

Numeryczne całkowanie po kole jednostkowym z użyciem złożonej metody trapezów

Artur Czołgosz, 339051
grupa 2a, środa 16:15-18:00

Metody Numeryczne

Projekt 1, zadanie 18

Treść zadania i cel projektu

Treść zadania (własnymi słowami):

- ▶ Zaprojektować i zaimplementować funkcje Matlab

$$I \approx \iint_D f(x, y) dx dy,$$

gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (dysk jednostkowy), przy użyciu złożonej metody trapezów przekształcając koło jednostkowe na kwadrat:

$$[-1, 1] \times [-1, 1]$$

Cel projektu:

- ▶ Poprawnie zaimplementować metodę numeryczną.
- ▶ Przetestować poprawność programu na funkcjach z dokładnie znaną całką.
- ▶ Zbadać własności numeryczne metody (zbieżność, wpływ mapowania).

Opis matematyczny: obszar całkowania

Obszar: dysk jednostkowy

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Przechodzimy do współrzędnych biegunowych:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$dx \, dy = r \, dr \, d\theta.$$

Równoważna całka:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Opis matematyczny: mapowanie kwadratu

Wprowadzamy siatkę w zmiennych pomocniczych (u, v) :

$$u \in [-1, 1], \quad v \in [-1, 1].$$

Przykładowe mapowanie:

$$r(u) = \frac{u+1}{2} \quad (\text{mapowanie linear}),$$

$$r(u) = \sqrt{\frac{u+1}{2}} \quad (\text{mapowanie sqrt}),$$

$$\theta(v) = \pi(v+1).$$

Jacobian całkowity:

$$J(u, v) = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = r(u) \left| \frac{dr}{du} \right| \left| \frac{d\theta}{dv} \right|.$$

Zastąpienie (x, y) przez (u, v) prowadzi do całki:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(u, v), y(u, v)) J(u, v) du dv.$$

Mapowanie linear

$$(u, v) \in [-1, 1]^2, \quad \theta(v) = \pi v.$$

Definicja:

$$r(u) = \frac{u+1}{2}, \quad x = r(u) \cos \theta(v), \quad y = r(u) \sin \theta(v).$$

Jacobian:

$$J(u, v) = r(u) \frac{dr}{du} \frac{d\theta}{dv}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{1}{2}, \quad \frac{d\theta}{dv} = \pi,$$

$$J_{\text{linear}}(u, v) = r(u) \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} r(u) = \frac{\pi}{4} (u+1).$$

Mapowanie sqrt

$$(u, v) \in [-1, 1]^2, \quad \theta(v) = \pi v.$$

Definicja:

$$r(u) = \sqrt{\frac{u+1}{2}}, \quad x = r(u) \cos \theta(v), \quad y = r(u) \sin \theta(v).$$

Jacobian:

$$J(u, v) = r(u) \frac{dr}{du} \frac{d\theta}{dv}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{1}{4r(u)}, \quad \frac{d\theta}{dv} = \pi,$$

$$J_{\text{sqrt}}(u, v) = r(u) \cdot \frac{1}{4r(u)} \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \quad (\text{stała}).$$

- Stały Jacobian \Rightarrow równomierne „zageszczenie” w promieniu.

Mapowanie m_1 (niepoprawne)

Definicja:

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v\sqrt{1 - u^2}.$$

Jacobian:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{1 - u^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$J_{m_1}(u, v) = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \sqrt{1 - u^2}.$$

Uwaga (krótko)

Mapowanie m_1 nie spełnia założeń „bezpiecznego” przekształcenia z wykładu (nie zachowuje gładkości na całym obszarze), dlatego traktujemy je tylko jako przykład eksperymentalny.

Mapowanie m3

Definicja:

$$x(u, v) = u\sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}, \quad y(u, v) = v\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}.$$

Oznaczamy

$$A(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}, \quad B(u) = \sqrt{1 - \frac{u^2}{2}},$$

wiec $x = uA$, $y = vB$.

