Université d'Evry val d'Essonne
Master MIAGE

TD 3 - Probabilités - corrections

Exercice 1 - Loi Normale

(a) On sait que E(X) = a.E(Z) + b = <u>b</u>. Puis V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) + V(b) = a².V(Z) + 0 = <u>a²</u> .

(b) $F_X(x) = p(X \leq x) = p(\ aZ+b \leq x\ ) = p(\ Z \leq \frac{x-b}{a}\ ) = \Phi(\frac{x-b}{a})$

En dérivant par rapport à x,

$f_X(x) = F_X'(x) = (\ \Phi(\ \frac{1}{a}.x - \frac{b}{a})\ )' = (\ \frac{1}{a}.x - \frac{b}{a})' \times \Phi'(\ \frac{1}{a}.x - \frac{b}{a}) = \frac{1}{a}\varphi(\frac{x-b}{a}) = \frac{e^{-(x-b)^2/(2a^2)}}{a\sqrt{2\pi}}$

(c) On voit que $f_X(x)$ est la distribution de probabilité d'une loi normale de paramètres b, a². Donc $X \rightarrow N(b,a^2)$.

(d) On vient de montrer que si Z est une loi centrée réduite, alors σZ + µ est une loi N(µ, σ²). On a aussi montré en (a) que E(σZ+µ) = µ et V(σZ+µ) = σ².

Donc si $X \rightarrow N(b,a^2)$, E(X) = b et V(X) = a², alors l'espérance de N(µ,σ) est µ et la variance de N(µ,σ) est σ².

Exercice 2 - Temps restant à vivre

(a) $p(X \geq x) = 1 - p(X<x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}.dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x = 1 - \left[-e^{-\lambda x} + e^{-\lambda \times 0}\right] = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$

(b) $T \geq x$ si $X_1 \geq x$ ET $X_2 \geq x$. Donc $p(T \geq x) = p(X_1 \geq x \cap X_2 \geq x)$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, $p(T \geq x) = p(X_1 \geq x) * p(X_2 \geq x) = e^{-2\lambda x}$.

Du coup, $F_T(x) = p(\ T \leq x\ ) = 1 - p(T \geq x) = 1 - e^{-2\lambda x}$.

Dérivons par rapport à x, $f_T(x) = 2\lambda e^{-2\lambda x}$.

(c) Appelons X_1, X_2 et X_3 les durées de vie des trois ampoules. Appelons $T = \min(X_1, X_2, X_3)$

$X_1 \rightarrow exp(2)$ $\quad$ $X_2 \rightarrow exp(3)$ $\quad$ $X_3 \rightarrow exp(5)$

En procédant comme en (b), $p(T \geq x) = p(X_1 \geq x) * p(X_2 \geq x) * p(X_3 \geq x) = e^{-10x}$.

Donc $F_T(x) = p(\ T \leq x\ ) = 1 - e^{-10x}$. Dérivons par rapport à t, $f_T(x) = 10e^{-10x}$.

On remarque que c'est une loi exponentielle de paramètre λ = 10. Donc $T \rightarrow exp(10)$, et E(T) = 1/10 = 0.1 années.

Exercice 3 - Douloureuse jointure

(a) On sait que le “volume” sous la surface jointe de la distribution de probabilité sur tout le domaine [0,1]×[0,1] vaut 1. On a 1 = $\iint_0^1 c\,(x^2+xy).dx.dy$ = c $\iint_0^1 (x^2+xy).dx.dy = c\int_0^1 \left[x^2y+\frac{x}{2}y^2\right]_0^1 .dx = c\int_0^1 (x^2+\frac{x}{2}).dx = c\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7c}{12}$.

Donc c = 12/7.

Ensuite:

$$F(x,y) = p(X \leq x \ \cap \ Y \leq y) = \frac{12}{7}\int_0^x \int_0^y (x^2+xy).dx.dy$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^x \left[x^2y+\frac{x}{2}y^2\right]_0^y .dx = \frac{12}{7}\int_0^x (x^2y+\frac{x}{2}y^2).dx$$

$$= \frac{12}{7}\left[\frac{y}{3}x^3+\frac{y^2}{4}x^2\right]_0^x = \frac{12}{7}\left(\frac{yx^3}{3}+\frac{y^2x^2}{4}\right)$$

(b)

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y).dy = \int_0^1 \frac{12}{7}(x^2+xy).dy = \frac{12}{7}\left[x^2y+\frac{x}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{12}{7}(x^2+\frac{x}{2})$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y).dx = \int_0^1 \frac{12}{7}(x^2+xy).dx = \frac{12}{7}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{y}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{12}{7}(\frac{1}{3}+\frac{y}{2})$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x).dx = \frac{12}{7}\int_0^x (x^2+\frac{x}{2}).dx = \frac{12}{7}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^x = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)$$

$$F_y(y) = \int_0^y f_Y(y).dy = \frac{12}{7}\int_0^y (\frac{1}{3}+\frac{y}{2}).dy = \frac{12}{7}\left[\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}y^2\right]_0^y = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}y^2\right)$$

On pouvait aussi calculer les fonctions de répartition avec $F_X(x)$ = F(x, 1) et $F_Y(y)$ = F(1, y).

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x.f_X(x).dx = \frac{12}{7}\int_0^1 x(x^2+\frac{x}{2}).dx = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{7}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2.f_X(x).dx = \frac{12}{7}\int_0^1 x^2(x^2+\frac{x}{2}).dx = \frac{39}{70}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{39}{70} - \left(\frac{5}{7}\right)^2 \approx 0.0469$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y.f_Y(y).dy = \frac{4}{7}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy.f(x,y).dy.dx = \frac{12}{7}\int_0^1\int_0^1 (x^3y+xy^2).dy.dx = \frac{17}{42}$$

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \approx -0.0034$$

$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y} \approx -0.0561$$