Sprawozdanie nr 4

Aleksander Głowacki

10.12.2022

Spis treści

1 Zadanie 1.

1.1 Opis problemu

Wyznaczenie ilorazów różnicowych N-tych rzędów funkcji na podstawie zadanych węzłów i wartośći funkcji w tych węzłach. Ilorazy różnicowe kolejnych rzędów odpowiadają współczynnikom wialomianu w postaci Newtona. Wartość ta opisuje przyrost wartości funkcji na badanym przedziale. Celem jest otrzymanie listy postaci:

$$[f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], ..., f[x_0, ...x_n]]$$

1.2 Sposób rozwiązania

Rozwiązanie opiera się na rekurencyjnej zależności ilorazów różnicowych wyższych rzędów:

$$f[x_i] = f(x_i)$$
$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1,...,x_n]-f[x_0,...,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

2 Zadanie 2.

2.1 Opis problemu

Wykorzystanie uogólnionego algorytmu Hornera w celu obliczenia wartości wielomianu stopnia n postaci Newtona w zadanym punkcie. Program na wejściu otrzymuje listę węzłów i ilorazów różnicowych obliczonych w poprzednim zadaniu. Działa w czasie liniowym od stopnia wielomianu.

2.2 Sposób rozwiązania

Obliczenie wartości wielomianu w punkcie t korzystając z postaci Newtona, gdzie znamy węzły x_j i współczynniki a_i - ilorazy różnicowe.

$$w(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(t - t_j)$$

Algorytm ten jest liniowy, ponieważ w kazdej iteracji pojedynczej pętli sumowania wykonuje sie tylko jedno mnożenie, gdyż korzystamy z wyniku mnożenia z poprzednjej iteracji.

3 Zadanie 3.

3.1 Opis problemu

Przekształcenie wielomianu postaci Newtona na postać naturalną, gdy zadany jest wektor węzłów i ilorazów różnicowych.

3.2 Sposób rozwiązania

W wielomianie interpolacyjnym, współczynnik a_n przy najwyższej potędze x_n jest równy cn wartości ilorazu różnicowego dla najwyższego rzędu. Dzięki temu możemy wyliczyć wszystkie współczynniki wielomianu zaczynając od najwyższych potęg i aktualizując współczynniki przy niższych potęgach, tak aby były one w postaci naturalnej. W kolejnych iteracjach będziemy korzystać z już obliczonych "częściowych"współczynników. Najniższy współczynnik jest sumą współczynników postaci Newtona rozbitą po ilorazach różnicowych kolejnych rzędów. Czynnik a_{n-1} występuje tylko przy ilorazie rzędu n i $n-1$. Wyliczając go na tych dwóch węzłach jednocześnie liczymy fragment czynnika a_{n-2}, którego reszta skrywa się w ilorazie rzędu $n-2$. Stąd podwójna pętla w algorytmie - wewnątrz liczymy fragmenty wszystkich współczynników postaci naturalnej na bazie ilorazu różnicowego najwyższego rzędu, a w zewnetrznej petli zschodzimy do ilorazu niższego rzędu i doliczamy resztę współczynników, pomijając ten stojący przy najwyższej potędze, bo jest on już gotowy.

3.3 Wnioski

Obliczenie postaci naturalnej wielomianu, ktory interpoluje funkcję daje pewną korzyść. Gdy nie znamy jawnego wzoru, jedynie wartości w określonych węzłach, trudno jest znaleźć funkcję pierwotną potrzebną do całkowania przedziału - obliczenia pola pod wykresem funkcji. Natomiast całkowanie wielomianu otrzymanego za pomoca ilorazów różnicowych jest trywialne, co uprascza problem i uzyskujemy przybliżoną przez wielomian wartość całki oznaczonej danej funkcji.

4 Zadanie 4.

4.1 Opis problemu

Program ma interpolować zadaną funkcję na przedziale przy pomocy wielomianu o zadanym stopniu.

