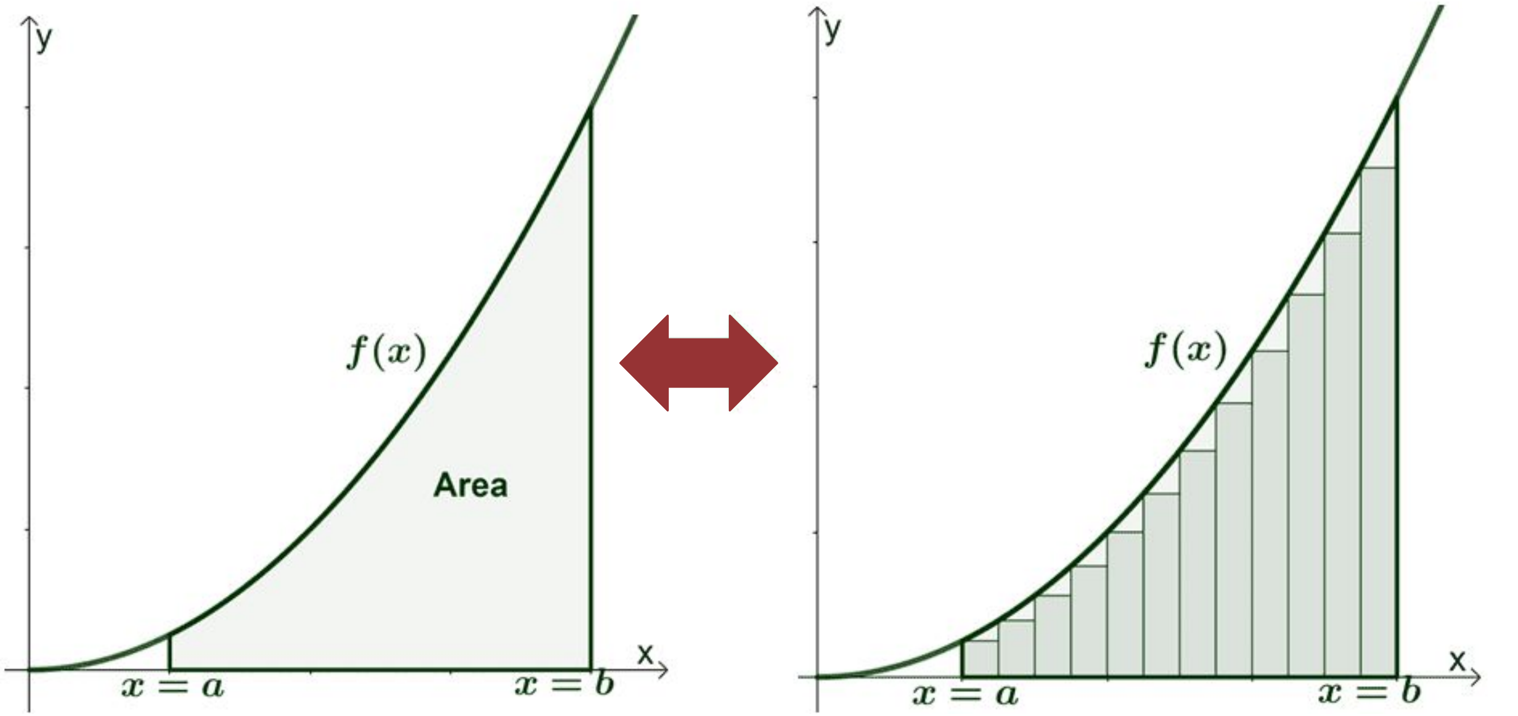
Statistiques et probabilités
Cours n°4

Guillaume Postic

Université Paris-Saclay, Univ. Evry
Département informatique

Master 1 MIAGE - 2023/2024

Rappels



Rappels

- La somme de Riemann S de f sur $[a, b]$ est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

- Si le **pas de la subdivision** tend vers zéro (*i.e.* si $n \longrightarrow +\infty$), alors la somme converge vers :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Variable aléatoire continue

- Intervalle de valeurs continu :
  - e.g. [0, 1], [a, b], [0, ∞), (−∞, ∞)

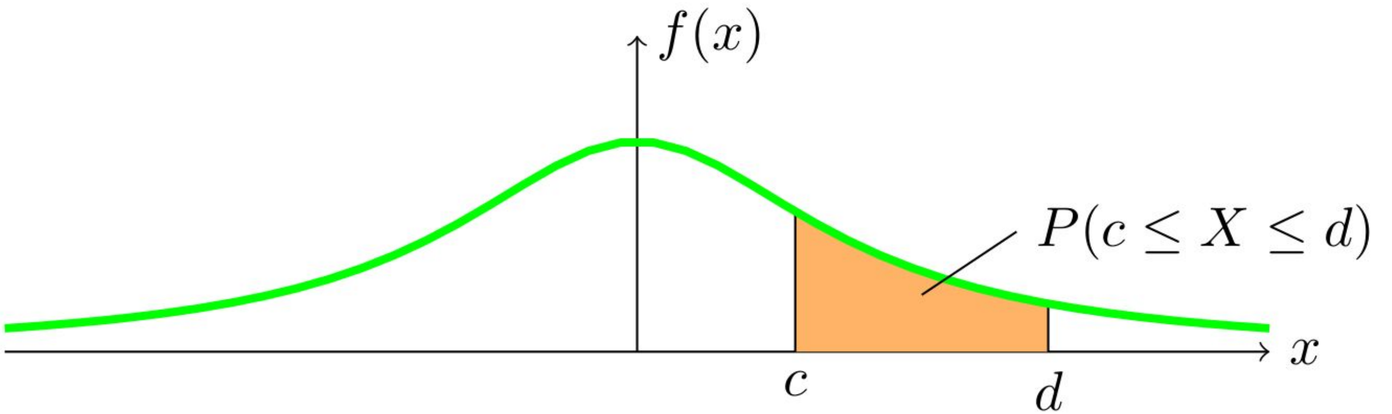
- Fonction de densité ou **densité de probabilité**

$$f(x) \geq 0; \quad P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

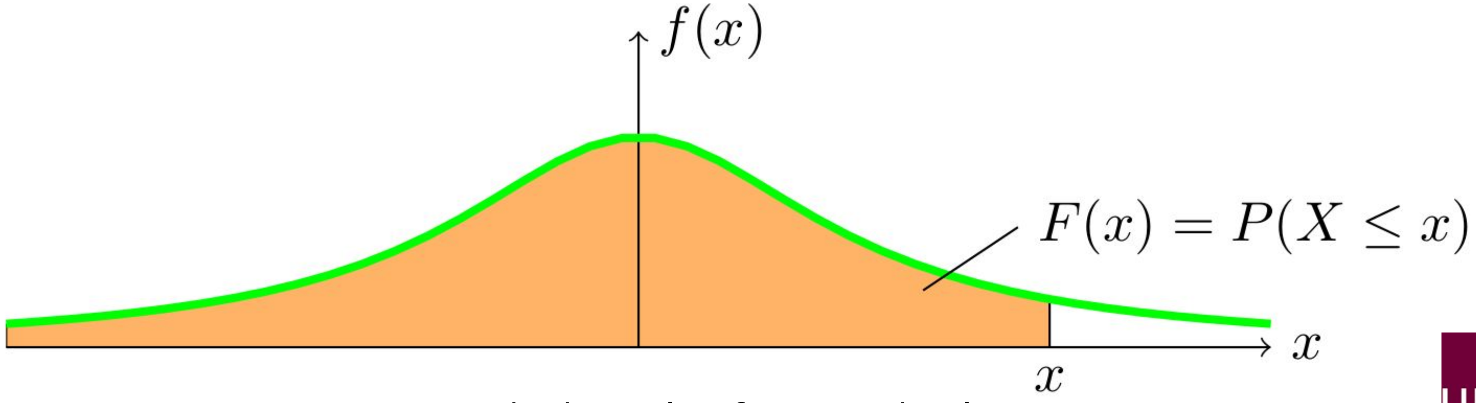
- Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Variable aléatoire continue



