Układy równań liniowych

Antoni Czuba 201096 Sem. IV Grupa III

Wstęp

Celem niniejszego sprawozdania jest analiza i porównanie trzech metod numerycznych stosowanych do rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz faktoryzacji LU. Rozważane układy równań mają postać:

$$Ax=B$$

Gdzie A jest macierzą pasmową, a bjest wektorem pobudzenia. Tego typu zagadnienia pojawiają się powszechnie w dziedzinach takich jak mechanika, elektronika, termodynamika czy symulacje fizyczne. Metody numeryczne wykorzystywane są do rozwiązywania układów o bardzo dużych rozmiarach, w których rozwiązanie analityczne jest niemożliwe lub nieopłacalne. W ramach projektu wszystkie algorytmy zaimplementowane są samodzielnie z użyciem podstawowych operacji numerycznych.

Opis zastosowanych metod rozwiązywania układów równań liniowych

Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest iteracyjną metodą rozwiązywania układów równań liniowych, polegającą na przybliżaniu rozwiązania na podstawie poprzedniego wektora rozwiązań. W każdej iteracji nowa wartość niewiadomej $x_i^{(k+1)}$ obliczana jest wyłącznie na podstawie wartości $x_j^{(k)}$ z poprzedniej iteracji:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Metoda ta jest prosta do zaimplementowania, lecz zbieżność może być wolna, zwłaszcza przy macierzach o słabej dominacji diagonalnej. Zaletą metody Jacobiego jest możliwość łatwej równoległej implementacji.

Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla również jest iteracyjna, lecz różni się od metody Jacobiego tym, że wykorzystuje najnowsze dostępne wartości niewiadomych w bieżącej iteracji. Dla każdej niewiadomej:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Dzięki użyciu aktualizowanych danych, metoda ta zwykle szybciej zbiega do rozwiązania niż metoda Jacobiego. Wymaga jednak bardziej sekwencyjnego przetwarzania, co ogranicza możliwości równoległej implementacji.

Metoda faktoryzacji LU

Metoda LU jest metodą bezpośrednią, która polega na rozkładzie macierzy A na iloczyn dwóch macierzy: dolnotrójkątnej L i górnotrójkątnej U, tak że:

$$A=LU$$

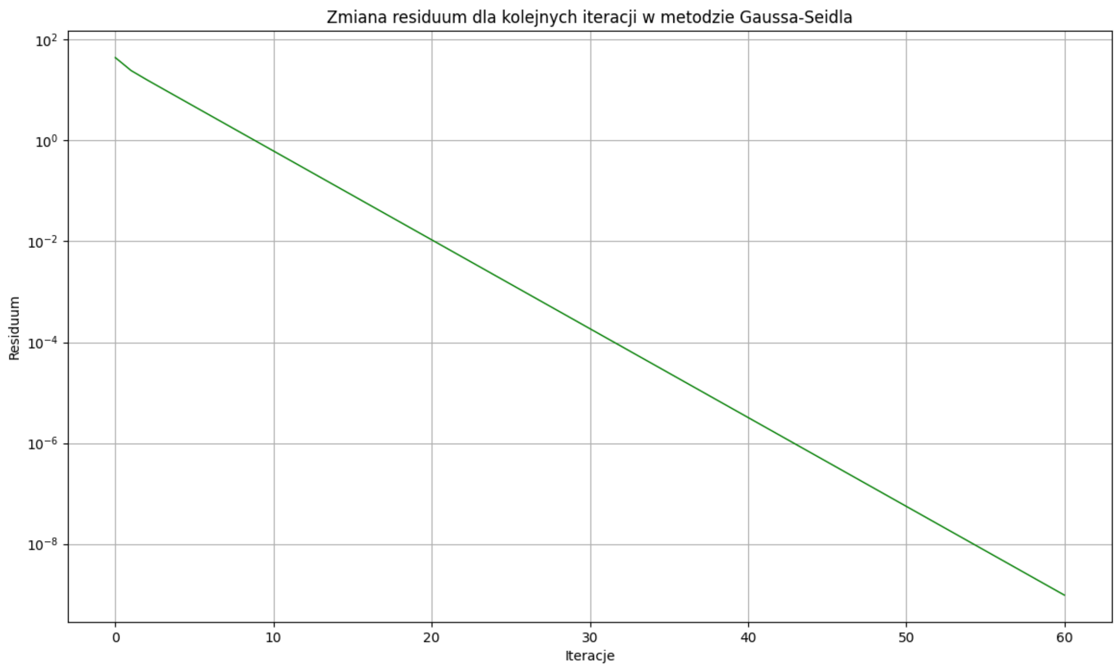
Po dokonaniu rozkładu, rozwiązanie układu Ax=b sprowadza się do rozwiązania dwóch prostych układów równań:

