Analiza funkcjonalna wykład

Roman Pol

10 marca 2013

Notatki Grzegorza Bokoty
Jeśli ktoś uważa, że czegoś brakuje (np rysunków, nie umiem ich szybko texować) to proszę o informacje. Największą szansę na uwzględnienie mają gotowe kawałki kodu. W wypadku rysunku wystarczy on w jakiejś formie. Postaram się wtedy stexować.

Spis treści

1 Przestrzenie Banacha i ograniczone operatory liniowe **2**
- 1.1 Rzeczywiste i zespolone przestrzenie liniowe . . . 2
- 1.2 Przestrzenie unormowane . . . 2
  - 1.2.1 Przykłady przestrzeni unormowanych . . . 2
  - 1.2.2 Metryka generowana przez normę . . . 2
  - 1.2.3 Przestrzeń funkcji ciągłych . . . 2
- 1.3 Twierdzenie Hahna-Banacha . . . 3
- 1.4 Twierdzenie o reprezentacji Riesza dla nieujemnych funkcjonałów liniowych na C[a,b] 5
- 1.5 Ograniczone operatory liniowe . . . 6

1 Przestrzenie Banacha i ograniczone operatory liniowe

1.1 Rzeczywiste i zespolone przestrzenie liniowe

Niech $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ liczb zespolonych.
Niech X będzie przestrzenią liniowa nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Niech $A, B \subset X$, $s, t \in K$ wtedy:

$$sA + tB = \{su + tv : u \in A, v \in B\}$$

$u_1, \ldots, u_n \in X$. $\text{lin}\{u_1, \ldots, u_n\} = \mathbb{K}u_1 + \ldots + \mathbb{K}u_n$ gdzie $\mathbb{K}u = \{tu : t \in \mathbb{K}\}$
Niech $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ funkcjonał liniowy. Wówczas $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) - ig(ix)$, f jest liniowe ($f(\alpha x) = \alpha f(x)$). Wówczas $\text{Ker}f = \text{Ker}g \cap i\text{Ker}g$

1.2 Przestrzenie unormowane

X – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$. Normą nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ taką, że:

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$,$x \in X$

iii. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ – przestrzeń unormowana jest przestrzenią liniową nad X z normą $\|\cdot\|$

1.2.1 Przykłady przestrzeni unormowanych

$(l_\infty(S, K), \|\cdot\|_\infty)$: Niech S będzie zbiorem. Wtedy $l_\infty(S, K)$ jest zbiorem funkcji ograniczonych $X : S \to K$ z dodawaniem i mnożeniem przez skalary po współrzędnych.
Niech $\|X\|_\infty = \sup\{|x(s) : s \in S\} < \infty$.
Przyjmujemy $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty) = (l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ – przestrzeń ciągów zespolonych z normą „supremum”.

$(c_0, \|\cdot\|)$: podprzestrzeń $(l_\infty, \|\cdot\|)$ złożona z ciągów zespolonych zbieżnych do zera.

$(l_1, \|\cdot\|_1)$: przestrzeń ciągów zespolonych $x = (x_1, x_2, \ldots)$, że szereg $\sum_n x_n$ jest zbieżny bezwzględnie. $\|x\|_1 = \sum_n |x_n|$

1.2.2 Metryka generowana przez normę

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią z normą. Metrykę w tej przestrzeni definiujemy wzorem: $d(x, y) = \|x - y\|$.
Mówiąc o tolopogii w $(X, \|\cdot\|)$ mamy na myśli topologię wyznaczoną przez metrykę.
Zdefiniujmy dwa przydatne oznaczenia:

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ – Kula jednostkowa domknięta

$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ – Sfera jednostkowa

Oczywiście można przesuwać je w przestrzeni. Dla $x \in X$ i $r \in \mathbb{K}$ $x + rB_X = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}$ jest domkniętą kulą o promieniu r i środku w x.

