

# 随机共振的模拟实验\*

秦光戎 龚德纯 胡 岗 温孝东

北京师范大学物理系, 北京, 100875

1991 年 3 月 25 日收到; 1991 年 6 月 14 日收到修改稿

用模拟电路的方法对随机共振现象进行多方面的实验研究。讨论随机共振机制, 测量输出信噪比 (SNR)。由于在随机共振过程中部分噪声能量可转变为信号能量, 利用这个机制可能在强噪声对信号的抑制下取出信号。

PACC: 0590; 0690; 6490

## 一、引言

随机共振现象是 1981 年由 Benzi 等人提出的<sup>[1]</sup>, 其基本概念如下: 一个具有非线性的双稳系统, 在一个周期性调制信号作用下的同时输入噪声信号, 当噪声信号增强时, 系统输出的功率谱中调制信号的频率处出现一个峰值。当噪声增强到某一强度时, 输出信号的峰达到最大值——“共振”。而后随噪声的增强, 其峰值下降。随机共振现象被 Nicolis<sup>[2]</sup>以及 Benzi<sup>[3]</sup>等人用以解释地球气候中的冰川世纪或多或少地所具有的周期性。他们想像一个被势垒分开的双稳气候模型, 调制信号被一假设其周期为  $10^5$  年的地球轨道离心率的周期变化, 噪声起因于太阳常数的无规则起伏, 两者分别都不足以引起地球温度的如此大的变化。它们共同作用于非线性双稳系统, 导致地球的周期性冰川世纪。

1983 年 Fauve 和 Heslot<sup>[4]</sup>第一个用实验证实随机共振的存在。实验装置是一个 Schmitt 触发器的电子电路。Schmitt 触发器的基本特征是其输出有两个稳态, 其某一时刻处于两态中的一个, 视输入条件而定。Fauve 等人对该触发器加一固定幅值和频率的调制信号或称输入信号, 同时加一强度可以改变的噪声信号。他们首次引出(输出)信号对(输出)噪声的比 (Signal-to-noise ratio) 的概念。简称信噪比 SNR。其定义为: 在功率谱中信号峰(幅)值与同频噪声(背底)之比。实验测量结果, 这一输出 SNR 值在共振时可以达到 5。从此信噪比 SNR 成为随机共振范畴中最经常使用的名词。这一实验没有引起人们足够的注意。1988 年 McNamara, Wiesenfeld 和 Roy<sup>[5]</sup>将一个环形的具有双向(逆时针或顺时针)发射的激光器作为一双稳态器件做了随机共振实验。其方法是用声-光调制, 用声频去调制激光的发射方向, 同时加进白噪声。噪声的强度从零逐渐增加, 测量一个方向上的激光强度, 在输出的功率谱中, 在调制信号处有一峰值并迭加一宽带噪声谱。

\* 国家自然科学基金资助的课题。

他们测量了峰的幅值和调制频率的噪声背底，从而测得信噪比 SNR，得到与文献 [4] 类似的现象，此后，随机共振引起广泛的理论和实验工作者的兴趣和重视<sup>[6-13]</sup>。

本文用模拟电路的方法对随机共振具有基本意义的 Langevin 方程进行实验研究，或者说用模拟电路求解这一非线性方程，并联以模-数接口 (A/D 变换) 计算机采集和数据处理。由于这一方法可调参数多，实时测量，并对解进行实时地时域和频域处理，使我们获得比前述实验和理论得到更多方面的结果。本文主要讨论实验装置所模拟的方程及随机共振的实验结果。

## 二、方程、模拟电路和实验方块图

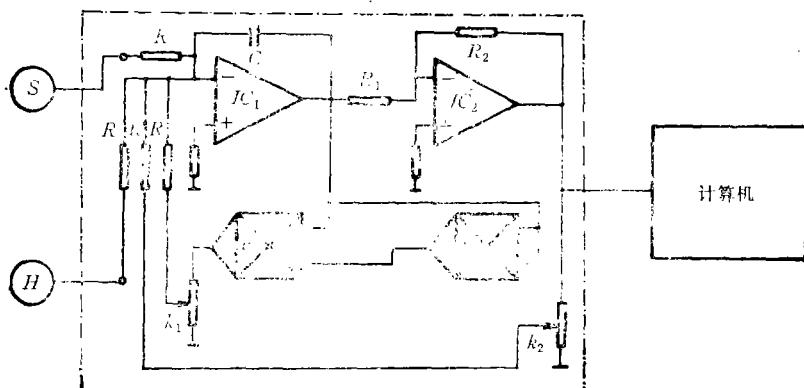
研究如下方程的解：

$$\dot{x} = bx - cx^3 + A \cos \omega t + \varepsilon(t), \quad (1)$$

$b, c$  为相应项的系数， $A \cos \omega t$  为外加周期调制信号， $\omega = 2\pi f$  为信号角频率， $f$  为频率； $\varepsilon(t)$  为白噪声。这一方程的解为