Fonction de densité et probabilité

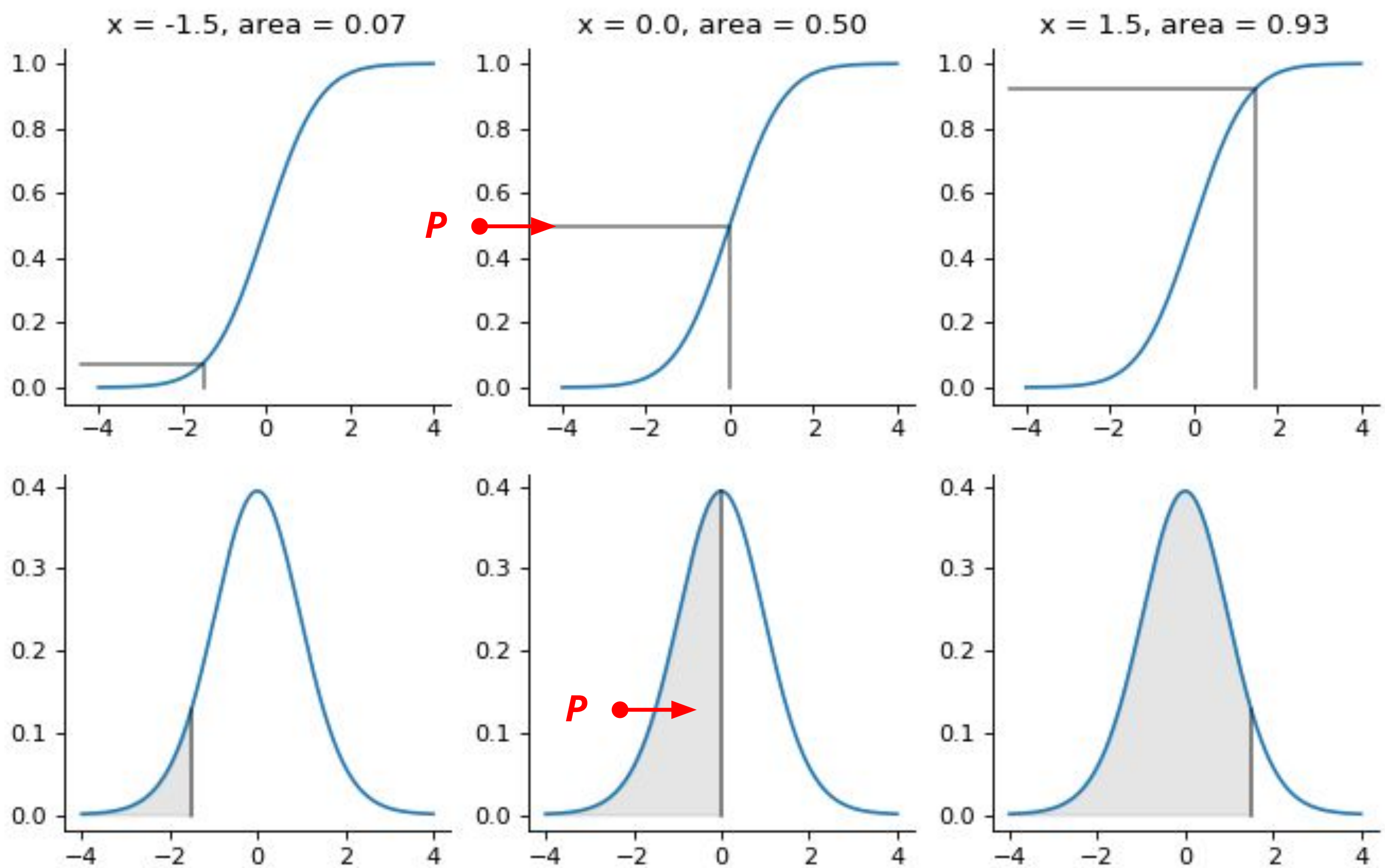


Fonction de densité et fonction de répartition

Fonction de répartition

Fonction de répartition
$F\,(x)$

Fonction de densité
$f\,(x)$



Propriétés de la fonction de répartition

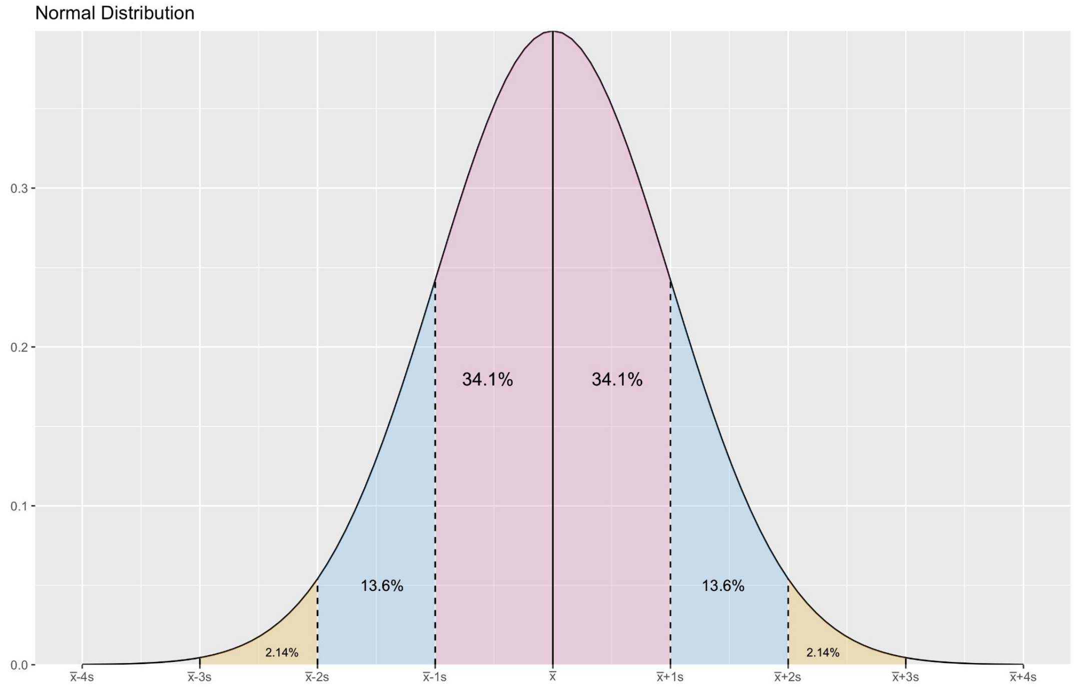
NB : également valables pour les variables aléatoires discrètes

- (Définition) $F(x) = P(X \leq x)$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Jamais décroissante
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P(c < X \leq d) = F(d) - F(c)$
- $F'(x) = f(x)$

Propriétés de la fonction de répartition

Loi continue : $\int f\ (x)\ dx = 1$

Loi discrète : $\Sigma\ p(x) = 1$



Espérance

X continue sur $[a, b]$, avec la fonction de densité $f(x)$:

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\, dx$$

X discrète, de valeurs $x_1, \ldots, x_n$, avec la fonction de masse $p(x_i)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Variance et écart-type

Pour toute variable aléatoire X de moyenne μ

$$\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2), \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

X continue sur $[a, b]$, avec la fonction de densité $f(x)$:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

X discrète, de valeurs $x_1, \ldots, x_n$, avec la fonction de masse $p(x_i)$:

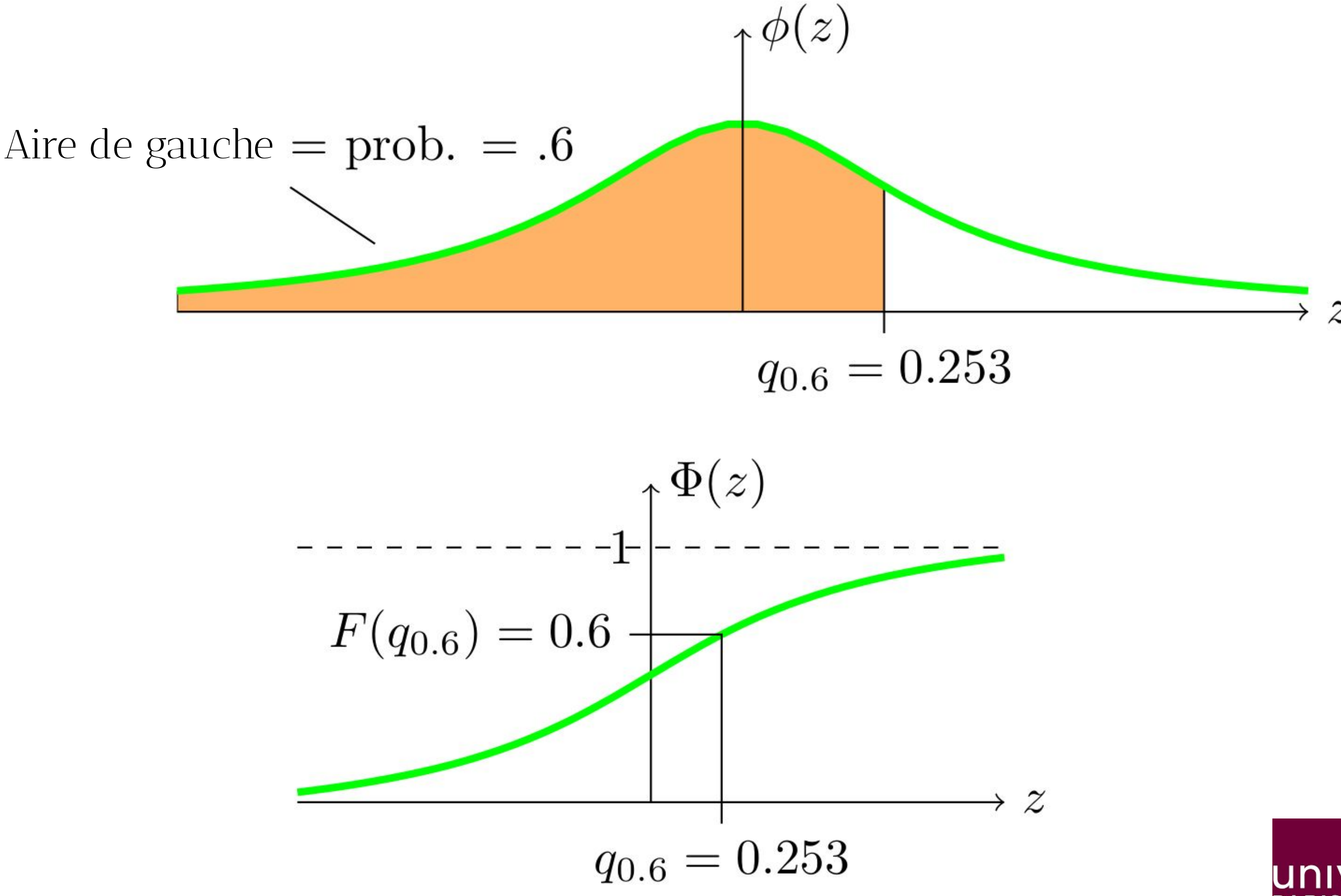
$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 p(x_i).$$

Quantiles (1)

- Les quantiles sont les valeurs qui divisent un jeu de données en intervalles de probabilités égales.
  - Il y a donc un quantile de moins que le nombre de groupes créés. Par exemple, les quartiles sont les trois quantiles qui divisent un ensemble de données en quatre groupes de même probabilité.

- La **médiane** (second quartile) sépare le jeu de données en deux groupes de même probabilité.
  - C'est un **indicateur de tendance centrale**

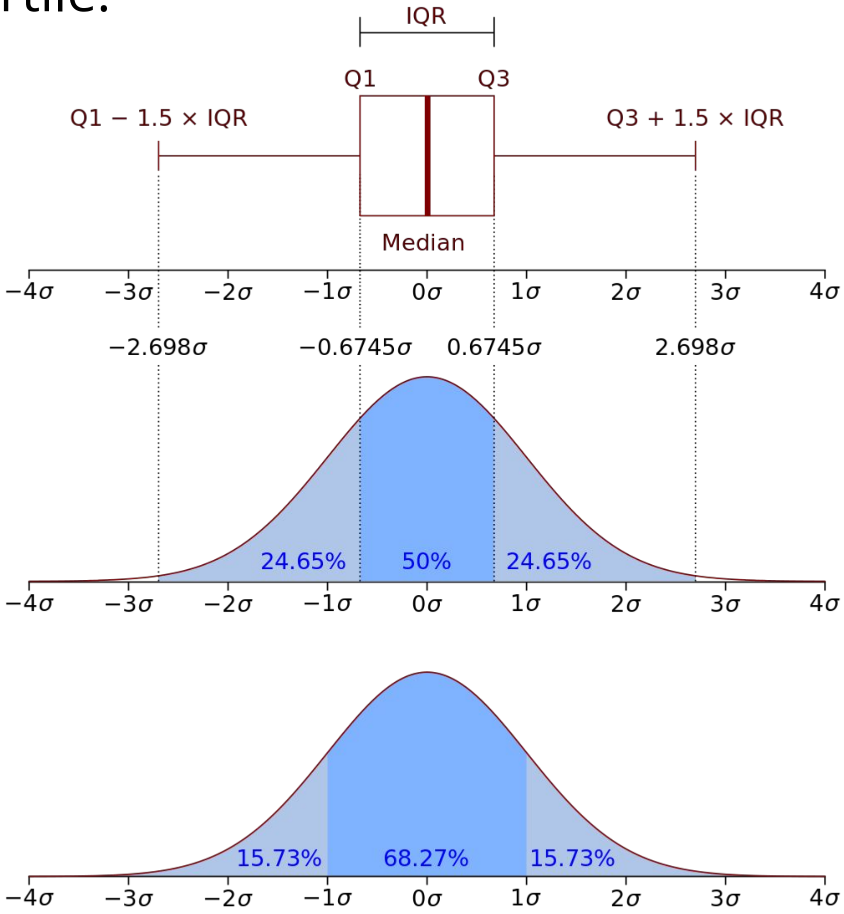
Quantiles (2)



Écart interquartile

Indicateur de dispersion qui s'obtient en faisant la différence entre le troisième et le premier quartile.

