Statistiques et probabilités
Cours n°2

Guillaume Postic

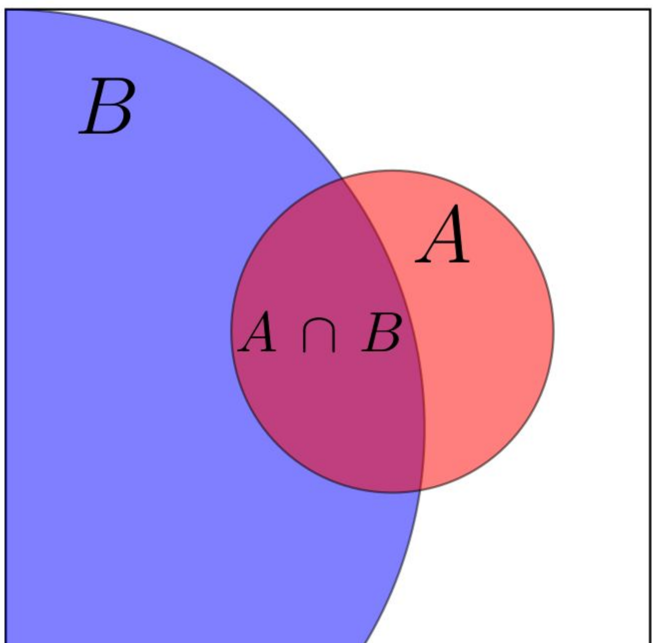
Université Paris-Saclay, Univ. Evry
Département informatique

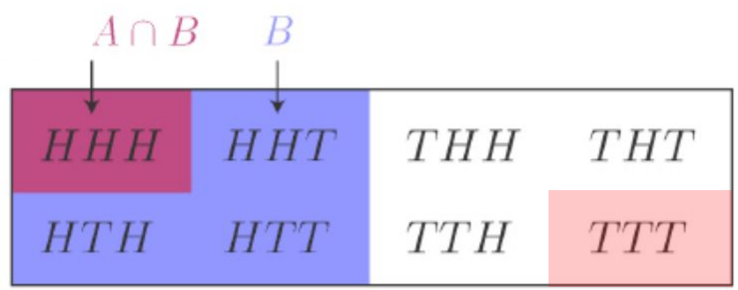
Master 1 MIAGE - 2023/2024

Probabilité conditionnelle

« La probabilité de *A* sachant *B* »

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{avec} \quad P(B) \neq 0$$





▲ Exemple : pile (*T*) ou face (*H*)

◂ Représentation abstraite

Deux principes

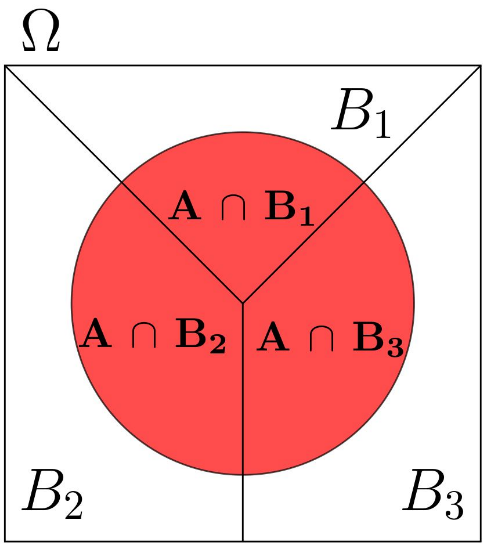
Principe de multiplication

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Formule des probabilités totales

Si B_1, B_2 et B_3 forment un système exhaustif (ou partition) de Ω (incompatibles deux-à-deux et réunion est l'univers tout entier), alors

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$
$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