$$x = \int [bx - cx^3 + A \cos \omega t + \varepsilon(t)] dt. \quad (2)$$

由于上式解的困难性，借助于运算放大器所组成的模拟电路来完成。这一模拟电路是我们实验装置的主体。图 1 为所用模拟电路和测试方块图。图中  $IC_1$  为积分器； $IC_2$  为反相器； $D, E$  分别为乘法器。模拟电路求解(1)式的基本思想，是在积分器  $IC_1$  的输入端构成(2)式积分符号内方括号中的四项。由电路理论知： $IC_1$  的输出为 $-x$ 。 $-x$  经乘法器  $D$  得到  $Dx^2$  项； $Dx^2$  与 $-x$  经乘法器  $E$  得 $-DEx^3$  项 ( $D, E$  分别为乘法器的衰减系数)，其经分压器将 $-k_2 DE x^3$  项加入  $IC_1$  的输入端。 $-x$  经反相器得  $x$ ，其经分压器分压得  $k_1 x$  项，再加入  $IC_1$  输入端。 $k_1, k_2$  为范围在 0—1 之间的分压可调系数。由图 1 可知，正弦信号源  $\sqrt{2} U \cos \omega t$  和白噪声源  $H(t)$  也同时加到  $IC_1$  的输入端。这样积分器  $IC_1$  的输入为： $k_1 x, -k_2 DE x^3, \sqrt{2} U \cos \omega t$  和  $H(t)$  四项。这里取系数  $DE = 4.53 \times 10^{-3}$ 。由电路原理知，这一非线性模拟系统的输出就是  $x(t)$ ，即(2)式。电路电阻



参数和电容参数分别取  $R = 15\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 150\text{k}\Omega$ ,  $C = 180\text{pf}$ ,

由模拟电路理论,从图1知

$$\dot{x} = \frac{1}{RC} \int [k_1 x - k_2 DEx^3 + \sqrt{2} U \cos \omega t + H(t)] dt, \quad (3)$$

可导出

$$RC\ddot{x} = k_1 x - k_2 DEx^3 + \sqrt{2} U \cos \omega t + H(t). \quad (4)$$

令  $\tau = t/RC$ , 变换时间标度,并注意到  $\omega_\tau \tau = \omega t$  或  $f_\tau \tau = f t$  ( $\omega_\tau$ ,  $f_\tau$  为  $\tau$  量度的角频率和频率,  $\omega$ ,  $f$  为  $t$  量度的角频率和频率),则(4)式为

$$\ddot{x} = k_1 x - k_2 DEx^3 + \sqrt{2} U \cos \omega_\tau \tau + H(\tau). \quad (5)$$

(5)与(4)式相比只是时间标度变换,不影响解的物理实质。将(4)与(1)式比较,有

$$b = k_1/RC, c = k_2DE/RC, A = \frac{\sqrt{2} U}{RC} \text{ 和 } e(t) = \frac{H(t)}{RC}.$$

本文报道实验中均用实际时间  $t$  和实际频率  $f$ .

非线性模拟电路的输出即  $x(t)$ , 它可用示波器实时显示,也可通过模-数变换取得每一时刻  $t$  的  $x$  值,用计算机存储、处理或显示出  $x-t$  曲线。这就是解的时域范畴。由每一时刻  $t$  的  $x$  值,用计算机进行快速傅里叶变换,可得横坐标为频率,纵坐标为相应频率输出的功率的关系曲线,即输出的功率谱(或频域)。功率谱也可由频谱仪实时显示。实验中有 4 个可调参数,即  $k_1$  (或  $k_2$ ), 信号电压有效值  $U$ , 频率  $f = \omega/2\pi$  和白噪声强度  $H(H(t))$  表示白噪声,  $H$  表示由白噪声源输出的强度——有效值)。

### 三、实时输出与随机共振机制

分析(1)式或(4)式,当非线性系统未加信号和噪声时,系统有两个可能的稳定态解,

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{k_1}{k_2 DE}} \quad (= \pm \sqrt{\frac{b}{c}}) \quad (6)$$

和一个不稳定的解  $x = 0$ , 这时系统的势函数为

$$U = -\frac{1}{2} \left( \frac{k_1}{RC} \right) x^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_2 DE}{RC} \right) x^4, \quad (7)$$

