Statistiques et probabilités
Cours n°3

Guillaume Postic

Université Paris-Saclay, Univ. Evry
Département informatique

Master 1 MIAGE - 2022/2023

Variable aléatoire continue

- Intervalle de valeurs continu :
  - e.g. [0, 1], [a, b], [0, ∞), (−∞, ∞)

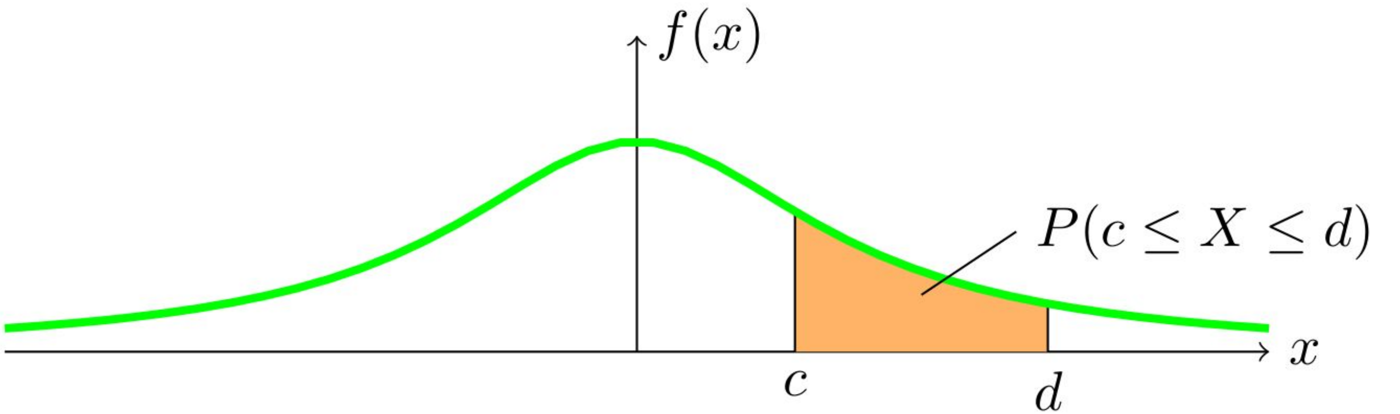
- Fonction de densité ou densité de probabilité

$$f(x) \geq 0; \quad P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

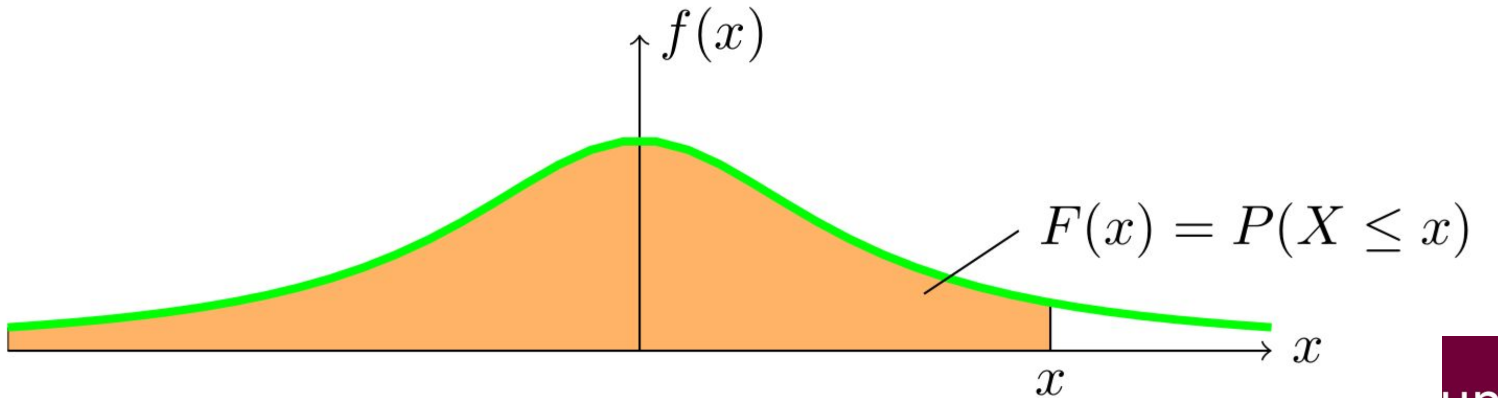
- Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Variable aléatoire continue



Fonction de densité et probabilité



Fonction de densité et fonction de répartition

Propriétés de la fonction de répartition

(également valables pour les variables aléatoires discrètes)

- (Définition) $F(x) = P(X \leq x)$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Jamais décroissante
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P(c < X \leq d) = F(d) - F(c)$
- $F'(x) = f(x)$

Questions

Soit X une variable aléatoire continue.

