Statistiques et probabilités
Cours n°5

Guillaume Postic

Université Paris-Saclay, Univ. Evry
Département informatique

Master 1 MIAGE - 2022/2023

Loi de probabilité jointe

Loi de probabilité à **plusieurs variables**

- Cas discret : fonction de masse $p(x_i, y_j)$
- Cas continu : fonction de densité $f(x, y)$
- Fonction de répartition $F(x, y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y)$

Loi de probabilité jointe : cas discret

Exemple 1

Jet de deux dés à 6 faces : premier *X*, second *Y*

Table des probabilités jointes

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Loi de probabilité jointe : cas discret

Exemple 2

Jet de deux dés à 6 faces : premier *X*, total (somme) *T*

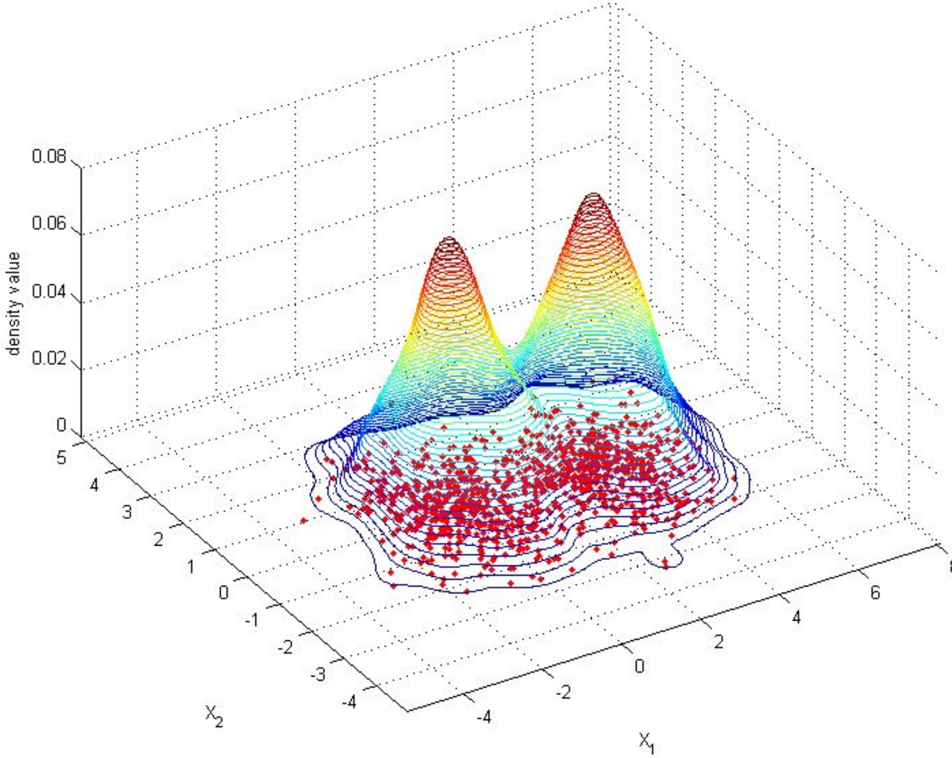
Table des probabilités jointes