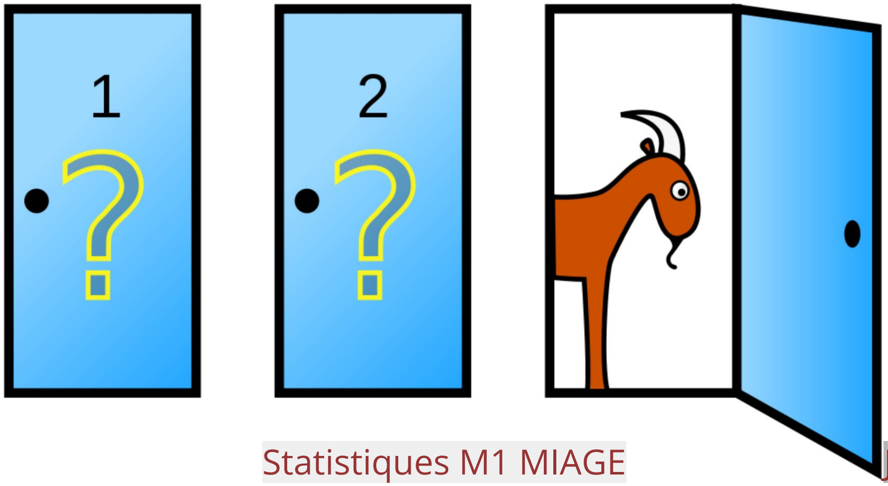


Let's Make a Deal, avec Monty Hall (1)

- Trois portes l'une cache une voiture, les deux autres une chèvre
- Le candidat choisit une porte
- Monty Hall ouvre une porte non-choisie et cachant une chèvre (il sait où est la voiture)
- Le candidat est alors autorisé à changer de porte

Quelle est la meilleure stratégie pour gagner ?

(a) Changer **(b) Ne pas changer** **(c) Peu importe**



Let's Make a Deal, avec Monty Hall (2)

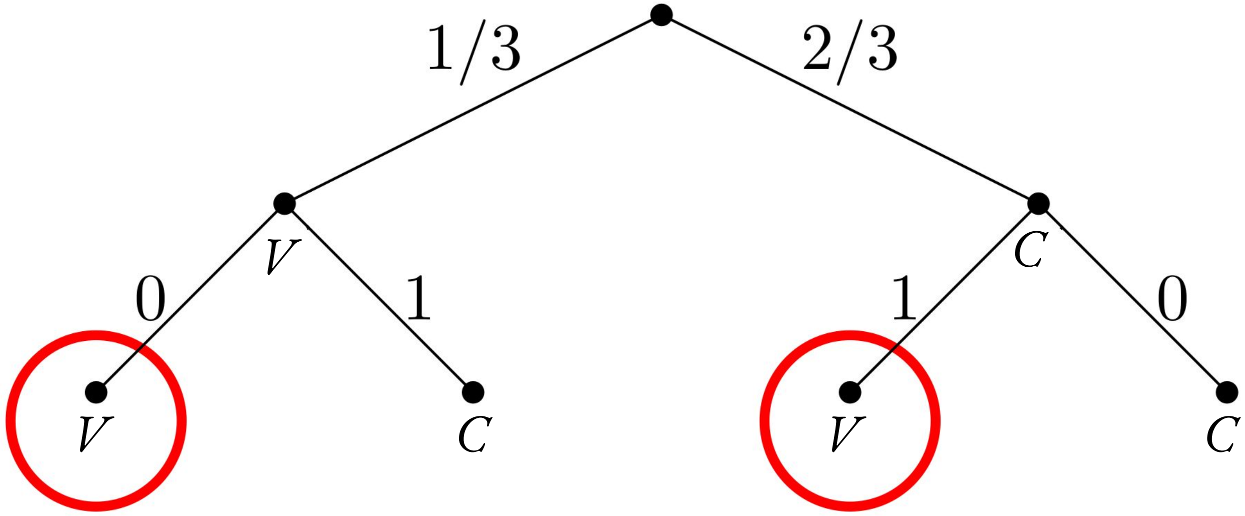
Q : Organisez le problème de Monty Hall sous la forme d'un arbre et calculez la probabilité de gagner si le candidat change de porte choisie quoi qu'il arrive.

$$P(voiture \mid change) = ?$$

Let's Make a Deal, avec Monty Hall (2)

Q : Organisez le problème de Monty Hall sous la forme d'un arbre et calculez la probabilité de gagner si le candidat change de porte choisie quoi qu'il arrive.

$$P(voiture \mid change) = ?$$



La probabilité totale de V est $P(V \mid C) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Indépendance

Des évènements A et B sont indépendants si la probabilité que l'un survienne n'est pas affectée par la probabilité que l'autre soit survenu.

