Variable Aleatoria Discreta Unidimensional

Probabilidad Aplicada 3-602

Variables Aleatorias

Supongamos que probamos 3 componentes electrónicos. Un componente puede ser defectuoso D o no defectuoso N. ¿Qué resultados podríamos tener? Es decir, ¿cuál es el espacio muestral para este experimento?

Tabla de resultados posibles para este experimento

Prueba sobre el componente 1	Prueba sobre el componente 2	Prueba sobre el componente 3	Resultado del experimento
N	N	N	NNN
N	N	D	NND
N	D	N	NDN
D	N	N	DNN
N	D	D	NDD
D	D	N	DDN
D	N	D	DND
D	D	D	DDD

Entonces, en este caso, nuestro espacio muestral es el conjunto formado por todos los elementos de la columna resultado:

$S = \{NNN, DNN, NDN, NND, DDN, NDD, DND, DDD\}$

¿Qué sería importante para nosotros? Conocer la cantidad de componentes defectuosos. Entonces, a partir de todos los resultados obtenidos en nuestro experimento, contemos cuántos componentes defectuosos se presentan en cada resultado:

Tabla de resultados y cantidad de componentes defectuosos

Resultado	Cantidad de defectuosos
NNN	0
DNN	1
NDN	1
NND	1
DDN	2
NDD	2
DND	2
DDD	3

De esta manera, a cada punto del espacio muestral (a cada resultado posible) le asignamos un valor numérico de 0, 1, 2 o 3.

Una **variable aleatoria X** es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral. Representamos con X a la función y la letra x para uno de sus valores. Es decir, $X = x$.

En nuestro ejemplo, la función variable aleatoria X, toma los valores que representan el número de componentes defectuosos cuando se prueban tres componentes.

Siguiendo con nuestro ejemplo. Si la variable aleatoria X alcanza el valor 2, quiere decir que el número de componentes defectuosos al inspeccionar tres, es 2. Esta situación se logra para todos los elementos del subconjunto E, donde:

$E = \{DDN, DND, NDD\}$

Así, cada posible valor X representa un evento E que es un subconjunto del espacio muestral S.

Clasificación de las variables aleatorias

Variable aleatoria discreta: Si su rango es un conjunto finito o infinito numerable.

Por ejemplo:

- El número de alumnos matriculados por curso
- El número de artículos inspeccionados defectuosos
- El número de goles realizado durante un torneo por un equipo de fútbol.

Variable aleatoria continua: Si su rango es un conjunto infinito no numerable.

Por ejemplo:

- El peso en kilogramos de una persona
- El tiempo en minutos en resolver un examen de estadística
- La proporción de personas que responden una encuesta

Ejemplo de correspondencia entre espacio muestral S y variable aleatoria X

Ejemplos de correspondencia entre espacio muestral y variable aleatoria

Ejemplo	Espacio muestral	Variable aleatoria
N° de visitas al médico	$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	$X = 1, 2, 3, 4...$
Grupo sanguíneo	$S = \{O, A, B, AB\}$	$X = 1, 2, 3, 4$
Lanzar una moneda y observar el lado que muestra	$S = \{cara, número\}$	$X = 0, 1$
Lanzar una moneda hasta que aparezca la primera cara	$S = \{c, nc, nnc, nnnc, \}$	$X = 1, 2, \dots$

Función o distribución de probabilidad discreta

Inspeccionando la tabla del experimento anterior (tabla de resultados y cantidad de componentes defectuosos), ¿qué tamaño tiene nuestro espacio muestral? ¿Es decir cuántos casos pueden presentarse al inspeccionar tres componentes?

Pueden darse 8 casos en total.

¿Cuáles es la probabilidad de no encontrar defectuosos?

Mirando la tabla, encontramos que hay un único caso posible. El caso es NNN.

Aplicando la definición clásica de probabilidad tenemos: $p = \frac{1}{8}$

¿Cuál es la probabilidad de encontrar un defecto?

Mirando la tabla, tenemos tres casos posibles donde hallamos un defecto. Entonces, aplicando la definición clásica de probabilidad: $p = \frac{3}{8}$.

