

OBLICZENIA NAUKOWE

Lista nr 1¹

zad. 1 Obliczyć sumę poniższych liczb wykonując obliczenia w systemie zmiennopozycyjnym dziesiętnym z dwucyfrową mantysą z zaokrągleniem ($z = \pm m_z 10^c$, $m_z \in [0.1, 1)$):

$$a_1 = 0.25, a_2 = 0.0046, a_3 = 0.00079, a_4 = 0.061,$$

tj. $((\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2) \oplus \tilde{a}_3) \oplus \tilde{a}_4$. Powtórzyć obliczenia po uporządkowaniu liczb rosnąco (od najmniejszej do największej). Porównać z sumą dokładną.

zad. 2 (a) Niech $x = 0.54617$, $y = 0.54601$. Jaka jest reprezentacja liczb x i y w arytmetyce zmiennopozycyjnej dziesiętnej z czterocyfrową mantysą z zaokrągleniem? Niech $\tilde{x} = rd(x)$, $\tilde{y} = rd(y)$, $r = x - y$, $\tilde{r} = \tilde{x} \ominus \tilde{y}$. Obliczyć $\frac{|r - \tilde{r}|}{|r|}$. Jaka jest precyzja arytmetyki (błąd reprezentacji) ϵ ?

(b) Dana jest arytmetyka zmiennopozycyjna dziesiętna z trzycyfrową mantysą z zaokrągleniem. Niech $\tilde{b} = 3.34$, $\tilde{a} = 1.22$ i $\tilde{c} = 2.28$. Obliczyć (deltę) $\tilde{\Delta} = \tilde{b} \odot \tilde{b} \ominus 4\tilde{a} \odot \tilde{c}$ oraz $\frac{|\Delta - \tilde{\Delta}|}{|\Delta|}$. Jaka jest precyzja arytmetyki?

zad. 3 Podać reprezentację zmiennopozycyjną w systemie dwójkowym z zaokrągleniem liczby 0.78125 oraz liczby 754 ($z = \pm m_z 2^c$, $m_z \in [0.5, 1)$). Czy one mogą być reprezentowane dokładnie w arytmetyce zmiennopozycyjnej z odpowiednią liczbą t cyfr mantysy? Jeśli tak, to ile cyfr musiałyby mieć mantysa?

zad. 4 Czy poniższe liczby są dokładnie reprezentowane w arytmetyce **single** zgodną ze standardem IEEE 754, w której 1 bit przeznaczono na zapis znaku s liczby x , 8 bitów przeznaczono na zapis cechy c i 23 bity przeznaczono na zapis części ułamkowej f mantysy ($x = sm2^c$, $m \in [1, 2)$, $m = 1.f$, $f < 1$, jedynek przed kropką dziesiętną nie jest pamiętana).

$$x = 2^{-1} + 2^{-26}, y = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{10}?$$

zad. 5 Niech dane będzie 33 bitowe słowo, w którym 1 bit przeznaczono na zapis znaku s liczby x , 8 bitów przeznaczono na zapis cechy c (wraz z bitem znaku) i 24 bity przeznaczono na zapis mantysy m ($x = sm2^c$, $m \in [0.5, 1)$).

Wyznaczyć:

- (a) zakres reprezentowanych liczb,
- (b) “zero maszynowe”,
- (c) precyzję arytmetyki (błąd reprezentacji) ϵ .

Wyznaczyć (a), (b), (c) dla arytmetyki **single**.

zad. 6 Rozważmy arytmetykę **single**.

- (a) Dla $x = 1 + 2^{-24}$ znaleźć liczby maszynowe x^- i x^+ .

¹Większość zadań pochodzi z książki: D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, 2005 oraz artykułu D. Goldberga 1991

(b) Opisać dodatnie liczby rzeczywiste x , dla których $x \oplus 1 = 1$.

(c) Jaki warunek muszą spełniać dodatnie liczby x i y , aby $x \oplus y = x$?

zad. 7 Przeprowadzić analizę błędów zaokrągleń powstających w trakcie obliczania sumy n liczb dodatnich $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ w arytmetyce zmiennopozycyjnej za pomocą algorytmu $A(a_1, \dots, a_n) := (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + a_4) + \dots + a_n$. Czy końcowy błąd zależy od kolejności sumowania liczb?

zad. 8 Przeprowadzić analizę błędów zaokrągleń powstających w trakcie obliczania iloczynu n liczb w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Zakłada się, że nie wystąpiło ani zjawisko nadmiaru, ani zjawisko niedomiaru.

zad. 9 Przeprowadzić analizę błędów zaokrągleń powstających w trakcie obliczania różnicy kwadratów dwóch liczb za pomocą algorytmów:

$$\begin{aligned} A1(a, b) &:= a^2 - b^2 \\ A2(a, b) &:= (a - b)(a + b). \end{aligned}$$

zad. 10 Porównać oszacowania błędów wytworzonych przy obliczaniu wartości wielomianu $p(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ ($x > 0$ i $a_i > 0$, $i = 0, \dots, 4$) za pomocą algorytmów:

$$\begin{aligned} A1(a_0, \dots, a_4; x) &:= (((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + a_4 \\ A2(a_0, \dots, a_4; x) &:= a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x_1 + a_4 \end{aligned}$$

gdzie $x_1 := x$, $x_{i+1} := x_i x$ ($i=1,2,3$).

Uwaga. W zadaniach 7,8,9 i 10 uwzględnić tylko błędy wynikające z wykonywania działań w arytmetyce zmiennopozycyjnej.

Paweł Zieliński