Innlevering 3, Sofus Buskoven

1

a) Vi har at volumet av et legeme rotert om x-aksen er $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2$. Vi setter funksjonen vår inn og får at

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^a b^2 (1 - (\frac{x}{a})^2)\, dx \\ &= \pi b^2 \int_0^a 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ &= \pi b^2 [x - \frac{x^3}{3a^2}]_0^a \\ &= \pi b^2 (a - \frac{a}{3}) \\ &= \underline{\underline{\frac{2\pi b^2 a}{3}}} \end{aligned}$$

b) Vi har at volumet av et legeme rotert om y-aksen er $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$. Vi setter inn funksjonen vår:

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi \int_0^a x(b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2})\, dx \\ &= 2\pi \int_0^a xb\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \end{aligned}$$

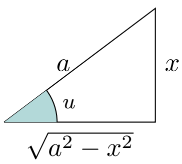
Vi substituerer $x = a\sin(u)$ og får $\frac{dx}{du} = a\cos(u)$. Og siden $\sqrt{a^2(1 - \sin^2(u))} = a\cos(u)$ blir det:

$$V_2 = 2\pi b a^2 \int_{x=0}^{x=a} \sin(u)\cos^2(u)\, du$$

Ved substitusjon av $\cos(u)$ finner vi:

$$V_2 = 2\pi b a^2 [-\frac{1}{3}\cos(u)]_{x=0}^{x=a}$$

Vi kan finne $\cos(u)$ ved hjelp av Pytagoras' setning:



Da får vi at:

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi b a^2 [-\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a})]_0^a \\ &= \underline{\underline{\frac{2\pi b a^2}{3}}} \end{aligned}$$

c) Hvis vi ser på de to volumene vi har ser vi med en gang at vi får like volumer dersom vi setter $b = a$. Vi har også at volumet for en kule er $\frac{4\pi r^3}{3}$ som sier oss at volumene vi har fått er halvkuler.

2

a) Vi har integralet:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\, dx$$

Som vi kan skrive på denne måten

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}(1 - x^{-1})}\, dx$$

Substituerer vi nå $t = x^{-\frac{2}{3}}$ og $\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}$ får vi:

$$\int_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}(1+t^{\frac{3}{2}})} \cdot -\frac{3}{2}x^{\frac{5}{3}}\,dt$$

Setter vi inn $x \to 1$ for $t = x^{-\frac{2}{3}}$ får vi nedre integralgrense for $t, 1$ og setter vi inn $x \to \infty$ får vi øvre integralgrense for $t, 0$

$$-\frac{3}{2}\int_1^0 \frac{1}{1+t^{\frac{3}{2}}}\,dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

b) Simpsons metode med 4 intervaller sier

$$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)$$

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{1}{4}$$

Setter vi funksjonen vår inn får vi:

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{0}{4})^{\frac{3}{2}}} + 4(\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}) + 2(\frac{1}{1+(\frac{2}{4})^{\frac{3}{2}}}) + 4(\frac{1}{1+(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}}) + \frac{1}{1+(\frac{4}{4})^{\frac{3}{2}}}\right) \approx \underline{\underline{1.11976}}$$

$\boxed{3}$ a) Punktet $[1, 0]$ ligger langs x-aksen så vi kan enkelt se på avstanden fra punktet til grafen ved hjelp av Pytagoras' setning. Kateten som ligger langs x-retning vil ha lengde $x-1$ og kateten i y-retning vil ha lengde $f(x)$. Dermed kan vi uttrykke lengden fra punktet til $\cos(x)$ som $g(x) = (x-1)^2 + \cos^2(x)$ fordi lengden er blir den samme om vi kvadrerer ligningen eller ikke. Den korteste avstanden finner vi når den deriverte blir 0, og dette blir $g'(x) = 2(x-1) - 2\cos(x)\sin(x) = 2x - 2 - \sin(2x) = 0$

b) Av newtons metode har vi

$$S_{n+1} = S_n - \frac{f(S_n)}{f'(S_n)}$$

vi bruker vår deriverte funksjon $g'(x)$ og dens deriverte igjen $g''(x) = 2 - 2\cos(2x)$ og starter å gjette med $x = 1$ og gjør utregningen tilstrekkelig ganger får vi $\approx \underline{\underline{1.2771}}$

$\boxed{4}$ Vi kan skrive $\ln x$ som et taylor-polynom i $x = 1$ som:

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - O((x-1)^4$$

Der alle ledd over $(x-1)^4$ er lagt inn under stor-O-notasjon. Setter vi nå inn i den opprinnelige grenseverdien får v:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - O((x-1)^4) - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3}(x-1)^3 - O((x-1)^4)}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{3} - O(x-1)$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$