Statistiques et probabilités
Cours n°6

Guillaume Postic

Université Paris-Saclay, Univ. Evry
Département informatique

Master 1 MIAGE - 2022/2023

Statistiques descriptives

Objectif : décrire, c'est-à-dire de résumer ou représenter, par des statistiques, les données disponibles quand elles sont nombreuses.

- Indicateurs de tendance centrale : moyenne, médiane
- Indicateurs de dispersion : variance, écart-type, IQR

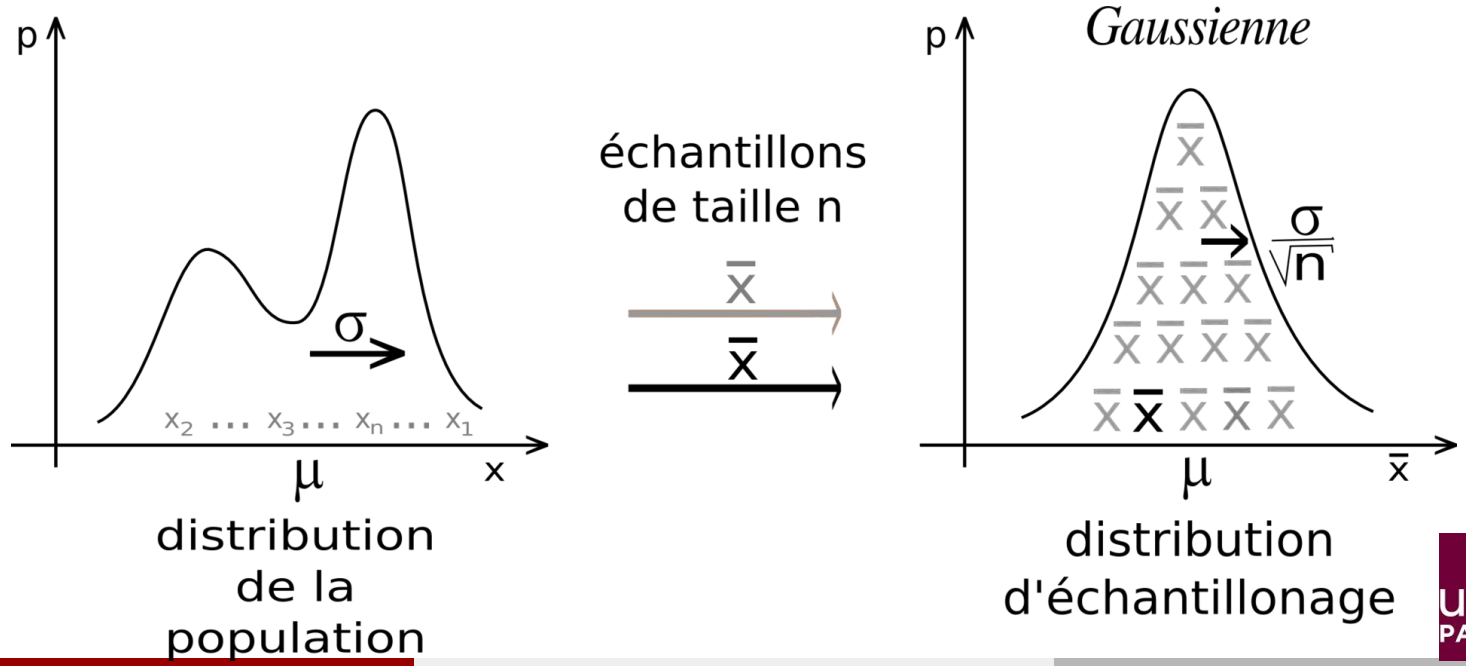
Inférence statistique (1)

Ensemble des techniques permettant d'**induire les caractéristiques d'un groupe général (la population) à partir de celles d'un groupe particulier (l'échantillon)**, en fournissant une mesure de la certitude de la prédiction : la probabilité d'erreur.

Inférence statistique (2)

Exemple : **estimation** de la moyenne et TLC

Plus *n* est grand, plus la dispersion autour de la moyenne (*i.e.* variance ou écart type) est petite.



Test statistique (1)

Un test, ou **test d'hypothèse**, est une procédure de décision entre deux hypothèses. Il s'agit d'une démarche consistant à **rejeter ou à ne pas rejeter** une hypothèse statistique, appelée hypothèse nulle, en fonction d'un échantillon de données.