Indépendance $\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$ (avec $P(B) \neq 0$)

$\Leftrightarrow P(B \mid A) = P(B)$ (avec $P(A) \neq 0$)

(pour n'importe quel A et B)

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Indépendance

Pour deux jets de dés, considérons les évènements suivants :

- A = « le premier jet fait 3 »
- B = « la somme fait 6 »
- C = « la somme fait 7 »

Question : A est indépendant de

(a) B et C (b) B seulement

(c) C seulement (d) Ni B, ni C

Indépendance

Solution (dé n°1 et dé n°2)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = (1/36) / (5/36) = 1/5$

$P(A|C) = P(A \cap C) / P(C) = (1/36) / (6/36) = 1/6$

Note :

$P(B|A) = P(B \cap A) / P(A) = (1/36) / (1/6) = 1/6$

$= P(C|A)$

Indépendance

Solution (dé n°1 et dé n°2)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A) = 1/6$, $\boldsymbol{P(A|B) = 1/5}$. Pas égales, donc pas indépendantes

$P(A) = 1/6$, $\boldsymbol{P(A|C) = 1/6}$. Égales, donc indépendantes

Autre façon :

$P(A \cap B) = 1/36 \neq P(A)\,P(B) = 1/6 \times 5/36$. Pas indépendantes

$P(A \cap C) = 1/36 = P(A)\,P(C) = 1/6 \times 6/36$. Indépendantes

Tableau de contingence (tableau croisé)

Représentation de données issues d'un comptage permettant d'estimer la dépendance entre deux caractères.

	Alice	Bob	Charlie	David	Classe
A	4	0	1	2	7
B	1	1	1	2	5
C	0	1	2	0	3
D	0	2	1	0	3
E	0	0	0	1	1
F	0	1	0	0	1
	5	5	5	5	20

- Probabilité **jointe** : $p(A \cap \text{Alice}) = 4/20 = 1/5$
- Probabilité **conditionnelle** :
  - $p(A|\text{Alice}) = p(A \cap \text{Alice}) / p(\text{Alice}) = (4/20) / (5/20) = 4/5$
- Probabilités **marginales** :
  - **$p(A) = 7/20$** et **$p(\text{Alice}) = 5/20 = 1/4$**

Théorème de Bayes (1)

- Trouver $P(A|B)$ à partir de $P(B|A)$
- $P(B)$ calculée avec la formule des probabilités totales

Théorème de Bayes (2)

Mise à jour Bayésienne de la probabilité d'une hypothèse *H* grâce à une donnée (observation) *d* :

Vraisemblance

Probabilité a posteriori

$$p(H \mid d) = \frac{p(d \mid H)}{p(d)}\, p(H)$$

Probabilité a priori

Vraisemblance marginale

$$p(d) = \Sigma_i\, p(d \mid H_i)\, p(H_i) = \Sigma_i\, p(d \cap H_i)$$

Probabilités totales :
somme pour toutes les hypothèses

$$p(d_1, d_2, \ldots, d_n \mid H) = \Pi_i\, p(d_i \mid H)$$

Si **indépendance** mutuelle des évènements (observations)

Notation

- $p(A,B) = p(A \cap B)$
- $p(A|B,C) = p(A|B \cap C) = p(A \cap B \cap C) / p(B \cap C)$
- $p(A,B|C) = p(A \cap B|C) = p(A \cap B \cap C) / p(C)$

Décisions et incertitudes 📚 🤓 🚜

- Bob est décrit comme aimant la lecture, le calme et le rangement
- Quelle est la profession de Bob ?
  - Bibliothécaire
  - Agriculteur

Décisions et incertitudes 📚 🤓 🚜

- Bob est décrit comme aimant la lecture, le calme et le rangement
- Quelle est la profession de Bob ?
  - Bibliothécaire
  - Agriculteur

