\{u_{i,1}; i = \overline{1, N}\}$  та  $\{u_{i,2}; i = \overline{1, N}\}$ .

**Метод полярних координат** також дозволяє моделювати одразу дві послідовності випадкових чисел  $u_i$  шляхом:

1) моделювання двох РРЧ  $r_{i,1}, r_{i,2} \in [0;1]$ ;

2) перетворення одержаних у п.1 чисел до РРЧ з інтервалу  $[-1;1]$ :

$$v_{i,1} = 2r_{i,1} - 1, \quad v_{i,2} = 2r_{i,2} - 1;$$

3) обчислення величини  $s_i = v_{i,1}^2 + v_{i,2}^2$ . Якщо  $s_i > 1$ , то  $v_{i,1}$  та  $v_{i,2}$  ігнорують і повертаються до п. 1. Якщо  $s_i \leq 1$ , то вважають, що точка  $(v_{i,1}, v_{i,2})$  є випадкова точка з одиничного кола, і переходять до п. 4;

4) обчислення випадкових чисел

$$u_{i,1} = v_{i,1} \sqrt{\frac{-2 \ln s_i}{s_i}}, \quad u_{i,2} = v_{i,2} \sqrt{\frac{-2 \ln s_i}{s_i}}.$$

Отже, за будь-яким із наведених методів може бути одержана послідовність  $\{u_i; i = \overline{1, N}\}$ , а на її основі – послідовність  $\{x_i = m + \sigma u_i; i = \overline{1, N}\}$ .

**Зауваження 2.** Двобічний квантиль нормального розподілу  $u_{\alpha/2}$  можна визначити за формулою (4), якщо взяти  $r_i = \alpha/2$ .

Із нормальним розподілом тісно пов'язаний **логарифмічно нормальний розподіл**

$$F(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy, \quad x \geq 0.$$

Моделювання випадкових чисел для нього здійснюється за формулою

$$x_i = \exp(y_i),$$

де  $y_i \in N(y; m, \sigma)$  – нормально розподілені числа з параметрами  $m$  та  $\sigma$ .

## Оцінка якості випадкових чисел

Якість випадкових чисел можна оцінити двома способами:

- 1) відтворенням за одержаною послідовністю закону розподілу та перевіркою адекватності закону шляхом реалізації критеріїв згоди;
- 2) реалізацією спеціальних тестів для перевірки якості випадкових чисел.

Наведені нижче тести призначені для перевірки якості псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених на проміжку  $[0;1]$ .

**Тест аперіодичності** передбачає пошук такого номера  $i=i'$ , після якого послідовність випадкових чисел повторюється. Шляхом перебору здійснюється пошук номера  $i=i'$  та періоду  $L$  для послідовності чисел  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , для яких виконується умова

$$r_{i'+jL} = r_{i'}, \quad r_{i'+1+jL} = r_{i'+1}, \quad \dots, \quad r_{i'+p+jL} = r_{i'+p}, \quad j=1, 2, \dots$$

Якщо  $L < N$ , то порушується умова незалежності послідовності чисел  $r_1, r_2, \dots, r_N$  і послідовність вважається неякісною.

**Тест збігу моментів.** Для рівномірно розподіленої випадкової величини  $\xi$  математичне сподівання дорівнює  $E(\xi) = \frac{1}{2}$ , а дисперсія

$D(\xi) = \frac{1}{12}$ . Якщо послідовність  $\{r_i \in [0;1]; i=1, N\}$  являє собою реалізацію рівномірно розподіленої випадкової величини  $\xi$ , то обчислена на її основі статистична оцінка математичного сподівання, якою є середнє арифметичне

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i,$$

має дорівнювати  $\frac{1}{2}$ , а статистична оцінка дисперсії

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2$$

повинна становити  $\frac{1}{12}$ .

Застосовуючи тест збігу моментів, перевіряють гіпотезу щодо збігу теоретичних і статистичних моментів

$$H_0 : E(\xi) = \bar{r}, \quad D(\xi) = s^2, \quad (5)$$

для чого розглядають випадкові величини

$$\zeta_1 = \bar{r} - \frac{1}{2}, \quad \zeta_2 = s^2 - \frac{1}{12},$$

які мають нормальні розподіли

$$\zeta_1 \sim N(z_1; 0; \sigma_{z_1}), \quad \zeta_2 \sim N(z_2; 0; \sigma_{z_2}),$$

де

$$\sigma_{z_1}^2 = \frac{1}{12N}, \quad \sigma_{z_2}^2 = \left( \frac{N}{N-1} \right)^2 \left( \frac{0,0056}{N} + \frac{0,0028}{N^2} - \frac{0,0083}{N^3} \right).$$

Тоді процедура перевірки головної гіпотези (5) еквівалентна перевірці двох гіпотез:

$$H_0 : E(\zeta_1) = 0, \quad (6)$$

$$H_0 : D(\zeta_2) = 0. \quad (7)$$

Для гіпотези (6) перевіряють умову

$$u_1 = \frac{|\zeta_1|}{\sigma_{z_1}} = \sqrt{12N} |\zeta_1| \leq u_{\alpha/2}, \quad (8)$$

де  $u_{\alpha/2}$  – квантиль нормального розподілу.