势垒的高度为

$$U_0 = (b^2/4c) = \frac{1}{4} \frac{k_1}{RCK_2 DE}. \quad (8)$$

势最小值的位置由(6)式所确定。因而改变  $k_1$  或  $k_2$  或同时改变两者,其效果就是改变势的深度[(8)式]和势阱之间的宽度[(6)式]。在模拟设备中,令  $k_1 = 0.1$ ,  $k_2 = 0.6$ , 有  $x_0 \approx \pm 6.06\text{V}$ , 即当没有信号和噪声时,系统的输出可处于  $+6.06\text{V}$  或  $-6.06\text{V}$ 。这一值与实验值一致。

当加有调制信号时,势函数的一般形式为<sup>[9]</sup>

$$U(x, t) = -\frac{b}{2} x^2 + \frac{c}{4} x^4 - Ax \sin \omega t, \quad (9)$$

即调制信号的作用就是周期地增减每一势阱的深度。

图2为 $x_0 = \pm 6.06V$ 的条件下, 调制信号频率为 $f = 100Hz$ , 电压为 $U = 0.14V$ 时, 系统的实时输出。图2(a),(b),(c),(d)。各对应于噪声强度 $H$ 为0.03, 0.12, 0.35和0.9V时的 $x-t$ 曲线。图3(a),(b),(c),(d)。为对应于图2的各实时输出的频谱图。 $H$ 较小时, 输出为信号与噪声的简单迭加[图2(a), 图3(a)]。这时系统只工作在某一个定态附近, 例如在+6.06V附近。图2(b)和图3(b)中由于 $H$ 增大使某些时刻, 系统状态可从+6.06V跳变到-6.06V, 或反之。这时频谱图中为 $f_0$ 的峰的基础上迭加一Lorentz谱。图2(c), 图3(c)所示噪声强度条件下, 几乎每一调制信号周期, 状态都可进行周