$X \backslash T$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

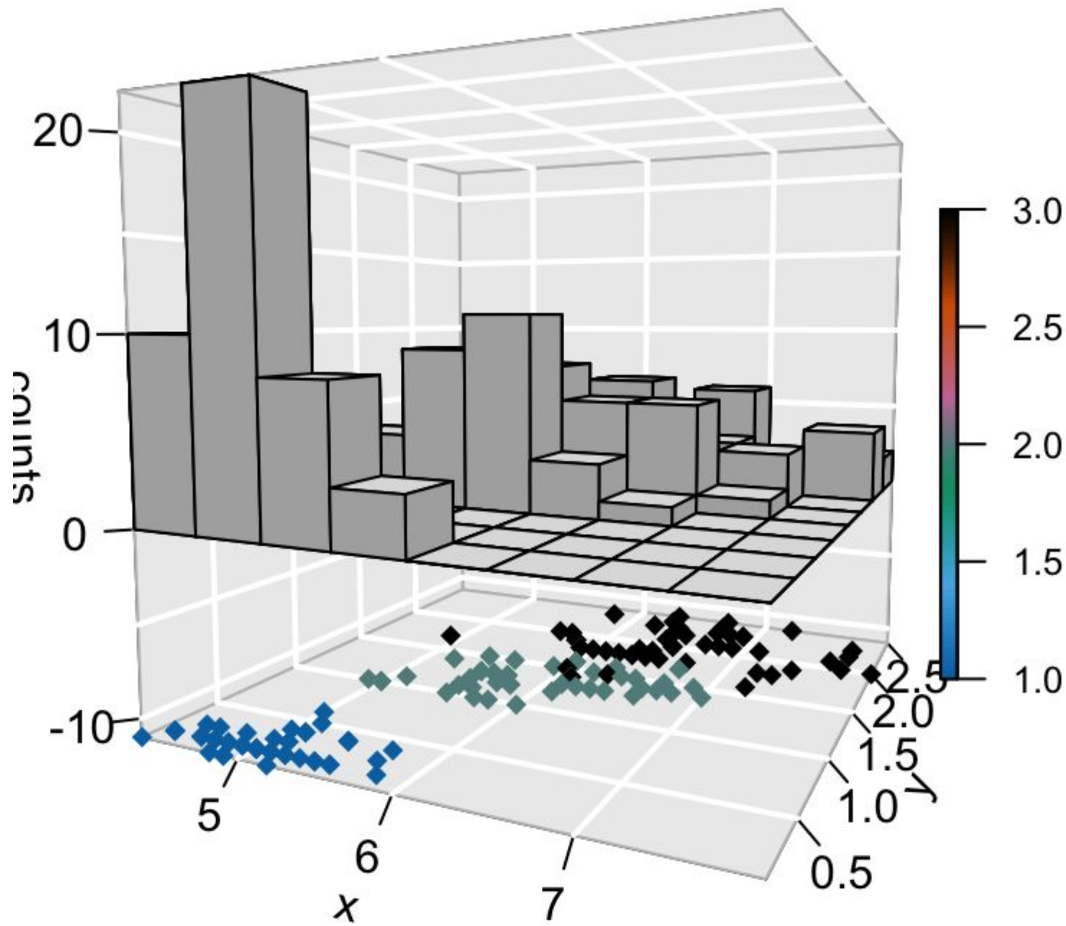
Loi de probabilité jointe : cas continu

Exemple

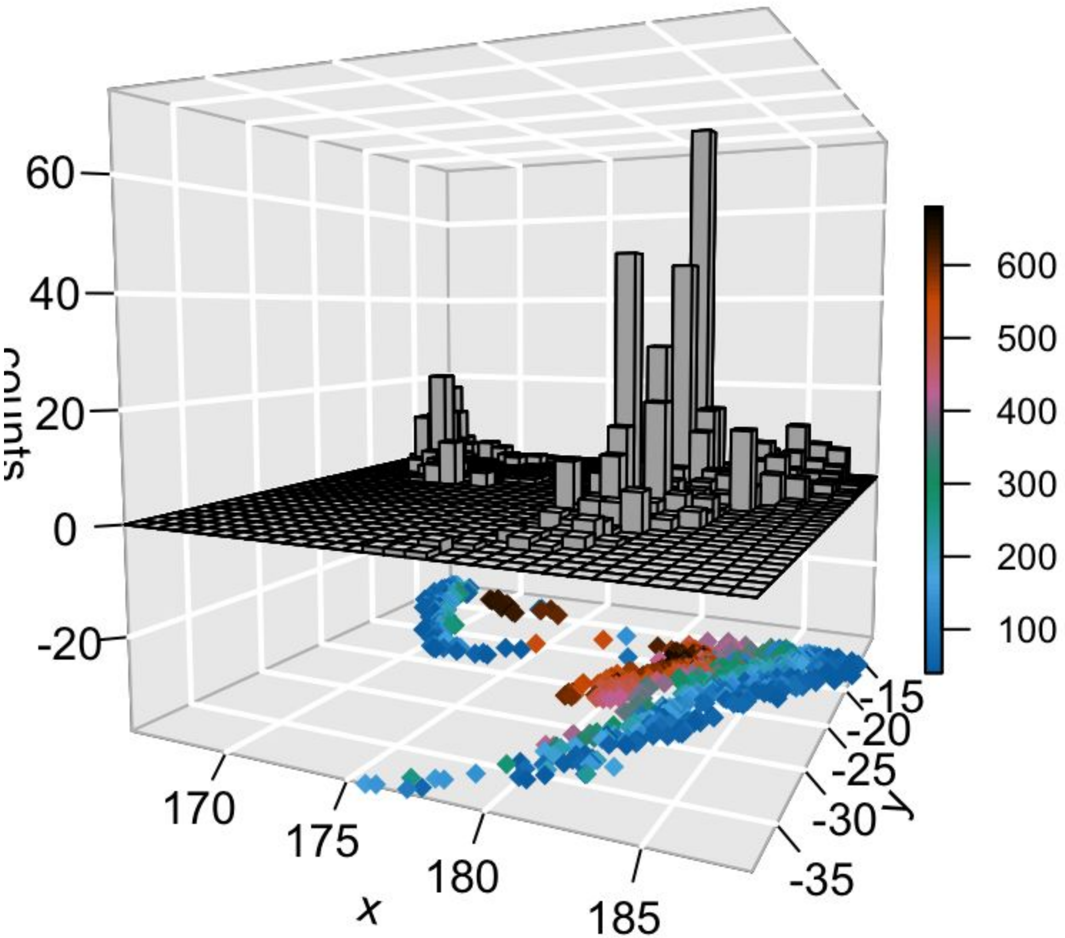
- X prend des valeurs dans l'intervalle $[a, b]$ et Y dans $[c, d]$
- (X, Y) prend des valeurs dans $[a, b] \times [c, d]$



Loi de probabilité jointe : cas continu



Loi de probabilité jointe : cas continu



Loi de probabilité jointe

Propriétés des fonctions de masse et densité jointes

Cas discret

1. $0 \leq p(x_i\,, y_j) \leq 1$
2. Probabilité totale vaut 1

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$$

Cas continu

1. $0 \leq f\,(x, y)$
2. Probabilité totale vaut 1

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

<u>Note</u> : $f\,(x, y)$ peut être plus grand que 1,
car **c'est une densité, pas une probabilité**

Covariance

Mesure du degré avec lequel deux variables aléatoires varient conjointement.

Par exemple : le poids et la taille d'individus

Pour X et Y variables aléatoires de moyennes μ_X et μ_Y

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(\,(X - \mu_X)\,(Y - \mu_Y)\,)$$

Covariance

Propriétés

1. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X , Y)$, pour des constantes a, b, c, d
2. $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$
3. $\mathrm{Cov}(X , X) = \mathrm{Var}(X)$
4. $\mathrm{Cov}(X , Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$
5. Si X et Y sont indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X , Y) = 0$
6. ⚠️ La réciproque n'est pas vraie : même si la covariance est nulle, les variables peuvent ne pas être indépendantes