H_0 : hypothèse nulle

H_1 : hypothèse alternative

Test statistique (2)

Objectifs

- Inférence : comparer des indicateurs mesurés sur un échantillon à ceux d'une distribution théorique (population)
- Comparer plusieurs groupes par des indicateurs mesurés sur des échantillons
- Prédiction (p. ex., régression)

Exemple : test Z

- But : comparer deux distributions par leurs moyennes
  - Échantillon vs population (de paramètres μ_0 et σ)
- H_0 : les moyennes ne sont pas significativement différentes
- H_1 : les moyennes sont différentes

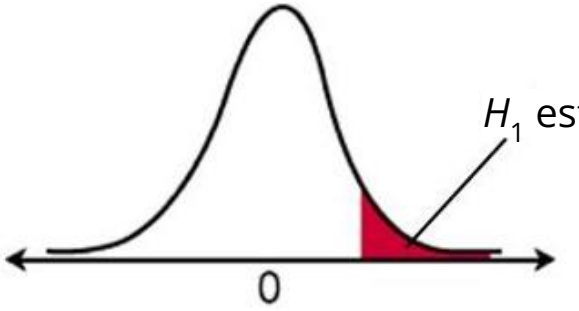
À partir des données, on calcule la « statistique de test », ou « variable de décision » :

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}$$

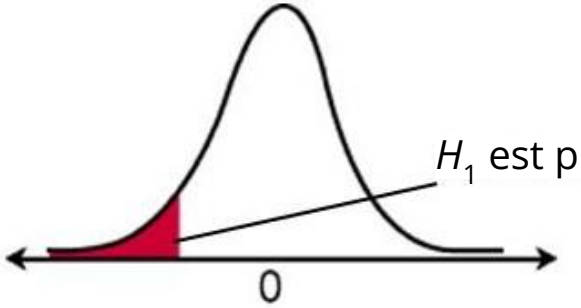
Cette valeur du test s'interprète comme une **différence standardisée entre les deux moyennes**.

On reporte cette valeur sur la distribution représentant l'hypothèse nulle (H_0) : la distribution Z.

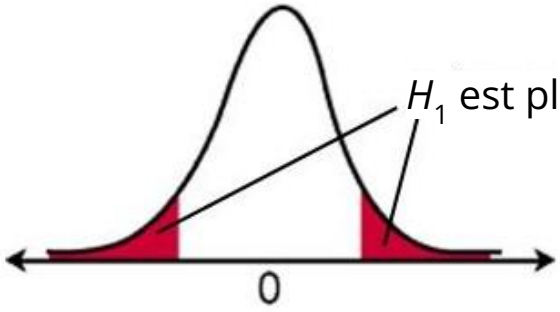
Régions de rejet (et non-rejet)



Test unilatéral droit



Test unilatéral gauche



Test bilatéral

Valeur p (*p-value*)

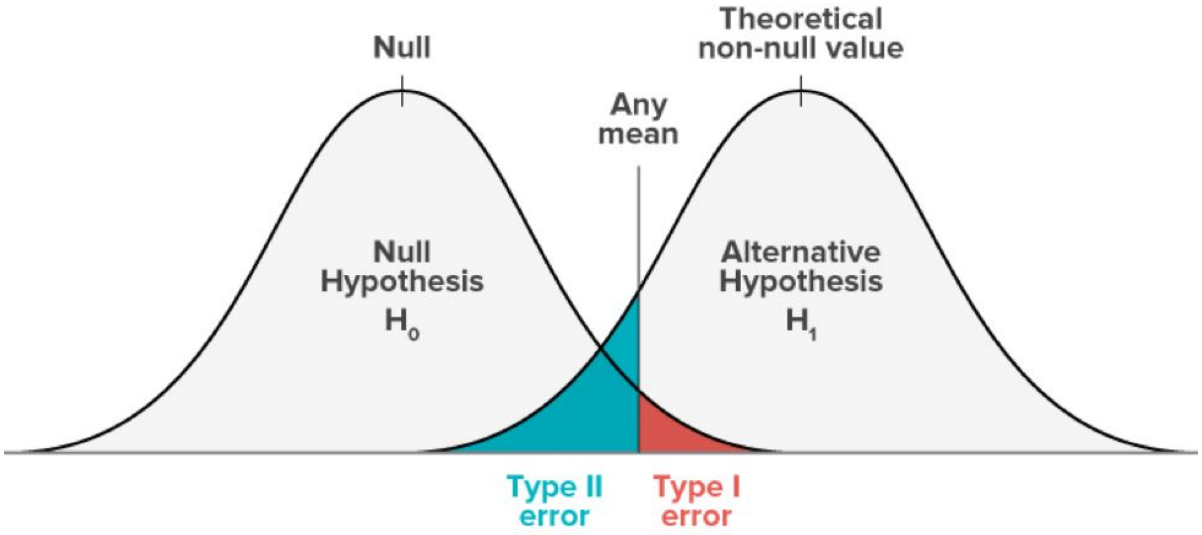
Plus on s'éloigne de 0, c'est à dire plus la différence entre les moyennes est grande, plus la **probabilité d'observer une différence au moins aussi grande** (quand on considère les moyennes comme étant égales, car on se place sous H_0) est faible.