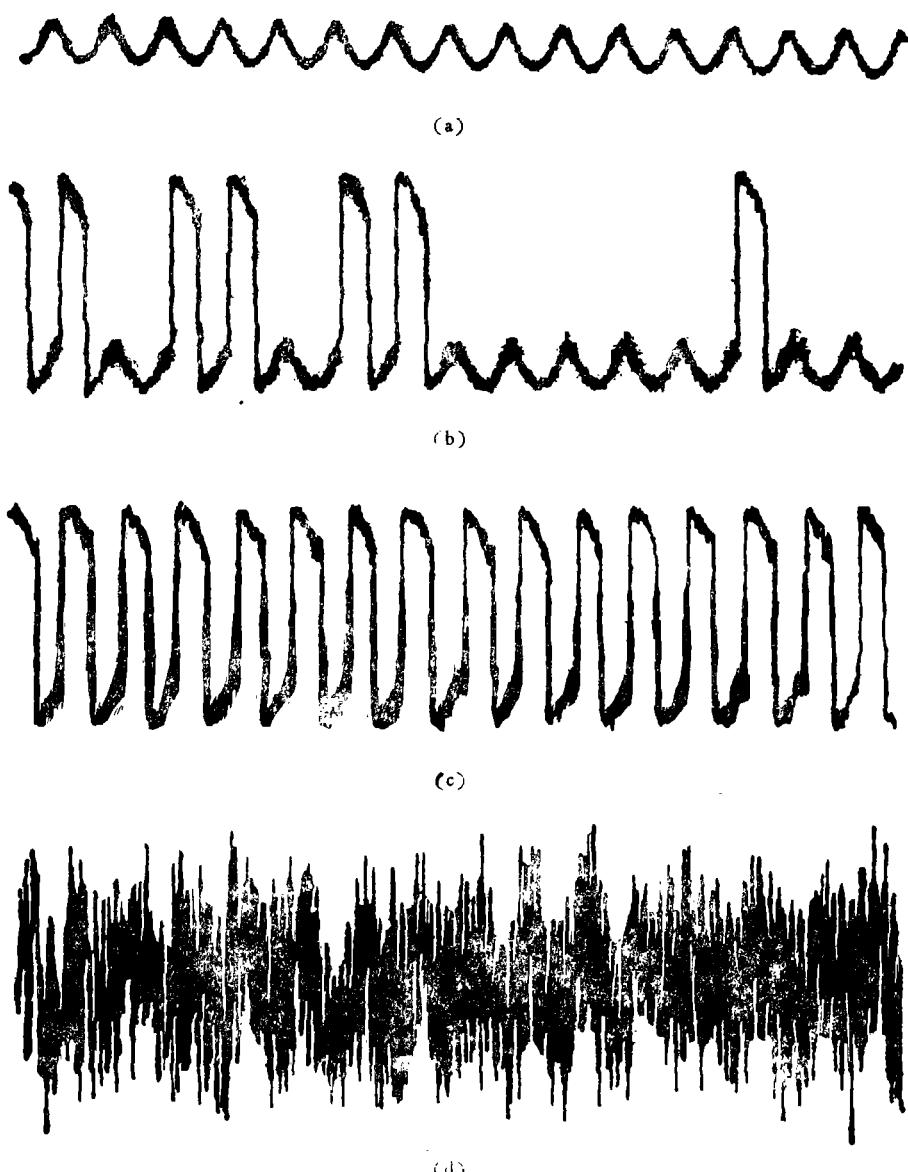
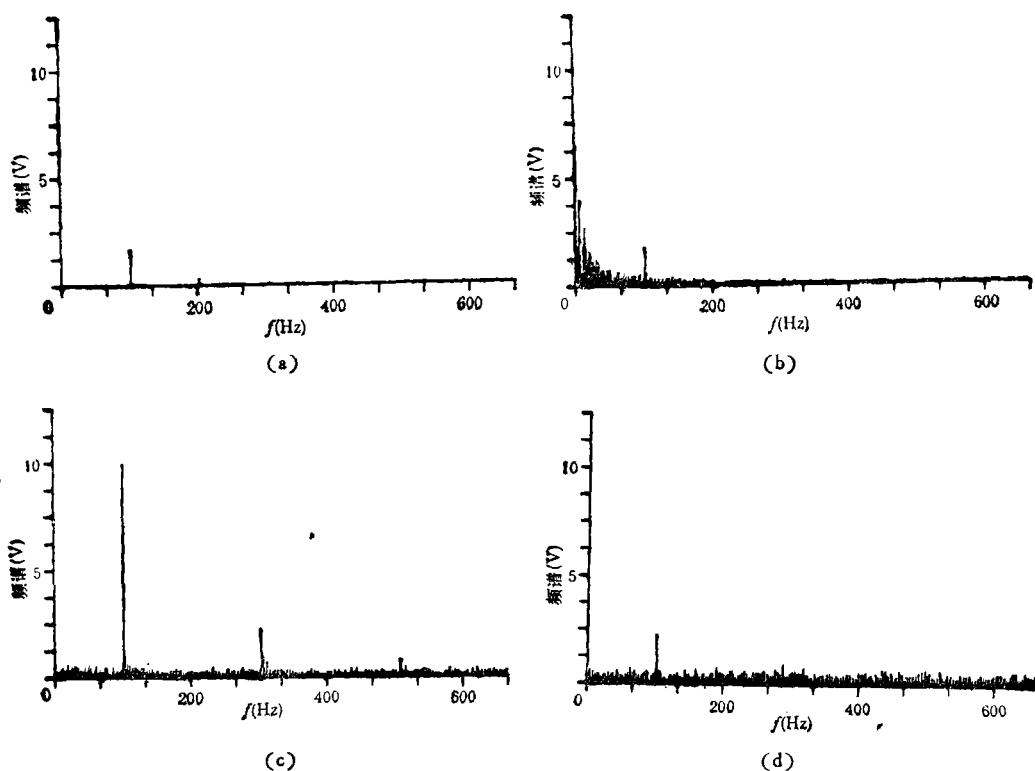


图2 不同时 $x-t$ 曲线

图 3 不同  $H$  时的频谱图

期性地跳跃,这时信号对系统进行了最有效的调制。频谱图中  $f_0$  的峰值很高,同时噪声被抑制。这时信噪比  $\text{SNR} = 10 \log(S/N)$  (按一般定义  $S, N$  分别为功率谱中  $f$  处的信号幅值和噪声强度。为简便,在本文中取  $\text{SNR} = S/N, S, N$  为频谱中  $f$  处的信号幅值和噪声背底的强度)达最大,出现随机共振,图 2(d) 和图 3(d) 为过强的噪声输出,这时输出频谱中的信号幅度降低,同时噪声增强,  $\text{SNR}$  下降。Benzi 证明<sup>[1]</sup>,若把(1)式写成如下基本形式:

$$\dot{x} = ax - x^3 + A \cos \omega t + H(t), \quad (10)$$

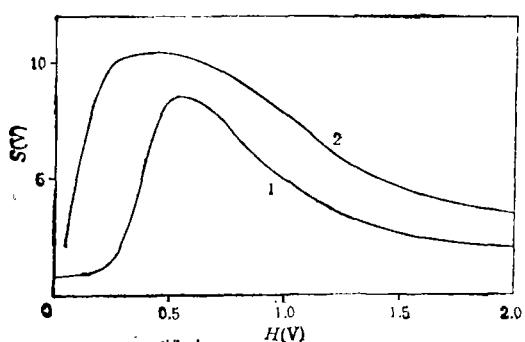
则当  $A < a^{3/2}$  的条件下,噪声在  $H_1-H_2$  之间都可使  $x(t)$  的功率谱中  $f$  处呈现一个峰。