Représentation en « boîte à moustaches » (*box plot*)



Distributions continues (1)

Loi exponentielle

Loi de probabilité continue qui modélise le temps ***x*** s'écoulant entre deux occurrences d'un **processus de Poisson** de paramètre **λ**, nombre moyen d'occurrences dans un intervalle de temps fixé. 💡 **Analogue continue de la loi géométrique**

Fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

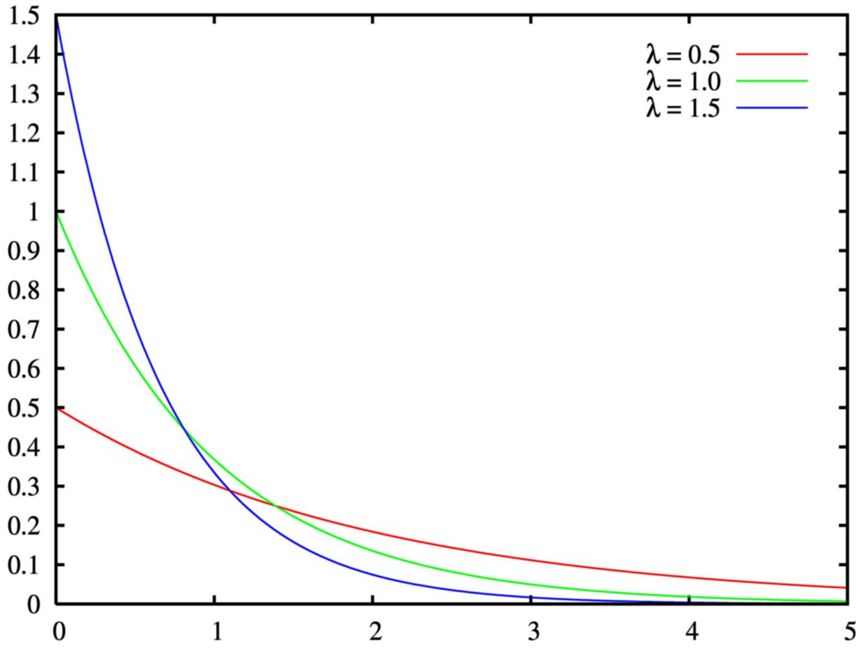
Espérance : $1/\lambda$

Variance : $1/\lambda^2$

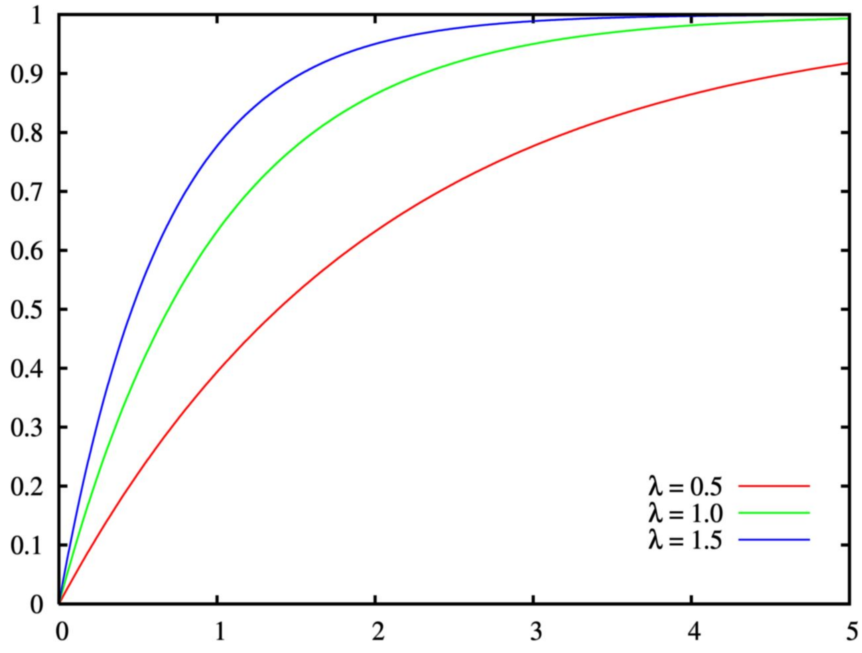
Distributions continues (1)

Loi exponentielle

$$X \sim \exp(\lambda)$$



Fonction de densité



Fonction de répartition

Distributions continues (2)

Lois uniformes continues

Les lois uniformes continues forment une famille de lois de probabilité à densité caractérisées par la propriété suivante : tous les intervalles de même longueur inclus dans le support de la loi ont la même probabilité.

Fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pour } a \leq x < b \\ 1 & \text{pour } x \geq b \end{cases}$$

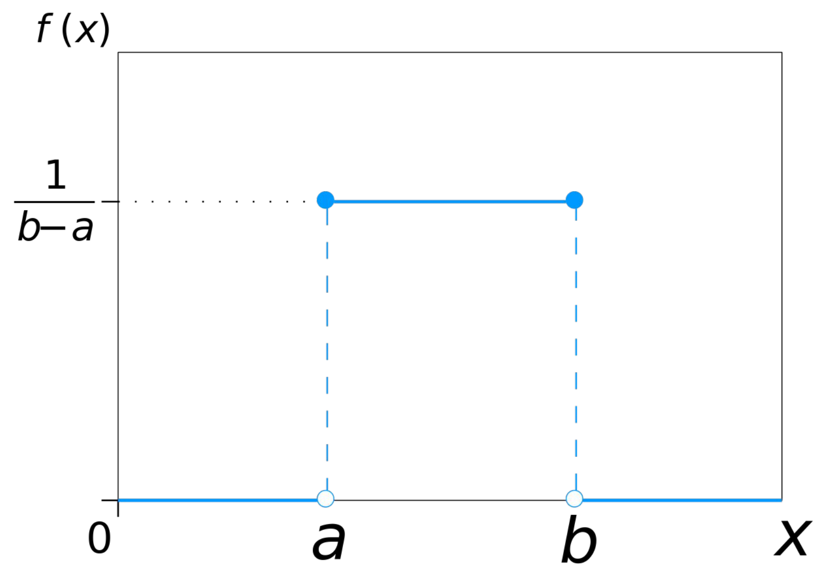
Espérance : (a+b)/2

Variance : $(b-a)^2/12$

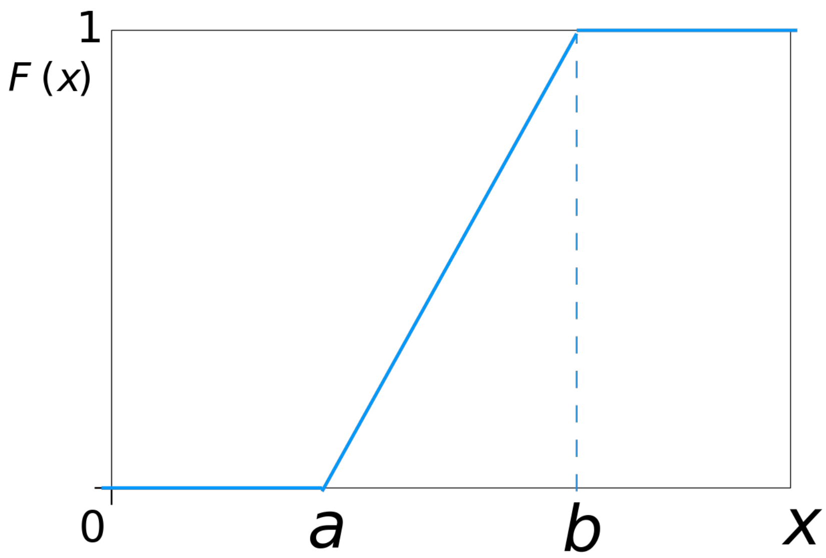
Distributions continues (2)

Lois uniformes continues

$$X \sim U(a, b)$$



Fonction de densité



Fonction de répartition

Distributions continues (3)

Loi normale

- Également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss
- Utilisées pour modéliser des **phénomènes naturels** issus de plusieurs événements aléatoires

Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Fonction de répartition :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

