Statistiques et probabilités Cours n°1

Guillaume Postic

Université Paris-Saclay, Univ. Evry
Département informatique

Master 1 MIAGE - 2023/2024

Statistiques 🆚 probabilités

- La théorie des probabilités constitue la base pour comprendre les événements aléatoires et quantifier l'incertitude.
  - Souvent utilisée pour construire des **modèles** qui nous aident à donner un sens aux données

- Les statistiques représentent l'application pratique de la théorie des probabilités pour analyser et tirer des conclusions à partir de **données**.
  - Aident à appliquer les modèles probabilistes à des situations du monde réel

Statistiques… de l’année dernière

- 17 étudiants inscrits
  - 10 admis
  - 4 ajournés
  - 3 défaillants

- Moyenne de la classe = 11,1/20
  - Maximum = 16,75/20
  - Minimum = 5,5/20

Dénombrement

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

→ **Nécessité de dénombrer ces cas**

Dénombrement

- Détermination du nombre d'éléments d'un ensemble
- S'obtient par un comptage ou par un calcul de son cardinal à l'aide de techniques combinatoires

Exemple : quelle est la probabilité de faire exactement 1 fois « face » avec 3 lancers d’une pièce équilibrée ?

Ensembles de mots

Proverbe : il ne faut manger des huîtres que les mois en « r »

- *S* = tous les mois
- *L* = le mois a 31 jours
- *R* = le mois a un « r » dans son nom

S = {Jan, Fév, Mar, Avr, Mai, Jun, Jul, Aou, Sep, Oct, Nov, Déc}

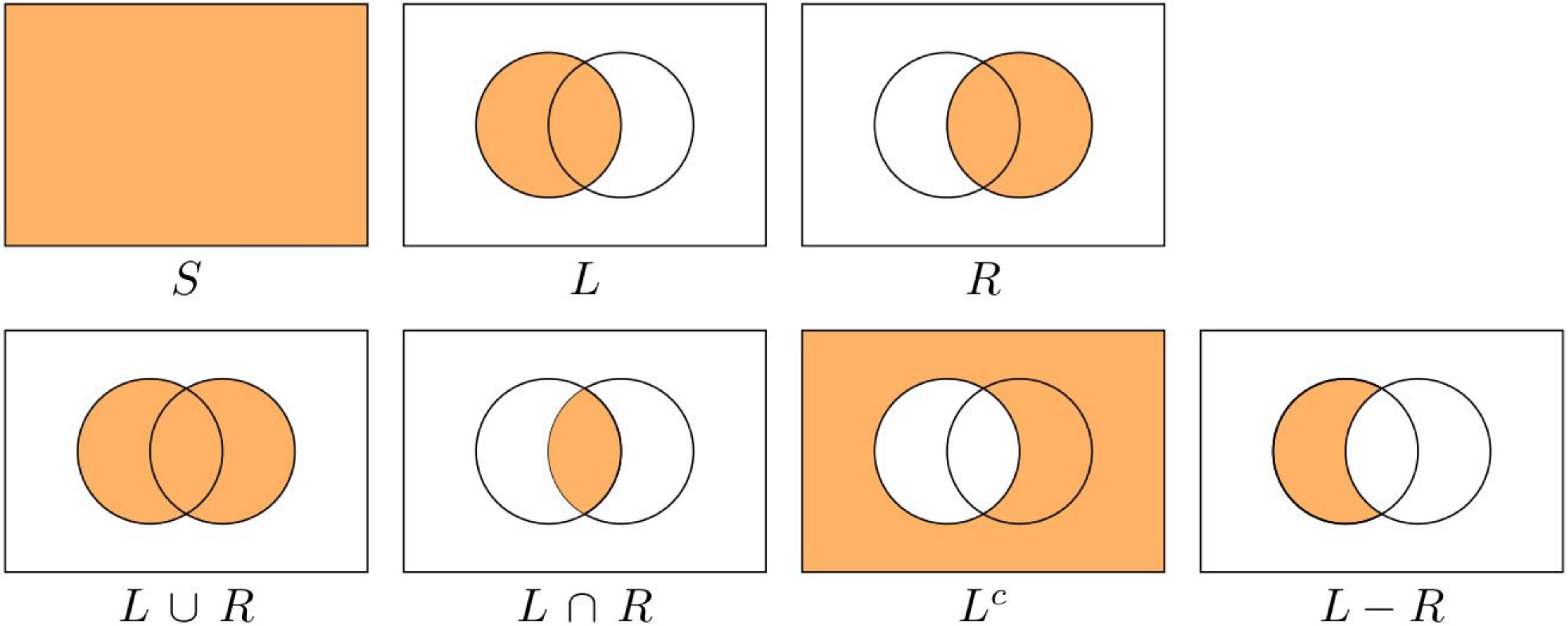
L = {Jan, Mar, Mai, Jul, Aou, Oct, Déc}

R = {Jan, Fév, Mar, Avr, Sep, Oct, Nov, Déc}

L ∩ R = {Jan, Mar, Oct, Déc} = les mois de 31 jours et un « r »

