Sprawozdanie 2

Aleksander Głowacki

04.11.2022

Spis treści

1 Zadanie 1.

1.1 Opis problemu

Sprawdzenie czy niewielkie zaburzenie danych ma wpływ na wyniki.

1.2 Sposób rozwiązania

Kopiuję kod i kasuję dwie cyferki z danych.

1.3 Wyniki

Tabela 1: Porównanie wyników we Float 32

Tabela 2: Lista 1

alg	**wynik**
1	-0.3472038161853561
2	-0.3472038162872195
3	-0.5
4	-0.5

Tabela 3: Lista 2

alg	**wynik**
1	-0.3472038161889941
2	-0.3472038162872195
3	-0.5
4	-0.5

Tabela 4: Porównanie wyników we Float 64

Tabela 5: Lista 1

alg	**wynik**
1	1.0251881368296672e-10
2	-1.5643308870494366e-10
3	0.0
4	0.0

Tabela 6: Lista 2

alg	**wynik**
1	-0.004296342739891585
2	-0.004296342998713953
3	-0.004296342842280865
4	-0.004296342842280865

1.4 Wnioski

1. We Float 32 ta zmiana danych spowodowała nieznaczną zmianę wyników.
2. We Float 64 zmiany są istotne.

2 Zadanie 2.

2.1 Opis problemu

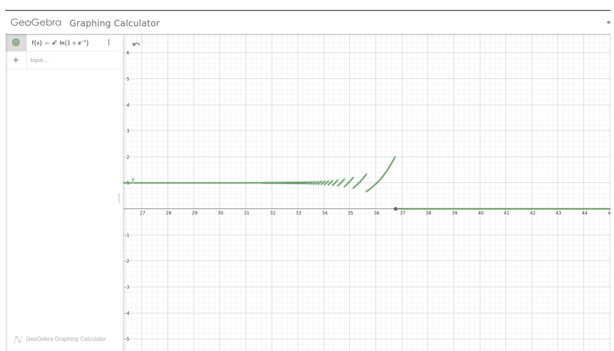
Porównanie obliczonej granicy funkcji z jej wykresem wygenerowanym w jakimś programie.

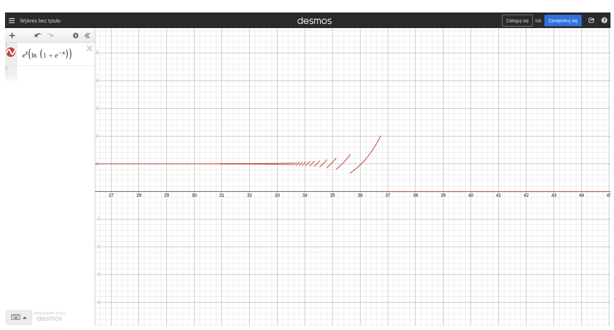
$$f(x) = e^x(\ln(1 + e^{-x}))$$

2.2 Sposób rozwiązania

$lim_{x\to\infty}\ e^x(\ln(1+e^{-x})) = lim_{x\to\infty}\ \frac{(\ln(1+e^{-x}))}{e^{-x}} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} lim_{x\to\infty}\ \frac{-\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}}{-e^{-x}} = lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+1} = 1$

2.3 Wyniki





2.4 Wnioski

1. Wykres nie pokrywa się z rzeczywistą granicą funkcji:
   w okolicy $x = 35$ spada do 0.

2. Epsilon maszynowy dla typu Float64 jest rzędu 10^{-16}.

3. Funkcja $g(x) = (1 + e^{-x})$ dla wartości $x > 34$ spada do epsilona maszynowego i w rezultacie spada do jedynki. Zaś $ln(1) = 0$

4. Fluktuacje wykresu na odcinku $(33, 37)$ wynikają ze skończonej gęstości liczb blisko 1, dlatego wykres nie jest ciągły - to przeskoki funkcji $ln(g(x))$.

