

TD 1 - Probabilités

Exercice 1 - Main de Poker

Rappel de la composition d'un jeu de 52 cartes : Il existe 13 valeurs: 1 (aussi appelé As), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, et roi. Chaque valeur existe dans quatre "couleurs" différentes, pique ♠, carreau ♦, trèfle ♣, et coeur ♥. Il y a donc $13 \times 4 = 52$ cartes.

Une main de poker est un ensemble de 5 cartes piochées au hasard.

Une *paire* correspond à 2 cartes de même valeur, les 3 autres étant de valeurs différentes et différentes de la paire.

Une *double paire* correspond à deux fois 2 cartes de même valeur entre elles, et la cinquième de valeur différente.

Un *brelan* est un triplet de cartes de même valeur, plus deux cartes différentes et différentes du triplet.



le format d'une double paire.



le format d'un brelan.

Au poker, les compositions de cartes les plus communes après la paire sont la double paire et le brelan.

Calculez la probabilité d'avoir une double-paire dans une main de poker.

Calculez la probabilité d'avoir un brelan dans une main de poker.

Laquelle est la plus rare ?

Exercice 2 - Anniversaires

Les jours d'une année peuvent être numérotés de 1 à 365. Supposons que les humains ont la même probabilité de naître quelque soit le jour de l'année. Considérons un groupe de n personnes dont vous n'êtes pas membre. On appelle *élément* ω une séquence possible des n anniversaires (une valeur par personne) parmi l'ensemble Ω des séquences possibles.

(a) Calculez la probabilité p de ω (quelque soit $\omega \in \Omega$).

Considérons les événements suivants:

A: "quelqu'un dans le groupe a la même date d'anniversaire que vous"

B: "deux personnes dans le groupe ont la même date d'anniversaire"

C: "trois personnes dans le groupe ont la même date d'anniversaire"

(b) Décrivez précisément les sous-ensembles de Ω correspondant à ces événements (quels $\omega \in \Omega$ correspondent à ces événements ?)

(c) Trouvez une formule exacte pour calculer $p(A)$. Quel est le plus petit n tel que $p(A) > 0.5$?

(d) Justifiez sans calcul pourquoi ce plus petit n est supérieur à $365/2$ (intuitivement).

(e) Trouvez une formule exacte pour calculer $p(B)$.

Exercice 3 - Le paradoxe des deux enfants

Ce problème est un problème célèbre pouvant avoir plusieurs réponses très différentes selon votre interprétation de l'énoncé. Faites très attention au sens des mots. Le problème est apparu dans un texte de Martin Gardner dans Scientific American en 1959.

- (a) Monsieur Jones a deux enfants. L'enfant le plus âgé est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
- (b) Monsieur Smith a deux enfants. Au moins l'un d'entre eux est un garçon. Quel est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

Exercice 4 - Le Taxi Bleu

Dans une ville de 100 taxis, un taxi est bleu quand les 99 autres sont noirs. Un témoin observe un accident avec délit de fuite par un taxi pendant la nuit et se rappelle que le taxi était bleu, donc la police arrête le conducteur du taxi bleu. Le conducteur clame son innocence et vous engage pour le défendre au barreau. Vous engagez un scientifique pour tester la capacité du témoin à distinguer un taxi bleu d'un taxi noir dans des conditions similaires à la nuit de l'accident. Les données suggèrent que le témoin voit un taxi bleu comme étant bleu dans 99% des cas et un taxi noir comme étant bleu dans 2% des cas.

Donnez un argument au jury pour leur donner des doutes raisonnables à propos de la culpabilité de votre client. Rappelez vous que les jurés n'ont pas suivi ce cours, donc un tableau illustratif serait plus simple.

Exercice 5 - L'arbre des cartes

Quatre As (valeur 1) et quatre Deux (valeur 2) sont placées dans un chapeau. Vous tirez une carte au hasard. Si c'est un as, vous tirez une carte supplémentaire, si c'est un deux, vous tirez deux cartes de plus. On ne répète pas le processus, on le fait juste une fois. Soit X la somme des cartes tirées. Dessinez un arbre des probabilités, puis calculez l'espérance de X .