Corrélation

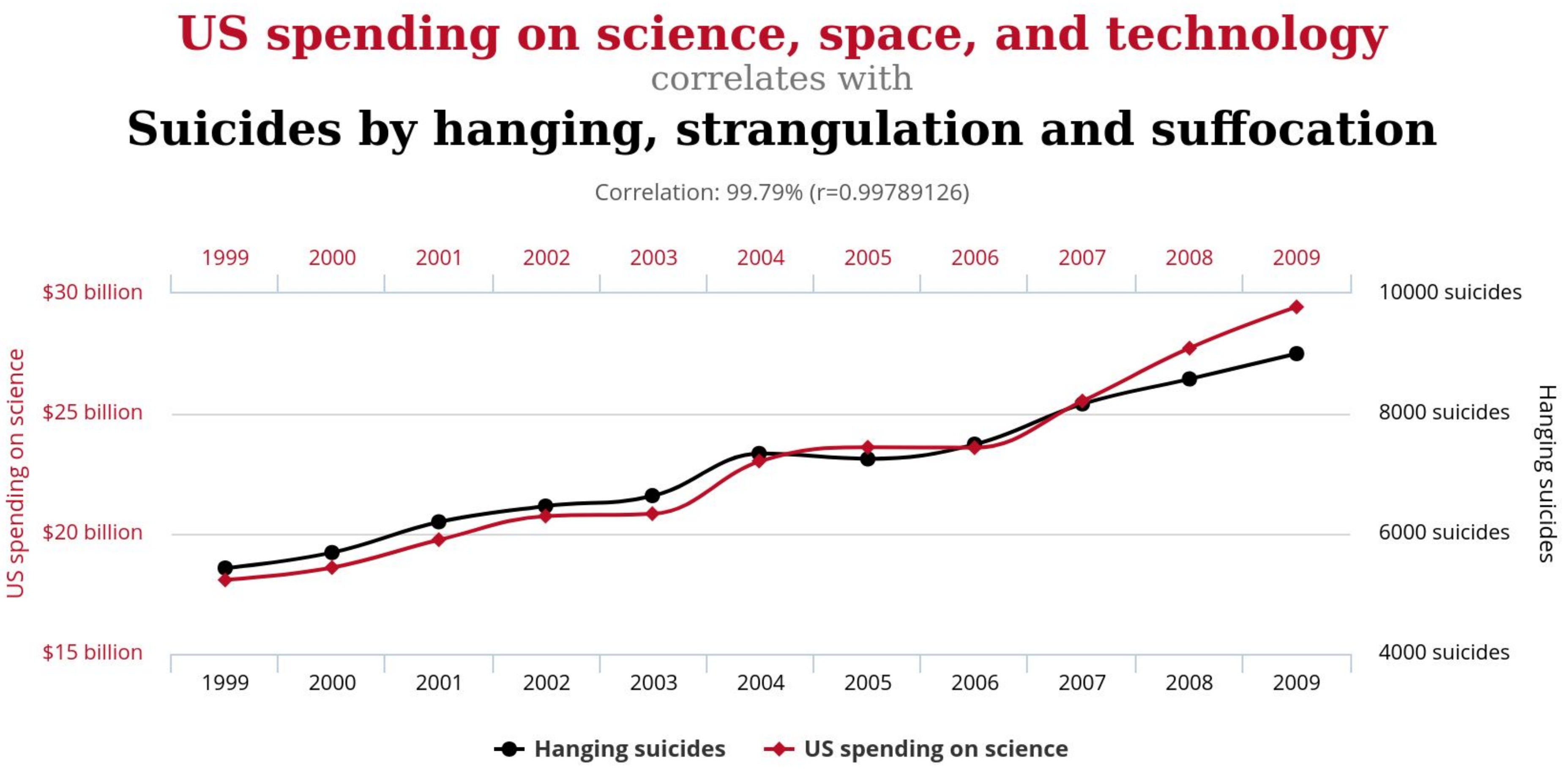
Le coefficient de corrélation (de Pearson) entre X et Y est défini par :