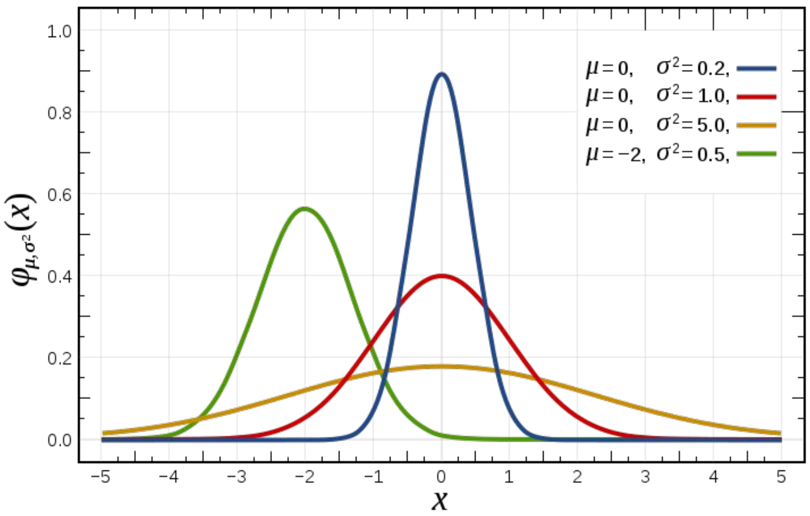
Espérance : μ

Variance : σ^2

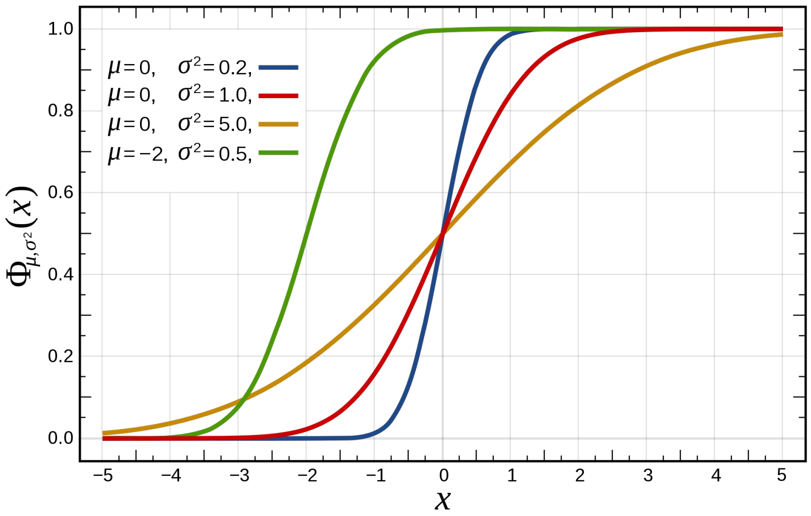
Distributions continues (3)

Loi normale

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



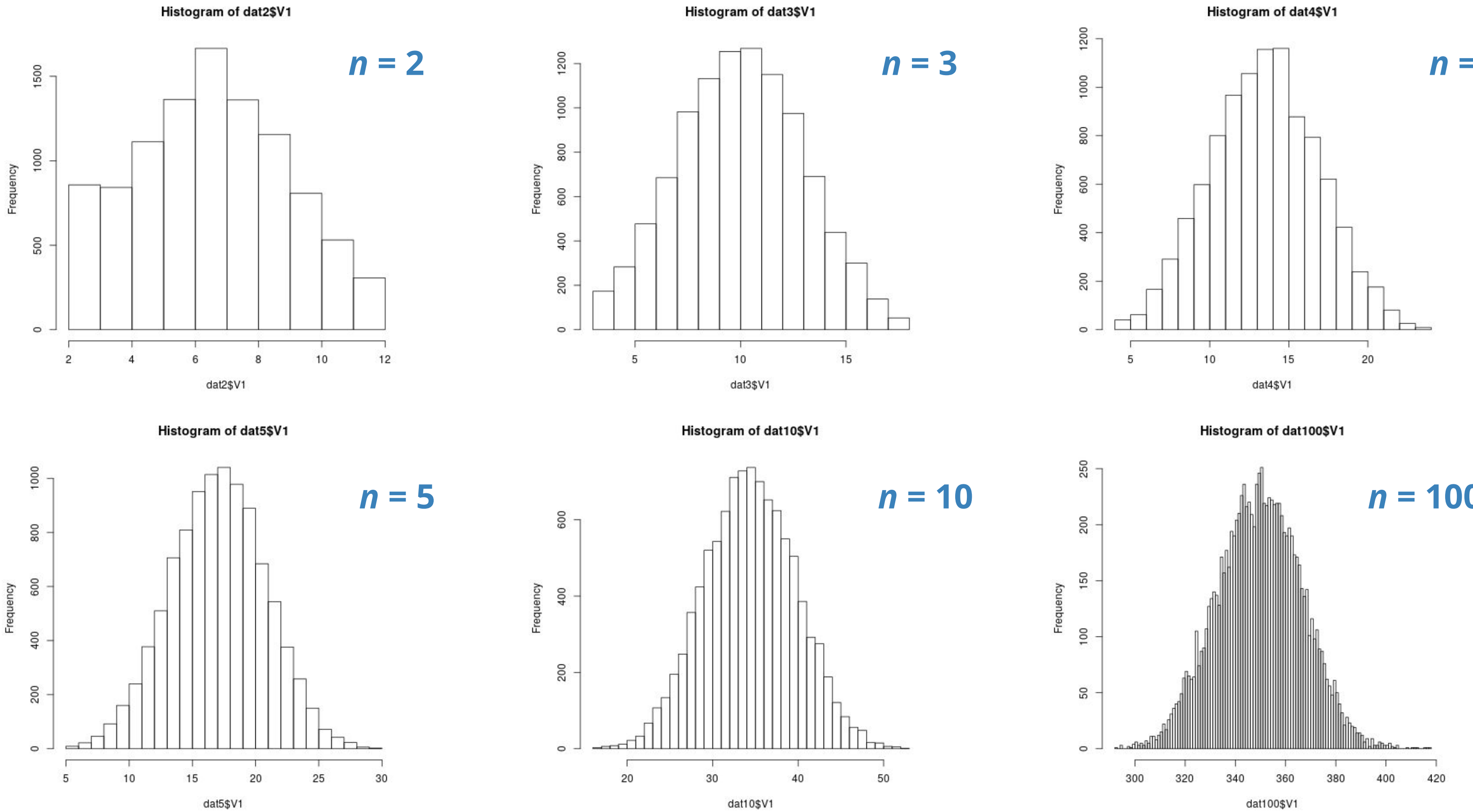
Fonction de densité



Fonction de répartition

Simulations

On lance 10 000 fois *n* dés équilibrés à 6 faces ; à chaque lancer, on calcule **la somme *S* des valeurs des *n* dés**.



Théorème limite central

Soit n **variables aléatoires « i. i. d. »**,

- Indépendantes
- Identiquement distribuées

Soit S, la somme de leurs valeurs.

Quand $n \to +\infty$, la loi de probabilité de S **converge** vers une loi normale de paramètres $\mathrm{E}[S]$, $\mathbf{Var}(S)$.

En pratique, **l'approximation** en une loi normale est souvent faite à partir de $n > 20$ ou 30.

Loi des grands nombres

- Note : un autre « théorème limite »
- La **moyenne empirique (calculée sur les valeurs d'un échantillon)** converge vers l'**espérance (moyenne de la population)** lorsque la taille de l'échantillon augmente.

Soit $\overline{X}_n$, moyenne d'un échantillon de taille *n*.
Soit μ, moyenne de la population.

