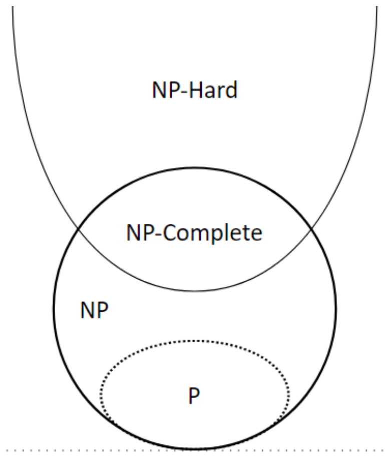
P, NP, and Cook's theorem

Disposition:

- Hvad er P og NP
- Models of Computation
- Languages and TMs
    - Church Turing
    - Formal Languages
    - Problems as languages
    - Representations (maps)
- Reduction
- Cook's Theorem
- SAT til 3SAT
- 3SAT til INDEPENDENT SET
- NAESAT til 3COLORING
- Måske 3SAT til HAMILTON PATH

Hvad er P og NP

Vi vil gerne kunne klassificere hvilke problemer der kan og ikke kan løses af "efficient algorithms", dvs. algoritmer der i Worst Case bruger polynomiel tid, samt nogle andre egenskaber. Det er altså klasser af problemer. Ligesom i BerLog vil vi benytte os meget af reductioner for at finde frem til egenskaber ved problemer, og for at finde ud af hvilke klasser de tilhører. Det kommer jeg ind på lidt senere.



P ≠ NP

Klasserne P og NP vil vi bruge til at definere problemer som kan henholdsvis løses effektivt (polynomielt) og med exhaustive search (exponentielt).

At noget ikke har en efficient algorithm betyder selvfølgelig ikke at vi ikke kan løse problemet, vi har skam flere algoritmer til dette som f.eks. branch and bound, men det siger noget om hvad vi kan håbe på i worst case.

Models of Computation

Vi vil også gerne have en eller anden måde at tænke på hvordan udregningen foregår, dvs. en eller anden model der beskriver hvad vi egentlig regner på. Vi kunne f.eks. tænke på vores computer indeholder reelle tal, og hvor vores input har størrelsen svarende til antal reelle tal den tager som input. Kompleksiteten af en algoritme beskrives så i hvor mange aritmetiske operationer som blev udført. Vi har i stedet valgt at arbejde med en model hvor vores computer indeholder bits, hvor input størrelsen bare er antal bits, og hvor kompleksiteten er antal bit operationer. Dette stemmer også meget godt med hvordan vores computer fungerer, hvor vi repræsentere alt i sidste ende som bits.

Languages and TMs

Dette leder os ind på sprog og Turing Maskiner. Sprog er vores måde at repræsentere problemer på, hvor et sprog er en eller anden delmængde af {0,1}*. Vi arbejder gerne med decision problems, da vi også kan omformulere optimeringsproblemer som decision problemer ved at tilføje Targets og Budgets, så vi beskriver JA-instanser af et problem som værende alle de bitstrenge i dets givne sprog L. Dvs. givet en bitstreng kan vi afgøre om det er en instans af 3COLORING som godt kan farves, iff den ligger i sproget.

Vi vil også gerne have en model for udregning, og dertil har vi vores troværdige Turing Maskine. Den består af et bånd der strækker sig uendeligt til højre. Båndet består af celler som alle indeholder enten et symbol fra alfabetet eller blank. TM'en har states og skifter states ud fra dets Transition Diagram delta når nålehovedet peger på en celle. Jeg skal nok spare jer for flere detaljer nu, så det vigtige er bare at vi påstår at denne konstruktion beskriver "beregnelighed" godt. Vi bruger dem nu til decision problems, hvor vi lægger input strengen på båndet, og vi siger så at en Turing Maskine bestemmer et sprog, hvis alle elementerne i sproget får Turing Maskinen til at gå i Accept.

Vi definere nu P klassen, til at være klassen af decision problemer (sprog) som kan bestemmes af en Turing Maskine, hvor den på alle input x terminere efter max p(|x|) skridt.

