Université d'Evry val d'Essonne
Master MIAGE

TD 2 - Probabilités

Exercice 1 - Plan de table et rapport de taille

Un groupe de n personnes prennent place de manière aléatoire autour d'une table ronde à n chaises. Personne n'a la même taille. Quel est le nombre escompté de personnes plus petites que leurs deux voisins immédiats ?

Exercice 2 - Indépendance

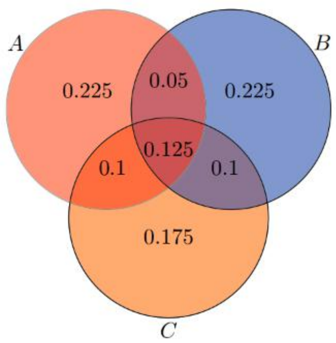
Trois événements A, B, et C sont *indépendants deux-à-deux* si chaque paire d'événements est indépendante. Il sont mutuellement indépendants s'ils sont indépendants deux-à-deux et qu'en plus, $P(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)$.

(a) Supposons que l'on lance deux dés à 6 faces. Définissons les événements

- A = "le premier dé affiche un nombre impair"
- B = "le second dé affiche un nombre impair"
- C = "la somme des deux dés est un nombre impair"

Les événements A, B et C sont-ils indépendants deux-à-deux ? Sont-ils mutuellement indépendants ?

(b) Considérons le diagramme de Venn ci-dessous. A,B et C sont les cercles se chevauchant et les probabilités de chaque région sont telles qu'illustrées.



Est-ce que $P(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)$? Les événements sont-ils mutuellement indépendants ?

(c) Dans une famille particulière avec n enfants, on sait que les événements "La famille a des enfants des deux sexes" et "La famille contient zéro ou une seule fille" sont indépendants. Quelle est la valeur de n ? (On suppose $n > 1$ pour que A puisse être vrai.)

Exercice 3 - Dés

Soit X le résultat du lancé d'un dé à 4 faces équilibrées. Soit Y le résultat du lancé d'un dé à 6 faces équilibrées. Soit Z la moyenne de X et Y.

(a) Trouvez l'écart-type de X, Y et Z.
(b) Dessinez rigoureusement la distribution de probabilité et la fonction cumulative (aussi appelée fonction de répartition) de Z.
(c) Jeu: vous gagnez 2X euros si X > Y et perdez 1 euro sinon. Après avoir joué 60 fois, quel est normalement votre gain ou perte totale ?

Exercice 4 - Chances

Vous avez un tiroir qui contient 50 pièces de monaie. 10 de ces pièces on une probabilité faible (*p = 0.3)* de tomber sur le coté face, 30 pièces sont équilibrées et ont une probabilité *p = 0.5*, et les 10 restantes ont un probabilité forte (*p = 0.7*) de tomber sur le coté face.
Vous choisissez une pièce aléatoirement dans le tiroir et vous la lancez.

(a) (A priori) Quelles sont les chances que vous choisissiez une pièce telle que *p = 0.3* ? Et telle que *p = 0.7* ?
(b) (A priori) Quelles sont les chances que votre pièce retombe sur face ?

Supposons que la pièce tombe sur face.

(c) (A posteriori) Quelles sont les chances que la pièce soit l'une de celles à probabilité *p = 0.3* ? Et l'une de celles à probabilité *p = 0.7* ?
(d) (A posteriori du premier, à priori du second) Quelles sont les chances que la même pièce retombe sur face au prochain lancer ?

Exercice 5 - Mensonges en salle d'audience

(a) Mme S. est découverte poignardée dans son jardin. Mr S. se comporte étrangement depuis sont décès et est considéré comme suspect. Suite à des rapports sociaux et des rapports de police, il est découvert que Mr S. a battu sa femme à au moins neuf occasions. L'avocat de l'accusation avance cette donnée comme une preuve de l'hypothèse que Mr S. est coupable de meurtre. "*Ah non !*", dit l'avocat de Mr S., "*statistiquement, seulement un homme violent sur mille est en fait coupable du meurtre de sa femme. Donc la violence conjugale n'est pas une preuve irréfutable. En fait, étant donné la preuve de violence conjugale, c'est très improbable que mon client soit le meurtrier de sa femme - seulement une chance sur mille. Par conséquent vous devriez le juger innocent.*"
L'avocat a-t-il raison de dire que l'histoire de la violence conjugale ne pointe pas Mr S. comme étant le meurtrier ? Ou est ce que l'avocat est un truand ? Si c'est le second cas, qu'est ce qui ne va pas avec son argument ? Utilisez les éléments suivants pour raisonner précisément :

Hypothèse: M = "Mr S. a tué Mme S."
Données : K = "Mme S. a été tuée"
B = "Mr S. a des antécédents de violence conjugale"

A quoi correspond la probabilité de 1/1000 dont parle l'avocat ?
Exprimez la probabilité (a posteriori) de culpabilité avec ces événements. Comment ces deux probabilités sont-elles liées ?
Indice : Théorème de Bayes et probabilités conditionelles sur K.

(b) En 1999, en Grande Bretagne, Sally Clark a été jugée coupable du meurtre de ses deux enfants après que chaque enfant soit décédé quelques semaines après leurs naissance (le premier en 1996, le second en 1998). Son jugement a été largement basé sur le témoignage du pédiatre Professeur Sir Roy Meadow. Il déclara que, pour une famille aisée et non fumeur telle que la famille Clarks, la probabilité de mort du nourrisson par "mort subite" spontanée était de 1 sur 8543, donc la probabilité de deux morts de nourrissons dans la même famille est aux alentours de "1 sur 73 millions". Étant donné qu'il y a environ 700 000 naissances en Grande Bretagne chaque année, Meadow a argumenté qu'un double décès devrait arriver une fois tous les cents ans. Finalement, il énonça qu'étant donné ce minuscule taux, le scénario le plus probable est que SallyClark avait tué ses enfants.
Expliquez précautionneusement au moins deux erreurs dans le raisonnement de Meadow.