- **Loi faible** (convergence en probabilité)

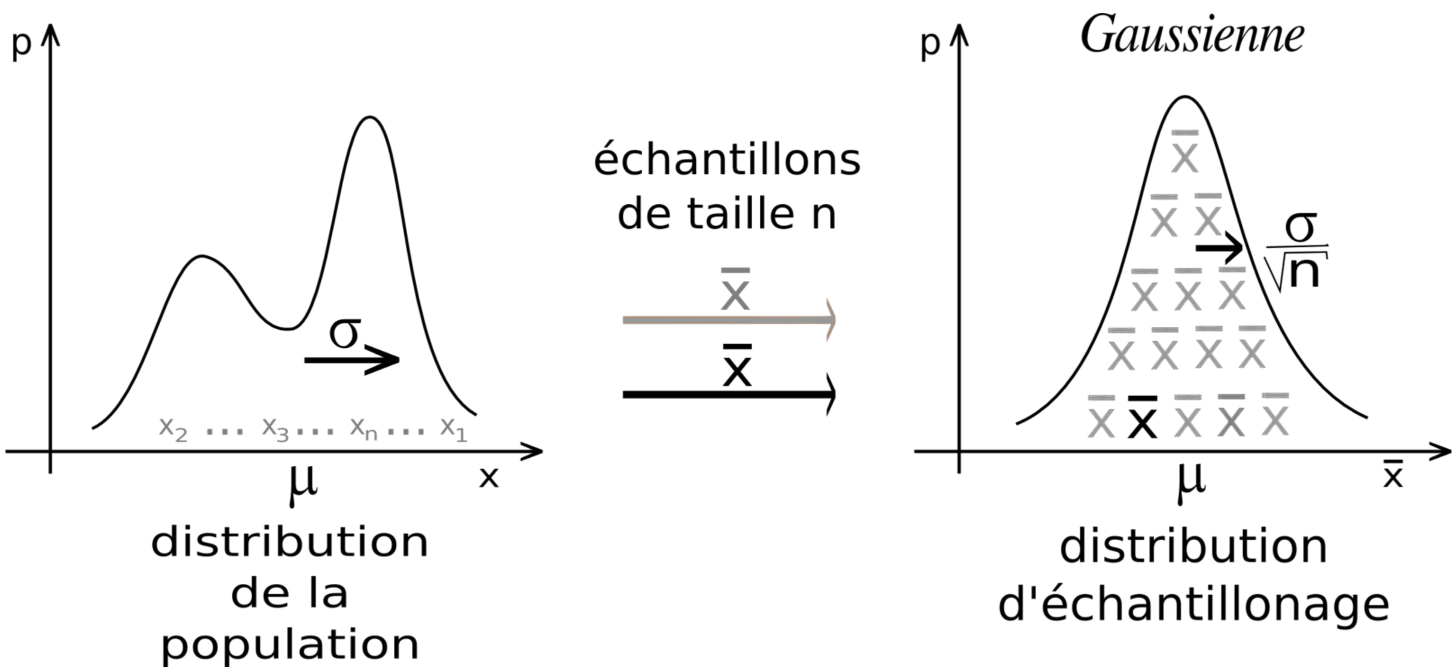
$$\lim_{n\to\infty} = P(|\overline{X}_n - \mu \,| > \varepsilon) = 0$$

- **Loi forte**

$$P(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu) = 1$$

Statistiques inférentielles

Le TLC **s'applique donc à la distribution des moyennes d'échantillons** de tailles égales et tirés indépendamment.
(ces moyennes étant des sommes, toutes divisées par la même valeur)



Erreur type de la moyenne

Standard error of the mean (SEM) 🆚 *Standard deviation* (SD)

L'erreur type de la moyenne est une mesure de la dispersion des moyennes des tirages autour de la moyenne de la population. **On la notera ici $\sigma_{\bar{x}}$**

Si l'écart type σ de la population est connu **(c'est rare !)** :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sinon, on utilise un estimateur s de σ , calculé comme l'écart type de l'échantillon (cf. biais et correction de Bessel) :

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Remarques

- Le TLC ne s'applique pas si la variance est
  - indéfinie (p. ex. loi de Cauchy)
  - infinie (p. ex. loi de Pareto)

- La loi binomiale (discrète) peut être approximée par une loi normale (continue)
  - Il est également possible d'approximer une loi continue par une loi discrète (cf. discrétisation et histogrammes)

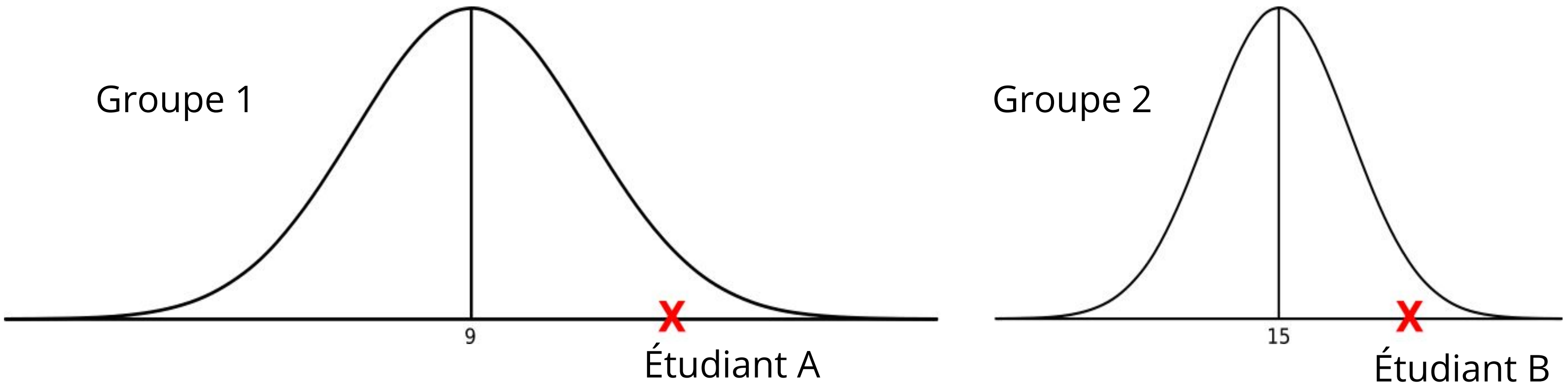
- La **convolution** de n densités tend vers la densité normale quand $n \to +\infty$ (cf. « théorème local limite »)

- Généralisation du TLC : suppression de l'hypothèse que les variables sont de même loi (cf. conditions de Liapounov et Lindeberg)

Qui est le meilleur ? 🤓🎓🥇

Deux étudiants veulent savoir qui est le meilleur, en comparant leurs notes obtenues à l’UE de statistiques. Ils appartiennent à deux groupes de TD différents, chacun noté par un enseignant différent.

- L’étudiant A a eu 15/20, dans le groupe 1, où la moyenne est de 9 et l’écart-type est de 5.
- L’étudiant B a eu 19/20, dans le groupe 2, où la moyenne est de 15 et l’écart-type est de 3.



Normalisation

- Redimensionner les variables quantitatives pour qu'elles soient comparables sur une **échelle commune**
  - *Min-max scaling*

