Université d'Evry val d'Essonne
Master MIAGE

TD 2 - Probabilités - Corrections

Exercice 1 - Plan de table et rapport de taille

Etiquettons les chaises de 1 à *n* dans le sens des aiguilles d'une montre. Définissons X_i la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli qui prend une valeur 1 si la personne sur la i*ème* chaise est plus petite que ses voisins, 0 sinon.

Sur un groupe de 3 personnes, la probabilité que celui du milieu soit le plus petit est de $\frac{1}{3}$.

Donc X_i ~ Bernoulli(1/3)

Soit N, la somme des X_i
alors N ~ Binomiale(n, 1/3)

E(N) = n/3

Exercice 2 - Indépendance

(a) On a P(A) = P(b) = P(C) = 1/2.Si on écrit le résultat du premier dé d'abord, on peut aisément lister tous les résultats qui satisfont les intersections:
$A \cap B$ = { (1,1) ; (1,3) ; (1,5) ; (3,1) ; (3,3) ; (3,5) ; (5,1) ; (5,3) ; (5,5) }
$A \cap C$ = { (1,2) ; (1,4) ; (1,6) ; (3,2) ; (3,4) ; (3,6) ; (5,2) ; (5,4) ; (5,6) }
$B \cap C$ = { (2,1) ; (4,1) ; (6,1) ; (2,3) ; (4,3) ; (6,3) ; (2,5) ; (4,5) ; (6,5) }
En comptant, on voit que $p(A \cap B) = 1/4 = p(A).p(B)$. Même raisonnement pour les autres intersections. Donc A, B, et C sont indépendants deux-à-deux.

Par contre, $A \cap B \cap C = \emptyset$ car si on a un résultat impair sur les deux dés, leur somme sera paire. Donc $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A).P(B).P(C)$. On en conclut qu'ils ne sont donc pas mutuellement indépendants.

(b) En additionnant les régions, on obtient P(A) = 0,225 + 0,05 + 0,125 = 0,5. De même, P(B) = 0,5 et P(C) = 0,5. Donc $P(A).P(B).P(C) = 0,5^3 = 0,125$. Donc oui, la formule est vérifiée.
Pour être mutuellement indépendants, les événements doivent vérifier la formule ET être indépendants deux-à-deux.
La formule est vérifiée, par contre, on voit que $P(A \cap B) = 0,05 + 0,125 = 0,175$ mais $P(A).P(B) = 0,5^2 = 0,25$.
Comme $P(A).P(B) \neq P(A \cap B)$, les événements A et B sont dépendants (ne sont pas indépendants). On peut dire la même chose pour A et C ou B et C. Les événements A,B et C ne sont donc pas indépendants deux-à-deux, ils ne sont donc pas non plus mutuellement indépendants.

(c) Appelons A l'événement "la famille contient des enfants des deux sexes" et B l'événement "il y a au plus une seule fille". Maintenant, appelons X le nombre de filles dans la famille, on a:
P(A) = $P(1 \leq X \leq n - 1)$
P(B) = $P(X \leq 1)$
$P(A \cap B) = P(X = 1)$
X compte le nombre de succès "être une fille", de probabilité de succès 1/2, on peut donc dire que X ~ Binom(n, 1/2). On a alors $P(X = k)$ $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Donc

$P(A) = 1 - P(X = 0) - P(X = n) = 1 - \frac{2}{2^n}$

$P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{n+1}{2^n}$

Comme on nous dit que A et B sont indépendants, on sait que P(A).P(B) = $P(A \cap B)$, donc:

$$\left(\frac{n+1}{2^n}\right)\left(1-\frac{2}{2^n}\right)=\frac{n}{2^n}$$

$$(n+1)\left(1-\frac{2}{2^n}\right)=n$$

$$n+1-\frac{n+1}{2^{n-1}}=n$$

$$2^{n-1}=n+1$$

En essayant des petites valeurs de n, on voit que l'équation est vérifiée pour n = 3. Il y a donc 3 enfants dans cette famille !

Exercice 3 - Dés

(a) On peut dresser les tables suivantes:

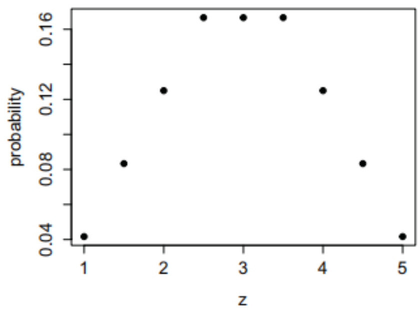
X	1	2	3	4
P(X=k)	1/4	1/4	1/4	1/4
X^2	1	4	9	16

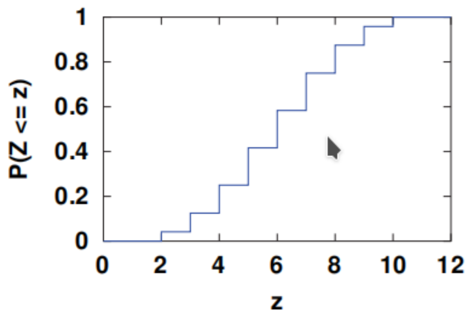
Y	1	2	3	4	5	6
P(Y=k)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Y^2	1	4	9	16	25	36

On utilise la formule de Huygens pour calculer les variances: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
E(X) = 1/4 * (1+2+3+4) = 5/2 ; $E(X^2)$ = 1/4 * (1+4+9+16) - 15/2
donc V(X) = 5/4, donc $\sigma_X = \sqrt{5/2}$ = 1,118
E(Y) = 7/2 ; $E(Y^2)$ = 91/6 ;
donc V(Y) = 35/12 et $\sigma_Y = \sqrt{35/12}$ = 1,708

X et Y étant indépendants, on peut écrire V(Z) = V((X+Y)/2) = 1/4 [V(X) + V(Y)] = 25/24.
Et donc $\sigma_Z = \sqrt{25/24} = 1{,}021$.

