

OBLICZENIA NAUKOWE

Lista nr 2 *

zad. 1 Jeśli chcemy, aby obliczanie różnicy $y = \sqrt{x^2 + 1} - 1$ powodowało zmniejszenie dokładności najwyżej o 2 bity, to jak trzeba ograniczyć wartości x ?

Wsk. Skorzystać z twierdzenia podanego na wykładzie.

zad. 2 O ile bitów zmniejsza się dokładność różnicy $1 - \cos x$ dla $x = \frac{1}{2}$?

zad. 3 Niech $f(x) = x^{-1}(1 - \cos x)$.

(a) Jaka definicja wartości $f(0)$ zapewnia ciągłość tej funkcji?

(b) W pobliżu jakich punktów użycie powyższej definicji funkcji f powoduje utratę dokładności? Jak można usunąć tę wadę?

Wsk. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

zad. 4 Jak w arytmetyce *fl* obliczyć wartość funkcji

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

dla dużych wartości argumentu x ?

zad. 5 Pierwiastek kwadratowy $u+iv$ liczby zespolonej $x+iy$, $x \neq 0$, obliczamy w arytmetyce *fl* z następujących wzorów:

$$u := \pm \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}, \quad v := \frac{y}{2u}.$$

Oceń dokładność obliczonego u dla dwóch przypadków: $x \geq 0$ i $x < 0$ oraz ewentualnie zaproponować lepszy wzór na u .

zad. 6 Pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ obliczamy ze wzoru

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Zauważ, że jeśli $4ac$ jest względnie małe w stosunku do b^2 , wówczas następuje utrata cyfr znaczących, ponieważ

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \approx |b|.$$

Zaproponować wzory omijające tę trudność.

Wsk. Rozpatrzeć dwa przypadki: $b \geq 0$ i $b < 0$. Skorzystać ze wzoru Vieta $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

zad. 7 Zaproponować sposób wyznaczania wartości wyrażenia, gwarantujący możliwie mały błąd w arytmetyce *fl*,

$$\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x} \text{ dla } |x| \ll 1.$$

Przeprowadzić analizę błędów dla zaproponowanego wzoru.

*Część zadań pochodzi z książki D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.

Wsk.

$$fl\left(\frac{a}{b(1+\alpha)}\right) = \frac{a}{b(1+\alpha)}(1+\delta) = \frac{a}{b}(1+\beta),$$

gdzie $|\delta| \leq \epsilon = 2^{-t}$, a wartość bezwzględna błędu β jest w przybliżeniu oszacowana z góry przez sumę wartości bezwzględnych α i δ .

Uwaga. Mnożenie przez 2 jest wykonywane dokładnie.

zad. 8 Wyznaczyć wskaźniki uwarunkowania zadania obliczania wartości następujących funkcji (zgodnie z formułą z wykładu):

$$x^\alpha, \sin x, e^x, x^{-1}e^x, \arcsin x.$$