5. A gdy granica epsilona maszynowego pękła, wykres zwariował i po dziś dzień grasuje na lini zera.

3 Zadanie 3.

3.1 Opis problemu

Rozwiązanie układu równań liniowych postaci $Ax = b$, gdzie A - macierz współczynnikow, x - wektor niewiadomych, b - zadany wektor wyrazów wolnych.

3.2 Sposób rozwiązania

W pierwszej kolejności należy przygotować dane.

1. Generujemy macierze: Hilberta i Randomową

2. Mnożymy je z wektorem x, aby otrzymać wektor b

3. Mając zadaną macierz A i wektor b rozwiązujemy uklad równań dwiema metodami - eliminacji Gaussa oraz inwersji.

4. Otrzymany wektor x' porównujemy z oryginalnym x, oceniając skuteczność algorytmów. Żeby dało się zatabelkować liczymy normę wektora. Dla orginalnego $= 1$.

3.3 Wyniki

Tabela 7: Macierz Hilberta

n	**rank**	**cond**	**norm(x-inverse)**	**norm(x-gauss)**
1	1	1.0	0.0	0.0
3	3	524.0567775860644	0.0	1.389554002205336e-14
5	5	476607.25024259434	7.500747052839271e-12	3.7629505159417226e-12
7	7	4.75367356583129e8	1.2470167790391696e-8	3.335463548676909e-8
9	9	4.931537564468762e11	1.3623804909529929e-5	1.1625490255509743e-5
11	10	5.222677939280335e14	0.025267056849832565	0.0005249490091577049
13	11	3.344143497338461e18	19.222187681585524	0.39804208446271144
15	12	3.674392953467974e17	28.44567403176546	18.19011830553027
17	12	1.263684342666052e18	43.36246428455144	56.51638468279824
19	13	6.471953976541591e18	53.325729614779235	42.371068229087264
21	13	3.290126328601399e18	199.22887541330184	258.4695319671756
23	13	6.313778670724671e17	66.2006254719103	59.86950653973175
25	13	1.3719347461445998e18	84.69938964854735	50.795974216939854
27	14	4.424587877361583e18	146.0415785777959	160.056977186448
29	14	8.05926200352767e18	1442.9165140119494	95.55951141201861

Ta macierz jest bardzo źle uwarunkowana.

Tabela 8: Macierz Randomowa

n	**rank**	**cond**	**norm(x-inverse)**	**norm(x-gauss)**
5	5	1.000000000000001	3.8459253727671276e-16	0.0
5	5	10.000000000000004	5.438959822042073e-16	2.220446049250313e-16
5	5	999.9999999999565	3.891802844472395e-14	3.0787427327232494e-14
5	5	1.000000000610769e7	5.342753065833187e-10	5.483178137661799e-10
5	5	9.999080208039573e11	6.459691704512062e-5	4.939095563889871e-5
5	4	8.35707807125492e15	0.41912823576094815	0.40125027718625494
10	10	1.0000000000000013	8.741904837807691e-16	7.529898907871222e-16
10	10	10.000000000000014	7.108895957933346e-16	8.881784197001252e-16
10	10	999.9999999999897	1.8374778024090335e-14	1.9897476392944793e-14
10	10	1.0000000002327014e7	1.1867173858710762e-9	1.1801631451217697e-9
10	10	1.0000047652400917e12	0.00014673264147786112	0.00013773168775276244
10	9	7.555737189542885e16	0.610975462375536	0.5529051624812602
20	20	1.000000000000001	1.6910413304902302e-15	2.837048893407221e-15
20	20	9.999999999999988	3.1869396220701337e-15	3.420135685938544e-15
20	20	1000.0000000000271	1.2184483994422223e-13	1.154249709415512e-13
20	20	9.999999999786278e6	1.0955572491930047e-9	9.758161752695135e-10
20	20	9.999840704839703e11	4.9268205710210866e-5	2.238852829593131e-5
20	19	2.045522441369736e16	0.7176266059425617	0.7824065888781212

3.4 Wnioski

1. Poziom uwarunkowania macierzy wpływa na dokładność wyników proporcjonalnie.
2. W macierzy hilberta wszystkie wyniki są mocno zaburzone
3. W macierzy zrandomizowanej dla niskiego wskaźnika cond błąd względny jest niewielki.
4. Błąd dla macierzy zrandomizowanej nie zależy od jej rozmiaru.

