Automat ze stosem

Języki formalne i techniki translacji - Wykład 5

Maciek Gębala

8 listopada 2022

Notatki

Automat ze stosem (PDA)

Automat z dodatkową pamięcią w postaci stosu (widać tylko ostatnio włożony symbol).

Przykład: Palindrom z gramatyką $S \to 0S0|1S1|\#$

1. Automat startuje z pustym stosem i w stanie q_1.
2. Jeżeli jesteśmy w stanie q_1 i na wejściu widzimy $a \in \{0, 1\}$ to wstawiamy a na stos, pozostajemy w stanie q_1 i idziemy do następnego symbolu wejściowego.
3. Jeżeli jesteśmy w stanie q_1 i na wejściu widzimy $\#$ to przechodzimy do stanu q_2 i idziemy do następnego symbolu wejściowego.
4. Jeżeli jesteśmy w stanie q_2 i na wejściu widzimy $a \in \{0, 1\}$ i na stosie jest także a to pozostajemy w stanie q_2, ściągamy a ze stosu i idziemy do następnego symbolu wejściowego.
5. Jeżeli jesteśmy w stanie q_2, skończyliśmy czytać wejście i stos jest pusty to akceptujemy słowo wejściowe.
6. W każdym innym przypadku odrzucamy słowo wejściowe.

Notatki

Automat ze stosem (PDA)

Definicja. Automatem ze stosem nazywamy $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, gdzie

- Q - skończony zbiór stanów,
- Σ - alfabet wejściowy,
- Γ - alfabet stosowy,
- $q_0 \in Q$ - stan początkowy,
- $Z_0 \in \Gamma$ - symbol początkowy na stosie,
- $F \subset Q$ - zbiór stanów akceptujących (jeśli $F = \emptyset$ to akceptujemy przez pusty stos),
- δ - funkcja przejścia postaci $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

Definicja. Opis chwilowy automatu to trójka (q, α, γ), gdzie $q \in Q$ - stan automatu, $\alpha \in \Sigma^*$ - nieprzeczytane jeszcze wejście, $\gamma \in \Gamma^*$ - zawartość stosu (szczyt stosu z lewej).

Notatki

Automat ze stosem (PDA)

Definicja. Relacja przejścia w jednym kroku $\underset{M}{\vdash}$:
$(q, a\alpha, Z\gamma) \underset{M}{\vdash} (p_i, \alpha, \gamma_i\gamma)$ jeśli istnieje przejście $\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), \dots, (p_m, \gamma_m)\}$ i wybraliśmy i-tą możliwość.
$(q, \alpha, Z\gamma) \underset{M}{\vdash} (p_i, \alpha, \gamma_i\gamma)$ jeśli istnieje przejście $\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \gamma_1), \dots, (p_m, \gamma_m)\}$ i wybraliśmy i-tą możliwość.
$\vdash^*$ - zwrotne i przechodnie domknięcie $\vdash$. $\vdash^i$ - i-krotne złożenie $\vdash$.

Język akceptowany przez PDA M przy pustym stosie ($F = \emptyset$) to

$$N(M) = \{\ w \in \Sigma^*\ :\ \exists_{p \in Q}\ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\ \}$$

Język akceptowany przez PDA M przez stan końcowy to

$$L(M) = \{\ w \in \Sigma^*\ :\ \exists_{p \in F}\ \exists_{\gamma \in \Gamma^*}\ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \gamma)\ \}$$

Oba sposoby akceptowania są równoważne.

Notatki

Przykład

$$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_1, Z, \emptyset)$$

δ	$(0, A)$	$(0, B)$	$(0, Z)$	$(1, A)$	$(1, B)$	$(1, Z)$	(ε, A)	(ε, B)	(ε, Z)
q_1	(q_1, AA)	(q_1, AB)	(q_1, A)	(q_1, BA)	(q_1, BB)	(q_1, B)	(q_2, A)	(q_2, B)	(q_2, ε)
q_2	(q_2, ε)	—	—	—	(q_2, ε)	—	—	—	—

0110

$$(q_1, 0110, Z) \vdash (q_1, 110, A) \vdash (q_1, 10, BA) \vdash (q2, 10, BA) \vdash (q_2, 0, A) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

110

$$\begin{array}{lcl}
(q_1, 110, Z) & \vdash & (q_1, 10, B) \vdash (q_1, 0, BB) \vdash (q_1, \varepsilon, ABB) \vdash (q_2, \varepsilon, ABB) \quad ? \\
(q_1, 110, Z) & \vdash & (q_1, 10, B) \vdash (q_1, 0, BB) \vdash (q_2, 0, BB) \quad ? \\
(q_1, 110, Z) & \vdash & (q_1, 10, B) \vdash (q_2, 10, B) \vdash (q_2, 0, \varepsilon) \quad ? \\
(q_1, 110, Z) & \vdash & (q_2, 100, \varepsilon) \quad ?
\end{array}$$

$$N(M) = \{\ ww^R \ : \ w \in \{0, 1\}^*\ \}$$

Notatki

Deterministyczny PDA

PDA nazwiemy deterministycznym jeśli w każdym przypadku możemy wykonać co najwyżej jedno przejście, czyli jeśli

1. $\forall_{q \in Q}\ \forall_{Z \in \Gamma}\ \delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \implies \forall_{a \in \Sigma}\ \delta(q, a, Z) = \emptyset$
2. $\forall_{q \in Q}\ \forall_{a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}}\ \forall_{Z \in \Gamma}\ |\delta(q, a, Z)| \leqslant 1$

Niestety DPDA są słabsze od PDA np. język z poprzedniego slajdu nie jest rozpoznawalny przez żaden DPDA.