- Il faut considérer la proportion entre les populations des deux professions : 20/1 en faveur des agriculteurs
- On met à jour avec l'information la personnalité décrite : la probabilité de correspondre à cette description est 4 fois supérieure pour un bibliothécaire

Décisions et incertitudes

- H_1 : être bibliothécaire
- H_2 : être agriculteur
- d : description de la personalité

On calcule le rapport des probabilités *a posteriori* entre les deux modèles. Celui-ci implique le **facteur de Bayes** :

$$\frac{p(H_1|d)}{p(H_2|d)} = \boxed{\frac{p(d|H_1)}{p(d|H_2)}} \frac{p(H_1)}{p(H_2)} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

Note : inutile de calculer $p(d)$, la vraisemblance marginale

L'hypothèse que Bob soit agriculteur est 5 fois plus probable !

Let's Make a Deal, avec Monty Hall (3)

- Supposition : porte n°1 choisie

C (*car*) : porte cachant la voiture (*C* = 1, 2, 3)

H (*Hall*) : porte ouverte par Monty Hall (supposons que *H* = 2)

$$p(H = 2 \mid C = 1) = 0{,}5$$

$$p(H = 2 \mid C = 2) = 0$$

$$p(H = 2 \mid C = 3) = 1$$

Let's Make a Deal, avec Monty Hall (3)

- Calcul des probabilités voulues :

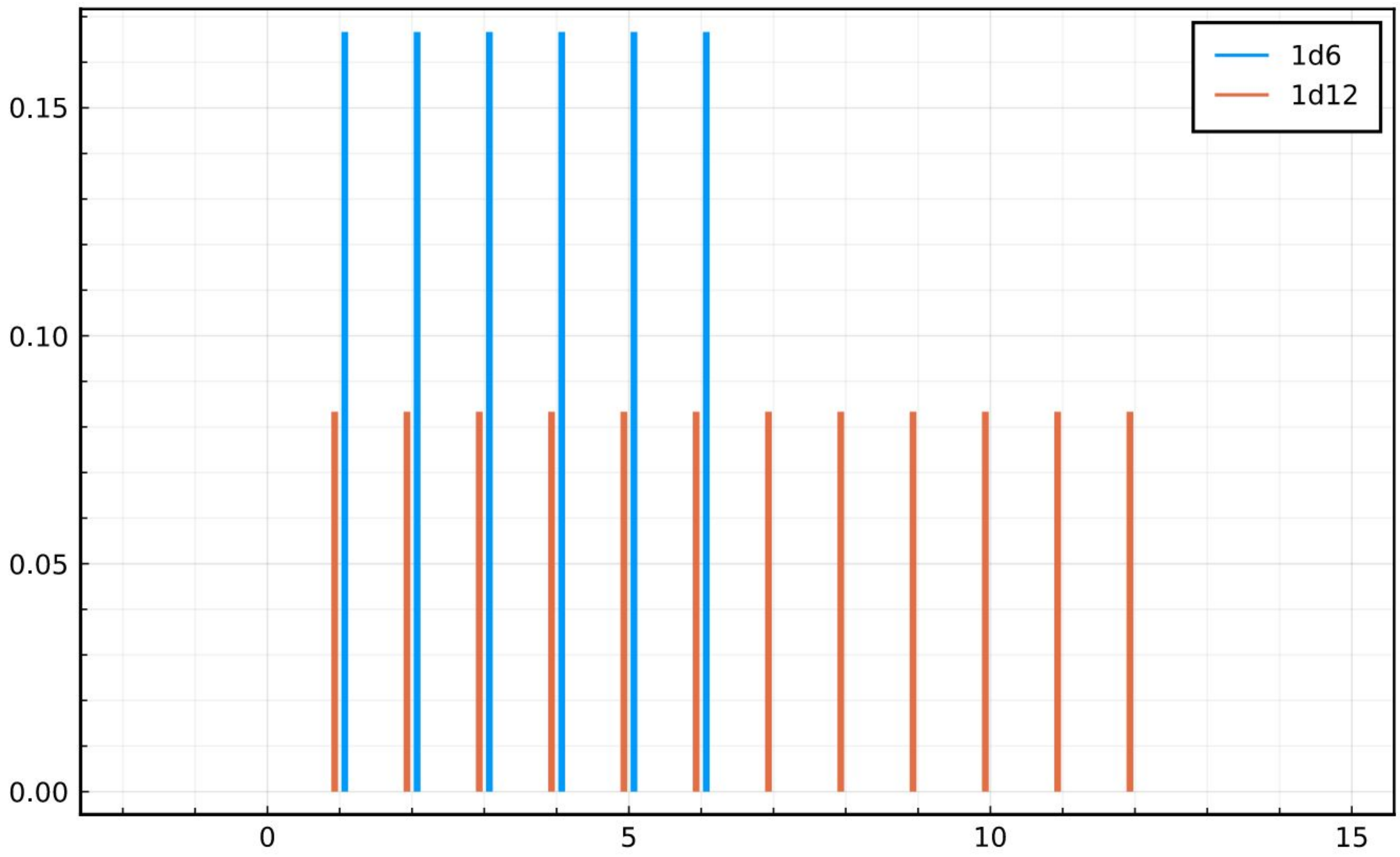
$$p(C = 3 \mid H = 2) = \frac{p(H{=}2, C{=}3)}{p(H{=}2)} = \frac{p(H{=}2 \mid C{=}3)p(C{=}3)}{\sum_{c=1}^{3} p(H{=}2 \mid C{=}c)p(C{=}c)}$$