1.2.3 Przestrzeń funkcji ciągłych

$(C_b(S, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$
Niech S będzie przestrzenią topologiczną, $C_b(S, \mathbb{K}) = \{x \in l_\infty(S, \mathbb{K}) : x \text{ jest ciągła}\}$
$C_b(S, \mathbb{K})$ jest domknięta w $l_\infty(S, \mathbb{K})$. Jeśli S zwarta, to $(C(S), \|\cdot\|_\infty) := (C_b(S, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
W unormowanej przestrzeni $(X, \|\cdot\|)$ odległość wektora $x \in X$ i zbioru $A \subset X$ dana jest wzorem $\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$

Lemat 1.2.4. $(X, \|\cdot\|)$ – *unormowana nad ciałem* $\mathbb{K}$. $Y \subset X$ *podprzestrzeń liniowa domknięta.* $u \in X \setminus Y$

(i) $\|y + \lambda u\| \geqslant |\lambda| \cdot \operatorname{dist}(u, Y),\ y \in Y, \lambda \in \mathbb{K}$

(ii) $y_n \in Y,\ \lambda_n \in \mathbb{K}\ (\exists z \in X : y_n + \lambda_n u \to z) \Leftrightarrow (\exists y \in Y \exists \lambda \in \mathbb{K} : y_n \to y, \lambda_n \to \lambda)$

(iii) $Y + \mathbb{K}u$ *przestrzeń domknięta w* X

Dowód. (i) $y \in Y$ i $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mamy $\|y + \lambda u\| = |\lambda| \cdot \left\|u - \frac{-y}{\lambda}\right\| \geqslant |\lambda| \cdot \operatorname{dist}(u, Y)$.

(ii) $\Rightarrow$. Niech $y_n + \lambda_n u \to z$ wtedy $(y_n + \lambda_n u)_n$ jest ciągiem Cauchego. Z *(i)* wynika, że $(\lambda_n)_n$ też jest ciągiem Cauchego. ($\|(y_n + \lambda_n u) - (y_m + \lambda_m u)\| = \|(y_n - y_m) - (\lambda_m - \lambda_n)u\| \geqslant |\lambda_n - \lambda_m| \operatorname{dist}(u, Y)$) Z zupełności $\mathbb{K} : \lambda_n \to \lambda$. Zatem: $\lambda_n u \to \lambda u$ co oznacza $y_n \to z - \lambda u$. Ponieważ Y jest domkniętą podprzestrzenią to $y = z - \lambda u \in Y$

(iii) Wynika natychmiast z *(ii)*.

□

Twierdzenie 1.2.5. $(X, \|\cdot\|)$ – *przestrzeń unormowana nad ciałem* $\mathbb{K}$.

(i) Jeśli $Y \subset X$ *- domknięta, linowa,* $Z \subset X$ *skończenie wymiarowa to* $Y + Z$ *jest domknieta.*

(ii) Jeśli X *jest* n*-wymiarowa, to* $(X, \|\cdot\|)$ *jest linowo-homeomorficzna z* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{max})$.

Dowód. (i) $Z = \mathbb{K}u_1 + \ldots + Ku_n$, $Y + Z = (Y + \mathbb{K}u_1) + (\mathbb{K}_u 2 \ldots + \mathbb{K}u_n)$ wynika przez indukcję z lematu 1.2.4.

(ii) $u_1, \ldots, u_n$ – baza w przestrzeni linowej X, $X_i = \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_i\}$
$X_i + \mathbb{K}u_{i+1}$, to z Lematu: jeśli $y_n \in X_i$ to $y_n + \lambda_n u_{i+1} \to z \Leftrightarrow y_n \to y_0, \lambda_n \to \lambda_0$ Zatem przez indukcję (po m - to są indeksy) $(\lambda_1^m u_1 + \ldots + \lambda_k^m u_k \to z$ w $X_k) \Leftrightarrow \Lambda_j^m \to \lambda_j, \forall j \leqslant k$
Zatem: jeśli $T : X \to \mathbb{K}^n$ jest izomorfizmem $T(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ to T jest homeomorfizmem.