其中

$$H_1 = a \left( \frac{1 - 4A/a^{3/2}}{2 \ln(2\sqrt{2}a/\omega)} \right),$$

$$H_2 = a \left( \frac{1 + 4A/a^{3/2}}{2 \ln(2\sqrt{2}a/\omega)} \right). \quad (11)$$

图 4 为  $f = 100\text{Hz}$ ,  $U_1 = 0.08\text{V}$  (曲线 1) 和  $U_2 = 0.14\text{V}$  (曲线 2) 条件下测得的频谱图中  $f$  的峰(幅)值随  $H$  强度变化的曲线。它与上述结果相一致。

图 4 信号峰值随  $H$  的变化曲线

#### 四、同频噪声、输出信噪比

一个系统输出的有用信号(例如  $f$ )和输出噪声的比是该系统极为重要的质量标志。偏离  $f$  的噪声可以用窄带滤波器滤掉，但与信号频率  $f$  同频率的(以及靠近  $f$  两侧的)噪声则不能被滤掉。因此输出信噪比 SNR 是功率谱中信号频率的幅值与同频噪声强度的比。下面报道用实验测定信噪比的一种方法。频谱仪的输入端接非线性模拟电路的输出  $x(t)$ ，频谱仪屏幕上不断地连续地显示  $x(t)$  的频谱。将其显示固定在信号频率  $f$  处，发现  $f$  的峰值  $S$  仍随时间  $t$  变动，即  $S(f)$  随时间起伏。对每一组数据进行 20 次测量，令  $\bar{S} =$

$$\sum_{i=1}^{20} S_i / n \text{ 作为信号的峰值(幅值)，令 } N = \sum_{i=1}^{20} |S_i - \bar{S}| / 20 \text{ 作为同频噪声的强度，从而获}$$

得每一  $H$  下的信号  $\bar{S}$ ，同频噪声  $N$  以及  $\text{SNR} = \bar{S}/N$ 。图 4 所示  $S-H$  曲线就是这样得出的。其中曲线 1,2 的输入电压分别为 0.08V 和 0.14V， $f = 100\text{Hz}$ 。由图 4 知，每一曲线有一输出信号  $S$  的最大峰值。较大电压 (0.14V) 的峰比较大电压 (0.08V) 的峰要高，且在较小噪声强度时出现。这可解释为较大信号电压对势阱有较强的调制，较小噪声就可使系统的态随信号作周期性跳跃。图 5 为  $f = 100\text{Hz}$ ,  $U = 0.14\text{V}$  时， $H$  分别为 0.12 V(a)、0.35 V(b) 和 0.9 V(c) 时信号  $f$  的峰  $S$  随时间的变化曲线。显然在  $H = 0.35\text{V}$