(a) Que vaut $P(a \leq X \leq a)$?

(b) Que vaut $P(X = 0)$?

(c) Est-ce que $P(X = a) = 0$ signifie que X n'est jamais égal à a ?

Espérance

X continue sur $[a, b]$, avec la fonction de densité $f(x)$:

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\, dx$$

X discrète, de valeurs $x_1, \dots, x_n$, avec la fonction de masse $p(x_i)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Variance et écart-type

Pour toute variable aléatoire X de moyenne μ

$$\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2), \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

X continue sur $[a, b]$, avec la fonction de densité $f(x)$:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

X discrète, de valeurs $x_1, \ldots, x_n$, avec la fonction de masse $p(x_i)$:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i).$$

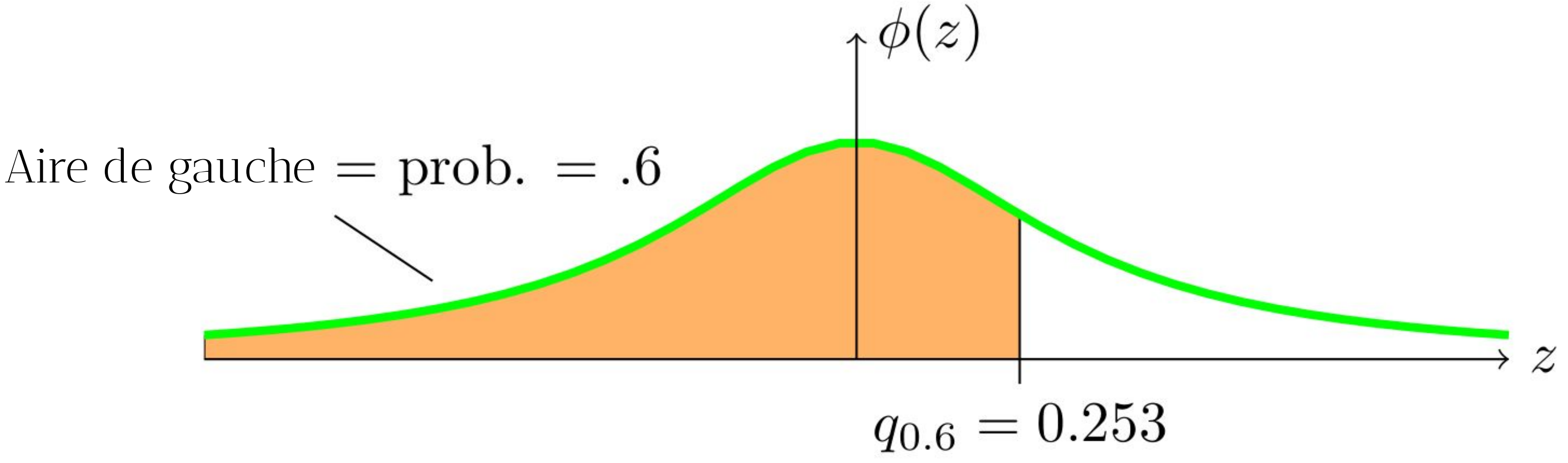
Quantiles (1)

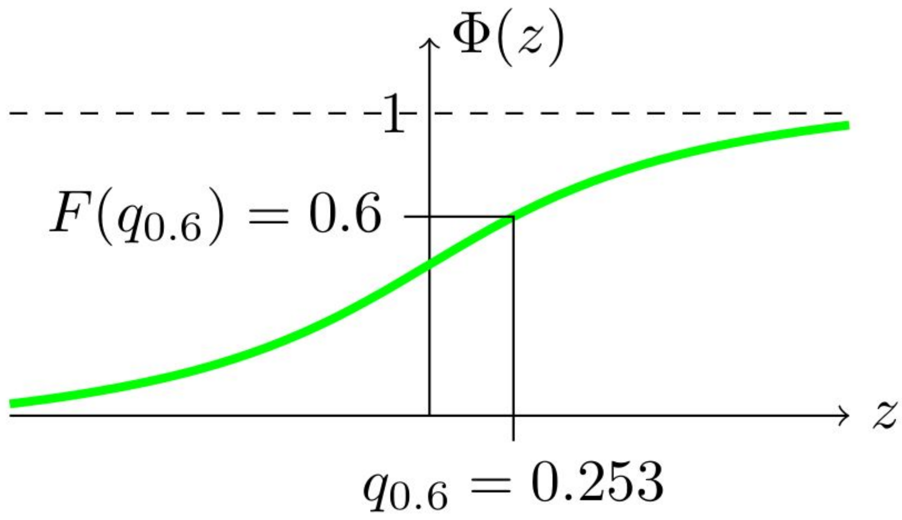
Les quantiles sont les valeurs qui divisent un jeu de données en intervalles de probabilités égales.