Якщо умова (8) виконується, то підтверджується збіг математичного сподівання й середнього арифметичного.

Гіпотезу (7) перевіряють на основі умови

$$u_2 = \frac{|\zeta_2|}{\sigma_{z_2}} = \frac{N-1}{N} \frac{|\zeta_2|}{\sqrt{0,0056N^{-1} + 0,0028N^{-2} - 0,0083N^{-3}}} \leq u_{\alpha/2}, \quad (9)$$

виконання якої підтверджує збіг теоретичної й статистичної дисперсій. Якщо не виконується хоча б одна з нерівностей (8) або (9), генерована послідовність неякісна.

**Тест коваріації** призначений для перевірки незалежності елементів послідовності  $\{r_i, i = \overline{1, N}\}$  на основі коваріаційної функції. Для цього обчислюють коваріації поміж елементами послідовності, розташованими на відстані  $j$  одиниць один від одного:

$$\begin{aligned} C_0 &= \text{cov}\{(r_1, r_2, \dots, r_N), (r_1, r_2, \dots, r_N)\}, \\ C_1 &= \text{cov}\{(r_1, r_2, \dots, r_{N-1}), (r_2, r_3, \dots, r_N)\}, \\ C_2 &= \text{cov}\{(r_1, r_2, \dots, r_{N-2}), (r_3, r_4, \dots, r_N)\}, \\ &\dots \\ C_j &= \text{cov}\{(r_1, r_2, \dots, r_{N-j}), (r_{j+1}, r_{j+2}, \dots, r_N)\}. \end{aligned}$$

Якщо  $(r_1, r_2, \dots, r_{N-j})$  й  $(r_{j+1}, r_{j+2}, \dots, r_N)$  незалежні, то слушні рівності

$$C_j = \begin{cases} \frac{1}{12}, & j = 0, \\ 0, & j \geq 1. \end{cases}$$

Обчислення статистичного значення  $\hat{C}_j$ , коли  $N > 50$ , здійснюють за спрощеною формулою:

$$\hat{C}_j = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} (r_i - \bar{r})(r_{i+j} - \bar{r}).$$

Якщо  $N \leq 50$ , застосовують точну формулу:

$$\hat{C}_j = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} \left( r_i - \frac{1}{N-j} \sum_{h=1}^{N-j} r_h \right) \left( r_{i+j} - \frac{1}{N-j} \sum_{h=1}^{N-j} r_{h+j} \right).$$

Головну гіпотезу щодо збігу теоретичних і статистичних коефіцієнтів коваріації

$$H_0: C_j = \hat{C}_j, \quad j \geq 1,$$

приймають, якщо виконується умова

$$|\hat{C}_j - C_j| \leq \frac{c_j u_{\alpha/2}}{12\sqrt{N-1}}, \quad (10)$$

$$\text{де } c_j = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{якщо } j = 0, \\ 1, & \text{якщо } j \geq 1. \end{cases}$$

Якщо для  $\forall j \geq 1$  виконується умова (10), то елементи  $\{r_i; i = \overline{1, N}\}$  незалежні, у противному разі вони залежні й послідовність неякісна.

Як максимальне значення  $j \geq 1$  рекомендується брати  $2/3$  генерованої послідовності.

Якість послідовності випадкових чисел із розподілом  $F(x; \vec{\Theta})$ , де  $\vec{\Theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ , оцінюють таким чином. Змодельовану послідовність  $\{x_i; i = \overline{1, N}\}$  вважають якісною, якщо знайдені за нею оцінки параметрів  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_s$  збігаються з параметрами моделювання  $\theta_1, \dots, \theta_s$ , тобто правдиві гіпотези

$$H_0: \theta_j = \hat{\theta}_j \text{ для } \forall j = \overline{1, s}.$$

Перевірка наведеної гіпотези ґрунтується на статистичних характеристиках

$$u_j = \frac{\theta_j - \hat{\theta}_j}{\sqrt{D(\hat{\theta}_j)}}, \quad j = \overline{1, s},$$

які нормально розподілені. Якщо для заданої помилки першого роду  $\alpha$  слухні нерівності

$$|u_j| \leq u_{\alpha/2} \text{ для } \forall j = \overline{1, s},$$

то послідовність можна вважати якісною.

## Список рекомендованої літератури

Барлоу, Р. Математическая теория надежности [Текст] / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М.: Сов. радио, 1969. – 488 с.

Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст] / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 336 с.

Кокс, Л. Статистический анализ последовательностей событий [Текст] / Л. Кокс, П. Льюис. – М.: Мир, 1969. – 312 с.

Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения [Текст] / А. Кофман, Р. Крюон. – М.: Мир, 1965. – 302 с.

Потапов, В.Д. Имитационное моделирование производственных процессов в горной промышленности [Текст] / В.Д. Потапов, А.Д. Яризов. – М.: Высш. шк., 1981. – 191 с.

## Зміст

Передмова.....	3
Загальні вимоги до виконання лабораторних робіт.....	4
Лабораторна робота 1. Обробка потоку подій.....	5
Лабораторна робота 2. Моделювання одноканальної системи масового обслуговування.....	19
Лабораторна робота 3. Моделювання багатоканальної системи масового обслуговування.....	27
Додаток.....	33
Список рекомендованої літератури.....	44