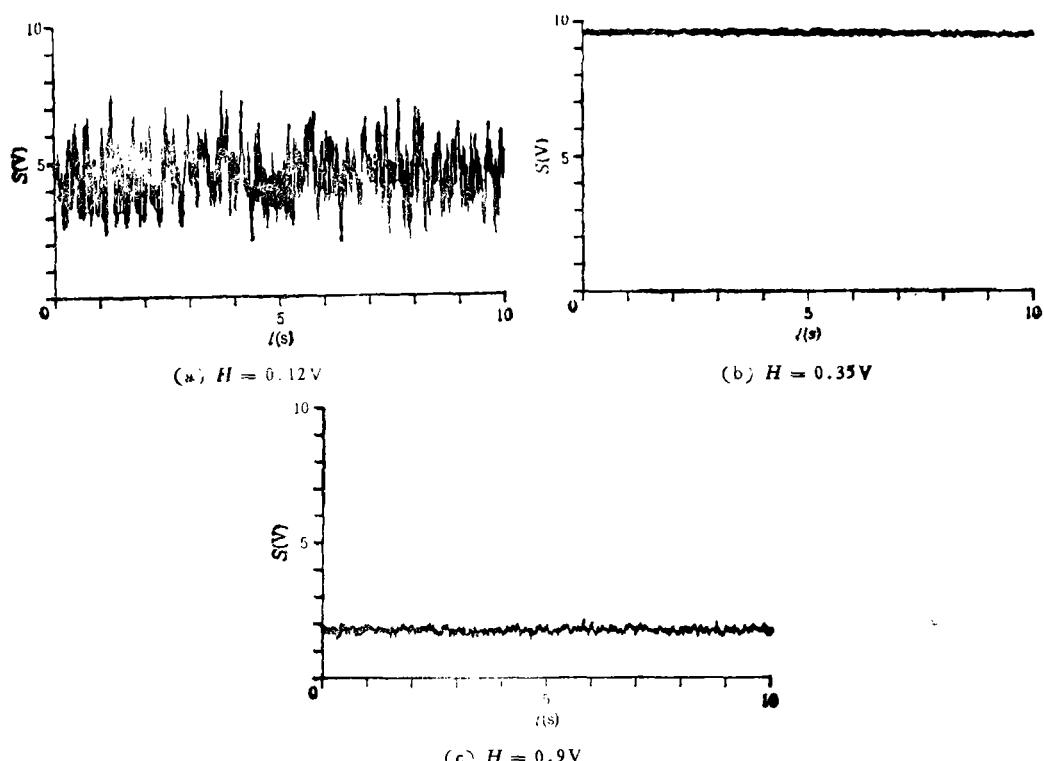


图 5  $f$  峰值随时间变化曲线， $U$  均为  $0.14\text{V}$

时,输出信号幅值大大加强,而输出噪声强度大为减弱,而信噪比 SNR 最高。

图 6 为前述条件下,输出噪声  $N$  随输入噪声  $H$  的变化曲线。开始时  $N$  随  $H$  增大而增

大,这时小的  $H$  值,不足以使系统的态发生双稳态之间的跃迁。经过一个峰后,  $N$  随  $H$  增大迅速减小到一个低谷。谷点为最小噪声输出。这对应于图 3 中 (a)-(c) 的过程。这一过程中,部分噪声能量转变为信号能量,从而使输出噪声强度下降。低谷之后,  $N$  随  $H$  增加缓慢增加,对应于图 2 中 (c)-(d) 的进程。这是强的  $H$  破坏了输出信号的周期性导致输出噪声增加。

