Université d'Evry val d'Essonne
Master MIAGE

TD 1 - Probabilités - Corrections

Exercice 1 - Main de Poker

<u>Probabilité d'avoir deux paires</u>: Il faut diviser le nombre de façons de choisir deux paires par le nombre de façons de choisir cinq cartes dans un jeu de 52 cartes.

- Nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 52 : $\binom{52}{5}$

- Nombre de façons de choisir 2 paires parmi 52 : C'est le nombre de façons de choisir le rang des deux paires parmi les 13 possibles (sans que cela devienne un carré !), fois le nombre de façons de choisir deux cartes parmi les 4 possibles pour le premier rang, fois le nombre de façons de choisir deux cartes parmi les 4 possibles pour le second rang, fois le nombre de façons de choisir un rang parmi les rangs restants, fois le nombre de façons de choisir une carte parmi les 4 possibles pour le rang restant choisi.

On a donc *p(2 paires)* = $\dfrac{\binom{13}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times 11\times 4}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}0475$

<u>Probabilité d'avoir un brelan</u>: Il faut diviser le nombre de façons de choisir un brelan par le nombre de façons de choisir 5 cartes dans un jeu de 52.

- Nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 52 : $\binom{52}{5}$

- Nombre de façons de choisir 3 cartes identiques parmi 52 : C'est le nombre de façons de choisir le rang du brelan fois le nombre de façons de choisir 3 cartes parmi les 4 possibles pour ce rang, fois le nombre de façons de choisir 2 rangs différents parmi les rangs restants, fois le nombre de façons de choisir une carte parmi les 4 possibles pour le premier rang, fois le nombre de façons de choisir une carte parmi les 4 possibles pour le second rang.

On a donc *p(brelan)* = $\dfrac{\binom{13}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{12}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}0211$

Le brelan est donc le plus rare.

Exercice 2 - Anniversaires

(a) Il y a 365^n séquences possibles de n anniversaires.Sachant qu'elles sont toutes équiprobables, on a $p(\omega) = 1/365^n$ pour tout ω.

(b)

Evénement A : Supposons que je sois né le jour j. Les séquences ω qui correspondent à A contiennent j. Donc $A = \{ \omega \in \Omega \mid \exists k \in [1,n] \text{ t.q. } \omega_k = j \}$.

Evénement B : les séquences ω qui correspondent à B contiennent deux valeurs identiques. Donc B = $\{ \omega \in \Omega \mid \exists\, k,l \in [1,n]$ t.q. $\omega_k = \omega_l$ avec $k \neq l \}$.
Evénement C : les séquences ω qui correspondent à B contiennent trois valeurs identiques. Donc B = $\{ \omega \in \Omega \mid \exists\, k,l,m \in [1,n]$ t.q. $\omega_k = \omega_l = \omega_m$ avec $k \neq l \neq m \}$.

(c) Le plus simple est de calculer A^c. Il y a 364^n séquences dans l'ensemble A^c puisqu'il n'y a plus que 364 choix possibles pour chaque date d'anniversaire. On a vu qu'il y avait 365^n séquences dans Ω.

Donc $p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - \frac{364^n}{365^n}$.

Posons ensuite $p(A) > 0.5 \Longrightarrow 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n > 0.5 \Longrightarrow \left(\frac{364}{365}\right)^n < 0.5 \Longrightarrow n \ln\left(\frac{364}{365}\right) < \ln(0.5) \Longrightarrow n > \ln(0.5) / \ln\left(\frac{364}{365}\right) \Longrightarrow n > 252.652... \Longrightarrow n > 253$

Donc il faut au moins 253 personnes dans le groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux que l'une d'entre elles aie la même date d'anniversaire que vous.

(d) Si 365/2 personnes sont dans un groupe, il est probable que certains anniversaires tombent déjà plusieurs fois sur la même date, et ne donnent pas 365/2 anniversaires mutuellement différents. 365/2 anniversaires différents auraient bien une chance sur deux de contenir votre date d'anniversaire à vous. Il y a donc moins d'une chance sur deux que la votre soit comprise dans leur liste.
(e) Il est plus simple de calculer $p(B^c)$, la probabilité que tous les anniversaires soient distincts. Dans ce cas, il y aurait 365 choix pour le premier anniversaire, 364 pour le second, etc... jusqu'au *n*ième.

$$P(B) = 1 - p(B^c) = 1 - \frac{365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \frac{365\,!}{(365 - n)\,! \times 365^n}$$

Exercice 3 - Paradoxe des deux enfants

Pour plus de détails : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_deux_enfants
(a) Si l'on entend le genre du premier enfant d'abord, l'espace des possibles est { FG, FF }. La probabilité d'avoir FF est donc 1/2.
(b) Si l'on n'entend pas le genre du premier enfant, les cas possibles sont { GF, GG, FG }. La probabilité d'avoir GG est donc de 1/3.
Critique:
Le calcul effectué précédemment suppose que la famille Smith se retrouve de façon équiprobable de l'une des trois cases du tableau intitulées FG, GF et GG. Or l'information selon laquelle il y a au moins un garçon peut être obtenue de différentes manières :

