Innlevering 2, Sofus Buskoven

$\boxed{1}$ Funksjonen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Må være strengt voksende eller strengt avtagende for at den skal ha en inversfunksjon.

$$\cosh(x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Vi ser at den deriverte er strengt voksende for alle x-verdier i definisjonsmengden $D_f[0, \infty)$. Verdimengden V_f til $\cosh(x)$ vil bli definisjonsmengden til inversfunksjonen $\cosh^{-1}(x)$. Vi setter inn øvre og nedre grense i definisjonsmengden og får:

$$\begin{aligned}
\cosh(0) &= \frac{e^0 + e^0}{2} \\
&= \frac{1+1}{2} \\
&= 1 \\
\cosh(\infty) &= \frac{e^\infty + e^{-\infty}}{2} \\
&= \frac{\infty + 0}{2} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Av dette ser vi at vi får en definisjonsmengde til $\cosh^{-1}(x)$ som er $[1, \infty)$

Videre bruker vi regelen for derivasjon av en inversfunksjon til å finne den deriverte av $\cosh^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned}
(\cosh^{-1}(x))' &= \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}(x))} \qquad\qquad \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh(x)) - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Vi setter inn $\sqrt{170}$ i funksjonen og får:

$$\begin{aligned}
(\cosh^{-1}(x))' &= \frac{1}{\sqrt{170 - 1}} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{13}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ a) Integralet fra 17π til 19π blir en periode for grafen, som var på 2π. Siden funksjonen er odde vil $-f(x) = f(-x)$ som vil si at funksjonen fra $0 \to \pi$ vil være likt utformet men negativ speilt om x-aksen som fra $-\pi \to 0$. Fra $-\pi \to \pi$ er også en periode på 2π som vil si at vi får det samme integralet som fra $17\pi \to 19\pi$. Siden funksjonen er odde vil det også bety at

$$\int_{-\pi}^{0} f(x) = -\int_{0}^{\pi} f(x) = -2$$

I oppgaven har vi absoluttverdien som betyr at verdiene på integralene summert blir $2 + 2 = \underline{\underline{4}}$

b)

$$\int_0^{\pi/4} e^{f(2x)} f'(2x)\,dx \qquad\qquad u = f(2x), \frac{du}{dx} = 2f'(2x)$$

Substituerer $f(2x)$ med u

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{x=\pi/4} e^u f'(2x)\,\frac{du}{2f'(2x)} &= \frac{1}{2}[e^u]_{x=0}^{x=\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}[e^{f(2x)}]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}(e^{f(\pi/2)} - e^{f(0)})\end{aligned}$$

Siden vi vet at $f(x)$ er en odde funksjon vil det si at $-f(0) = f(-0)$ og det må være 0. Da får vi:

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}(e-1)}}$$

c) Vi setter

$$h(x) = e^{(f(x))^2}\sin(f(x))$$

Vi splitter opp funksjonen vår i to funksjoner:

$$\begin{aligned}g(x) &= e^{(f(x))^2} \\ j(x) &= \sin(f(x))\end{aligned}$$

Vi vet at $f(x)$ er odde:

$$\begin{aligned}e^{(f(-x))^2} &= e^{(-(f(x))^2} = e^{(f(x))^2} \\ \sin(f(-x)) &= \sin(-f(x)) = -\sin(f(x))\end{aligned}$$

Fra dette ser vi at $g(x)$ er en like funksjon, og at $j(x)$ er en odde funksjon. Dette medfører at $h(x)$ er en odde funksjon. Siden vi integrerer fra $-\pi \to \pi$ og funksjonen vår er odde vil integralet vårt bli $\underline{\underline{0}}$.

$\boxed{3}$ Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{3n+4i} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{3+4\frac{i}{n}} \qquad\qquad \Delta x_i = \frac{1}{n}, x_i = \frac{i}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\Delta x_i\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{3+4x_i}\end{aligned}$$

Vi kjenner igjen dette som en riemannsum. Vi finner vår øvre integrasjonsgrense ved å sette $i = 0$ og får $\frac{0}{n} = 0$ og vår nedre integrasjonsgrense ved $i = n$ og får $\frac{n}{n} = 1$. Dermed kan vi løse integralet:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4}{3+4x}\,dx &= 4\int_0^1 \frac{4}{u}\,\frac{du}{4} \qquad\qquad u = 3+4x, \frac{du}{dx} = 4 \\ &= [\ln u]_{x=0}^{x=1} \\ &= [\ln 3+4x]_0^1 \\ &= \ln 3+4-\ln 3 \\ &= \underline{\underline{\ln\frac{7}{3}}}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Vi har

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(x)\,dx$$

Dette integralet er uegentlig og derfor må vi sette:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\cos(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}[e^{-ax}\sin(x)]_0^b - \int_0^b -ae^{-ax}\sin(x)\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}[e^{-ax}\sin(x)]_0^b - ([ae^{-ax}\sin(x)]_0^b - \int_0^b a^2e^{-ax} - \cos(x)\,dx)\end{aligned}$$

Vi setter vår første og siste funksjon som en likning og får:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\cos(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}[e^{-ax}\sin(x) - ae^{-ax}\cos(x)]_0^b - a^2\int_0^b e^{-ax}\cos(x)\,dx\\ \lim_{b\to\infty}(a^2+1)\int_0^b e^{-ax}\cos(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}[e^{-ax}\sin(x) - ae^{-ax}\cos(x)]_0^b\\ \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\cos(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\frac{[e^{-ax}\sin(x) - ae^{-ax}\cos(x)]_0^b}{(a^2+1)}\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-ab}\sin(b) - ae^{-ab}\cos(b)}{a^2+1} + \frac{ae^0}{a^2+1}\end{aligned}$$

Når $b\to\infty$ går $e^{-\infty}\to 0$ så vi sitter igjen med:

$$\frac{a}{a^2+1} = f(a)$$

For å finne ut når funksjonen har sin største verdi kan vi sette den deriverte lik 0:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \frac{a^2+1-2a^2}{(a^2+1)^2}\\ 0 &= \frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}\end{aligned}$$

Vi får at a må være $\underline{\underline{\pm 1}}$, vi setter inn i $f(a)$:

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{1}{1^2+1}\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$