Université d'Evry val d'Essonne
Master MIAGE

TD 5 - Statistiques - corrections

Exercice 1 - Analogie du Polygraphe

(a) Type I : rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie, donc penser qu'il ment alors que non. Il y en a 9/140.
Type II : acepter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse, donc penser qu'il dit la vérité alors que non. Il y en a 15/140.
(b) Le *niveau de signification* α = p(rejeter H_0 | H_0 vraie) = p(Type I) = 9/140
La *puissance* β = p(rejeter H_0 | H_A vraie) = 1 - p(rejeter H_A | H_A vraie) = 1 - p(Type 2) = 1 - 15/140 = 125/140

Exercice 2 - Test de Student

Le test de Student sert à comparer une moyenne d'échantillon à une valeur théorique.
On a n=16, $\overline{x} = 11$, $s^2 = 4$.
On calcule la statistique de Student sous l'hypothèse nulle, $Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{16}}} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = 2$.
Z suit une loi de Student à (n-1) degrés de liberté (donc 15 degrés de liberté).

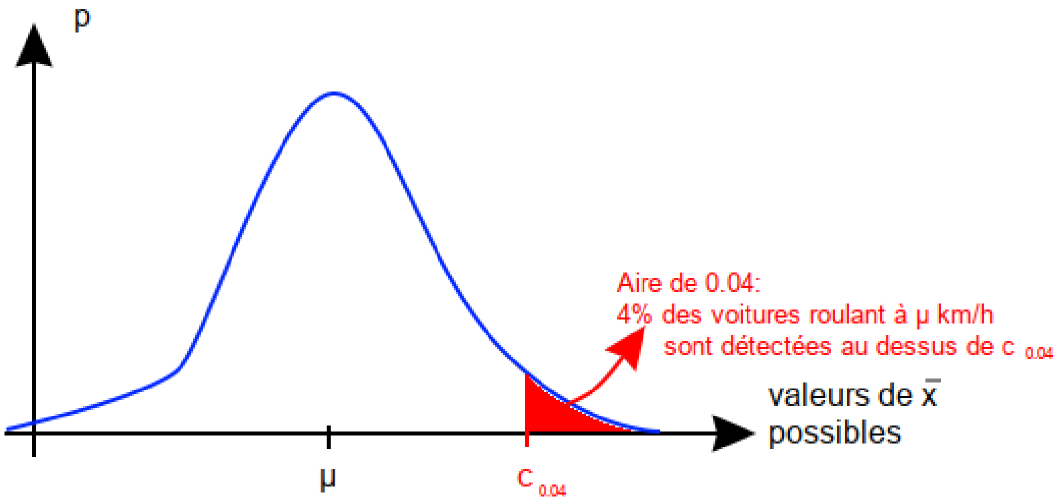
(a) On calcule la p-value, c'est à dire la probabilité d'observer Z au moins aussi loin de 0 si H_0 est vraie. P = p(|Z| > 2 | H_0) = 2 * (1 - pt(2,15)) = 0,063945.
On a P > α, on ne rejette pas H_0, car cette situation arrive suffisamment souvent par hasard quand H_0 est vraie. Donc on considèrera que μ = 10.

(b) Si H'_A : μ > 10, la p-value est la probabilité d'observer Z au moins aussi supérieure à 0 si H_0 est vraie. Dans ce cas, P = p(Z > 2 | H_0) = 1 - pt(2,15) = 0,031973.
Cette fois, P < α, on rejette donc H_0, car cette situation est trop rare pour le cas ou H_0 est vraie. On accepte H'_A à la place : on considérera que μ > 10.

Exercice 3 - Radars mobiles

(a) Soit μ la vitesse réelle de la voiture. Les mesures x_i suivent une loi normale N(μ, 25), donc par le théorème central limite, $\overline{x}$ suit une loi normale N(μ, 25/3). On définit les hypothèses suivantes:
H_0 : pas d'infraction, $\mu \leq 40$
H_A : infraction, $\mu > 40$.
Ce sont des inégalités, donc les hypothèses sont composées.
(b) Rejeter H_0 quand elle est vraie (contravention incorrecte), c'est faire une erreur de type 1. On fixe sa probabilité à 4%, c'est à dire qu'on prend p(type 1) = α = 0,04.

On cherche la valeur de vitesse critique $c_{0.04}$ telle que seulement 4% des voitures qui ne sont pas en infraction soient détectées comme roulant plus vite que $c_{0.04}$.



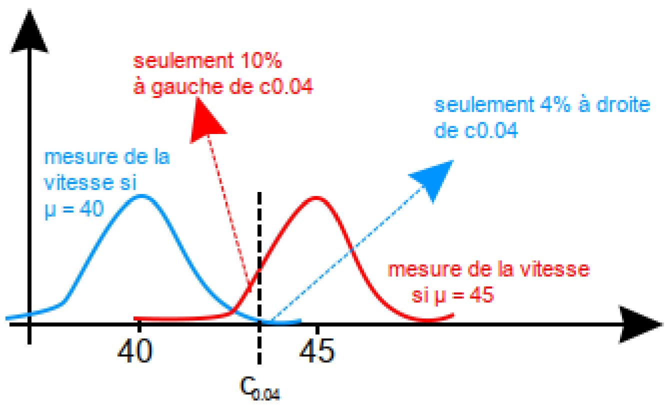
Note : Si la voiture ne roule pas à μ = 40 km/h mais 39 par exemple, ou moins, la courbe bleue se décale vers la gauche, et donc l'aire sous la courbe entre $c_{0.04}$ et l'infini devient inférieure à 4%.
On raisonne ici avec le pire des cas, c'est à dire en considérant que toutes les voitures roulent à μ = 40 km/h.

Le quantile à 96% d'une loi de N(40, 25/3) vaut 45,054 km/h. Il faut donc verbaliser les voitures détectées au delà de 45,054 km/h pour que moins de 4% des contraventions soient attribuées à tort.

(c) En considérant H_A : μ = 45, on décale la courbe bleue vers la droite jusqu'à ce que μ = 45 ≈ $c_{0.04}$. Dans ce cas, la moitié environ des voitures sera détectée en dessous du seuil et l'autre moitié au dessus et sera verbalisée. La puissance sera d'environ 1/2.
Le calcul rigoureux au cas où:

$$\beta = p(\text{ rejet de } H_0 \mid H_A) = p(\bar{x} > c_{0,04} \mid \mu = 45) = 1 - p(\bar{x} < c_{0,04} \mid \mu = 45) = 1 - \int_{-\infty}^{c_{0,04}} \frac{1}{\sqrt{\frac{50\pi}{3}}} e^{-3(x-45)^2/50} . dx \ = \ 0,493$$

(d) Le nombre de radars a une influence sur la forme de la courbe bleue (la loi normale), puisque rappelons-le, elle est définie comme N(μ, 25/n), et donc n influence aussi la valeur de $c_{0.04}$.
Si n augmente, la largeur de la courbe diminue, et donc $c_{0.04}$ se rapproche de μ.



On pose l'équation «Aire à droite du seuil pour N(40, 25/n) = Aire à gauche du seuil pour N(45, 25/n)».