1. À la question « Avez-vous au moins un garçon ? », M. Smith répond « Oui. »
2. À la demande « Indiquez-moi le sexe de l'un de vos enfants. », M. Smith répond « J'ai (au moins) un garçon. »

Dans le premier cas, la probabilité qu'il y ait deux garçons correspond effectivement à 1/3. Mais dans le deuxième cas, le fait que M. Smith choisisse de mentionner un garçon affaiblit la probabilité qu'il y ait une fille, sauf à supposer qu'un parent choisit toujours de mentionner un garçon lorsqu'il en a un. En supposant qu'un parent d'un garçon et d'une fille mentionne l'un ou l'autre de façon équiprobable, la probabilité que M. Smith ait deux garçons remonte à 1/2.

Exercice 4 - Le Taxi Bleu

Vous allez essayer de faire passer le cas pour un cas de mauvaise identif cation aléatoire. On cherche donc la probabilité qu'un taxi vu comme bleu soit bleu.

Déf nissons les événements O_b = "l'observateur a vu un taxi bleu" et O_n = "l'observateur a vu un taxi noir". Déf nissons aussi T_b = "le taxi est bleu" et T_n = "le taxi est noir". On utilise la formule de Bayes :

$$p(T_b|O_b) = \frac{p(O_b \vee T_b) \times p(T_b)}{p(O_b)}$$

On a $p(T_b) = 0.01$ et $p(T_n) = 0.99$, on sait aussi que $p(O_b|T_b) = 0.99$ et $p(O_b|T_n) = 0.02$.

On calcule $p(O_b)$ par la formule des probabilités totales :

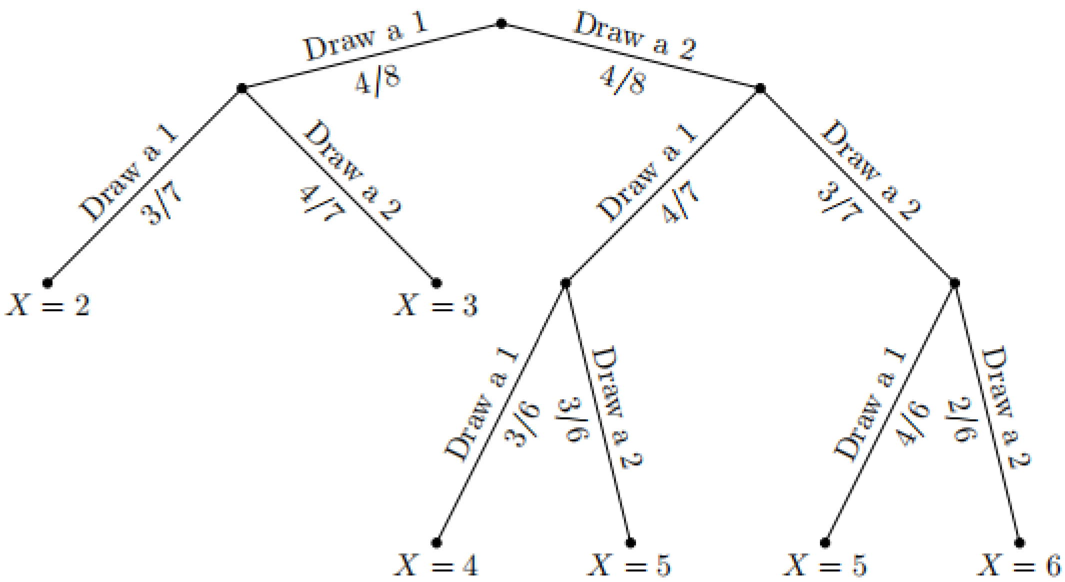
$$p(O_b) = p(O_b|T_b)\ p(T_b) + p(O_b|T_n)\ p(T_n) = 0.99*0.01 + 0.02*0.99 = 0.99*0.3$$

Si on reprend donc la formule de Bayes, on a $p(T_b|O_b) = \frac{p(O_b \vee T_b) \times p(T_b)}{p(O_b)} = \frac{0,99 \times 0.1}{0,99 \times 0,3} = \frac{1}{3}$.

Vous pouvez donc argumenter que quand cet observateur voit un taxi bleu, le taxi n'est réellement bleu qu'une fois sur 3 !

Exercice 5 - L'arbre des cartes

On dessine l'arbre de probabilités suivant:



On a donc $E(X) = 2*\frac{3}{14} + 3*\frac{2}{7} + 4*\frac{1}{7} + 5*\frac{2}{7} + 6*\frac{1}{14} = \frac{26}{7} \approx 3,7143$.