1. Ly=b – rozwiązywane metodą podstawiania w przód.

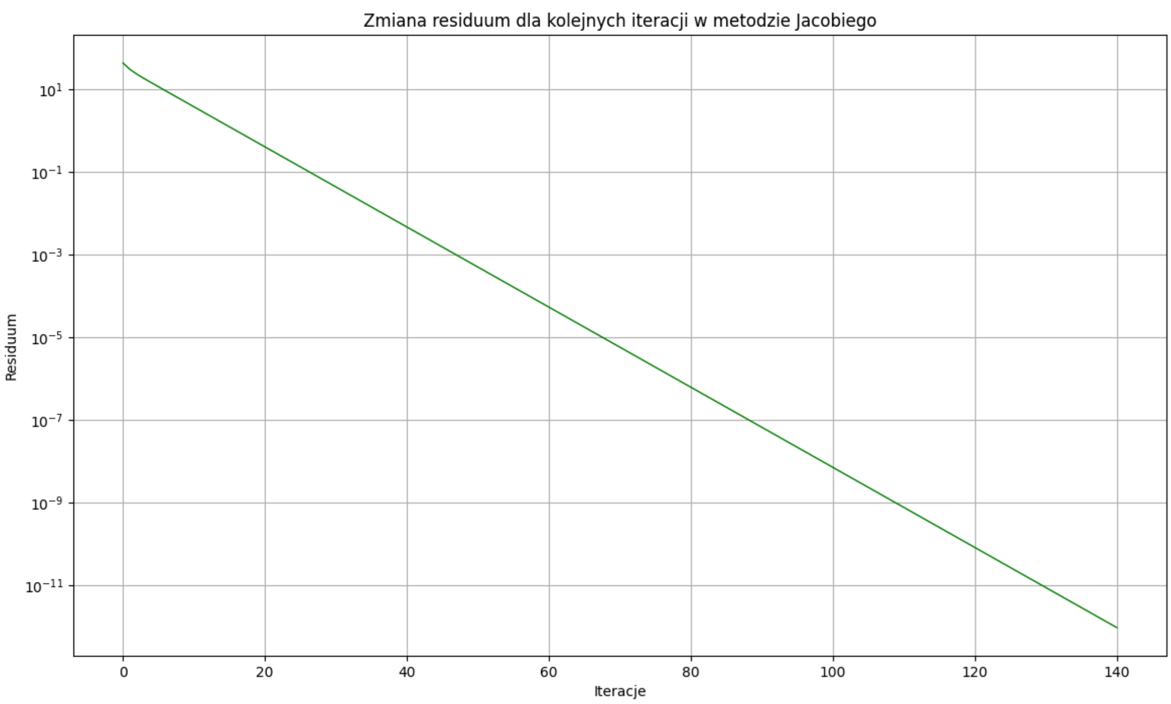
2. Ux=y – rozwiązywane metodą podstawiania wstecz.

Metoda ta jest dokładniejsza od metod iteracyjnych i nie wymaga ustalania kryteriów zbieżności, lecz jej złożoność obliczeniowa może być większa dla bardzo dużych układów równań.

