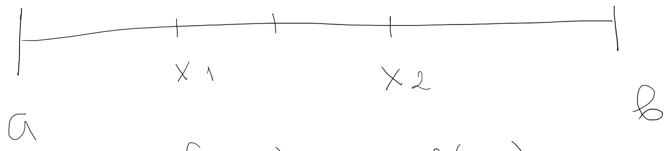
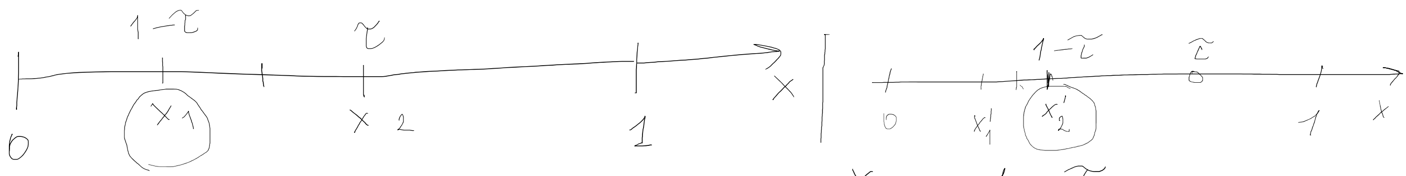
Метод золотого сечения



$f(x_1)$ $f(x_2)$



$x_2 = \tau \Rightarrow x_1 = 1 - \tau$

$x_1 \Rightarrow x_2^{1)} = 1 - \tau \in [0, \tau]$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau} \Rightarrow \tau^2 = 1 - \tau$$

$$\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.61803$$

$$x_1 = 1 - \tau = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\boxed{x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a); \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a)} \quad (*)$$

$$\Delta_n = \tau^n (b - a) \qquad \varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^n (b - a)$$

ε – задано. Окончание: $\varepsilon_n \le \varepsilon$

$$x^* = \frac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2}$$

$$n \geq \ln\left(\frac{2\varepsilon}{b - a}\right) / \ln\tau \approx 2.1 \cdot \ln\left(\frac{b - a}{2\varepsilon}\right)$$

Шаг 1. x_1 и x_2 – по формуле $(*)$

$f(x_1)$ $f(x_2)$

$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{\ }$ $\qquad \varepsilon = \frac{b-a}{\ }$

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$$

Шаг 2. $\varepsilon_n > \varepsilon$ – шаг 3, иначе шаг 4.

Шаг 3. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то

$$b = x_2, \begin{cases} x_2 = x_1, & \underline{x_1} = b - \tau(b-a) \\ f(x_2) = f(x_1) \end{cases}$$

вычислить $\Rightarrow f(x_1)$

иначе $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$

$x_2 = b - \tau(b-a)$

$f(x_2) \Leftarrow$ вычислить

$\varepsilon_n = \tau\varepsilon_n$, переход шаг. 2.

Шаг 4. $x^* = \bar{x} = \dfrac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2} \qquad f^* \approx f(\bar{x})$.

Метод Фибоначчи

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 1, \dots$$

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] / \sqrt{5}$$

$$F_n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n / \sqrt{5} \quad (n \to \infty)$$

Итерация 0:

$$x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a); \quad x_2 = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b-a) = a + b - x_1$$

Итерация k:

$$x_1 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+1}}{\underbrace{F_{n-k+3}}}\underbrace{(b_k - a_k)} = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{\underbrace{F_{n+2}}}\underbrace{(b_0 - a_0)}$$

$$\underbrace{F_{n-k+3}}$$ $$\underbrace{F_{n+2}}$$

$$x_2 = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

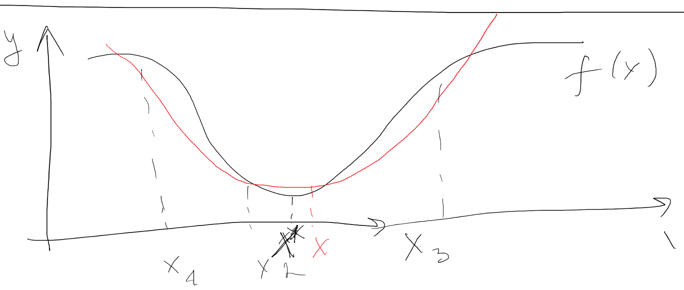
Итерация
$k = n \Rightarrow x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$; $x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$

$$\boxed{\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon} \Rightarrow n?$$

$$\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{\underline{\underline{n}}+2}$$

Когда n — большое $\Rightarrow \frac{F_n}{F_{n+2}}$ — бесконечная десятичная дробь

Метод парабол



$x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ $\quad \left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 < x_3 \\ f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3) \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{\text{условия}}}$ $(**)$

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

$$q(x_1) = f(x_1) = f_1$$

$$q(x_2) = f(x_2) = f_2$$

$$q(x_3) = f(x_3) = f_3$$

$$a_0 = f_1; \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1};$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right)$$

$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2}\right)$ — минимум параболы $(q(x))$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2}\right)$$ — минимум параболы ($q(x)$)

$\bar{x}$ — очередное приближение к x^* функции $f(x)$

далее повторяем для новых точек x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих условиям (**).

- На каждой итерации (кроме первой) определяется только одно новое значение $f(x)$.

- Условие окончания поиска — близость к нулю разности Δ чисел $\bar{x}$, найденных на текущей и предыдущей итерациях: $|\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}| = \Delta \le \varepsilon$

- Выбор x_1, x_2, x_3 (Правило выбора)

после каждой итерации проверить, куда попадает $\bar{x}$.

1. – если $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3$ и $f(\bar{x}) \geq f(x_2)$, то

   $x^* \in [\bar{x}; x_3]$, $x_1 = \bar{x}$, $f(x_1) = f(\bar{x})$,

   точки x_2 и x_3 ($f(x_2)$ и $f(x_3)$) не меняются

   – если $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3$ и $f(\bar{x}) < f(x_2)$, то

   $x^* \in [x_1, x_2]$, $x_1 = x_1$ (не изменяется)

   $x_3 = x_2$ $f(x_3) = f(x_2)$

   $x_2 = \bar{x}$ $f(x_2) = f(\bar{x})$

2. – если $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3$ и $f(x_2) \geq f(\bar{x})$, то

   $x^* \in [x_2, x_3]$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$,

   $x_2 = \bar{x}$, $f(x_2) = f(\bar{x})$,

   точка x_3 и $f(x_3)$ не изменяются.

   – если $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3$ и $f(\bar{x}) > f(x_2)$, то

   $x^* \in [x_1, \bar{x}]$; x_1 – не изменяется

   $x_3 = \bar{x}$, $f(x_3) = f(\bar{x})$; x_2 – не изменяется

Шаг 1:

Для первой итерации определить $\underbrace{\text{точки}}_{}$ произвольным образом точки x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условию (**), вычислить $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$.

Задать точность ε. Переход к шагу 2.

Шаг 2: Вычислить a_0, a_1, a_2 и $\bar{x}$ $(\bar{x}_i)$

Шаг 3: (пропустить для первой итерации)

Вычислить $\Delta = |\bar{x}_i - x_{i-1}|$, проверить $\Delta \le \varepsilon$

Если точность ε достигнута, то выход $\Rightarrow x^* = \bar{x}_i$, иначе шаг 4.

Шаг 4. Вычислить $f(\bar{x})$, переход к шаг 5.

Шаг 5. Определить новые точки x_1, x_2, x_3, используя правило выше.

Переход к следующей итерации.