Il y a donc un quantile de moins que le nombre de groupes créés. Par exemple, les quartiles sont les trois quantiles qui divisent un ensemble de données en quatre groupes de même probabilité.

La **médiane**, quant à elle, est le quantile qui sépare le jeu de données en deux groupes de même probabilité.

Quantiles (2)





Distributions continues (1)

Loi exponentielle

Loi de probabilité continue qui modélise le temps ***x*** s'écoulant entre deux occurrences d'un **processus de Poisson** de paramètre **λ**, nombre moyen d'occurrences dans un intervalle de temps fixé.

Fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

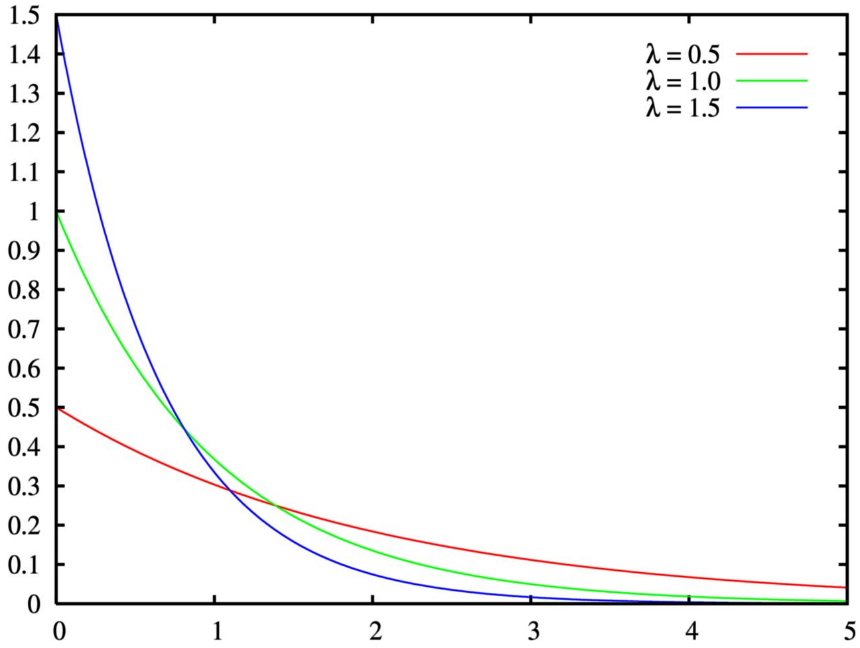
Espérance : $1/\lambda$

Variance : $1/\lambda^2$

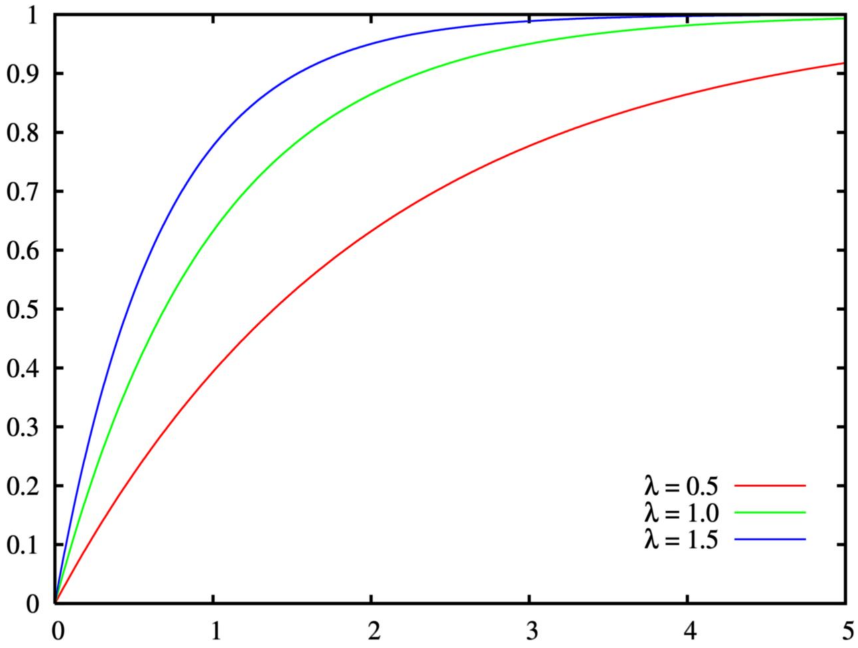
Distributions continues (1)