Analiza przykładów



Gauss-Seidl: Ilość Iteracji: 60, czas: 0.16678190231323242

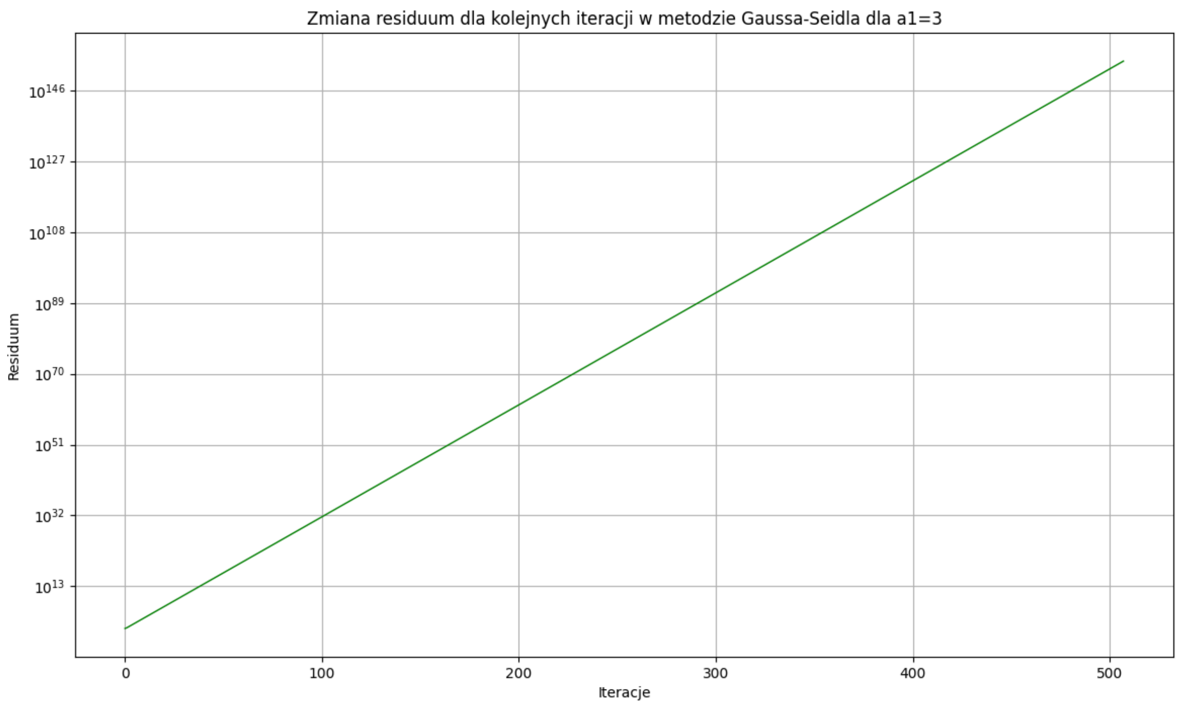


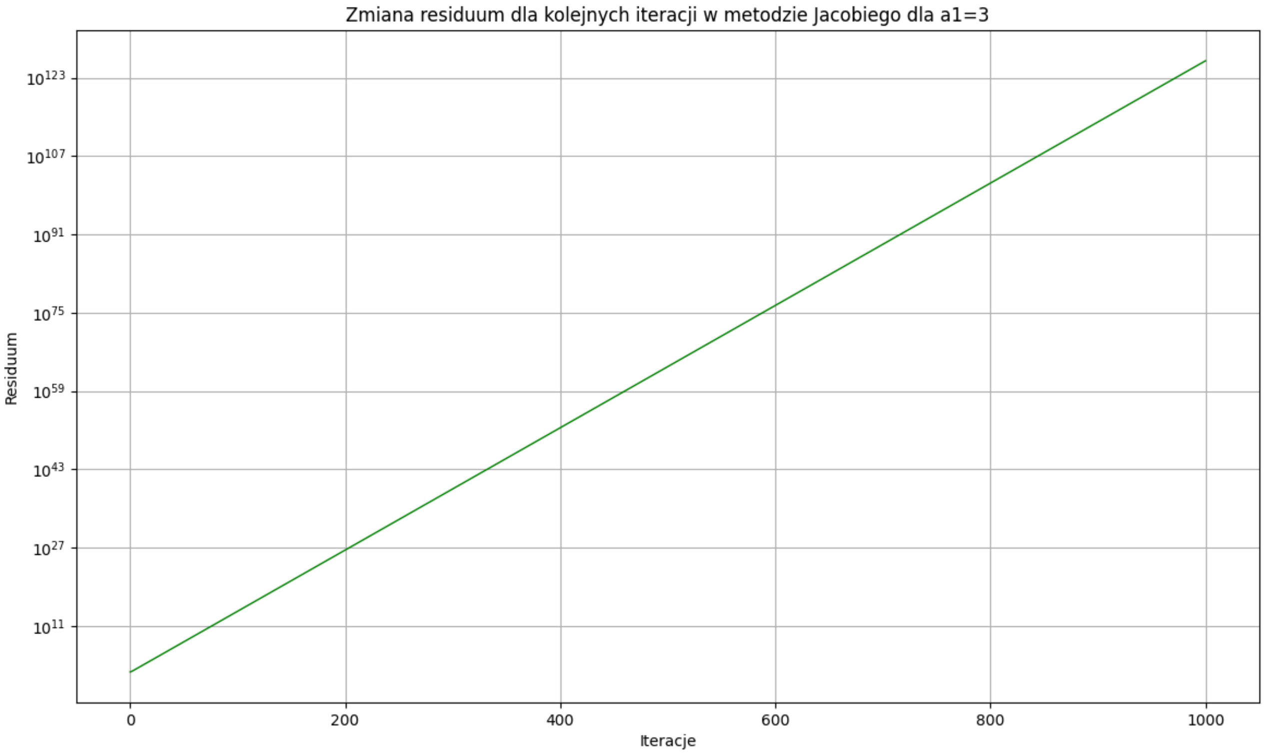
Jacobi: Ilość Iteracji: 140, czas: 0.4853332042694092 s