Church-Turing Thesis:

> Any decision problem that can be solved by some mechanical procedure, can be solved by a Turing machine.

Polynomial Church-Turing Thesis:

> A decision problem can be solved in polynomial time by using a reasonable sequential model of computation if and only if it can be solved in polynomial time by a Turing machine.

Ifølge ***Polynomial Church-Turing Thesis*** så er P robust over for vores MOC.

Vi har også det vi kalder Polynomial Time Computable Maps, som er funktioner der tager bitstrenge og retunerer bitstrenge. Det er funktioner som omdanner en repræsentation af et problem til en anden. Vi siger at to repræsentationer er Polynomisk Ækvivalente hvis der findes et map der kører i polynomisk tid imellem dem.

Dette giver os, at hvis vi har to ækvivalente repræsentationer, så hvis det ene sprog er i P, så er det andet også. Dette lægger også grunden for vores reductioner, og den måde vi kan overfører egenskaber på.

Reduction

A reduction r of L_1 to L_2 is a polynomial time computable map so that
$\forall\, x: x \in L_1$ iff $r(x) \in L_2$
We write $L_1 \leq L_2$ if L_1 reduces to L_2.
Med andre ord, vi tager en instans af L1 og udtrykker det med L2.
Intuition: Efficient software for L_2 can also be used to efficiently solve L_1.
Downward closure of P:

$$L_1 \leq L_2 \wedge L_2 \in \boldsymbol{P} \Rightarrow L_1 \in \boldsymbol{P}$$

Vi siger at et sprog L er NP-hard iff for alle sprog L' i NP at du kan reducere **til** L.
Vi siger at et sprog L er NP-complete iff L er i NP og er NP-hard.
For at bevise NP-hardness omkring sprog, skal vi bare bruge et bevis for at 1 sprog er NP-hard, og resten er reductioner.

Cook's Theorem

Cook's teorem går ud på at vise at SAT er NP-hard.

SAT

- Given: CNF formula F on n variables.
- Question: Does there exist $x \in \{0,1\}^n$ such that $F(x) = 1$?

Det består dog af flere dele for at komme til denne konklusion. Beviset er noget indviklet, så jeg har kun tænkt mig at dykke ned i et par elementer af det, og så beskrive den overordnede handling. Bagefter kan jeg også komme med en anden reduktion der går brug af resultatet fra denne.

De 2 hoved skridt er:

Først vis at CircuitSAT er NP-hard

Derefter vis at CircuitSAT kan reduceres til SAT

Jeg har ikke tænkt mig at gå i dybden med hvordan CircuitSAT er konstrueret, men det er en acyklisk graf med nogle inputs og nogle outputs. Man forestiller sig et kredsløb hvor nodes er gates, f.eks. AND gate. Vi vil så godt finde ud af om der findes et input hvor vores kredsløb returnerer sand. For et hver circuit kan vi skrive en tilsvarende formel, dog kan den være meget større. Dette er også en vigtig ting når vi tænker på at reductioner skal bruge et polynomial time map mellem sprogene.

Overordnet set, beviser vi at CircuitSAT er NP-hard, ved at reducere til det fra et arbitrært sprog L i NP. Det eneste vi ved om L, er at der findes et sprog L' og et polynomie p, hvor at vi givet en bitstreng x (en instans af decision problemet som L afgør), kan afgøre om det er en JA-instans af L iff der findes en bitstreng y fra search space som er polynomisk bounded af x, som er en korrekt løsning til x når <x,y> ligger i L'. Dvs. vi kan i polynomisk tid tjekke om en løsning er gyldig, og kan i hvert fald lave exhaustive search i search space for at finde y'er som er gyldige løsninger.

$$\forall x : x \in L \Leftrightarrow [\exists y \in \{0,1\}^* : |y| \leq p(|x|) \wedge \langle x, y \rangle \in L']$$

Reductionen går groft sagt ud på at lave en mappen fra Turing Maskiner til Circuits, og at vise at x ligger i L iff det konstruerede Circuit ligger i CircuitSAT (dvs. at det har en løsning).