4 Zadanie 4.

4.1 Opis problemu

Wyznaczenie zer wielomianu Wilkinsona metoda "roots"z pakietu Polynomials. Zbadanie poprawności wyników metodami:

1. $|P(z_k)|$
2. $|p(z_k)|$
3. $|z_k - k|$

Gdzie p - postać iloczynowa wielomianu, P - naturalna.
Powtórzenie eksperymentu na wielomienie, gdzie współcznynnik -210.0 został zmieniony na $-210.0 - 2^{-23}$,

4.2 Sposób rozwiązania

1. zapisuję wielomian w postaci kanoniczej oraz iloczynowej za pomocą funkcji $Polynomial$ i $fromroots$
2. wyznaczam miejsca zerowe wielomianu funkcją $roots$

4.3 Wyniki

Tabela 9: Sprawdzenie wyznaczonych zer na orginalnym wielomianie

k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	35696.50964788257	5.5184794903504445e6	3.0109248427834245e-13
2	176252.60026668405	7.37869762990174e19	2.8318236644508943e-11
3	279157.6968824087	3.3204139316875795e20	4.0790348876384996e-10
4	3.0271092988991085e6	8.854437035384718e20	1.626246826091915e-8
5	2.2917473756567076e7	1.8446752056545688e21	6.657697912970661e-7
6	1.2902417284205095e8	3.320394888870117e21	1.0754175226779239e-5
7	4.805112754602064e8	5.423593016891273e21	0.00010200279300764947
8	1.6379520218961136e9	8.262050140110275e21	0.0006441703922384079
9	4.877071372550003e9	1.196559421646277e22	0.002915294362052734
10	1.3638638195458128e10	1.655260133520688e22	0.009586957518274986
11	3.585631295130865e10	2.24783329792479e22	0.025022932909317674
12	7.533332360358197e10	2.886944688412679e22	0.04671674615314281
13	1.9605988124330817e11	3.807325552826988e22	0.07431403244734014
14	3.5751347823104315e11	4.612719853150334e22	0.08524440819787316
15	8.21627123645597e11	5.901011420218566e22	0.07549379969947623
16	1.5514978880494067e12	7.010874106897764e22	0.05371328339202819
17	3.694735918486229e12	8.568905825736165e22	0.025427146237412046
18	7.650109016515867e12	1.0144799361044434e23	0.009078647283519814
19	1.1435273749721195e13	1.1990376202371257e23	0.0019098182994383706
20	2.7924106393680727e13	1.4019117414318134e23	0.00019070876336257925

Tabela 10: Sprawdzenie zer na zedytowanym wielomanie

k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	20259.872313418207	3.0131001276845885e6	1.6431300764452317e-13
2	346541.4137593836	7.37869763029606e19	5.503730804434781e-11
3	2.2580597001197007e6	3.320413920110016e20	3.3965799062229962e-9
4	1.0542631790395478e7	8.854437817429642e20	8.972436216225788e-8
5	3.757830916585153e7	1.844672697408419e21	1.4261120897529622e-6
6	1.3140943325569446e8	3.320450195282313e21	2.0476673030955794e-5
7	3.939355874647618e8	5.422366528916004e21	0.00039792957757978087
8	1.184986961371896e9	8.289399860984408e21	0.007772029099445632
9	2.2255221233077707e9	1.160747250177049e22	0.0841836320674414
10	1.0677921232930157e10	1.7212892853670706e22	0.6519586830380407
11	1.0677921232930157e10	1.7212892853670706e22	1.1109180272716561
12	3.1401962344429485e10	2.8568401004080956e22	1.665281290598479
13	3.1401962344429485e10	2.8568401004080956e22	2.0458202766784277
14	2.157665405951858e11	4.934647147686795e22	2.518835871190904
15	2.157665405951858e11	4.934647147686795e22	2.7128805312847097
16	4.850110893921027e11	8.484694713563005e22	2.9060018735375106
17	4.850110893921027e11	8.484694713563005e22	2.825483521349608
18	4.557199223869993e12	1.3181947820607215e23	2.4540214463129764
19	4.557199223869993e12	1.3181947820607215e23	2.0043294443099486
20	8.756386551865696e12	1.5911084081430876e23	0.8469102151947894