Cette probabilité est la *p-value*. **Plus elle est faible, plus on peut rejeter l'hypothèse H_0**, donc plus la différence entre les moyennes est significative. Sa valeur peut être calculée en intégrant la fonction de distribution.

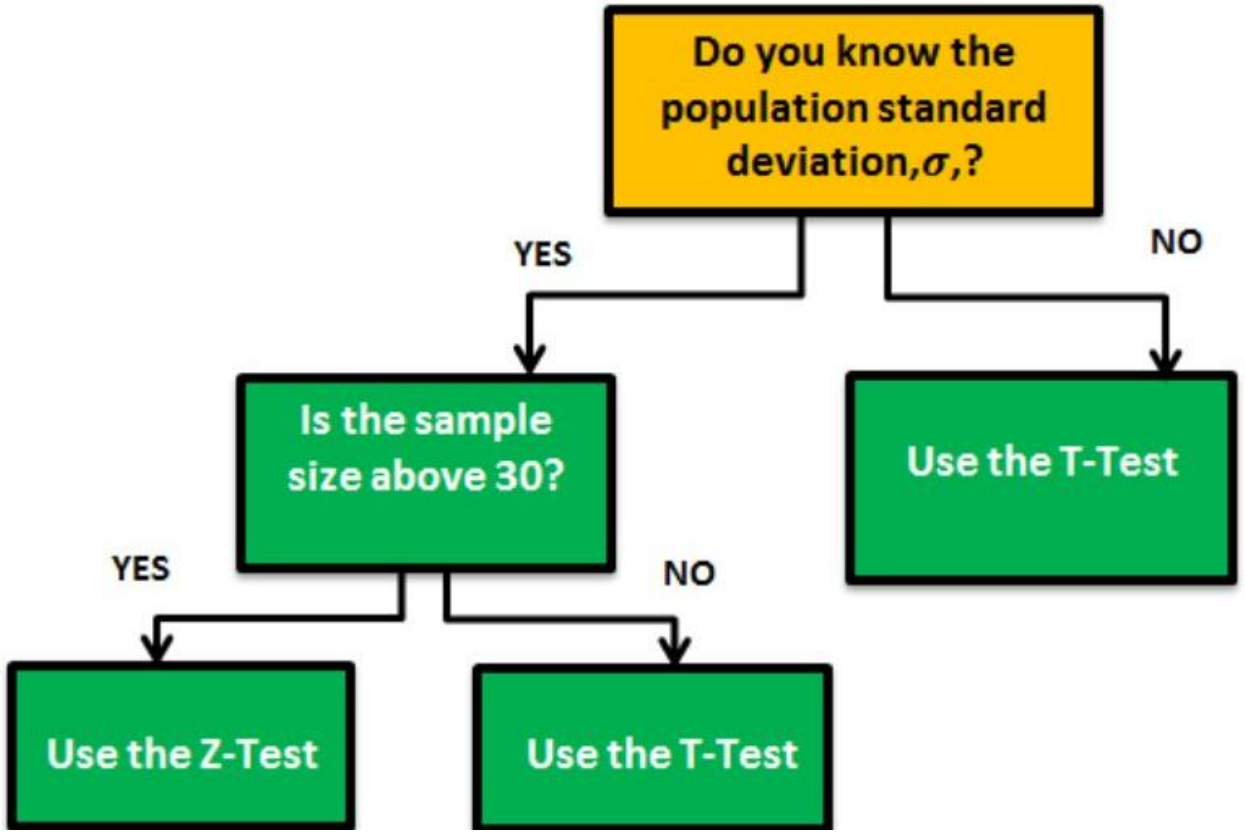
Erreurs de types I et II

On compare la *p-value* à une valeur seuil : la **probabilité α de se tromper en rejetant H_0 (erreur de type I ou risque de première espèce)**. Si $p < \alpha$, la différence entre les moyennes est significative (on rejette H_0).

