① $\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ er en like (jevn) funksjon.

For at en funksjon skal ~~være~~ til ha en invers må den være injektiv. Dette er ikke cosh(x) hvis $D_f = (-\infty, \infty)$, men siden funksjonen er like dvs. $f(x) = f(-x)$ og har nullpunkt i $x=0 \Rightarrow \cosh(0)=0$ er den injektiv på intervallet $D_f = [0, \infty)$. V_f er da $[1, \infty)$!
Og siden $D_{f^{-1}} = V_f$ blir definisjonsmengden til $\cosh^{-1}(x)$ $D_{f^{-1}} = [1, \infty) = [1, \infty)$

$\cosh^{-1}(x) = y \qquad \cosh(y) = x$

$$\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = x$$

$$e^{y}+e^{-y} = 2x$$

$$e^{y}+e^{-y}-2x = 0 \quad | \cdot e^{y}$$

$$e^{y} \cancel{+} -2xe^{y}+1 = 0$$

$$e^{y} = \frac{+2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = \frac{\cancel{2x}\, x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$

Formel for den deriverte av en invers funksjon:

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad f(x) = \cosh(x)$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^{x}}{2}\right)' + \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{\sinh(f^{-1}(x))} \qquad f^{-1}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} - e^{-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}{2}} = \frac{2}{x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{x^2-1} - (x-\sqrt{x^2-1})}$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1} = x-\sqrt{x^2-1}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\cosh^{-1\prime}(\sqrt{170}) = \frac{1}{\sqrt{170-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{13}}}$$

(2) a) $\int_{x_0 = 17\pi}^{x_1 = 19\pi} |f(x)|\, dx$

absoluttverdien av en odde funk er en like funk:

~~odde funk:~~

La $g(x)$ være odde $\Rightarrow$ $g(-x) = -g(x)$

tar vi absoluttverdi på begge sider får vi:

$|g(x)| = |g(-x)| \Rightarrow g(x) = g(-x)$ som er kravet for en like funk.

Siden det er en periodisk funksjon så er:

$f(x + 2\pi k) = f(x)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

setter $k = -9$

~~$f(x + 2\pi(-9)) = f(19\pi)$~~

$f(19\pi + 2\pi(-9)) = f(19\pi)$

$f(\pi) = f(19\pi)$

$x_1 = 19\pi \quad \vee \quad x_1 = \pi$

$x_0 = 17\pi \quad \vee \quad x_0 = -\pi$

og tilsvarende $f(-\pi) = f(17\pi)$

Vi skriver om og får:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$$

For en like funksjon har vi:

$$\int_{-a}^{a} g(x) = 2\int_{0}^{a} g(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx = 2\int_{0}^{\pi} |f(x)|\, dx$$

siden $f(x) \geq 0$
for $0 \leq x \leq \pi$
kan vi skrive det slik:

$$2\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = 2$$ (gitt i oppgaveteksten)

Dermed blir $2\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = 2 \cdot 2 = 4$

Til slutt har vi

$$\int_{17\pi}^{19\pi} |f(x)|\, dx = 4$$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{f(2x)} f'(2x)\,dx$

$e^{f(2x)} = u$

$\dfrac{du}{dx} = e^{f(2x)} \cdot f'(2x)$

$dx = \dfrac{du}{e^{f(2x)} \cdot f'(2x)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{f(2x)} \cdot f'(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{f(2x)} \cdot f'(2x) \frac{du}{e^{f(2x)} \cdot f'(2x)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,du = \Big[\, u \,\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \Big[\, e^{f(2x)} \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{f(\frac{\pi}{2})} - e^{f(0)} = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e-1}}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (oppgitt i oppgaven)

$f(0) = 0$ ettersom f er en periodisk funk. med periode 2π, og det er en odde funk., og $f(x) \geq 0$ $\quad 0 \leq x \leq \pi$

c) odde funksjon: $f(-x) = -f(x) = y$

$\sin(-x) = -\sin(x) \Rightarrow \sin(-y) = -\sin(y)$

$\cancel{\sin(-f(x)) = -\sin(f(x))}$ $\sin(f(x)) = -\sin(f(-x))$

siden $\sin(x)$ er en odde funksjon, vil $\sin(f(x))$ også være en odde funksjon ettersom $f(x)$ er en odde funksjon. Dette kommer av det som er vist over.