Diagramme de Venn

Représenter les opérations ensemblistes



Principes de comptage

Les deux principes suivants jouent un rôle fondamental en combinatoire.

- Principe d'addition
  - Soit deux ensembles A et B contenant respectivement m et n éléments et tels que $A \cap B = \varnothing$. Alors l'ensemble $A \cup B$ contient $m + n$ éléments.
- Principe de multiplication
  - Soit deux ensembles A et B contenant respectivement m et n éléments. Alors l'ensemble $A \times B$ contient $m \cdot n$ éléments.
  - Notation : $S \times T = \{(s, t)\}$

Principe d'inclusion-exclusion (1/2)

Exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une union finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections.

Principe d'inclusion-exclusion (2/2)

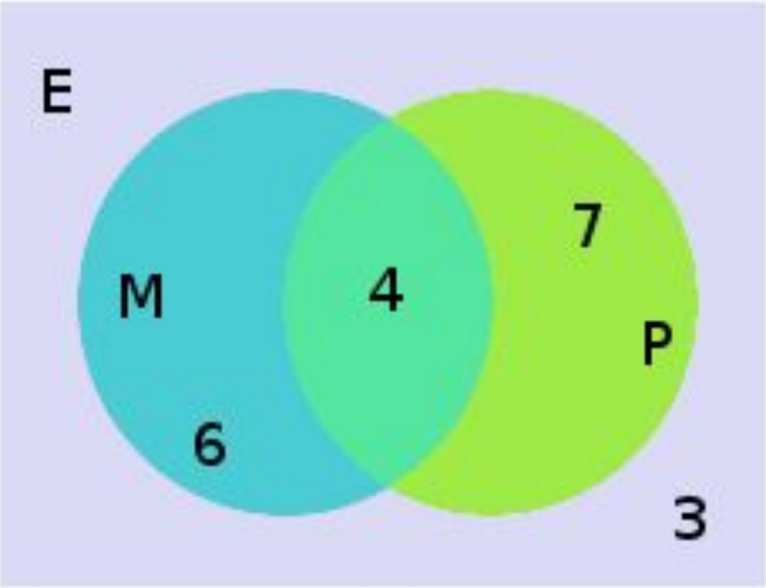
Parmi 20 étudiants, 10 étudient les mathématiques, 11 étudient la physique, et 4 étudient les deux.

Q : Combien y a-t-il d’étudiants qui n’étudient ni les mathématiques ni la physique ?

Principe d'inclusion-exclusion (2/2)

Parmi 20 étudiants, 10 étudient les mathématiques, 11 étudient la physique, et 4 étudient les deux.

Q : Combien y a-t-il d’étudiants qui n’étudient ni les mathématiques ni la physique ?



Question 1

L'ADN est constitué d'une séquence de nucléotides : A, C, G et T

Combien existe-t-il de séquences d'ADN différentes d'une longueur de 3 nucléotides ?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 64 (**D**) 81

Combien existe-t-il de séquences de 3 nucléotides sans répétition (c. -à-d. que tous les nucléotides sont différents) ?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 64 (**D**) 81

Question 1

L'ADN est constitué d'une séquence de nucléotides : A, C, G et T

Combien existe-t-il de séquences d'ADN différentes d'une longueur de 3 nucléotides ?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 64 (**D**) 81

Réponse : $4 \times 4 \times 4 = 64$

Combien existe-t-il de séquences de 3 nucléotides sans répétition (c. -à-d. que tous les nucléotides sont différents) ?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 64 (**D**) 81

Réponse : $4 \times 3 \times 2 = 24$

Question 2

Il y a 5 participants à la finale du 100 mètres.

De combien de façons les médailles d'or, d'argent et de bronze peuvent être attribuées ?

Question 2

Il y a 5 participants à la finale du 100 mètres.

De combien de façons les médailles d'or, d'argent et de bronze peuvent être attribuées ?

Réponse : $5 \times 4 \times 3$.