4.4 Wnioski

1. Metoda *roots* nie zwróciła nam prawidłowych zer wielomianu, ponieważ podstawiając je do postaci kanonicznej jak i iloczynowej wielomian sie nie zeruje.

2. Błędy mogą wynikać z reprezantacji współczynników podanego wielomiany w arytmetyce komputera. Arytmetyka w Float64 w języku Julia ma od 15 do 17 cyfr znaczących w systemie dziesiętnym, a niektóre współczynniki mają więcej cyfr.

3. Niewielka zmiana danych rzutuje kolosalną zmianą wyników, co sugeruje, że zadanie jest źle uwarunkowane.

5 Zadanie 5.

5.1 Opis problemu

Badanie rekurencyjnego algorytmu do modelowania wzrostu populacji. Sprawdzenie wyników w 3 sposobach iteracji funkcji:

1. 40 iteracji we Float32
2. 40 iteracji we Float64
3. 4 x 10 iteracji we Float 64, po każdych 10 obcięcie mantysy do 3 cyfr

Wzór:

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n)$$

5.2 Sposób rozwiązania

Zastosowanie wprost wzoru rekuencyjnego na opisane 3 sposoby.

5.3 Wyniki

1. 40 iterations Float32: 0.25860548
2. 40 iterations Float64: 0.011611238029748606
3. 4x10 iter. + truncate: 0.71587336

5.4 Wnioski

1. Wyniki mocno zależą od precyzji arytmetyki.
2. Niewielkie zaburzenia danych - błędy reprezentacji i zaokrągleń drastycznie wpływają na końcowy rezultat, ponieważ w każdej kolejnej rekursji błędy się akumulują, narastają.

6 Zadanie 6.

6.1 Opis problemu

Badanie iteracji równania rekurencyjnego:

$$x_{n+1} := x_n^2 + c$$

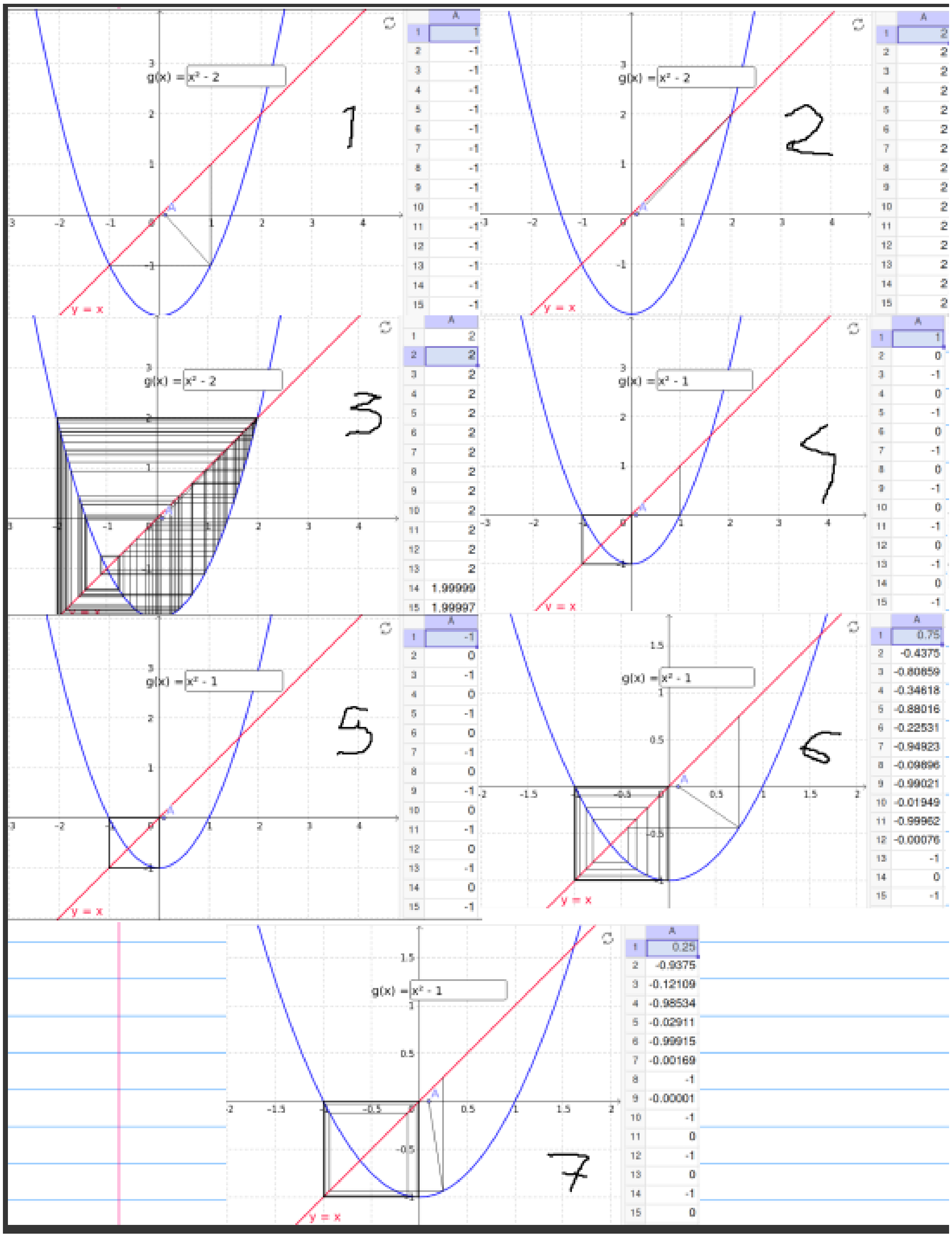
Danych jest 7 zestawów wartości c i x_0. Na każdym wykonujemy 40 kroków rekurencji.

6.2 Wyniki

1. $c = -2.0, x_0 = 1.0 : x_{40} = -1.0$
2. $c = -2.0, x_0 = 2.0 : x_{40} = 2.0$
3. $c = -2.0, x_0 = 1.99999999999999 : x_{40} = 1.2926797271549244$
4. $c = -1.0, x_0 = 1.0 : x_{40} = 0.0$
5. $c = -1.0, x_0 = -1.0 : x_{40} = 0.0$
6. $c = -1.0, x_0 = 0.75 : x_{40} = 0.0$
7. $c = -1.0, x_0 = 0.25 : x_{40} = -1.0$

6.3 Wnioski

1. Błędy arytmetyki mocno się akumulują. Dla wartości x_0 równych 0.25 oraz 0.75 wynik zbiega do liczby całkowitej dosyć szybko - po 10 iteracjach - zbiegają do liczby całkowitej.
2. Zmiana wartości startowej z 2.0 na 1.9999999999 znacząco zaburza kolejne iteracje własnie ze wzgledu na błędy zaokrągleń.
3. Przy takich algotymach musimy zapewnić maksymalną precyzję.



g(x) = x² - 2
1
A: 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1
g(x) = x² - 2
2
A: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
g(x) = x² - 2
3
A: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1.99999, 1.99997
g(x) = x² - 1
4
A: 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
g(x) = x² - 1
5
A: -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
g(x) = x² - 1
6
A: 0.75, -0.4375, -0.80859, -0.34618, -0.88016, -0.22531, -0.94923, -0.09896, -0.99021, -0.01949, -0.99962, -0.00076, -1, 0, -1
g(x) = x² - 1
7
A: 0.25, -0.9375, -0.12109, -0.98534, -0.02911, -0.99915, -0.00169, -1, -0.00001, -1, 0, -1, 0, -1, 0
y = x