Notatki

PDA i gramatyka bezkontekstowa

Twierdzenie. Jeśli L jest językiem bezkontekstowym to istnieje PDA M taki, że $L = N(M)$.

Dowód

Załóżmy, że L nie zawiera ε i jest zdefiniowany przez gramatykę bezkontekstową w postaci Greibach $G = (N, T, P, S)$. Definiujemy PDA M następująco

$$M = (\{q\}, T, N, \delta, q, S, \emptyset) \qquad \delta(q, a, A) = \{\ (q, \gamma)\ :\ (A \to a\gamma) \in P\ \}.$$

M symuluje wyprowadzenie lewostronne gramatyki G. Ponieważ G jest typu Greibach każdy kolejny napis w wyprowadzeniu lewostronnym ma formę $x\alpha$ gdzie $x \in T^*$ i $\alpha \in N^*$. M przechowuje α na stosie po przeczytaniu przedrostka x.
Teraz dowód indukcyjny po długości wyprowadzenia (ilości kroków), że

$$S \underset{G}{\Rightarrow^*} x \iff (q, x, S) \underset{M}{\vdash^*} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Notatki

Przykład

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aAB | aB, B \to b\}, A)$$

$$M = (\{q\}, \{a, b\}, \{A, B\}, \delta, q, A, \emptyset)$$

δ	(a, A)	(a, B)	(b, A)	(b, B)	(ε, A)	(ε, B)
q	$(q, AB), (q, B)$	—	—	(q, ε)	—	—

$$A \Rightarrow aAB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabB \Rightarrow aabb$$

$$(q, aabb, A) \vdash (q, abb, AB) \vdash (q, bb, BB) \vdash (q, b, B) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Notatki

PDA i gramatyka bezkontekstowa

Twierdzenie. Jeśli $L = N(M)$ dla PDA M to L jest językiem bezkontekstowym.

Dowód

Weźmy PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$. Konstruujemy gramatykę bezkontekstową $G = (N, \Sigma, P, S)$, gdzie

- N - zbiór obiektów postaci $[q, A, p]$ ($p, q \in Q$, $A \in \Gamma$), oraz nowy symbol S,
- P - zbiór produkcji postaci:
  - $S \to [q_0, Z_0, q]$ dla każdego $q \in Q$,
  - $[q, A, q_{m+1}] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \ldots [q_m, B_m, q_{m+1}]$ dla dowolnych $q, q_1, \ldots, q_{m+1} \in Q$, każdego $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ i dowolnych $A, B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$ takich że $(q_1, B_1 \ldots B_m) \in \delta(q, a, A)$, oraz
  - $[q, A, p] \to a$ jeśli $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, A)$.

Wyprowadzenie lewostronne w G symuluje ruchy M na wejściu x.

Notatki

PDA i gramatyka bezkontekstowa

Dowód cd.

$[q, A, p]$ wyprowadza $x \iff M$ będąc w stanie q i mając na stosie $A\alpha$ po wczytaniu x znajdzie się w stanie p, na stosie będzie α i α nie była zmieniana i czytana w tym czasie.
Teraz dowód indukcyjny po ilości kroków, że

$$[q, A, p] \underset{G}{\Rightarrow}^{*} x \iff (q, x, A) \underset{M}{\vdash}^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Notatki

Przykład

$$M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{X, Z\}, \delta, p, Z, \emptyset)$$

δ	(a, X)	(a, Z)	(b, X)	(b, Z)	(ε, X)	(ε, Z)
p	(p, XX)	(p, X)	(q, ε)	–	–	(q, ε)
q	–	–	(q, ε)	–	–	–

$$G = (\{S, [p, Z, p], [p, Z, q], [q, Z, p], [q, Z, q], [p, X, p], [p, X, q], [q, X, p], [q, X, q]\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{array}{rcl}
S & \to & [p, Z, p] \mid [p, Z, q] \\
{[p, Z, p]} & \to & a[p, X, p] \\
{[p, Z, q]} & \to & a[p, X, q] \mid \varepsilon \\
{[q, Z, p]} & \to & \\
{[q, Z, q]} & \to & \\
{[p, X, p]} & \to & a[p, X, p][p, X, p] \mid a[p, X, q][q, X, p] \\
{[p, X, q]} & \to & a[p, X, p][p, X, q] \mid a[p, X, q][q, X, q] \mid b \\
{[q, X, p]} & \to & \\
{[q, X, q]} & \to & b
\end{array}$$

Notatki

Przykład cd.

Po usunięciu symboli bezużytecznych

$$G = (\{S, [p, Z, q], [p, X, q], [q, X, q]\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$\begin{array}{rcl}
S & \to & [p, Z, q] \\
{[p, Z, q]} & \to & a[p, X, q] \mid \varepsilon \\
{[p, X, q]} & \to & a[p, X, q][q, X, q] \mid b \\
{[q, X, q]} & \to & b
\end{array}$$

$$(p, aabb, Z) \vdash (p, abb, X) \vdash (p, bb, XX) \vdash (q, b, X) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$[p, Z, q] \Rightarrow a[p, X, q] \Rightarrow aa[p, X, q][q, X, q] \Rightarrow aab[q, X, q] \Rightarrow aabb$$

Notatki