Il y a 5 façons de choisir la vainqueur. Il reste ensuite 4 façons de choisir le second, puis 3 façons de choisir le troisième.

Question 3

Je ne porte pas de vert (G) avec du rouge (R).

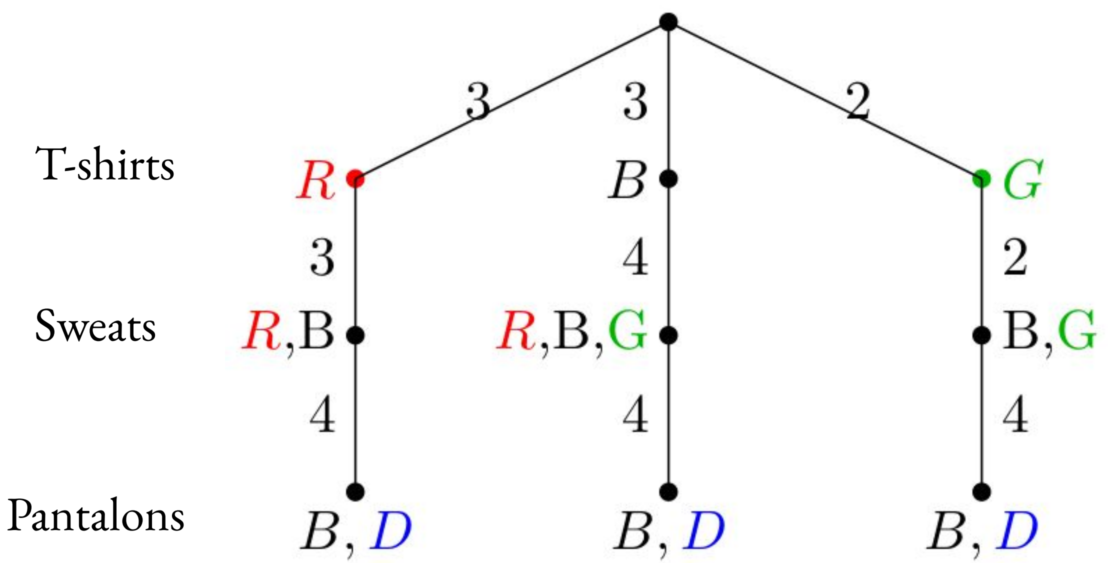
Je pense que le noir (B) et le denim (D) vont avec tout.

Voici ma garde-robe : T-shirts : 3B, 3R, 2G ; sweats 1B, 2R, 1G ; pantalons 2D, 2B.

Combien d’ensembles différents puis-je porter ?

Question 3 : solution

Admettons que l'on choisisse le T-shirt en premier. Selon que l'on choisisse un T-shirt compatible avec le vert ou le rouge, le nombre de sweats que l'on peut choisir ensuite varie. Ainsi, on divise le problème avant d'utiliser le principe de multiplication. La réponse peut facilement être **représentée par un arbre** :



En multipliant chacun des chemins :

Nombre d'ensembles = (3 × 3 × 4) + (3 × 4 × 4) + (2 × 2 × 4) = 100

Arrangement (*permutation*)

Une permutation d'objets distincts rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de succession de ces objets.

« *abc* » et « *cab* » sont différentes permutations de { *a*, *b*, *c* }

Arrangement de *p* éléments dans un ensemble de taille *n* (*partial permutation*)

Donnez tous les arrangements de 3 éléments de l'ensemble { *a*, *b*, *c*, *d* }.

abc	*abd*	*acb*	*acd*	*adb*	*adc*
bac	*bad*	*bca*	*bcd*	*bda*	*bdc*
cab	*cad*	*cba*	*cbd*	*cda*	*cdb*
dab	*dac*	*dba*	*dbc*	*dca*	*dcb*

Pourriez-vous le faire pour 7 éléments issus d'un ensemble de 10 ?

Combinaison

La combinaison est la sélection d'éléments d'un ensemble, sans tenir compte de l'ordre.

Donnez toutes les combinaisons de 3 éléments de $\{a, b, c, d\}$.

Combinaison

La combinaison est la sélection d'éléments d'un ensemble, sans tenir compte de l'ordre.

Donnez toutes les combinaisons de 3 éléments de $\{a, b, c, d\}$.