Jacobian:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = A, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{uv}{2A}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = B, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{uv}{2B},$$

$$J_{m3}(u, v) = AB - \frac{u^2 v^2}{4AB}.$$

$$J_{m3}(u, v) = \frac{1 - \frac{u^2 + v^2}{2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}}.$$

Opis matematyczny: złożona metoda trapezów

Na prostokacie $[-1, 1] \times [-1, 1]$ stosujemy siatkę:

$$u_i = -1 + i h_u, \quad i = 0, \dots, N_u, \quad h_u = \frac{2}{N_u},$$

$$v_j = -1 + j h_v, \quad j = 0, \dots, N_v, \quad h_v = \frac{2}{N_v}.$$

Wzór złożonej metody trapezów 2D:

$$I_{N_u, N_v} = \sum_{i=0}^{N_u} \sum_{j=0}^{N_v} w_i^{(u)} w_j^{(v)} f(x_{ij}, y_{ij}) J_{ij} h_u h_v,$$

gdzie

$$(x_{ij}, y_{ij}) = (x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)),$$

a $w_i^{(u)}, w_j^{(v)} \in \{1, \frac{1}{2}\}$ są wagami 1D metody trapezów.

Własności metody

- ▶ Metoda trapezów 1D ma rząd zbieżności $O(h^2)$ przy dostatecznej gładkości funkcji.
- ▶ Dla 2D na prostokacie: błąd rzędu

$$|I - I_{N_u, N_v}| = O(h_u^2 + h_v^2).$$

- ▶ Jakość przybliżenia na kole zależy od:
 - ▶ gładkości funkcji f na dysku,
 - ▶ gładkości użytego mapowania $(u, v) \mapsto (x, y)$,
 - ▶ zageszczenia siatki (N_u, N_v) .
- ▶ Porównujemy różne mapowania (linear, sqrt, ...), obserwując wpływ na błąd i zbieżność.

Testy poprawności programu

Idea: testujemy program na funkcjach, dla których znamy dokładną wartość całki po dysku.

Przykładowe funkcje testowe:

- ▶ $f_1(x, y) = 1, \quad I = \iint_D 1 \, dx \, dy = \pi.$
- ▶ $f_2(x, y) = x, \quad f_3(x, y) = y, \quad$ całka równa 0 (symetria).
- ▶ $f_4(x, y) = x^2 + y^2 = r^2, \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$
- ▶ (opcjonalnie) inne wielomiany lub funkcje gładkie.

Na slajdach z testami pokazujemy:

- ▶ nazwe funkcji f ,
- ▶ dokładna wartość całki,
- ▶ wartości numeryczne dla różnych N ,
- ▶ błąd bezwzględny.

Testy poprawności: przykład dla $f(x, y) = 1$

$N_u = N_v$	I_{num}	$I_{\text{dokładne}}$	$ blad $
4	3.1416	3.1416	$< 10^{-4}$
8	3.1416	3.1416	$< 10^{-6}$
16	3.1416	3.1416	$< 10^{-8}$

Wnioski:

- ▶ Program daje poprawne wyniki dla prostych funkcji.
- ▶ Błąd maleje przy zageszczaniu siatki.
- ▶ Na tym etapie przede wszystkim potwierdzamy poprawność *implementacji*.

Testy poprawności: $f(x, y) = 1$ (linear, sqrt)

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = \pi$.

	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
Mapping linear	4	3.14159265358979	0
	8	3.14159265358979	$4.44 \cdot 10^{-16}$
	16	3.14159265358979	0
	32	3.14159265358979	0
	64	3.14159265358979	0

	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
Mapping sqrt	4	3.14159265358979	0
	8	3.14159265358979	$1.78 \cdot 10^{-15}$
	16	3.14159265358980	$3.11 \cdot 10^{-15}$
	32	3.14159265358979	$1.78 \cdot 10^{-15}$
	64	3.14159265358980	$3.11 \cdot 10^{-15}$

W obu przypadkach błąd jest na poziomie błędu zaokrąglenia.