$$p(C = 3 \mid H = 2) = \frac{p(H{=}2 \mid C{=}3)p(C{=}3)}{p(H{=}2 \mid C{=}1)p(C{=}1) + p(H{=}2 \mid C{=}2)p(C{=}2) + p(H{=}2 \mid C{=}3)p(C{=}3)}$$

En supposant que $p(C) = 1/3$, on trouve :

$$p(C = 3 \mid H = 2) = 2/3$$

Lois de probabilité



Définition

- Une loi de probabilité, également appelée **distribution** de probabilité, est une description mathématique qui spécifie **comment les probabilités sont réparties sur l'ensemble des valeurs possibles d'une variable aléatoire**. En d'autres termes, elle donne la probabilité que la variable aléatoire prenne une certaine valeur ou se situe dans un certain intervalle.

- Une loi de probabilité peut être utilisée pour modéliser le comportement aléatoire d'une variable. Elle permet de quantifier les chances associées à différentes valeurs ou résultats possibles de cette variable dans un contexte probabiliste. Il existe de nombreuses lois de probabilité différentes, chacune adaptée à des types de variables et de phénomènes spécifiques.

Principaux descripteurs

1. **Mesures de tendance centrale** : elles incluent la moyenne (ou l’espérance), la médiane et le mode, qui donnent une idée de la valeur centrale des données.
2. **Mesures de dispersion** : elles comprennent la variance, l'écart-type, l'étendue et le coefficient de variation, qui indiquent la variation ou la dispersion des données autour de la valeur centrale.
3. **Graphiques et représentations visuelles** : les histogrammes, les diagrammes en boîte (box plots), les diagrammes en secteurs, les diagrammes à barres et les diagrammes de dispersion sont utilisés pour représenter graphiquement les données.
4. **Mesures de forme** : *skewness* (asymétrie) et *kurtosis* (aplatissement) sont utilisés pour décrire la forme de la distribution des données.