Réponse : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$

Formules

✔ Ordre
✖ Remise

Arrangement
Cas part. : $p = n$
(permutation)
$p \leq n$

$$A(p,n) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

✖ Ordre
✖ Remise

Combinaison
$p \leq n$

$$C(p,n) = \frac{A(p,n)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Coefficient binomial

✔ Ordre
✔ Remise

$$p - uplet = n^p$$

✖ Ordre
✔ Remise

Multiensemble
(*multiset*)

$$D(p,n) = C(p, n+p-1) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple : $n = 4$, $p = 2$

Arrangement

	A	B	C	D
A	AA	**AB**	**AC**	**AD**
B	**BA**	BB	**BC**	**BD**
C	**CA**	**CB**	CC	**CD**
D	**DA**	**DB**	**DC**	DD

Combinaison

	A	B	C	D
A	AA	**AB**	**AC**	**AD**
B	BA	BB	**BC**	**BD**
C	CA	CB	CC	**CD**
D	DA	DB	DC	DD

p-uplet

	A	B	C	D
A	**AA**	**AB**	**AC**	**AD**
B	**BA**	**BB**	**BC**	**BD**
C	**CA**	**CB**	**CC**	**CD**
D	**DA**	**DB**	**DC**	**DD**

Multiensemble

	A	B	C	D
A	**AA**	**AB**	**AC**	**AD**
B	BA	**BB**	**BC**	**BD**
C	CA	CB	**CC**	**CD**
D	DA	DB	DC	**DD**

Exemple : $n = 4$, $p = 2$

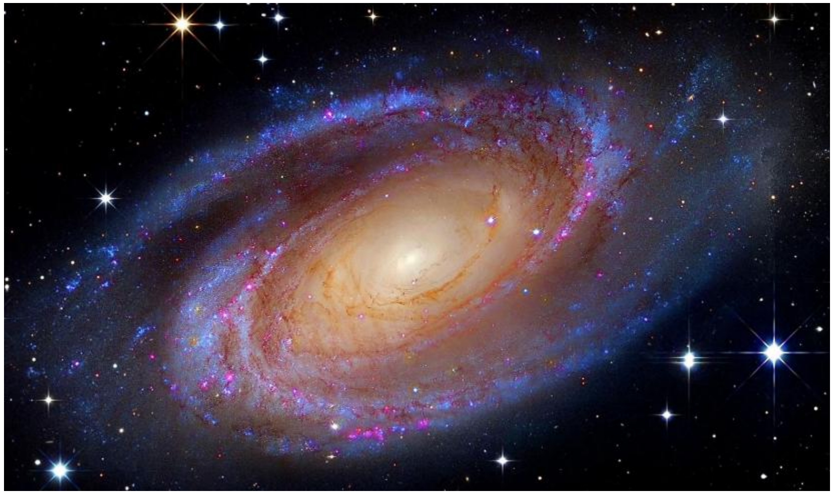
Problème : 4 pirates, Alice, Bob, Charlie et David, doivent se partager 2 pièces d'or *indistinctes*.

Question : de combien de façons différentes peuvent-ils effectuer ce partage ?

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

Cas particulier de l'arrangement : *p* = *n*

- $A(p, n) = n! \,/\, 0! = n!$
- Un jeu de 52 cartes peut être arrangé (*permuté*) de $A(p, n) = 52!$ façons différentes
  - $52! \approx 10^{67}$



Question 4

(a) Comptez le nombre de façons d'avoir exactement 3 « face » pour 10 lancers de pièce.
(b) Pour une pièce équilibrée, quelle est la probabilité de faire exactement 3 fois « face » pour 10 lancers ?

Réponses

(a) $C(3, 10)$; autres notations ${}_{10}C_3$ ou $\binom{10}{3}$
(b) Il y a 120 résultats possibles pour 10 lancers (principe de multiplication). Pour une pièce équilibrée, chaque résultat est équiprobable :

$$\frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} = \frac{120}{1024} = 0.117$$

Terminologie

- Expérience aléatoire : procédure qui peut être répétée.
- Univers : l'ensemble de toutes les issues (résultats) pouvant être obtenues au cours d'une expérience aléatoire ; il est noté Ω, *U* ou *S*.
- Évènement, ω : une partie (sous-ensemble) de l'univers
- Fonction de probabilité, $P(\omega)$: associe à chaque évènement $\omega \in \Omega$ sa probabilité de se produire
  - Cette probabilité est comprise entre 0 et 1
  - La probabilité totale de tous les évènements est 1

Exemple

Expérience aléatoire : lancer d'une pièce équilibrée et observation du résultat : pile (*tail*, T) ou face (*head*, H).

Univers : $\Omega = \{ H, T \}$.