4.2 Sposób rozwiązania

1. Konstrukcja wielomianu postaci Newtona przy pomocy obliczenia ilorazów różnicowych na zadanych węzlach.
2. Utworzenie gęstej siatki punktów na przedziale.
3. Obliczenie wartości wielomianu w punktach.

5 Zadanie 5.

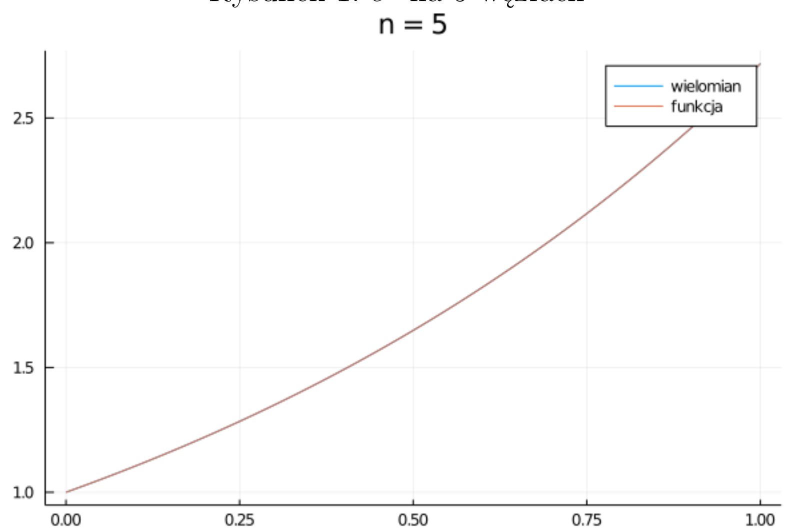
5.1 Opis problemu

Sprawdzenie funkcji do rysowania wielomianu interpolacyjnego na następujących przykladach:

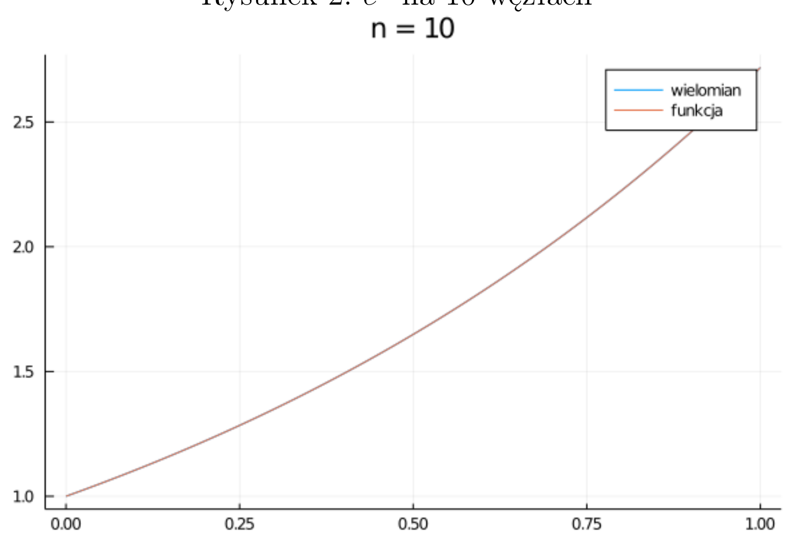
1. e^x, $[0, 1]$, $n = 5, 10, 15$
2. $x^2 * sin(x)$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$