Obydwa wykresy ilustrują logarytmiczny spadek normy residuum w funkcji liczby iteracji dla metod Gaussa-Seidla oraz Jacobiego, stosowanych do rozwiązania układu równań liniowych z macierzą o silnie dominującej przekątnej (wartości 5 na głównej diagonali i -1 na sąsiednich pod- i nad-diagonalach). Taka struktura macierzy gwarantuje zbieżność obu metod, co jest widoczne na wykresach jako monotoniczne dążenie residuum do zera. Z wykresów i podanych danych wynika, że metoda Gaussa-Seidla charakteryzuje się szybszą zbieżnością na iterację, osiągając zadaną dokładność w 60 iteracjach, podczas gdy metoda Jacobiego potrzebowała ich 140. Czasowo pierwsza metoda jest znacznie szybsza, wszystko dzięki używaniu danych aktualizowanych na bieżąco z obecnego rozwiązania.

LU: Norma residuum: 2.651553367940165e-15, czas: 5.002772331237793

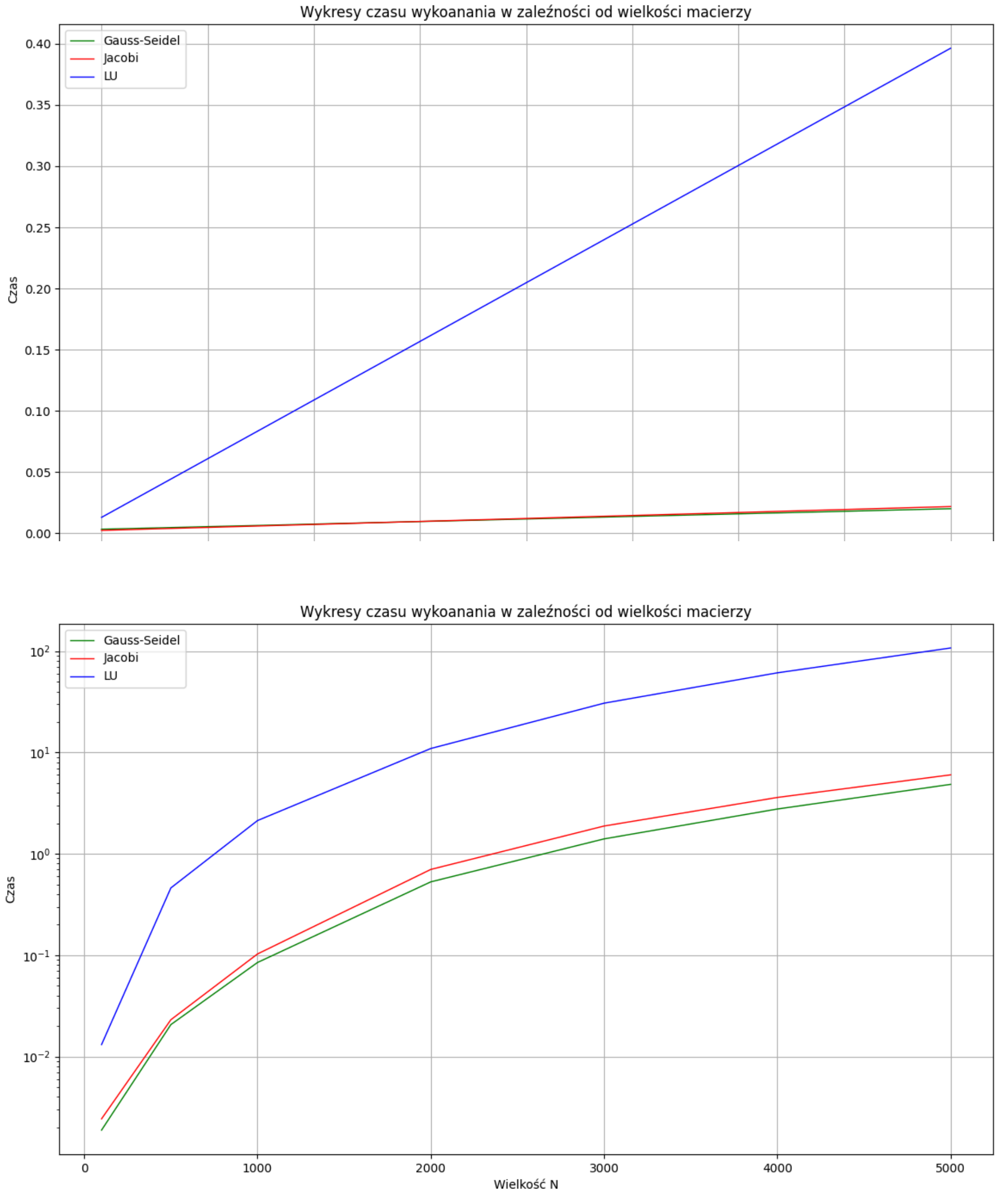
Dla kontrastu metoda faktoryzacji LU mimo że znacznie wolniejsza osiągnęła wyższą dokładność i zrobiła to właściwie deterministycznie, nie musiała się zbiegać lecz od razu dała bardzo dokładny wynik więc gdy zależy nam na niezawodności oraz dokładności faktoryzacja LU jest bardzo dobrym wyborem.





Obie metody nie zbiegają się dla macierzy w której a_1 = 3, a_2 = -1 oraz a_3 = -1, ponieważ zastosowane algorytmy nie działają dla macierzy które nie są dominujące diagonalnie.

Zależności czasu wyznaczenia rozwiązania