□

Twierdzenie 1.2.6 (Lemat Riesza)**.** Y – *domknięta podprzestrzeń przestrzeni unormowanej* $(X, \|\cdot\|)$ $Y \neq X$, $\varepsilon > 0$. *Wówczas istnieje* $x \in S_X$ *taki, że* $\operatorname{dist}(x, Y) \geqslant 1 - \varepsilon$

Dowód. Niech $u \in X \setminus Y$. $dist(u, Y) = \delta > 0$. $\varepsilon > 0$ ustalony, $\varepsilon \in (0, 1)$, wybieramy $\eta > 0$ takie, że $\dfrac{\delta}{\delta + \eta} = 1 - \varepsilon$. Istnieje $v \in Y$ takie, że: $\delta \leqslant \|u - v\| \leqslant \delta + \eta$. Niech $x = \dfrac{u - v}{\|u - v\|} \in S_X$ Niech $y \in Y$, $\|x - y\| = \left\|\dfrac{u - v}{\|u - v\|} - y\right\| = \dfrac{1}{\|u - v\|}\|u - v - \|u - v\| y\| = \dfrac{1}{\|u - v\|}\|u - (v + \|u - v\| y)\| \geqslant \dfrac{\operatorname{dist}(u, Y)}{\|u - v\|} \geqslant \dfrac{\delta}{\delta + \eta} = 1 - \varepsilon$ □

Wniosek 1.2.7. *W każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej* $(X, \|\cdot\|)$ *istnieją wektory* $x_1, x_2, \ldots \in S_X$ *takie, że* $\|x_i - x_j\| \geqslant \frac{1}{2}$ *dla* $i \neq j$.

Dowód. Niech $y_1, y_2, \ldots$ będą liniowo niezależne. Wtedy $Y_i = \operatorname{lin}\{y_1, \ldots, y_i\}$ są domknięte. Z lematu Riesza istnieje $x_{i+1} \in Y_{i+1} \cap S_X$ takie, że $\operatorname{dist}(x_{i+1}, Y_i) \geqslant \frac{1}{2}$. Jednocześnie $Y_i \subset Y_{i+1}$ Czyli dla $x_1, x_2, \ldots$ mamy $\|x_i - x_j\| \geqslant \frac{1}{2}$ gdy $j < i$ □

1.3 Twierdzenie Hahna-Banacha

Twierdzenie Hahna-Banacha mówi o przedłużaniu ciągłych funkcji liniowych z podprzestrzeni na całe przestrzenie.

Twierdzenie 1.3.1. $(X, \|\cdot\|)$ – *przestrzeń unormowana nad* $\mathbb{K}$. *Funkcjonał liniowy* $f : X \to \mathbb{K}$ *jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker f$ *jest domkniętą podprzestrzenią* X.

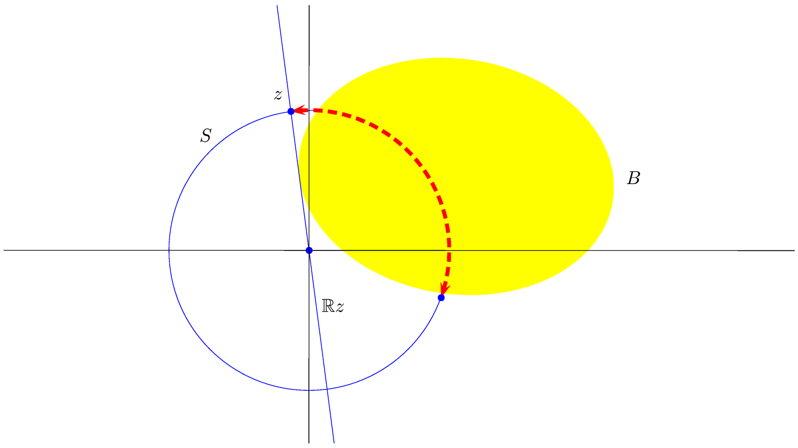
Dowód. $\Rightarrow \ker f = f^{-1}(\{0\})$ - domknięte
$\Leftarrow$ Jeśli $f = 0$ – trywialne. Dla $f \neq 0$ weźmy $u \in X \setminus \ker f$, $f(u) = 1$. $\ker f \oplus \mathbb{K}u = X$ Niech $x_n \to x_0$ w X. Wtedy $x_n = y_n + \lambda_n u$ dla $y_n \in \ker f$. Wiemy, że $\exists y_0 \in \ker f, x_0 \in \mathbb{K}$ takie, że $y_n \to y_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$ i $x_0 = y_0 + \lambda_0 u$ wtedy $f(x_n) = \lambda_n \to \lambda_0 = f(x_0)$ co pokazuje, ze f jest ciągła. □