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

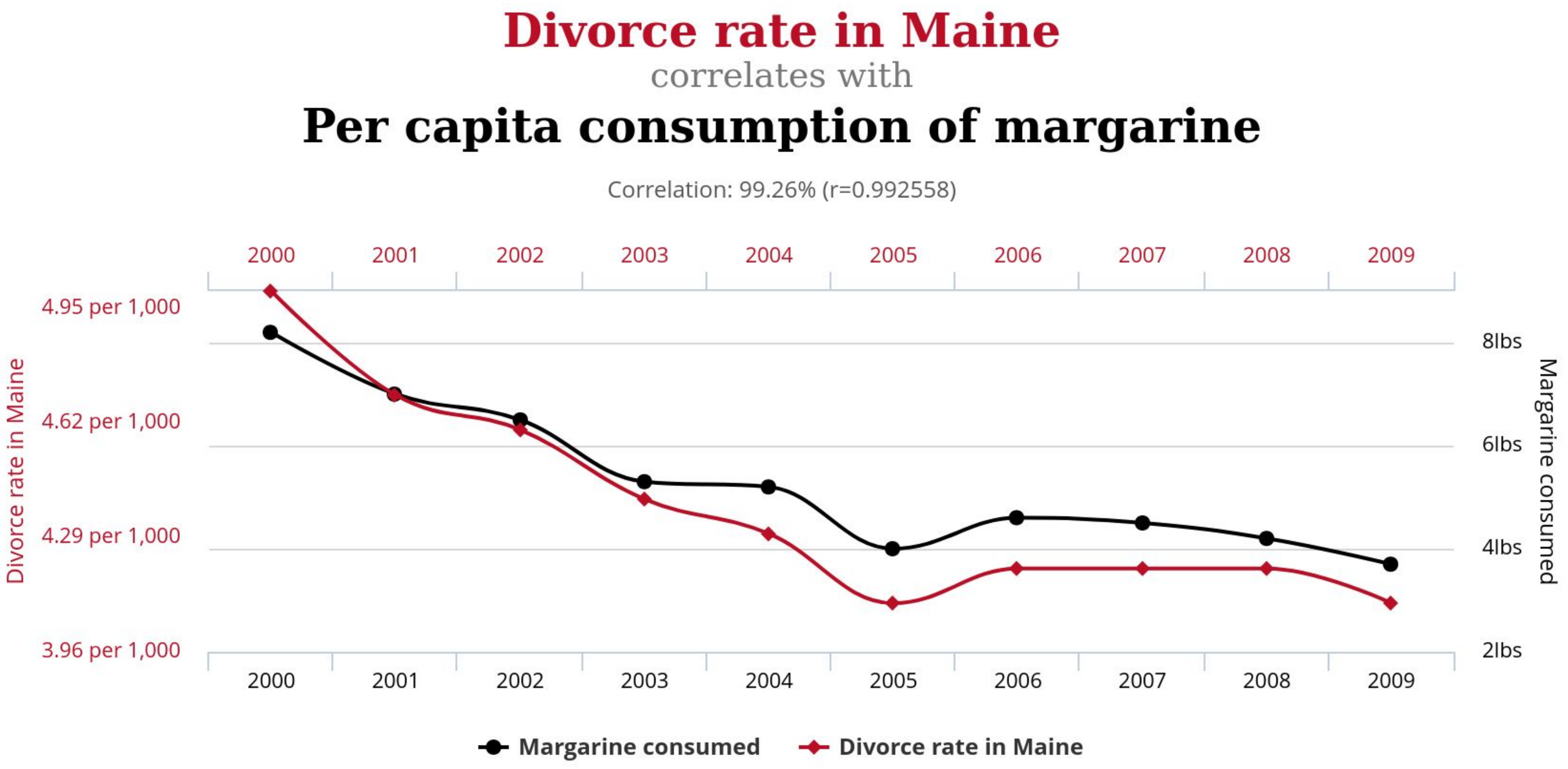
Propriétés :

1. ρ est la covariance des versions centrées réduites de X et Y
2. ρ est adimensionnelle
3. $-1 \leq \rho \leq 1$ $\quad$ $\rho = 1$ ssi $Y = aX + b$ avec $a > 0$
   et $\rho = -1$ ssi $Y = aX + b$ avec $a < 0$