Reductionen fra CircuitSAT til SAT går så ud på at lave alle gates om til clauses af max 3 literals, hvor at vi har en literal til "gate" værdien og en literal til hver "input" værdi til en gate. Vi har også en unit clause som bare indeholder (gout) gatens literal. Jeg vil nu hellere gå videre til nogle andre reductioner som bruger dette resultat til at udvide vores viden omkring mange forskellige problemers sværhedsgrad.

SAT til 3SAT

3SAT er et meget brugbart problem som vi bruger til mange resultater. Der er forskellige måder vi kan vise at det er NP-complete på, men jeg har bare tænkt mig at påpege at i vores CircuitSAT til SAT reduction, at vi rent faktisk bare laver 3SAT instanser, så vi har egentlig også vist at det er NP-complete der.

3SAT til INDEPENDENT SET

INDEPENDENT SET problemet består i at vi går givet en graf G med nogle vertices og edges, og skal afgøre om der findes et set af vertices på størrelse mindst K, således at ingen kanter er forbundet med mere end 1 vertex fra settet.

INDEPENDENT SET

- Given: Undirected graph $G = (V, E)$, target K.
- Question: Does there exist an independent set I in G with $|I| \geq K$?

Vi starter med at anvende en gadget, nemlig en trekant. Vi vil gerne konstruere en instans af INDEPENDENT SET ud fra vores instans af 3SAT, hvor den skal have samme ”løsning”. Siden vi arbejder med 3SAT, laver vi en trekant for hver clause, hvor at vertices i trekanterne beskriver den tilsvarende literal fra vores clauses. Vi tegner nu kanter mellem alle literals som er modsat hindanden, dvs. x1 og NOTx1. De vertices vi vælger til at være en del af I svarer til at blive sat til ”true” i vores clause. Vi sætter vores target K til at være antal clauses M, for at sikre os at alle clauses har 1 true literal. Siden K = M, så skal vores set I bestå af 1 literal fra alle clauses, ellers ville det ikke være independent og/eller ikke være stort nok. Vores kanter mellem trekanterne sikre os consistency.

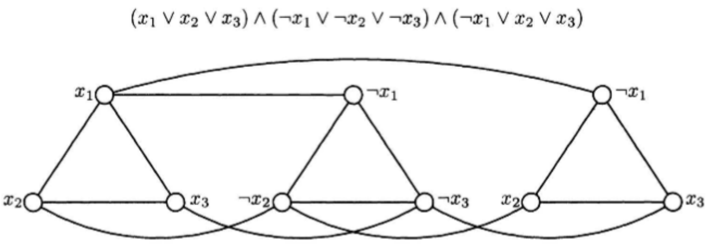


Figure 9-2. Reduction to INDEPENDENT SET.

Hvis vi får givet en JA-instans af 3SAT, konstruerer vi bare grafen som beskrevet, og sætter variablerne tilsvarende.

Den anden vej, givet et korrekt Independent Set, så sætter vi bare de literals der er i I til at være true.

NAESAT til 3COLORING

NAESAT er et special case af 3SAT, hvor det gælder at alle 3 variabler i dets clauses ikke må være ens. Dvs. de må ikke alle være false eller alle være true. Det gælder også at JA-instanser er lukket under komplementet, da komplementet til en JA-instans bare flipper alle variablerne og giver os noget andet der også opfylder Not All Equal, og at der må være mindst 1 sandt element i hver clause. Man kan lave en reduction fra CircuitSAT til NAESAT for at vise NP-hardness, men jeg skipper den del da man bare laver lidt om på hvordan CircuitSAT til SAT ser ud, da den ikke beskyttede imod at alle variabler i clauses med mindre end 3 variabler var true. Det er også klart nok at den ikke må være i P, da ellers ville 3SAT også være. Denne gang laver jeg en reduction fra NAESAT til 3COLORING, for at vise at 3COLORING er NP-hard. 3COLORING er problemet hvor man givet en graf med nogle kanter og vertices, skal finde ud af om der kan tildeles farver til vertices sådan at ingen kanter har samme farver på begge ender.