Przypominienie definicji: $(X, \|\cdot\|)$ - przestrzeń unormowana. Zbiór $C \subset X$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x_1, \dots, x_n \in C$, $t_1, \dots t_n \in [0,1]$ takich, że $\sum_i t_i = 1$ to $\sum_i t_i x_i \in C$

Uwaga 1.3.2. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{max})$. *Niech $B \subset \mathbb{R}^2$ – otwarty, wypukły zbiór taki, że zero nie należy do B. Wtedy, w $\mathbb{R}^2$ istnieje prosta przechodząca przez zero i omijająca B*

Dowód. Rzeczywiście. Niech $S = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2; t_1^2 + t_2^2 = 1\}$
$p : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S$ $p(t_1, t_2) = \frac{(t_1,t_2)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}$: $p(B)$ – jest zbiorem otwartym, spójny zbiór w S otwarty łuk bez żadnych punktów antypodalnych. Niech z będzie na brzegu $p(B)$ wtedy prosta $\mathbb{R}z$ jest rozłączna z B.

□



Rysunek 1: Przykład do uwagi 1.3.2
$p(B)$ jest reprezentowane przez czerwoną przerywaną linię.

Uwaga 1.3.3. *Hiperpłaszczyzna* $\left(\textit{ang. hyper✈}\right)$ *H w przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ jest zbiorem $H = x + Y$. Gdzie Y jest podprzestrzenią liniową X kowymiaru 1. Jeśli Y jest linowe, to $\overline{Y}$ też. Zatem H jest domknięta lub gęsta w X. Skoro $\overline{H} = x + \overline{Y}$ i kowymiar $Y = 1$, to albo $\overline{Y} = Y$ albo $\overline{Y} = X$.*

Twierdzenie 1.3.4 (S. Mazur)**.** *Niech $(X, \|\cdot\|)$ przestrzeń unormowana. $L \subset X$ – podprzestrzeń liniowa. $C \subset X$ otwarty wypukły zbiór w X rozdzielny z L. Wtedy istnieje zamknięta hiperpłaszczyzna H zawierająca L rozdzielna z C.*

Dowód. Niech $\mathcal{L}$ będzie rodziną wszystkich podprzestrzeni liniowych X zawierających L i rozłącznych z C. Wtedy $L \in \mathcal{L}$. Jeśli $\varphi \subset \mathcal{L}$ jest łańcuchem w $(\mathcal{L}, \subseteq)$, wtedy $\bigcup \varphi \in \mathcal{L}$. Z Lematu Kuratowskiego–Zorna istnieje element maksymalny M w $(\mathcal{L}, \subseteq)$.

(A) Jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest nad $\mathbb{R}$. Wtedy M jest domkniętą hiperpłaszczyzną. Domkniętość M: $M \in \mathcal{L}$ więc $\overline{M} \in \mathcal{L}$ więc z maksymalności $M = \overline{M}$. Kowymiar $M = 1$ przypuśćmy przeciwnie. Wówczas istnieje przestrzeń liniowa $E \subset X$ taka, że $\dim E = 2$ i $E \cap M = \{0\}$ Wtedy $B = (C + M) \cap E$ nie zawiera 0. B jest zbiorem wypukłym i otwartym w E (z konstrukcji B w powyższym wierszu). Więc istnieje $F \subset E$ – jednowymiarowa podprzestrzeń taka, że $B \cap F = \emptyset$. Wtedy $(M + F) \cap C = \emptyset$ ($m + f = c$, $c - m = f$, $c - m \in M + C$ nie możliwe). Zatem $M + F \in \mathcal{L}$ i $M + F$ jest ściśle większe od M w sensie inkluzji.

(B) $(X, \|\cdot\|)$ jest nad $\mathbb{C}$. Rozważmy $X_{\mathbb{R}}$ opisaną w (A), wtedy M jest hiperpłaszczyzną w $X_{\mathbb{R}}$. Zatem $H = M \cap iM$ jest hiperpłaszczyzną w X, rozdzielną z C. $L \subset H$ ponieważ $iL = L$.