(b)





(c) On liste les paires (X,Y) qui satisfont X > Y : { (2,1) ; (3,1) ; (3,2) ; (4,1) ; (4,2) ; (4,3) }. Il y en a 6 sur 24 possibilités, donc P(X > Y) = 6/24 = 1/4.
On peut aussi calculer :
P(X > Y | X = 2) = 1/6
P(X > Y | X = 3) = 2/6
P(X > Y | X = 4) = 3/6

Appelons W le gain lors d'un jeu, et calculons E(W):
E(W) = -1 * P(Y ≥ X)
+ 2 * 2 * P(X > Y | X = 2).P(X = 2)
+ 2 * 3 * P(X > Y | X = 3).P(X = 3)
+ 2 * 4 * P(X > Y | X = 4).P(X=4)

= -1 *(1 - 1/4) + 4*1/6*1/4 + 6*1/3*1/4 + 8*1/2*1/4
= -3/4 + 1/6 + 1/2 + 1 = -18/24 + 4/24 +12/24 +24/24 = 22/24 = 11/12.

Donc si nous jouons 60 fois, $E(W_1 + W_2 + \ldots + W_{60}) = E(W_1) + E(W_2) + \ldots + E(W_{60}) = 60*E(W) = 55$.
Nous devrions gagner 55€ à ce jeu.

Exercice 4 - Chances

(a) Dans les deux cas, il y a 10 pièces sur 50, donc p = 1/5 = 0.2.

(b) Appelons F1 l'événement "Face au premier lancer", et H3, H5 et H7 les hypothèses sur la pièce choisie. Par la formule des probabilités totales, P(F1) = P(F1|H3).P(H3) + P(F1|H5).P(H5) + P(F1|H7).P(H7) = 0,2*0,3 + 0,6*0,5 + 0,2*0,7 = 0,5.
(c) Dressons une table de mise à jour bayésienne. P(F1) vient d'être calculé en (b).

Hypothèse *H*	A priori *p(H)*	Vraissemblance de F1 *p(F1|H)*	A posteriori ou "Crédence" de *H* *p(F1|H).p(H)/p(F1)*
H3 : p = 0.3	0,2	0,3	0,3*0,2/0,5 = 0,12
H5 : p = 0.5	0,6	0,5	0,5*0,6/0,5 = 0,6
H7 : p = 0.7	0,2	0,7	0,7*0,2/0,5 = 0,28

(d) Il faut utiliser notre à posteriori du premier lancer comme à priori pour le second lancer. On peut dire que pour chaque hypothèse *H*, p(H) vaut maintenant p(H|F1). P(F2) = P(F2|H3).P(H3|F1) + P(F2|H5).P(H5|F1) + P(F2|H7).P(H7|F1) = 0,12*0,3 + 0,6*0,5 + 0,28*0,7 = 0,532.

Exercice 5 - Mensonges en salle d’audience

(a) La probabilité de 1/1000 est la probabilité *a priori* que Monsieur S. tue sa femme, sachant qu’il est brutal : $p(M|B)$
Il faut la mettre à jour en une probabilité *a posteriori* $p(M|K,B)$, en tenant compte d’une donnée supplémentaire : Madame a été tuée.

D’après le théorème de Bayes :

$$\begin{aligned} p(M|K,B) &= [p(K|M,B) / p(K|B)] \times p(M|B) \\ &= [1 / p(K|B)] \times p(M|B) \\ &= 0{,}001 / p(K|B) \end{aligned}$$

Sachant que $p(K|B) \in [0,1]$ (comme toute probabilité), la probabilité mise à jour sera nécessairement plus forte que 1/1000.

(b) 4 erreurs de raisonnement :

1. L’accusateur est arrivé au chiffre de 1/73 000 000 de la façon suivante: La probabilité qu’un enfant d’une famille aisée et non fumeur meure est de 1/8543, donc la probabilté que 2 enfants meurent est de $(1/8543)^2$. Il a donc supposé que les deux événements sont indépendants (probabilité de l’intersection = produit des probabilités). Il oublie qu’à cause de facteurs génétiques et environnementaux, cette hypothèse est probablement fausse.

2. Il regarde le taux de décès par mort subite seulement chez les familles aisées et non fumeuses, mais utilise le chiffre de 700 000 naissances par an chez toutes les familles confondues

3. Le “une fois tous les cent ans” n’a pas de sens : multiplier le nombre de naissances (uniques) par la probabilité de deux morts de suite ne donne rien.
4. Même si la double mort subite est rare, le double infanticide l’est peut être encore plus Il faut regarder le rapport de ces probabilités pour conclure, pas seulement l’une des deux.