3-COLORING

- Given: Undirected graph $G = (V, E)$.
- Question: Does there exist a valid 3-coloring of G?
  (i.e. a function $c: V \rightarrow \{0,1,2\}$ such that $c(u) \neq c(v)$ for all $uv \in E$)

Vi har et eller antal clauses i vores NAESAT instans, som har et eller antal variabler. Vi vil gerne omdanne det til en instans af 3COLORING. Vi starter derfor med at definere farverne 0, 1 og 2 som værende ”true”, ”false” og ”?”. Dvs. 2 kan være begge.

Vi konstruere vores graf ved at starte med en vertex som har farven 2. Vi sammensætter nu en trekant for være variable i vores NAESAT instans, hvor 2 verticen er toppen for dem alle. Vi laver også en trekant for hver clause, hvis vertices repræsentere de variabler som bruges i det clause, og vi laver en kant fra de vertices ud til de variabler som bruges. Det betyder, at hvis vi kan finde en måde at tildele farverne på så det overholder 3COLORING, så må der være en måde at tildele variablerne værdier således at ”true” eller ”false” ikke fremkommer mere end 1 gang i vores clause trekanter. En JA-instans af 3COLORING konstrueret på denne måde vil derfor altid give en JA-instans af NAESAT.

For at bevise det den anden vej, er vi givet en JA-instans af NAESAT. Vi starter som konstruktionen gjorde før, men i clause trekanten vælger vi bare 2 af variablerne som havde forskellige værdier, og farver dem efter dem. Og så får den sidste bare farven ”?”.

3SAT er en af de meget brugbare problemer til at reducere med for at vise at andre problemer er NP-hard. NAESAT er smart til denne reduction fordi 3COLORING har et element af ”ikke alle må være ens”. Man har derfor nogle gange lyst til at bruge andre problemer end 3SAT, hvis man ved noget specielt om problemet. Det sker også i tilfældet af HAMILTON PATH til TSP.

Måske 3SAT til HAMILTON PATH

Det starter egentlig med at vi reducere fra den brugbare 3SAT til HAMILTON PATH. Jeg har ikke tænkt mig at gå helt i dybden med den, da den er lidt lang.

Let $G = (V, E)$ be an undirected graph. A Hamiltonian path in G is a path in G that visits each node exactly once.

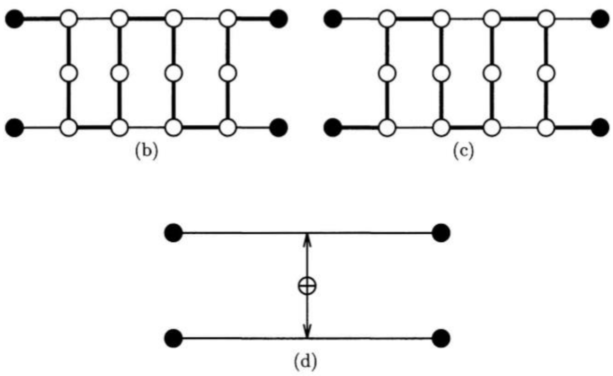
HAMILTON PATH

- Given: Undirected graph $G = (V, E)$.
- Question: Does there exist a Hamiltonian path in G?

Vi vil som sagt gerne omdanne noget fra 3SAT til noget fra HAMILTON PATH, hvor HAMILTON PATH problemet går ud på at lave en vej der besøger alle vertices præcis 1 gang. Konstruktionen består af flere lag, så vi starter småt. Vi vil gerne have en eller anden måde at tildele vores variabler sandhedsværdier. Dette gøres med en ”choice gadget” kaldet vi det.

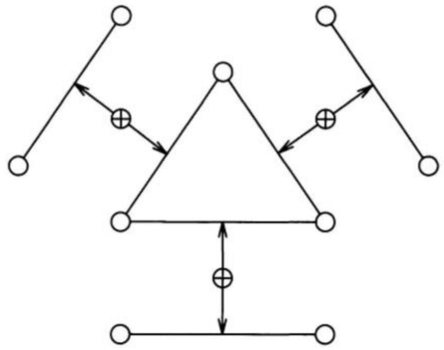
Denne gadget har 2 stier, som henholdsvist bestemmer om variablen er ”true” eller ”false. Vi laver derfor en lang kæde af disse for at tildele alle variablerne ”true” eller ”false.