Fonction de probabilité : $P(H) = 0{,}5$; $P(T) = 0{,}5$

L’univers est discret

Discret : qui contient un nombre défini de valeurs (c.-à-d., qui peut être listé)

Exemples :

- { a, b, c, d } (fini)
- { 0, 1, 2, . . . } (infini)

Les évènements

Les événements forment des ensembles, qui peuvent être décrits par

- des mots
- des notations (mathématiques)
- des diagrammes de Venn

Expérience aléatoire : lancer d'une pièce 3 fois

Évènement :

faire au moins 2 fois face = { *HHH*, *HHT*, *HTH*, *THH* }

Les évènements

Les évènements « exactement 2 fois face » et « exactement 2 fois pile » sont mutuellement exclusifs (ou disjoints) :

$\{ THH, HTH, HHT \} \cap \{ TTH, THT, HTT \} = \varnothing$

Notations mathématiques

Univers : $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \}$

« espace des événements élémentaires » ou « espace des observables », ou encore « espace échantillon »

Évènement $\omega \in \Omega$

Probabilité entre 0 et 1 : $0 \leq P(\omega) \leq 1$

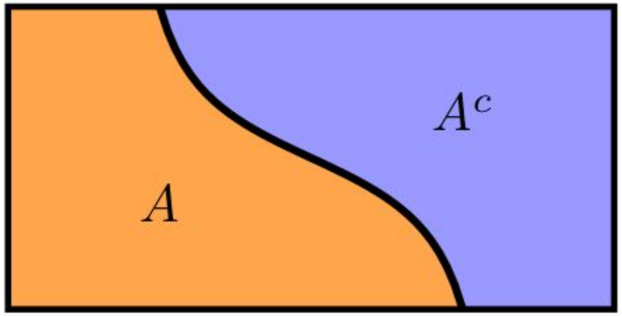
Probabilité totale égale à 1 : $\sum_{j=1}^{n} P(\omega_j) = 1, \quad \sum_{\omega \in S} P(\omega) = 1$

Événement A : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

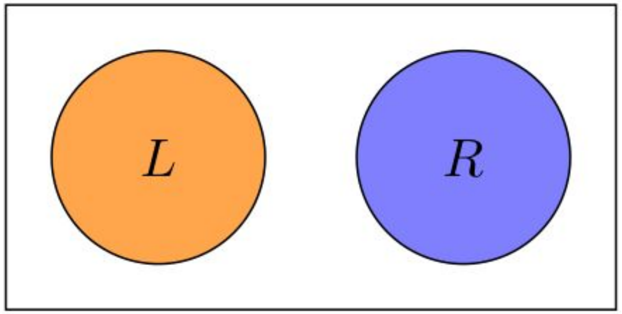
Probabilités et opérations sur les évènements (ensembles)

Événements A, L, R

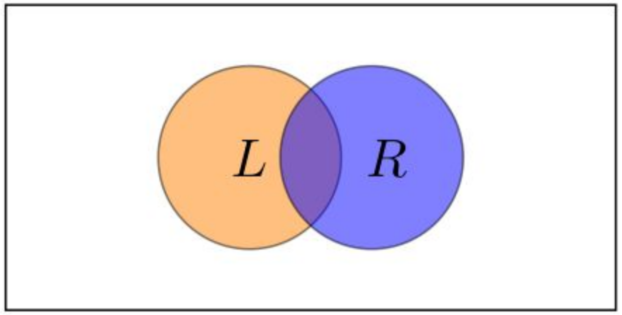
1. Événements complémentaires : $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. Principe d'inclusion-exclusion :
   $P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R)$
3. Événements disjoints ou mutuellement exclusifs :
   $P(L \cup R) = P(L) + P(R)$



$\Omega = A \cup A^c$, pas de recouvrement



$L \cup R$, pas de recouvrement



$L \cup R$, recouvrement = $L \cap R$

Exemple : partitionnement de l’univers

TD 1.2

Soit un groupe de *n* personnes.

B : « 2 personnes du groupe ont le même anniversaire »

$\overline{\text{B}}$: « tous les anniversaires sont différents »

c : « 3 personnes du groupe ont le même anniversaire »

$\overline{\text{c}}$: ❓

Exemple : partitionnement de l’univers

c : « 2 personnes du groupe ont le même anniversaire »

$\overline{c}$:

1. « tous les anniversaires sont différents »

2. « une paire a le même anniv et le reste est différent »

3. « deux paires et le reste est différent »

4. « trois paires et le reste est différent »

…

***n*/2 + 1.** « *n*/2 paires »

***n*/2 + 2.** « trois ou plus ont le même anniversaire »