Testy poprawności: funkcje z zerowa całka

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = 0$.

$f(x, y) = x$, mapping linear	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} $
	4	$3.21 \cdot 10^{-17}$	$3.21 \cdot 10^{-17}$
	8	$5.97 \cdot 10^{-17}$	$5.97 \cdot 10^{-17}$
	16	$8.42 \cdot 10^{-17}$	$8.42 \cdot 10^{-17}$
	32	$8.46 \cdot 10^{-17}$	$8.46 \cdot 10^{-17}$
	64	$9.84 \cdot 10^{-17}$	$9.84 \cdot 10^{-17}$

$f(x, y) = y$, mapping sqrt	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} $
	4	$-1.52 \cdot 10^{-18}$	$1.52 \cdot 10^{-18}$
	8	$9.71 \cdot 10^{-18}$	$9.71 \cdot 10^{-18}$
	16	$2.08 \cdot 10^{-17}$	$2.08 \cdot 10^{-17}$
	32	$7.46 \cdot 10^{-18}$	$7.46 \cdot 10^{-18}$
	64	$1.48 \cdot 10^{-18}$	$1.48 \cdot 10^{-18}$

Błąd jest na poziomie precyzji maszynowej — test symetrii zdany.

Test poprawności: $f(x, y) = |x|$ (linear)

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = \frac{4}{3} \approx 1.333333\dots$

$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
16	1.3296958445	$3.64 \cdot 10^{-3}$
32	1.3324248703	$9.08 \cdot 10^{-4}$
64	1.3331062744	$2.27 \cdot 10^{-4}$
128	1.3332765721	$5.68 \cdot 10^{-5}$
256	1.3333191433	$1.42 \cdot 10^{-5}$
512	1.3333297858	$3.55 \cdot 10^{-6}$

Funkcja nie jest gładka na $x = 0 \Rightarrow$ zbieżność wolniejsza niż dla funkcji gładkich.

Test: $f(x, y) = x^2 + y^2$ (linear)

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = 1.5707963268$.

$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
4	1.5953400194	$2.45 \cdot 10^{-2}$
8	1.5769322499	$6.14 \cdot 10^{-3}$
16	1.5723303076	$1.53 \cdot 10^{-3}$
32	1.5711798220	$3.83 \cdot 10^{-4}$
64	1.5708922006	$9.59 \cdot 10^{-5}$

Błąd maleje ok. 4 razy przy podwojeniu N (zbieżność $\sim h^2$).

Test: $f(x, y) = x^2 + y^2$ (sqrt, m3)

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = 1.5707963268$.

	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
Mapping sqrt	4	1.5707963268	0
	8	1.5707963268	$2.22 \cdot 10^{-16}$
	16	1.5707963268	0
	32	1.5707963268	0
	64	1.5707963268	0

	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
Mapping m3	4	1.5594268746	$1.14 \cdot 10^{-2}$
	8	1.5678594434	$2.94 \cdot 10^{-3}$
	16	1.5700554165	$7.41 \cdot 10^{-4}$
	32	1.5706106664	$1.86 \cdot 10^{-4}$
	64	1.5707498844	$4.64 \cdot 10^{-5}$

Dla funkcji radialnej sqrt jest praktycznie idealne.

Test: $f(x, y) = x^2$ (linear)

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = 0.7853981634$.

$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
4	0.7976700097	$1.23 \cdot 10^{-2}$
8	0.7884661250	$3.07 \cdot 10^{-3}$
16	0.7861651538	$7.67 \cdot 10^{-4}$
32	0.7855899110	$1.92 \cdot 10^{-4}$
64	0.7854461003	$4.79 \cdot 10^{-5}$

Znow widać zbieżność $\sim h^2$ dla mapowania linear.

Test: $f(x, y) = x^2$ (sqrt, m3)

Dokładna wartość: $I_{\text{exact}} = 0.7853981634$.