□

Twierdzenie 1.3.5 (Hahn–Banach). *$(X, \|\cdot\|)$ – przestrzeń unormowana nad $\mathbb{K}$. Niech $Y \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową i $f : Y \to \mathbb{K}$ będzie odwzorowaniem liniowym takim, że $|f(y)| \leqslant \|y\|$ dla $y \in Y$. Wtedy istnieje funkcjonał liniowy $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ taki, że $\tilde{f}|_Y = f$ i $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|x\|$*

Dowód. Jeśli $f = 0$ to $\tilde{f} = 0$. Jeśli $f \neq 0$ to weźmy $u \in Y$ takie, że $f(u) = 1$.
Niech $C = \{x \in X : \|x - u\| < 1\}$. Pokażemy, że $C \cap \ker f = \emptyset$.
Weźmy $y \in Y$. $|f(y) - f(u)| = |f(y - u)| \leqslant \|y - u\|$. Jeśli $y \in C$ to $f(y) \neq 0$. Z twierdzenia Mazura(1.3.4) istnieje w X hiperpłaszczyzna H taka, że $\ker f \subset H$ i $H \cap C = \emptyset$. Kontynuując dowód, ponieważ $u \in C$ to $u \notin H$ więc $X = H \oplus \mathbb{K}u$. Niech $\tilde{f}(x + \lambda u) = \lambda$ dla $x \in H$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Wtedy $\tilde{f}$ jest przedłużeniem f.
Ponadto, wiemy, że $\|x + \lambda u\| \geqslant |\lambda| = |\tilde{f}(x + \lambda u)|$ Co znaczy, że $\|x\| \geqslant |f(x)|$ dla $x \in X$ □

Uwaga 1.3.6. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ – unormowana przestrzeń rzeczywista. Niech $Y \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową. $C \subset X$ – otwarty wypukły podzbiór X taki że $C \cap Y not = \emptyset$ Niech $f : Y \to \mathbb{R}$ funkcjonał liniowy taki, ze f jest dodatni na $C \cap Y$. Wtedy istnieje $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ który jest przedłużeniem f i $\tilde{f}$ jest ściśle dodatni na C.*

Dowód. Będziemy używać twierdzenia Mazura: Niech $L = Y \cap \ker f$ wtedy $L \cap C = \emptyset$. Istnieje hiperpłaszczyzna H w X taka, że $L \subset H$ i $H \cap C = \emptyset$. Weźmy $u \in C \cap Y$. Wtedy $Y = \ker f \oplus \mathbb{R}u$ i $X = H \oplus \mathbb{R}u$. Zdefiniujmy $\tilde{f} = (h + \lambda u) = \lambda f(u)$. I jest dobrze. □

1.4 Twierdzenie o reprezentacji Riesza dla nieujemnych funkcjonałów liniowych na C[a,b]

$C[a, b]$ – przestrzeń funkcji ciągłych na $[a, b]$ w $\mathbb{R}$.
Liniowy funkcjonał $\varphi : C[a, b] \to \mathbb{R}$ jest nieujemny jeśli $\varphi(f) \geqslant 0$ dla $f \geqslant 0)$

Twierdzenie 1.4.1 (F. Riesz). *Niech $\varphi : C[a, b] \to \mathbb{R}$ liniowy, nieujemny funkcjonał. Istnieje wtedy miara Borelowska μ na $[a, b]$ taka, że $\varphi(f) = \int_{[a,b]} f \mathrm{d}\mu$ dla $f \in C[a, b]$*

Dla ułatwienia skupimy się teraz na $[a, b] = [0, 1]$

Lemat 1.4.2. *Niech $F \colon [0, 1] \to [0, +\infty)$ będzie funkcją niemalejącą. Niech $F_l(t) = \lim_{s \to t^-} F(s)$ dla $t \in [0, 1]$. Istnieje wtedy miara Borelowska μ na $[0, 1]$i taka, że $\mu([0, t)) = F_l(t)$ i $\mu([0, 1)) = F(1)$*

Dowód. Niech $G \colon [0, F(1)] \to [0, 1]$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem: $G(y) = \inf\{x : F(x) \geqslant y\}$. Jak łatwo zauważyć funkcja G jest niemalejąca oraz $[0, F_l(t)) \subset G^{-1}[0, t) \subset [0, F_l(t)]$. Zdefiniujmy μ na $[0, 1]$ przez $\mu(A) = \lambda(G^{-1}(A))$ gdzie λ jest miarą Lebesgua.