$$x' = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

  - *Mean normalization*

$$x' = \frac{x - \bar{x}}{\max(x) - \min(x)}$$

  - Transformation en (per)centiles

Standardisation

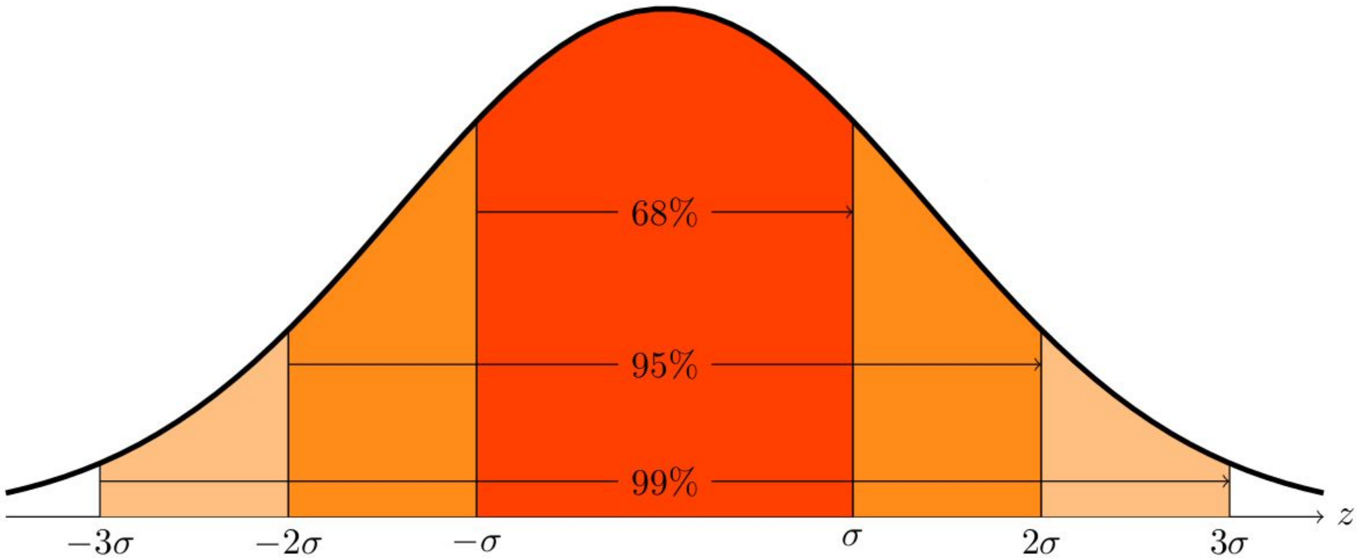
- Ou « normalisation standard »
- Transformation en une variable z
  - **centrée** : soustraction de la moyenne μ
  - **réduite** : division par l'écart type σ (*standard deviation*)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Ainsi, la distribution de z aura pour paramètres : $\mu = 0$ et $\sigma = 1$
- La variable standardisée est appelée **z-score** ou cote Z
- **Un z-score égal à a signifie que la donnée x s'éloigne de la moyenne de a écarts-types** (donc $Z < 0$ si $x < \mu$)
- Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, alors $Z \sim N(0, 1)$

Loi normale centrée réduite

Lecture de la loi normale standardisée ou **fonction de distribution Z** :



1. $P(-1 < Z < 1)$ is
(a) 0.025 (b) 0.16 (c) 0.68 (d) 0.84 (e) 0.95

2. $P(Z > 2)$
(a) 0.025 (b) 0.16 (c) 0.68 (d) 0.84 (e) 0.95

Qui est le meilleur ? 🤓🎓🥇

Réponse : Les notes centrées réduites sont directement comparables. L’étudiant A a une note standardisée de 1,20, inférieure à celle de l’étudiant B, 1,33.

Cas d'une loi non-connue

Soit $Z = (x-\mu)/\sigma > 2$

- si $X \sim N(\mu, \sigma)$, alors $p(X > x) = 2{,}5\%$ (environ)
- si $X \sim$ loi non-connue (de moyenne μ et variance σ^2)
  - **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : donne la probabilité « dans le pire des cas »
    - $p(X > x) < 1/Z^2 = 25\%$
    - $p(X < x) > 1/Z^2 = 75\%$

Distributions continues (4)

Loi du χ^2

- Prononcé « khi carré » ou « khi-deux »
- Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ sont des VA suivant la **loi normale standardisée**, alors la **somme de leurs carrés**

$$X = Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2} + \ldots + Z_k^{\ 2}$$

suit une loi du χ^2 avec **k degrés de liberté (ddl)**

Fonction de densité :

$$\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\, x^{k/2-1} e^{-x/2}$$

Fonction de répartition :

$$\frac{1}{\Gamma(k/2)}\, \gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

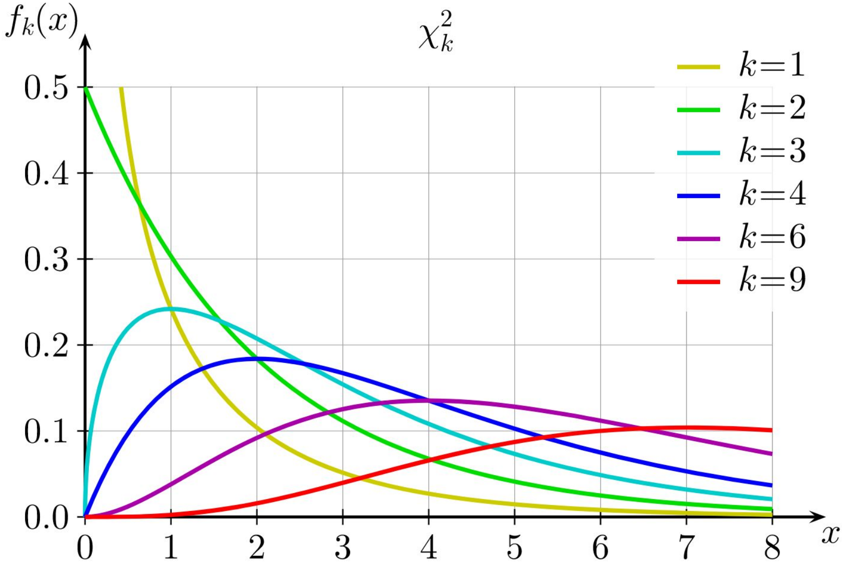
Espérance : *k*

Variance : *2k*

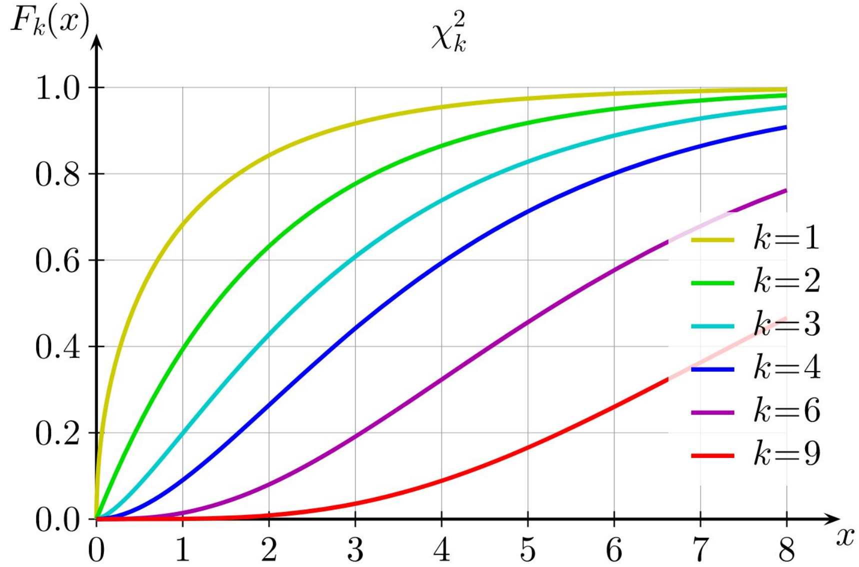
Distributions continues (4)