Siden $e^{(f(x))^2} \geq 0$ for $-\pi \leq x \leq \pi$ er også $e^{(f(x))^2} \cdot \sin(f(x))$ en odde funksjon

hvis $g(x)$ er odde ~~får~~ vi har vi denne sammenhengen

$$\int_{-a}^{a} g(x) = 0$$

Dermed får vi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(f(x))^2} \cdot \sin(f(x)) = 0$$

③ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{3n+4i} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{3+\frac{4i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ la $b=1$ $a=0$ $\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$x_i = i \cdot \Delta x_i = \frac{i}{n}$

$f(x_i) = \frac{4}{3+4\frac{i}{n}} = \frac{4}{3+4x_i}$

Vi har nå klart å skrive dette som en riemannsum.

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$

$$\int_0^1 \frac{4}{3+4x}\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{4}{u}\,\frac{du}{4} \qquad \cancel{\frac{4}{3+4x}} \qquad u = 3+4x,\quad \frac{du}{dx} = \cancel{3+}4,\quad dx = \frac{du}{4}$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{u}\,du = \Big[\ln|u|\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \Big[\ln|3+4x|\Big]_0^1 = \ln 7 - \ln 3 = \underline{\underline{\ln\frac{7}{3}}}$$

(9) $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx$$ "Uegentlig integral type 2"

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\cos x\,dx \qquad I = \int e^{-ax}\cos x\,dx$$

$a>0$

$$I = \int e^{-ax}\cos x\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\cdot\cos x - \int -\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos x - \frac{1}{a}\int e^{-ax}\sin(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos x - \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{-1}{a}\right)e^{-ax}\sin(x) - \frac{1}{a}\int -\frac{1}{a}e^{-ax}(-\cos(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos(x) + \frac{1}{a^2}e^{-ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2}\int e^{-ax}(\cos(x))\,dx$$

$$I = \frac{e^{-ax}}{a}\left(-\cos(x) + \frac{1}{a}\sin(x)\right) - \frac{1}{a^2}\cdot I$$

$$I\left(1+\frac{1}{a^2}\right) = \frac{e^{-ax}}{a}\left(-\cos(x) + \frac{1}{a}\sin(x)\right)$$

$$I = \frac{\frac{e^{-ax}}{a}\left(-\cos(x) + \frac{1}{a}\sin(x)\right)}{1+\frac{1}{a^2}}$$

$$I = \frac{e^{-ax}}{a+\frac{1}{a}}\left(-\cos(x) + \frac{1}{a}\sin(x)\right)$$

$$I = e^{-ax}\,\frac{(\sin(x) - a\cos(x))}{a^2+1}$$

4 forts.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos x \, dx = \left[\frac{e^{-ax} (\sin(x) - a \cos(x))}{a^2+1} \right]_0$$

uegentlig integral Type 1

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-ax} \cos x \, dx$$

$$\lim_{b \to \infty} \left[\frac{e^{-ax} (\sin(x) - a \cos(x))}{a^2+1} \right]_0^b$$

$$e^0 \cdot \left(\left(\frac{0 - a}{a^2+1} \right) \right) - \lim_{b \to \infty} \left(e^{-ax} \frac{(\sin(x) - a \cos(x))}{a^2+1} \right)$$

$$\frac{a}{a^2+1} - 0 \qquad (e^{-\infty} \to 0)$$

$\frac{a}{a^2+1}$ skal være størst mulig, deriverer mhp a og setter lik 0

$$\frac{a^2+1-2a^2}{(a^2+1)^2} = \frac{-a^2+1}{(a^2+1)^2} = 0$$

setter teller lik 0

$$-a^2 + 1 = 0$$
$$a = \pm 1$$

a er definert til å være større enn 0, så stryker negativ verdi.

$$a = 1$$

$\frac{a}{a^2+1}$ insatt for $a=1$ gir $\frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx = \frac{1}{2}$$