Espérance (mathématique)

Pour X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = p(x_1)x_1 + p(x_2)x_2 + \ldots + p(x_n)x_n = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, x_i$$

- Calcul d'une moyenne arithmétique pondérée
- Indicateur de tendance centrale

Propriétés

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$E(h(X)) = \sum_{i} h(x_i)\, p(x_i)$$

Variance (1)

Indicateur de dispersion des valeurs d'un échantillon ou d'une distribution de probabilité. Elle exprime la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (écart quadratique moyen) :

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Sa racine carrée définit l'**écart type σ** : $\sigma^2 = V(X)$

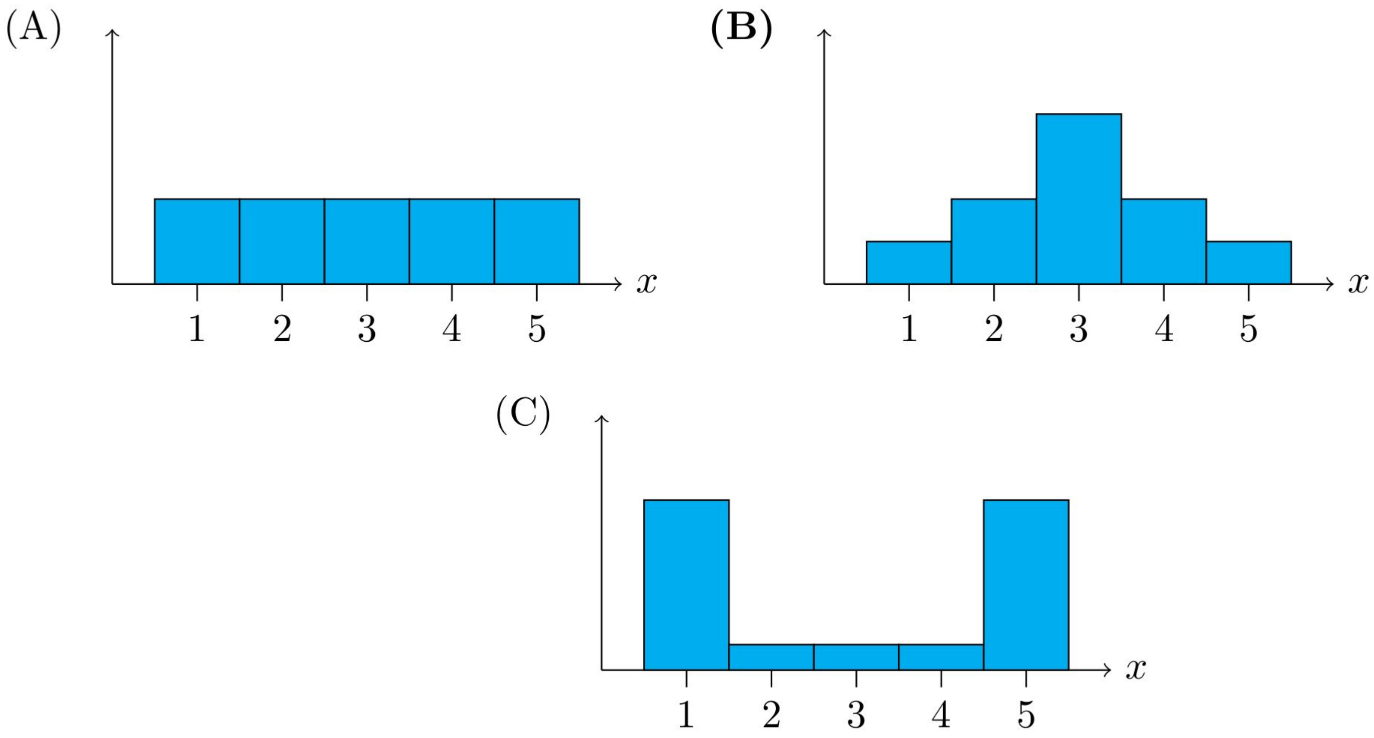
Elle est aussi égale à la différence entre la moyenne des carrés des valeurs de la variable et le carré de la moyenne : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Propriétés :

- $V(a+bX) = b^2\, V(X)$
- $V(X+Y) = V(X-Y) = V(X) + V(Y)$, si X et Y indépendants

Variance (2)

La figure ci-dessous donne les fonctions de masse de 3 variables aléatoires. Classez-les par valeur d'écart-type, du plus grand au plus petit (on supposera que *x* a toujours la même unité).



Variance (3)

Remarque : si la variance d'une variable X est nulle ($V(X) = 0$), alors X est une constante.