Loi du χ^2

$$\mathbf{X} \sim \chi^2(\boldsymbol{k})$$

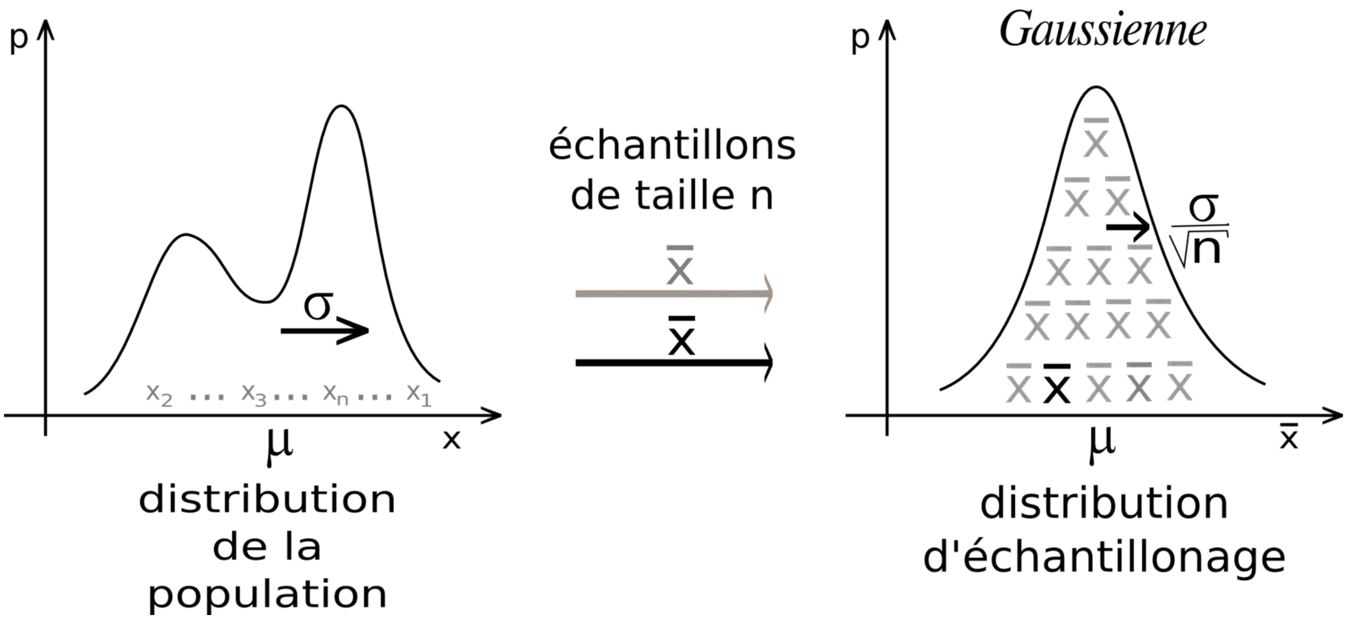


Fonction de densité



Fonction de répartition

Standardisation de x̄ (TLC)



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathbf{N(0,1)}$$

Sauf exception, σ est n'est pas connu.

On utilise alors l'écart type de l'échantillon s comme estimateur de σ.

Mais s est une variable aléatoire (alors que σ est une constante).

Cela définit une nouvelle VA T, qui suit une loi de Student à n - 1 ddl

Distributions continues (5)

Loi de Student

- Soit une VA U, tq $U = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ $\boldsymbol{U \sim \chi^2(n-1)}$
- Soit S^2, l'estimateur de la variance, tq $S^2 = \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\text{Estimateur « sans biais »}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
- On peut donc écrire : $S^2 / \sigma^2 = U / (n-1)$
- $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\frac{1}{S/\sigma} = \frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}}$
- La loi de Student fait donc intervenir le quotient entre
  - une variable suivant une loi normale centrée réduite
  - et la racine carrée d'une variable distribuée suivant la loi du χ^2

Distributions continues (5)

Loi de Student

- Remplace la loi normale centrée réduite si :
  - La variance de la population n'est pas connue
  - L'échantillon est petit (*n* < 20 ou 30)
    - Le TLC ne peut pas s'appliquer

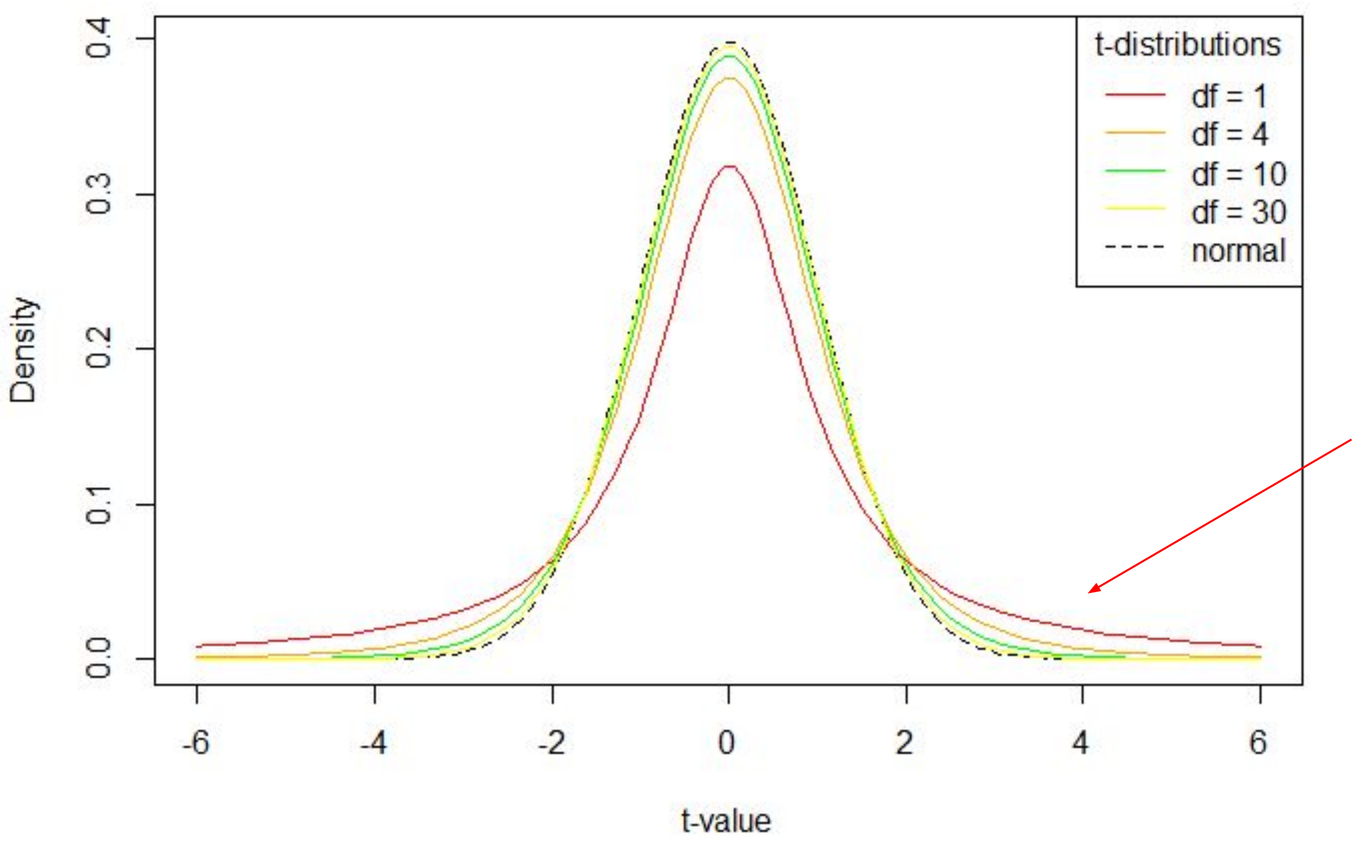
- Tend vers la loi normale centrée réduite quand $k = n - 1$ augmente

- Espérance : indéterminée pour $k \leq 1$; 0 pour $k > 1$
- Variance : indéterminée pour $k \leq 1$; $1 < k \leq 2$: $+\infty$; k / $(k - 2)$ pour $k > 2$

- Apparentée aux lois de Cauchy et Fisher

Distributions continues (5)

Loi de Student



- Plus grande étendue des données
- Plus grande vraisemblance pour les valeurs extrêmes
- Mieux adaptée aux petits échantillons

Distributions continues (5)

Loi de Student

***t* Table**

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$
one-tail	**0.50**	**0.25**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**
two-tails	**1.00**	**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**
df						
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	$\boxed{2.920}$
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812