Il est possible de calculer une **probabilité β de se tromper en rejetant H_1**. Cela nécessite donc une seconde distribution représentant l'hypothèse alternative H_1. La moyenne de cette seconde distribution sera arbitrairement définie. Enfin, la **puissance du test sera calculée par $1-\beta$**.



Conditions d'application



Test de Student (1)

- But : comparer deux distributions par leurs moyennes
  - Échantillon vs population (de paramètres μ_0)
- H_0 : les moyennes ne sont pas significativement différentes
- H_1 : les moyennes sont différentes

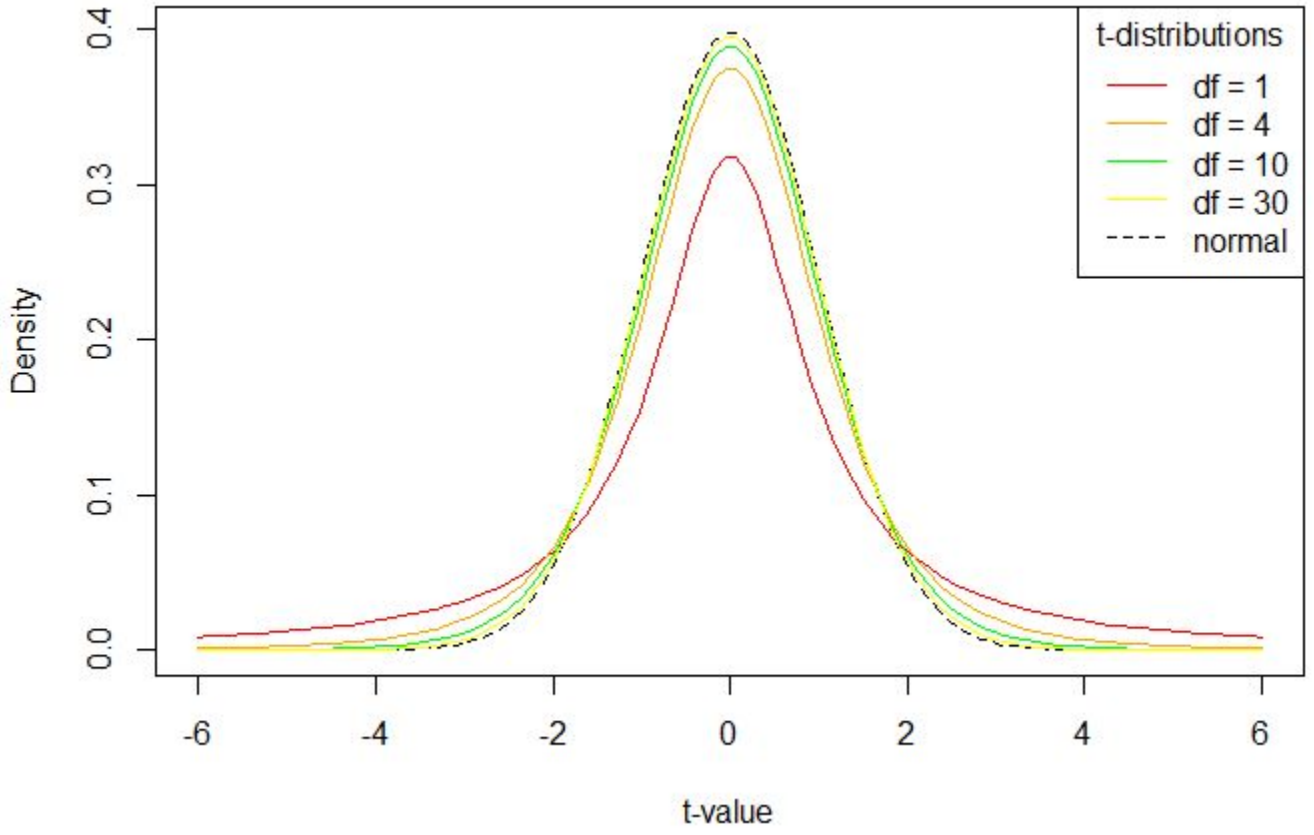
À partir des données, on calcule un **estimateur de σ**, puis la statistique de test :