Det næste skridt er at vi gerne vil sikre os at disse tildelinger bliver ”udført” og overholdt i resten af grafen, så vi laver det vi kalder en ”consistency gadget”.

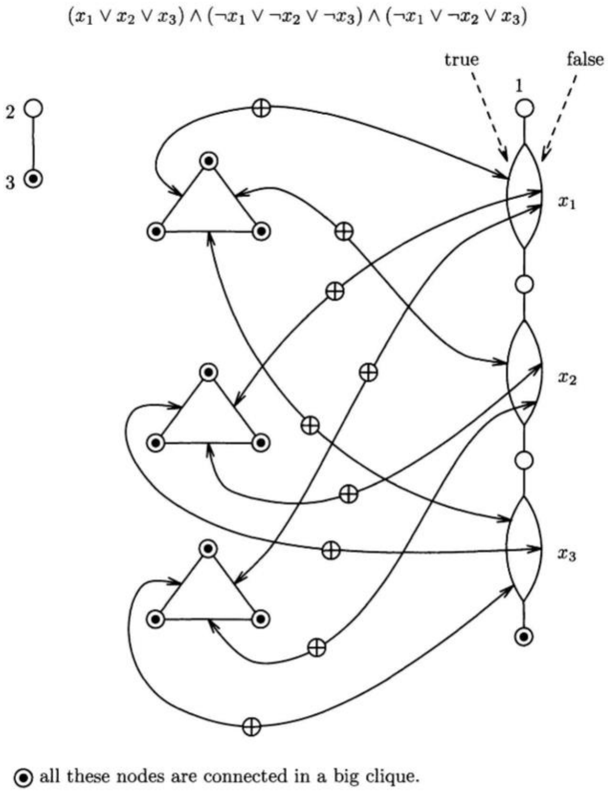


Denne gadget har til formål at holde grafen forbundet og at alle vertices bliver besøgt, men også at indgangspunktet bestemmer udgangspunktet. Som det kan ses på tegningen, så hvis du kommer ind øverst forlader du også gadgeten øverst. Vi bruger XOR tegnet for at gøre det simplere.

Nu vil vi godt repræsentere vores clauses. Dette gør vi med vores ”constraint” gadget.



Trekanten er vores 3SAT clause, hvor hver kant er en af variablerne i det clause. Hvis kanten er ”taget” i HAMILTON stigen, så betyder det at variablen er ”false”. Siden det er en trekant, og at kun 2 kanter på tages fordi ellers besøger vi en vertex mere end 1 gang, så har vi altså en utaget kant som betyder at den ene variabel i hvert fald er sand. Vi forbinder hver kant med vores choice gadget for de tilsvarende variabler, hvilket betyder at hvis vi sætter f.eks. x1 til true over i choice, så kan vi ikke tage den tilsvarende kant som jo betød at den var false.



Nu vil vi så godt forbinde slut punktet for vores choice kæde med all kanter i clause trekanterne. Disse skal så også forbindes med en slut node. Vores sti starter altså fra node 1 og slutter i node 2.

Hvis der er en korrekt HAMILTON PATH for denne graf, så må der også være tildelinger til alle clauses som gør at mindst 1 variabel er sand.

Hvis vi allerede har en sand 3SAT instans så kører vi bare igennem choice kæden og tildeler de samme værdier.

HAMILTON PATH til TSP består så bare af at vi sætter alle kanter i grafen som eksistere i HAMILTON tilfældet til at have Distance 1, og alle ikke eksisterende kanter til at have Distance 2. Vores Budget er så n+1, dvs. hele vejen rundt og så kanten tilbage til start. Hvis sådan en vej findes, så er det også en HAMILTON PATH.

Noter:

Languages

Turing Machines

Reductions and P, NP and NP-complete/hard classes.

Robust under model of computation and under representation