□

Uwaga 1.4.3. *Niech $I = [0, 1]$, $\psi : l_\infty(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ liniowy, nieujemny funkcjonał. Istnieje wtedy przeliczalny zbiór $J \subset I$ i miara Borelowska μ na I taka, że $\psi\left(\chi_{[0,t)}\right) = \mu[0, t)$ $\psi\left(\chi_{[s,t)}\right) = \mu[s, t)$ i $\psi(\chi_{[0,1]} = \psi(1) = \mu(0, 1)$*

Dowód. Niech $F(t) = \psi\left(\chi_{[0,t)}\right)$ dla $t < 1$ i $F(1) = \psi(1)$. Jeśli $s < t$ to $\chi_{[0,s)} \leqslant \chi_{[0,t]}$ więc $\phi\left(\chi_{0,s)}\right) \leqslant \phi\left(\chi_{[0,t)}\right)$ Ponieważ ψ jest nieujemne to F jest niemalejące i mamy μ jak w poprzednim lemacie (1.4.2).
Niech $J = \{t : F_l(t) < F(t)\}$ – zbiór punktów skoku jest przeliczalny. Wtedy μ i J mają takie własności jakie chcieliśmy. □

Uwaga 1.4.4. *Niech $\varphi : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ jest liniowym, nieujemnym funkcjonałem i $\varphi \neq 0$ wtedy $\varphi(f) > 0$ dla każdego $f > 0$*

Dowód. Każdą funkcję $u \in C[0,1]$ można przedstawić jako różnicę $u = u^+ - u^-$ nieujemnych funkcji ciągłych $u^+ = \max(u,0)$ i $u^- = \max(-u,0)$. Dlatego, jeśli $\varphi \neq 0$ istnieje $v \geqslant 0$ dla którego $\varphi(v) > 0$. Weźmy $f > 0$ gdzie $\inf f = \delta > 0$. Mamy $\frac{\delta}{\|v\|}v \leqslant f$. Z liniowości φ mamy $\varphi(f) \geqslant \frac{\delta}{\|v\|}\varphi(v) > 0$ □

Dowód twierdzenia Riesza. $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$, nieujemny, linowy funkcjonał. $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \subset (l_\infty(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ $C = \{u \in l_\infty(I,\mathbb{R}) : \inf_{t\in I} u(t) > 0$ – zbiór wypukły i otwarty. $C \cap C[0,1] = \{f \in C[0,1] : f > 0\}$.
$\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ liniowy nieujemny wtedy φ jest dodatnie na $C \cap C[0,1]$. Z Uwagi 1.3.6. istnieje ciągłe liniowe rozszerzenie $\psi :{}_\infty(I,\mathbb{R}) \to R$ dodatni na C.
Zauważmy: jeśli $v \geqslant 0$ ($v \in l_\infty(I,\mathbb{R})$ *wtedy* $\psi(v) > 0$. *Niech* μ *będzie miarą jak w Lemacie 1.4.3.*
Musimy sprawdzić dla $f \in C[0,1]$, ze $\varphi(f) = \int_{[0,1]} f\mathrm{d}\mu$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dopóki f jest jednostajnie ciągła możemy zastąpić $[0,1]$ przez punkty $0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$[...]
g jest funkcją schodkową

$$g = f(0) \cdot \chi_{[0,t_1)} + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\chi_{[t_i,t_{i+1}} + f(t_n)\chi_{[t_n,1]}$$

Wtedy $\left|\varphi(f) - \int_{[0,1]} f\mathrm{d}\mu\right| = \left|\psi(f) - \psi(g) + \psi(g) - \int_{[0,1]}\right| \leqslant |\psi(f-g)| + \left|\int_{[0,1]} g\mathrm{d}\mu - \int_{[0,1]}\right| \ldots$ □

1.5 Ograniczone operatory liniowe