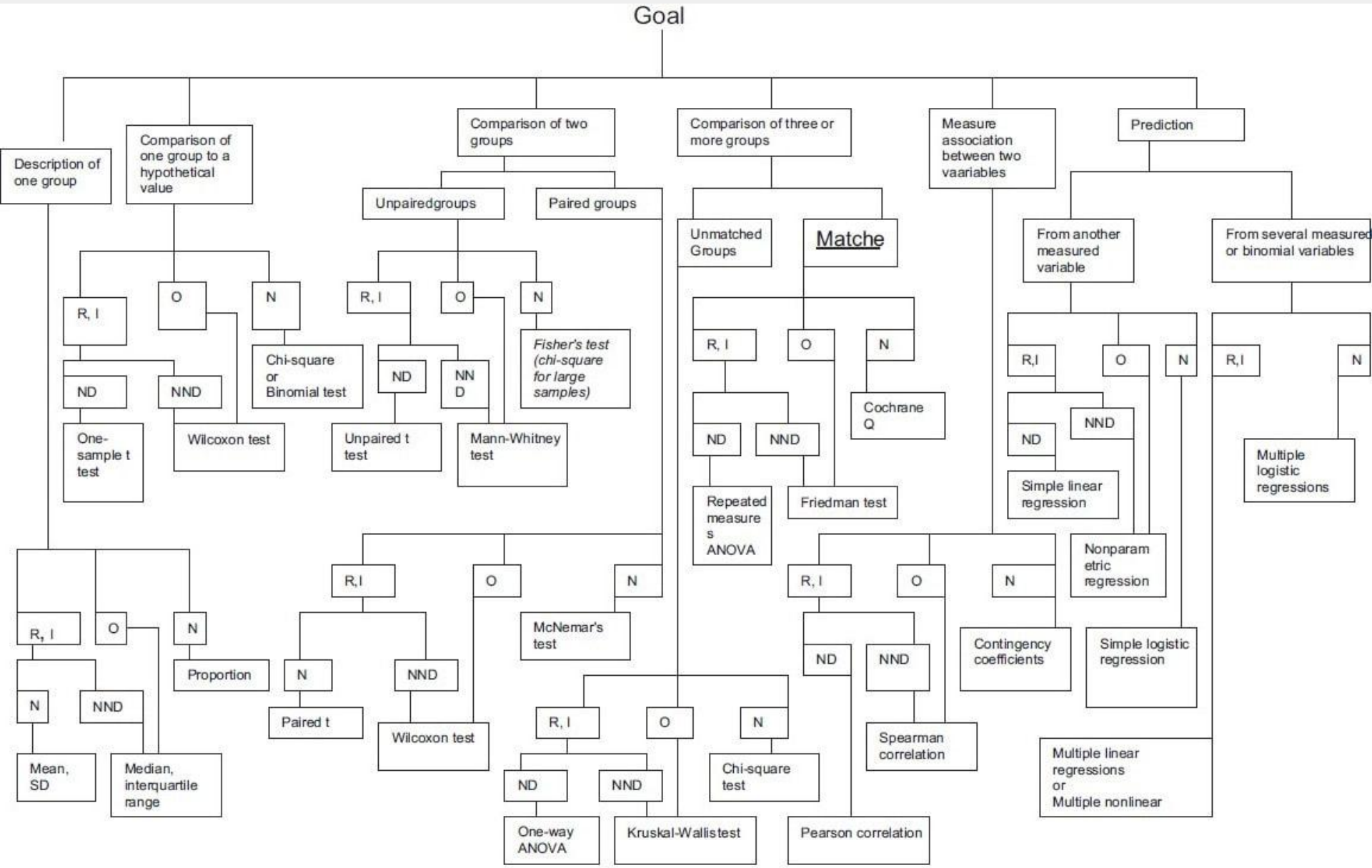
$$t = \frac{Z}{s} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

La variable de décision t suit une **loi de Student à n–1 degrés de liberté** sous H_0 (théorème de Cochran).

Test de Student (2)

df : *degrees of freedom*





R, I = Ratio and Interval data O= Ordinal data N = Nominal data

N = Normal distribution NND = Non normal distribution

Tests non-paramétriques

- Un test paramétrique est un test pour lequel on fait une hypothèse paramétrique sur la loi des données sous H_0 (loi normale, loi de Poisson...). Les hypothèses du test concernent alors les paramètres de cette loi.
- Un test non-paramétrique est un test ne nécessitant pas d'hypothèse sur la loi des données.