5.2 Wyniki

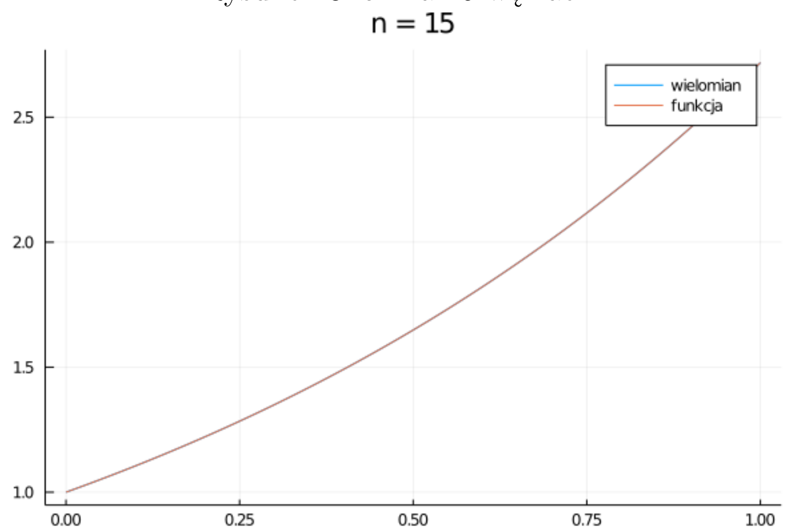
Rysunek 1: e^x na 5 węzłach



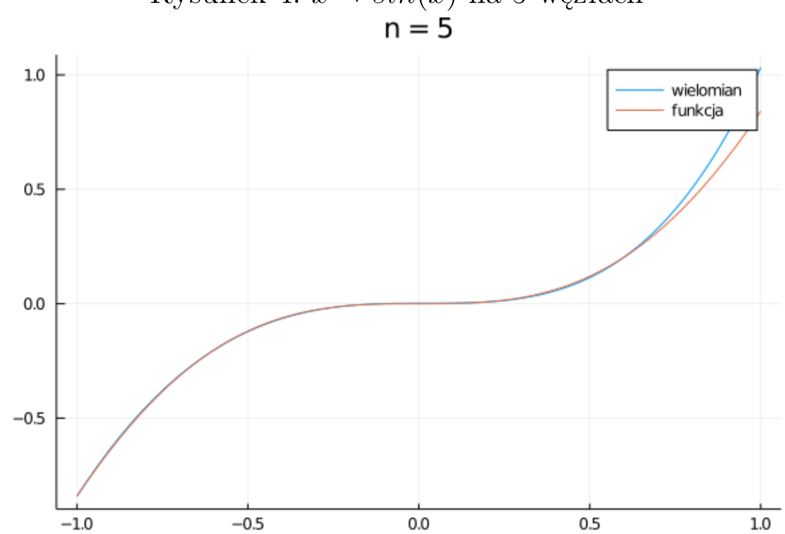
Rysunek 2: e^x na 10 węzłach



Rysunek 3: e^x na 15 węzłach



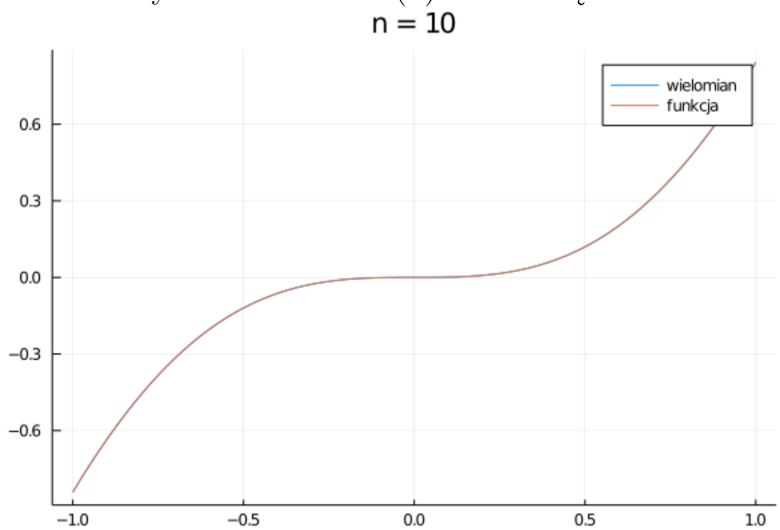
Rysunek 4: $x^2 * sin(x)$ na 5 węzłach



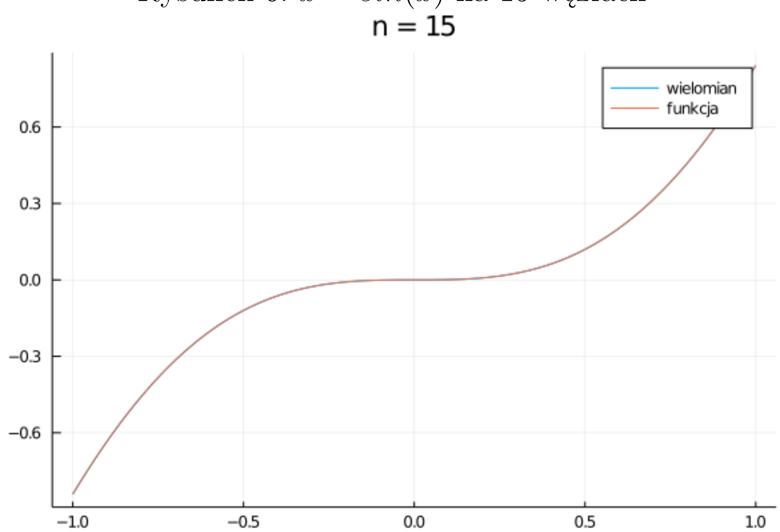
5.3 Wnioski