¿Cuál es la probabilidad de encontrar dos defectos?

Mirando la tabla, tenemos tres casos posibles donde hallamos dos defectos. Entonces, aplicando la definición clásica de probabilidad: $p = \frac{3}{8}$.

¿Cuál es la probabilidad de encontrar tres defectos?

Mirando la tabla, tenemos un único caso posibles donde hallamos tres defectos. Entonces, aplicando la definición clásica de probabilidad: $p = \frac{1}{8}$.

En nuestro ejemplo, X es la variable aleatoria que puede tomar los valores:

$X = 0$

$X = 1$

$X = 2$

$X = 3$

Las probabilidades calculadas las podemos representar así:

$P(0) = \frac{1}{8}$ Es la probabilidad de no encontrar defectuoso.

$P(1) = \frac{3}{8}$ Es la probabilidad de encontrar un defectuoso.

$P(2) = \frac{3}{8}$ Es la probabilidad de encontrar dos defectuosos.

$P(3) = \frac{1}{8}$ Es la probabilidad de encontrar tres defectuosos.

Los pares ordenados de valores $(x, P(X = x))$ forman una función de probabilidad o una distribución de probabilidades discreta, donde $P(X = x)$ es la función que permite obtener la probabilidad de ocurrencia para cualquier valor de una variable aleatoria discreta.

Distribución de Bernoulli

Sea X una variable aleatoria que toma solo dos valores: 1 (éxito) o 0 (fracaso), con probabilidades $P(1) = p$ y $P(0) = 1 - p$.

Se dice que esta variable tiene distribución de Bernoulli con parámetro p si su función de densidad es:

$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ donde $x = 0, 1$ y $0 \leq p \leq 1$.

Esta distribución es la más sencilla: se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un evento dicotómico (éxito o fracaso) **en un único ensayo**

Ejemplo 1 Experimento lanzar una sola vez una moneda.

En este caso queremos determinar la probabilidad de sacar cara en ese único lanzamiento.

Éxito: sacar cara. $P(1)$

Fracaso: no sacar cara (sacar número). $P(0)$

$P(1) = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2 Experimento lanzar un dado una única vez.

En este caso queremos determinar la probabilidad de sacar un 3 en ese único lanzamiento.

Éxito: sacar un 3. $P(1)$

Fracaso: no sacar un tres (sacar 1,2,4,5,6). $P(0)$

$P(1) = \frac{1}{6}$

$P(0) = 5/6$

Distribución Binomial

El experimento binomial es un experimento de Bernoulli que se ejecuta n veces, de tal manera que las diferentes ejecuciones se realicen independientemente unas de las otras y con la misma probabilidad p.

Así, la probabilidad de tener x éxitos en n ensayos (intentos) es:

$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ donde $x = 0, 1, 2, \dots, n$ y $0 \leq p \leq 1$.

Donde $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ es el número combinatorio.

Ejemplo 1 Vacunar a 15 niños

La probabilidad de éxito de una vacuna para proteger contra cierta enfermedad es 72%. Si se aplica la vacuna a 15 niños:

Problema 1: ¿Cuál es la probabilidad de que no enferme ninguno?

X : número de enfermos $X = 0, 1, 2, \dots, 15$ $n = 15$
$X = 0$ No enferma ninguno. $X = 1$ Enferma uno. $X = 2$ Enferman dos.

Éxito: Enfermar. Probabilidad de enfermar $p = 0.28$ Fracaso: No enfermar. Probabilidad de no enfermar $1 - p = 0.72$

$P(X = 0) = \binom{15}{0} 0.28^0 (0.72)^{15-0} = 0.00724$

En R se puede utilizar la función **dbinom(x,size,prob)** donde:

x: número de éxitos que se desea tener

n: número de ensayos

prob: probabilidad de éxito en cada ensayo.

```
dbinom(0, 15, 0.28)
```

```
## [1] 0.00724415
```

Problema 2: ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un niño se enferme?