Loi exponentielle

$$X \sim \exp(\lambda)$$



Fonction de densité



Fonction de répartition

Distributions continues (2)

Lois uniformes continues

Les lois uniformes continues forment une famille de lois de probabilité à densité caractérisées par la propriété suivante : tous les intervalles de même longueur inclus dans le support de la loi ont la même probabilité.

Fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } a \le x \le b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pour } a \le x < b \\ 1 & \text{pour } x \ge b \end{cases}$$

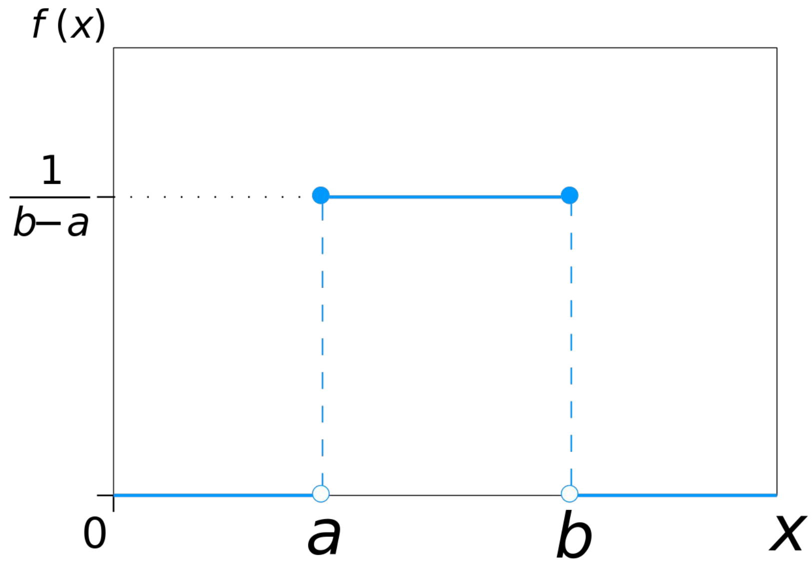
Espérance : (a+b)/2

Variance : $(b-a)^2/12$

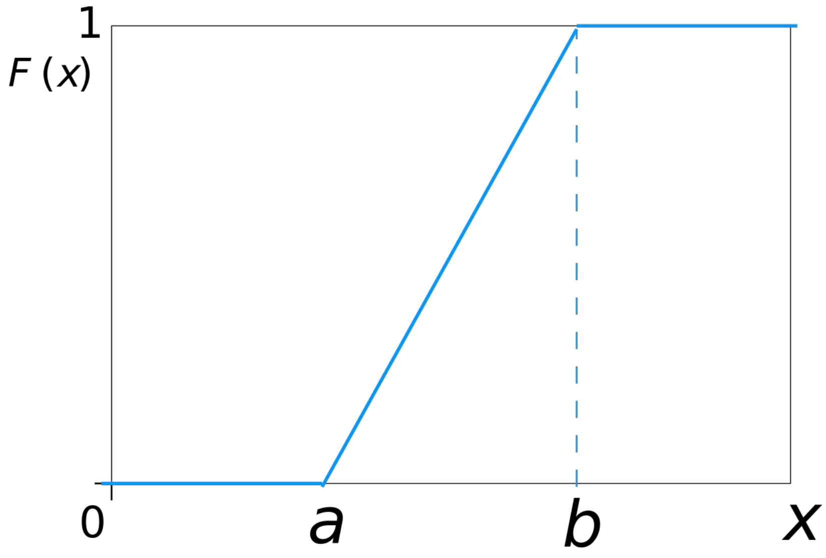
Distributions continues (2)

Lois uniformes continues

$$X \sim U(a, b)$$



Fonction de densité



Fonction de répartition