Wielomian dobrze interpoluje zadane funkcje na przedziałach. Dzieje się tak, ponieważ zadane funkcje są ciągłe, a także ich pochodne są ciągłe.

Rysunek 5: $x^2 * sin(x)x$ na 10 węzłach



Rysunek 6: $x^2 * sin(x)$ na 15 węzłach



6 Zadanie 6.

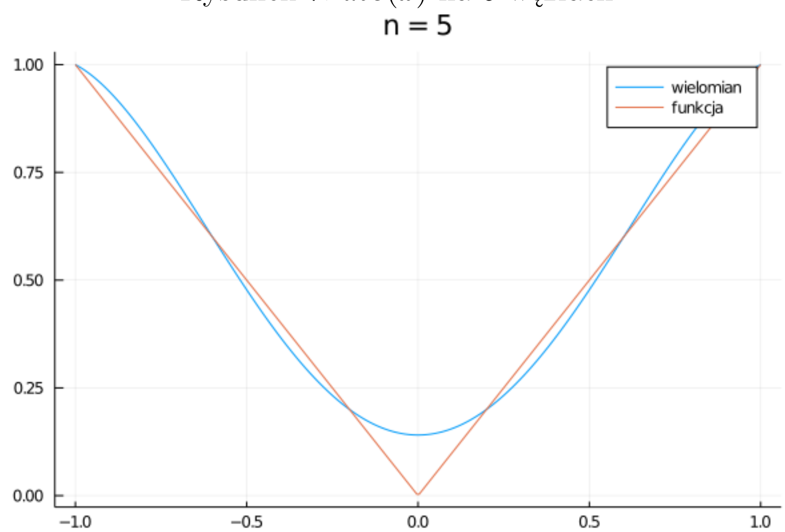
6.1 Opis problemu

Sprawdzenie funkcji do rysowania wielomianu interpolacyjnego na następujących przykladach:

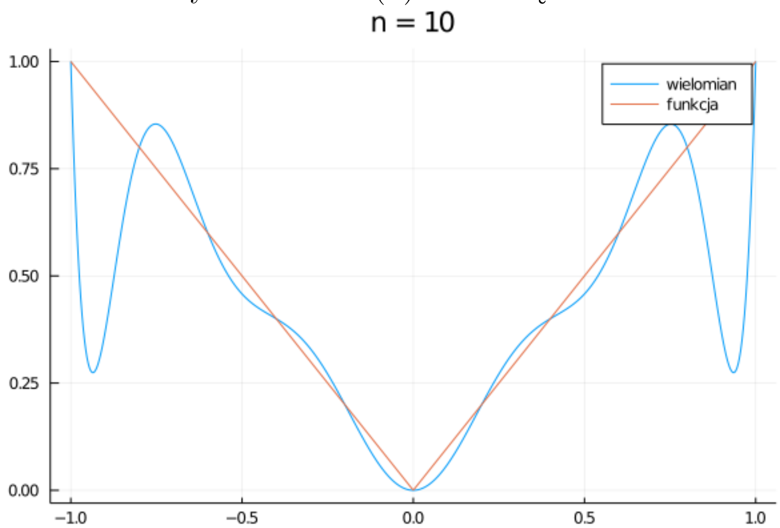
1. $abs(x)$, $[0, 1]$, $n = 5, 10, 15$
2. $\frac{1}{1+x^2}$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$