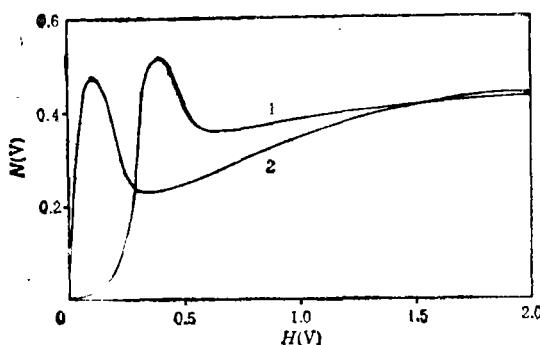


图 6  $N-H$  曲线

曲线 1 为  $U = 0.08V$ ;  
曲线 2 为  $U = 0.14V$ ;  $f = 100Hz$

0.14V 的曲线可知,当  $H = 0.35V$  时,峰  $S$  最大,噪声  $N$  最小,其结果必然是此时 SNR 最大。

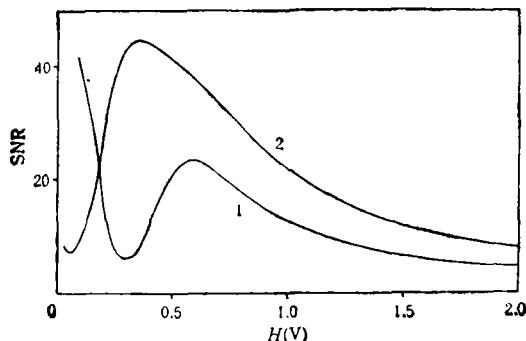


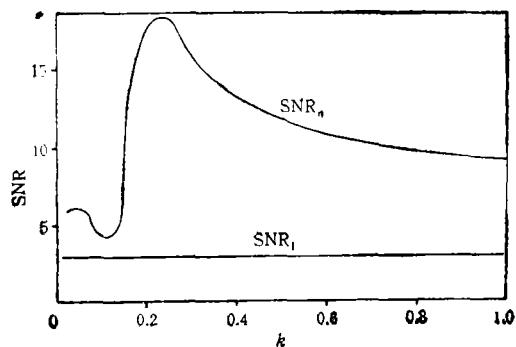
图 7  $SNR-H$  曲线

曲线 1 为  $U = 0.08V$ ;  
曲线 2 为  $U = 0.14V$ ;  $f = 100Hz$

## 五、从噪声抑制下取出信号

如前所述,利用随机共振可以有效地提高输出信噪比。下面讨论一种可能具有很大应用前景的例子。让非线性模拟系统处于  $k_1 = 0.1$ ,  $k_2 = 0.6$ ,  $f = 100Hz$  条件下。令输入信号为  $U = 0.3V$ , 白噪声为  $H = 3.0V$  的这样一种强噪声对信号的抑制情况。实验表明,对线性放大器,即使加上窄带滤波器,所得信号仍受到很强噪声干扰。现在保持  $U/H = 0.3/3 = 1/10$  状态不变,用一分压器控制其输给非线性模拟系统的输入量。分压系数  $k$  在 0—1 范围可控。例如  $k = 1$ , 即  $U = 0.3V$ ,  $H = 3V$  ( $U/H = 1/10$ ) 的状况,  $k = 0.5$  为  $U = 0.15V$ ,  $H(t) = 1.5V$  ( $U/H = 1/10$ ) 的状况等等。显然输出信噪比 SNR

将随  $k$  的不同而异。图 8 给出实验所得 SNR 随  $k$  的变化曲线。当  $k \approx 0.25$  时，SNR 达到 18。图 8 中与  $k$  轴平行的直线，是线性窄带滤波器在前述相同条件下的  $\text{SNR}_1$ ——从线性放大器后取出的信号  $f$  的幅值与其同频噪声之比。对比 SNR 与  $\text{SNR}_1$  易于理解随机共振现象的优越性。利用随机共振可将  $U/H = 1/10$  的输入变为输出  $S/N$  极好的好状态，使  $\text{SNR}_a > \text{SNR}_1$ 。类似线性放大器的“带通”概念，可以根据实际需要，在随机共振的两侧取  $\Delta k$  的宽度，认为在此范围内，从强噪声对信号的抑制下取出信号  $f$ 。

图 8 SNR- $k$  曲线

## 六、与理论的比较

应该指出，随机共振现象的理论目前发展还很不成熟。较普遍的理论是绝热消去和线性响应<sup>[2,9,10]</sup>，关于这一理论的具体内容和评述请见文献[9,10]及其中的引文。这里仅列出其中主要的结果。

对方程(1)中时间和  $x$  的单位进行恰当标度可使(1)式化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^3 + U \cos(\Omega t) + \Gamma(t), \\ \langle \Gamma(t) \rangle &= 0, \langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\Omega = \alpha f, D = \beta H^2, \quad (13)$$

$\alpha, \beta$  为常数。由于计算机的采样时间间隔远低于噪声的相关时间，还不能精确求出  $\beta$  的具体值，但可以知道  $\alpha, \beta$  的数量级为

$$\alpha = O(10^{-4}), \beta = O(1). \quad (14)$$

既然这里注重于将实验表现出的特征与理论进行定性比较，比例系数  $\alpha$  和  $\beta$  的具体值并不重要，在以下讨论中用  $\sqrt{D}$  来代替  $H$ 。由文献[9,10]可知，输出信号和噪声的功率谱在  $\Omega$  处的幅值为

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \int S_s(\omega) d\omega = \frac{\pi U^2}{2} \frac{\lambda_i^2}{D^2(\lambda_i^2 + \Omega^2)}, \\ \bar{N} &= S_n(\Omega) = \frac{2\lambda_i}{\lambda_i^2 + \Omega^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

(注意在(15)式中  $\bar{S}_s$  和  $\bar{S}_n$  为功率谱，而在图 4 和图 6 中所示的为输出时间序列的谱，两者定性关系为  $\bar{S} \propto S^2$ ,  $\bar{N} \propto N^2$ )<sup>[14,15]</sup>。

由(15)式这里选择  $\Omega = 0.02$ ，在图 9 和图 10 中分别作  $\bar{S}$  和  $\bar{N}$  随  $D$  的变化曲线，两图中曲线 1 和 2 分别对应  $U = 0.02$  和  $U = 0.05$ 。图 9 与图 4 十分相似，在一定噪声强度下会发生的输出信号被输入噪声加强的共振现象，这一基本特征可以被理论预言并