Faktoryzacja LU jest zdecydowanie najwolniejszą metodą z 3 wybranych czas wykonywania rośnie więc wykładniczo, można dostrzec nieznaczną ale zauważalną różnice w szybkości miedzy metodą Gaussa-Seidla a metodą Jacobiego oczywiście na korzyść tej pierwszej. Różnica nie jest przypadkowa wynika z już wcześniej wymienionej optymalizacji która występuje w metodzie Gaussa-Seidla.

Wnioski

Analiza wykazała, że metoda Gaussa-Seidla generalnie oferuje szybszą zbieżność i krótszy czas rozwiązania niż metoda Jacobiego dla macierzy spełniających warunki zbieżności, takie jak silna dominacja diagonalna. Przewaga Gaussa-Seidla wynika z wykorzystywania na bieżąco aktualizowanych wartości niewiadomych w tej samej iteracji. Należy jednak pamiętać, że obie metody iteracyjne mogą nie zbiegać, jeśli macierz układu nie posiada odpowiednich właściwości.

W kontraście, faktoryzacja LU, jako metoda bezpośrednia, gwarantuje wysoką dokładność i niezawodność, dostarczając precyzyjne rozwiązanie niezależnie od kryteriów zbieżności. Jej główną wadą jest jednak wyższa złożoność obliczeniowa, co przekłada się na dłuższy czas wykonania, szczególnie dla dużych układów. Ostatecznie, wybór optymalnej metody jest kompromisem i zależy od specyfiki problemu: Gauss-Seidl jest preferowany dla szybkich rozwiązań iteracyjnych przy spełnionych warunkach zbieżności, podczas gdy LU jest wyborem dla maksymalnej dokładności i pewności wyniku, mimo potencjalnie dłuższego czasu obliczeń.