6.2 Wyniki

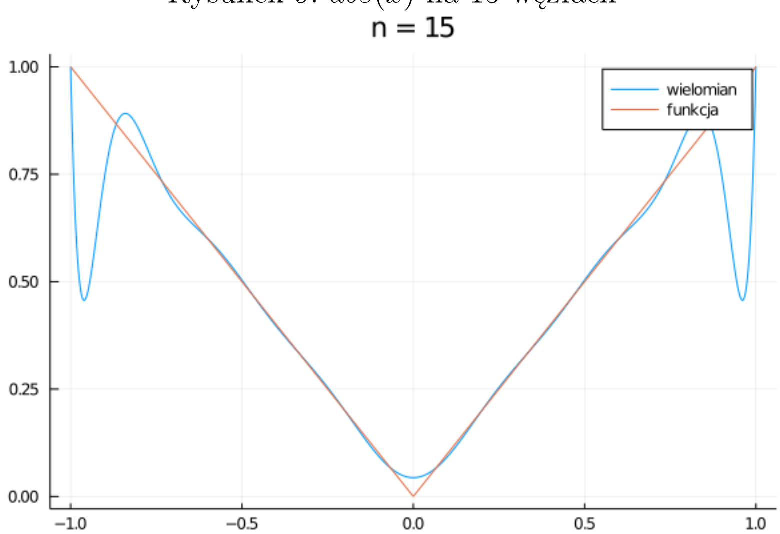
Rysunek 7: $abs(x)$ na 5 węzłach



Rysunek 8: $abs(x)$ na 10 węzłach



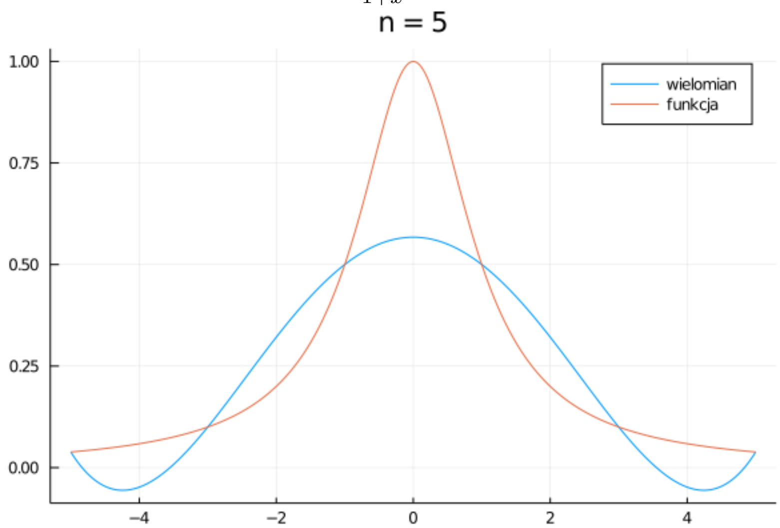
Rysunek 9: $abs(x)$ na 15 węzłach



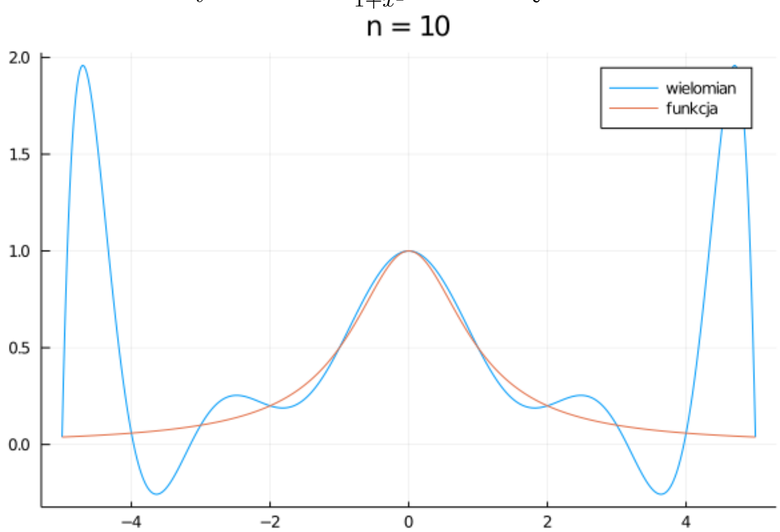
6.3 Wnioski

W powyższych przykładach obserwujemy dużą rozbieżnośc wielomianu interpolacyjnego z funkcją. W pierwszym przykladzie problem wynika z nieróżniczkowalności funkcji w zerze - ma ona nienaturalny punkt złamania.

Rysunek 10: $\frac{1}{1+x^2}$ na 5 węzłach

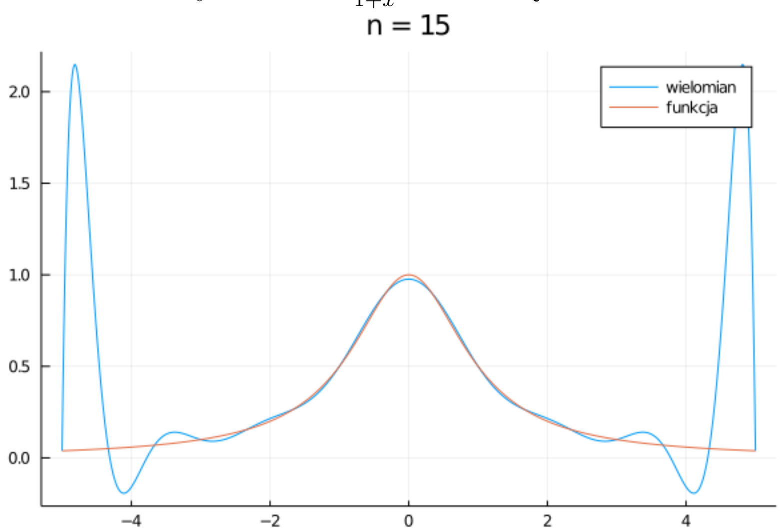


Rysunek 11: $\frac{1}{1+x^2}$ na 10 węzłach



W drugim przykladzie widoczny jest efekt Runge'go w którym wielomian interpolacyjny wychodzi znacznie dalej od funkcji w pewnych punktach w stosunku do innych. widoć to szczególnie na krańcach przedziału. Co więcej, zwiekszenie stopnia wielomianu paradoksalnie nie poprawia przybliżenia, a

Rysunek 12: $\frac{1}{1+x^2}$ na 15 węzłach



pogarsza. Wynika to z nierównomiernego przyrostu funkcji na kolejnych podprzedziałach. Wielomian do interpolacji ma węzły równoodległe i właśnie to prowadzi do błędów aproksymacji. Aby uniknąć tego problemu warto zastosować wielomian o węzłach zagęszczonych na krańcach przedziału. W ten sposób zagęszczenie węzłów "dusi"ucieczkę wartości wielomianu do +/- nieskończoności. Taki szczególny wielomian opisał rosyjski matematyk Pafnuty Chebyshev.