很完满地被实验显示和重复。但图 4 和图 6 的实验曲线和图 9 和图 10 的绝热近似理论曲线还有一些十分不同的具体特征：

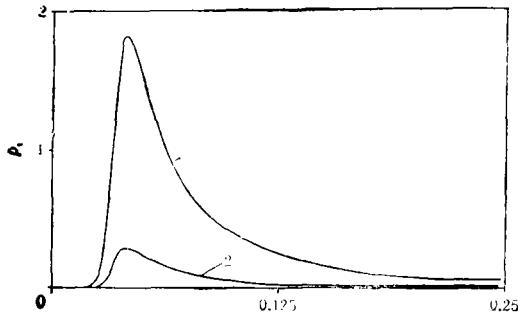


图 9 输出信号

1) 虽然图 4 和图 9 中输出信号都在某一最佳噪声强度时出现峰值，但在图 4 中实验表明，这峰的位置与输入信号强度有关，输入信号越强，峰值对应的  $H$  值越小，这很容易从“共振”的原因得到解释：输入信号越强，为了帮助双稳系统达到最佳跃迁频率所需的噪声就越小。但在图 9 理论预言的峰的位置与输入信号无关。这是线性响应理论的必然

结果。所以图 4 中峰的位置随输入信号强度的移动带有强烈的非线性响应色彩。

2) 从图 9 和图 10 可见信号和噪声的峰在同一位置，这一点是绝热消去理论的必然结果，但从机制上是难以理解的。而在实验上(图 6)噪声的峰稍前于信号的峰。特别是当达到随机共振时，输出信号的峰正好对应于输出噪声的谷，这正是对“共振”中信号从噪声中吸取能量而压制输出噪声的合理结果。而这一点又必须由非线性响应来解释。

众所周知，绝热消去和线性响应理论仅适用于很小的信号幅度和频率。当输入信号加强时这一理论与实际的偏离就会越来越大。在大信号情况下会出现许多非常有意义的新特征和新现象，要求发展非线性响应理论进行系统地解释。目前还不存在这种理论。当信号越来越小时，发现实验对绝热消去和线性响应理论的偏离则越来越小，例如信号峰的位置不再随信号强度变化，而且噪声曲线的谷也会越来越浅以至消失(这一趋势也可从比较图 6 的两条曲线看出)，实验与现有理论的一致性就会越来越清楚地表现出来。

随机共振是近 10 年发展起来的一个非线性系统的分支。它的理论并未完全成熟，它的实验研究方面还处在起步阶段。随机共振的理论和实验研究很可能为科技发展形成一个新的良好的前景。

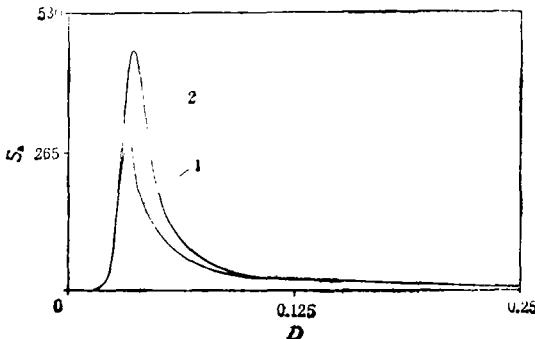


图 10 输出噪声

- [1] R. Benzi, A. Sutera and A. Vulpiana, *J. Phys. A*, **14**(1981), L 453.
- [2] C. Nicolis, *Tellus*, **34**(1982), 1.
- [3] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera and A. Vulpiana, *Tellus*, **34**(1982), 11.
- [4] S. Fauve and F. Heslot, *Phys. Lett.*, **97A**(1983), 5.
- [5] B. McNamara, K. Wiesenfeld and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 2626.
- [6] L. Gammaioni, F. Marchesoni, E. Menichella and S. Santucci, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 349.
- [7] L. Gammaioni, E. Menichella-Sacetta, S. Santucci, F. Marchesoni and C. Presilla, *Phys. Rev. A*, **40**(1989), 2114.
- [8] L. Vemuri and R. Roy, *Phys. Rev. A*, **39**(1989), 4668.

- [9] B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 4854.
- [10] G. Hu, G. Nicolis and C. Nicolis, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 2030.
- [11] T. Zhou and F. Noss, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 4255.
- [12] J. M. Casado and M. Morillo, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 1875.
- [13] T. Zhou and F. Moss, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 3161.
- [14] N. Wiener, *Acta. Math.*, **55**(1930), 117.
- [15] A. Khintchine, *Mash. Annalen*, **109**(1934), 604.

## AN ANALOG SIMULATION OF STOCHASTIC RESONANCE

QIN GUANG-RONG GONG DE-CHUN HU GANG WEN XIAO-DONG

*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875*

(Received 25 March 1991; revised manuscript received 14 June 1991)

### ABSTRACT

Stochastic resonance (SR) phenomena are investigated from various aspects by utilizing an electric circuit. The mechanism of SR is discussed and the output signal-to-noise ratio (SNR) is measured. The signal may be extracted from strong noise due to energy transfer from noise to signal under the SR condition.

**PACC:** 0590; 0690; 6490