X : número de enfermos $X = 0, 1, 2, \dots, 15$ $n = 15$
$X = 0$ No enferma ninguno. $X = 1$ Enferma uno. $X = 2$ Enferman dos.

Éxito: Enfermar. Probabilidad de enfermar $p = 0.28$ Fracaso: No enfermar. Probabilidad de no enfermar $1 - p = 0.72$

Queremos calcular $P(X \geq 1)$

$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \dots + P(X = 15)$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
$P(X \geq 1) = 1 - 0.00724 = 0.993$

Otra forma de resolver el mismo problema

Problema 1

Y : número de sanos

$Y = 0, 1, 2, \dots, 15$

$n = 15$

$Y = 0$ ninguno sano.

$Y = 1$ Un sano.

$Y = 2$ Dos sanos.

Éxito: No Enfermar. Probabilidad de no enfermar $p = 0.72$

Fracaso: enfermar. Probabilidad de enfermar $1 - p = 0.28$

$P(Y = 15)$: tener 15 sanos. Esta es la misma probabilidad $P(X = 0)$: Tener 0 enfermos.

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson sirve muchas veces como modelo para conteos que no tienen una cota superior. La distribución de Poisson, con media λ (lambda), tiene probabilidades dadas por:

$P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ para $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ siendo $\lambda > 0$

En R se puede utilizar la función **dpois(x,lambda)** donde:

x: número de éxitos que se desea tener

lambda: promedio

Ejemplo 1 fallos en una cadena de montaje

¿Cuál es la probabilidad de tener 10 fallos en un cadena de montaje, teniendo en cuenta que suelen producirse 25 fallos por hora?

Tenemos que calcular $P(x = 10, \lambda = 25)$

```
dpois(10, 25)
```

```
## [1] 0.000364985
```

¿Cuál es la probabilidad de tener 20 fallos? Observar que 20 fallos está más próximo a los 25 fallos medios (promedio)

```
dpois(20, 25)
```

```
## [1] 0.05191747
```

Ejercicios Binomial

1) Una semilla tiene una probabilidad de germinación del 83%. Si se siembran 12 semillas:

a. La probabilidad de que germinen todas las semillas.
b. La probabilidad de que no germinen todas las semillas.
c. La probabilidad de que germinen 10 semillas.
d. La probabilidad de que no germinen 10 semillas.
e. La probabilidad de que germinen a lo sumo 10 semillas.
f. La probabilidad de que no germinen a lo sumo 10 semillas.
g. La probabilidad de que germinen menos de 7 semillas.
h. La probabilidad de que no germinen menos de 7 semillas.

2) El error humano se da como la razón del 75% de todos los accidentes de la planta. Usando la distribución binomial determinar la probabilidad de que el error humano se dará como la razón para dos de los siguientes 4 accidentes.

3) Durante una etapa de fabricación de chips de circuitos integrados, debe aplicarse un recubrimiento. Si 70% de los chips reciben recubrimiento suficientemente grueso, hallar las siguientes probabilidades, entre 15 chips:

a. Al menos 12 tendrán recubrimientos suficientemente gruesos;
b. Cuando mucho 6 tendrán recubrimientos suficientemente gruesos;
c. exactamente 10 tendrán recubrimientos suficientemente gruesos.

4) Una cooperativa agrícola afirma que 90% de las sandías embarcadas están maduras y listas para comerse. Encuentre las probabilidades de que entre 18 sandías embarcadas:

a. las 18 estén maduras y listas para comerse.
b. Al menos 16 están maduras y listas para comerse.
c. Cuando mucho 14 están maduras y listas para comerse.

Ejercicios Poisson

5) Se sabe que en cierto cruce de calles ocurren cinco accidentes al mes en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ocho accdidentes al mes?

6) Un banco recibe en promedio cuatro cheques sin fondos cada dos días. ¿Cuál es la probabilidad de que no reciba cheques sin fondos en los próximos dos días?

7) En un depósito de partículas radiactivas, cada 10000 partículas, salen del depósito 4 partículas en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 5 partículas?