Mapping sqrt	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
	4	0.7853981634	0
	8	0.7853981634	0
	16	0.7853981634	0
	32	0.7853981634	0
	64	0.7853981634	0

Mapping m3	$N_u = N_v$	I_{num}	$ I_{\text{num}} - I_{\text{exact}} $
	4	0.7797134373	$5.68 \cdot 10^{-3}$
	8	0.7839297217	$1.47 \cdot 10^{-3}$
	16	0.7850277082	$3.70 \cdot 10^{-4}$
	32	0.7853053332	$9.28 \cdot 10^{-5}$
	64	0.7853749422	$2.32 \cdot 10^{-5}$

sqrt jest tu znowu najdokładniejsze, m3 stopniowo dochodzi do wyniku.

Eksperymenty numeryczne – plan

Cel eksperymentów: zbadać własności numeryczne metody:

- ▶ zbieżność błędu w zależności od N_u, N_v ,
- ▶ porównanie różnych mapowań (linear, sqrt, ...),
- ▶ wpływ kształtu i gładkości funkcji f .

Przykładowe eksperymenty:

- ▶ Analiza zbieżności dla kilku funkcji gładkich (np. $f(x, y) = 1, x^2 + y^2, \sin x \cos y$).
- ▶ Porównanie błędu dla różnych mapowań przy tym samym N .
- ▶ Zestawienie czasu obliczeń w zależności od wielkości siatki.

Eksperyment: zbieżność błędu

Przykład: funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$, mapowanie linear.

N	l_{num}	$ blad $	$ blad_{\text{poprz}} / blad $
4	—
8	≈ 4
16	≈ 4
32	≈ 4

- Stosunek błędów ≈ 4 będzie wskazywać na rząd zbieżności zbliżony do $O(h^2)$ (podwojenie liczby podziałów zmniejsza błąd około czterokrotnie).

Eksperyment: porównanie mapowań

Przykład: funkcja gładka $f(x, y) = x^2 + y^2$, porównanie mapowań przy tym samym N .

Mapowanie	I_{num}	$ blad $
linear
sqrt
m1
m3

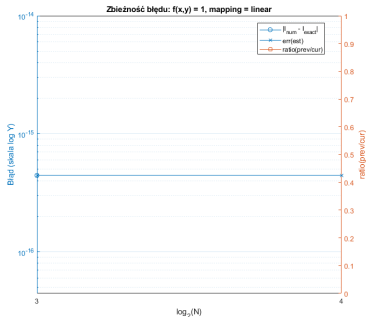
Funkcje testowe i wartości całek

Rozważane funkcje testowe i ich wartości na dysku jednostkowym:

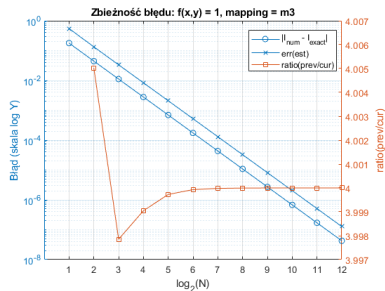
$$I_k = \iint_D f_k(x, y) dx dy$$

Funkcja	$f(x, y)$	$I = \iint_D f(x, y) dx dy$
f_1	1	π
f_2	x	0
f_3	$ x $	$\frac{4}{3}$
f_4	$x^2 + y^2$	$\frac{\pi}{2}$
f_5	x^2	$\frac{\pi}{4}$