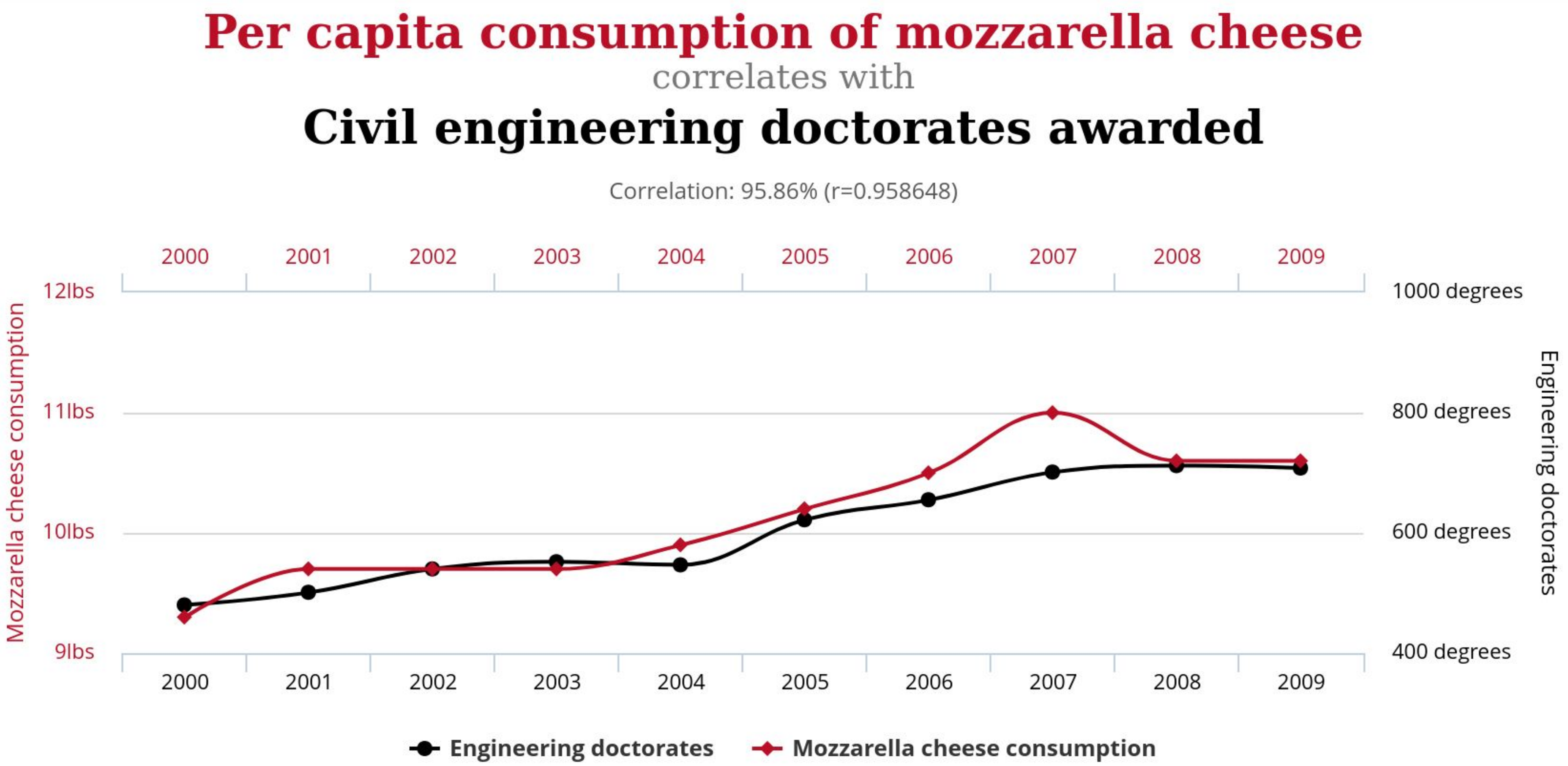
Corrélations fallacieuses (*spurious*)



Corrélations fallacieuses (*spurious*)



Corrélations fallacieuses (*spurious*)



Nuage de points (*scatter plot*)