Porównanie mapowań dla $f(x, y) = 1$

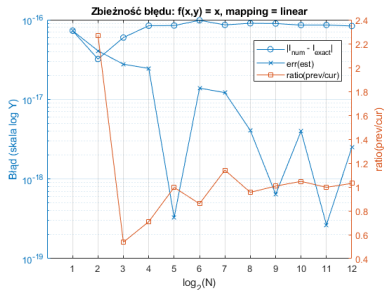


mapowanie linear

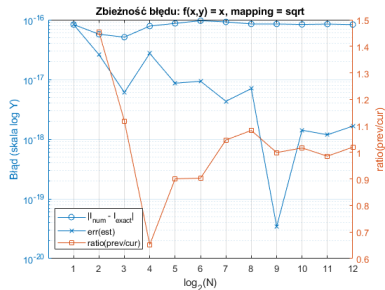


mapowanie m3

Porównanie mapowań dla $f(x, y) = x$

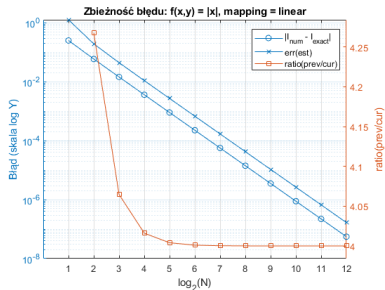


mapowanie linear

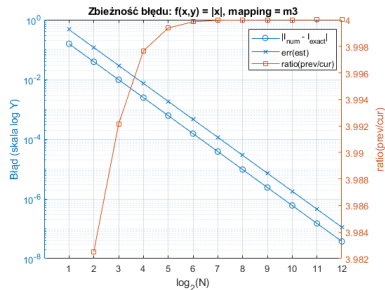


mapowanie sqrt

Porównanie mapowań dla $f(x,y) = |x|$

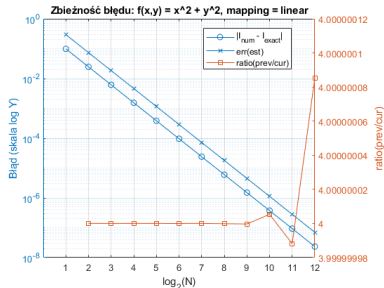


mapowanie linear

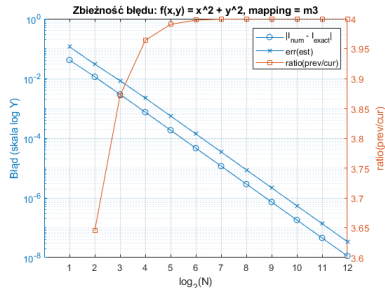


mapowanie m3

Porównanie mapowań dla $f(x, y) = x^2 + y^2$

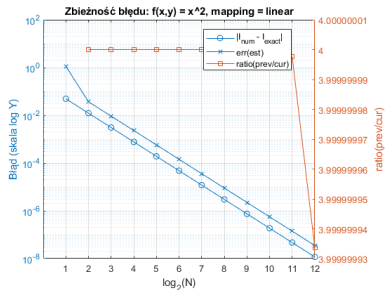


mapowanie linear

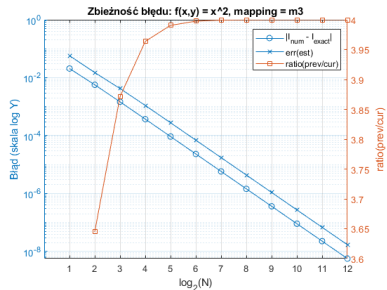


mapowanie m3

Porównanie mapowań dla $f(x, y) = x^2$



mapowanie linear



mapowanie m3

Komentarze do wykresów

- ▶ Dla wszystkich funkcji za pomocą metody `linear` obserwujemy zbieżność rzędu około $O(h^2)$, zgodnie z teorią.
- ▶ Na wykresach nie pokazano wszystkich mapowań.
- ▶ Nie pokazano dla wszystkich funkcji metody `sqrt`, ale dla niektórych funkcji od samego początku dawała dokładny wynik.

Podsumowanie

- ▶ Zaimplementowano złożoną metodę trapezów do całkowania po kole jednostkowym z użyciem różnych mapowań kwadratu na dysk.
- ▶ Testy poprawności na prostych funkcjach potwierdziły poprawność implementacji.
- ▶ Eksperymenty numeryczne pokazały oczekiwany rząd zbieżności $O(h^2)$.
- ▶ Porównanie mapowań wskazało, że wybór mapowania ma istotny wpływ na dokładność dla niektórych funkcji.