UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 28 GIUGNO 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

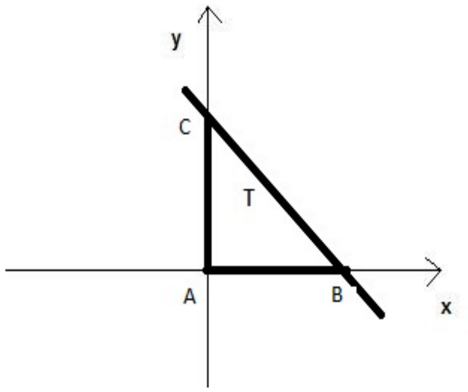
e dato l'insieme

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4\right\},$$

si chiede di

disegnare T

Svolgimento:



stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo e minimo assoluti in T e, in caso affermativo, determinarli

Svolgimento: La funzione f è definita e continua nell'insieme $\mathbb{R}^2$. Inoltre T è un insieme chiuso e limitato. Quindi, per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo assoluti in T.

Per determinarli, osserviamo che f è derivabile in $\mathbb{R}^2$ e risulta

$$f_x(x, y) = 2xye^{-(x+y)} - x^2 y e^{-(x+y)} = xy(2 - x)e^{-(x+y)}$$

e

$$f_y(x, y) = x^2 e^{-(x+y)} - x^2 y e^{-(x+y)} = x^2(1 - y)e^{-(x+y)}.$$

Per trovare i punti critici di f nell'interno di T, basta risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} xy(2 - x)e^{-(x+y)} = 0 \\ \\ x^2(1 - y)e^{-(x+y)} = 0, \end{cases}$$

le cui uniche soluzioni sono date da $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, e $(2, 1)$. Poiché solo il punto $(2, 1)$ è interno al triangolo T, allora l'unico punto critico di f interno a T è $(2, 1)$.

Ora consideriamo il bordo di T: $\partial T = AB \cup BC \cup AC$, dove

$$AB : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0, 4],$$

$$BC : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0, 4],$$

$$e\ \ AC : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0, 4].$$

Risulta

- $f_{|AB}(t) = 0$ con $t \in (0, 4)$.
  Quindi tutti i punti di AB sono critici;

- $f_{|BC}(t) = t^2(4 - t)e^{-4} = h(t)$ con $t \in (0, 4)$.
  La funzione h è derivabile in $(0, 4)$ e risulta

  $$h'(t) = e^{-4}(8t - 3t^2)$$

  per cui $h'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$ oppure $t = \frac{8}{3}$. Poiché $t = 0 \notin (0, 4)$, allora l'unico punto critico di f su BC è $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$;

- $f_{|AC}(t) = 0$ con $t \in (0, 4)$.
  Quindi tutti i punti di AC sono critici.

Ora basta confrontare i valori assunti dalla funzione f nei punti trovati finora e nei vertici A, B e C del triangolo T. Risulta

- $f(2, 1) = 4e^{-3}$;
- $f(x, 0) = 0$ con $x \in [0, 4]$;
- $f(0, y) = 0$ con $y \in [0, 4]$;
- $f(8/3, 4/3) = \frac{256}{27}e^{-4}$,

quindi il massimo assoluto per f in T è $4e^{-3}$, mentre il minimo assoluto è 0.

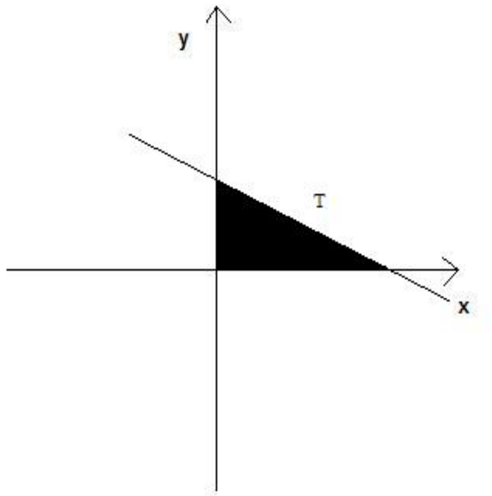
Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T (3 + 3x + y)\ dxdy\,,$$

dove

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3\,,\ 0 \le y \le -\frac{2}{3}(x - 3)\right\}.$$

Svolgimento: L'insieme T si può rappresentare come



Allora, essendo T un dominio semplice rispetto all'asse x, dalla formula di riduzione degli integrali doppi, risulta

$$\begin{aligned}
\iint_T (3 + 3x + y)\ dxdy &= \int_0^3 \left(\int_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} \big(3 + 3x + y\big)\,dy\right)\,dx \\
&= \int_0^3 \left[3y + 3xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{-\frac{2}{3}(x-3)}\,dx \\
&= \int_0^3 \left(-2(x-3) - 2\,x(x-3) + \frac{2}{9}(x-3)^2\right)\,dx \\
&= \left[-(x-3)^2 - \frac{2}{3}\,x^3 + 3x^2 + \frac{2}{27}(x-3)^3\right]_0^3 \\
&= -18 + 27 + 9 + 2 \\
&= 20\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$z' = \frac{1}{2x}\left(z^2 - 1\right) ,$$

si chiede di

determinarne, motivando la risposta, l'integrale generale

Svolgimento: Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Due integrali dell'equazioni si ottengono ponendo

$$z^2 - 1 = 0 ,$$

che è verificata se e solo se $z(x) = 1$ oppure $z(x) = -1$.
Se $z^2 - 1 \neq 0$, l'equazione data si può scrivere nella forma

$$\frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2x}\, dx .$$

Integrando membro a membro si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z^2 - 1}\, dz &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{z-1}\, dz - \int \frac{1}{z+1}\, dz\right) \\ &= \frac{1}{2}\log|z-1| - \frac{1}{2}\log|z+1| + c_1 \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c_1 , \qquad c_1 \in \mathbb{R} , \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\log|x| + c_1 , \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

e quindi,

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \frac{1}{2}\log|x| + c_1 , \qquad c \in \mathbb{R}$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{z-1}{z+1} = c_1 x , \qquad c_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} .$$

Ricavando z da tale equazione si ha

$$z = \frac{1 + c_1 x}{1 - c_1 x} , \qquad c_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} .$$

stabilire, motivando la risposta, se l'equazione data ammette una soluzione $z = z(x)$ tale che $\int_0^{+\infty} z(x)\, dx = +\infty$

Svolgimento: La funzione $z(x) = 1$ è una soluzione dell'equazione data ed è tale che

$$\int_0^{+\infty} 1\, dx = +\infty .$$

Quindi, anche in questo caso, la risposta alla domanda posta è affermativa.

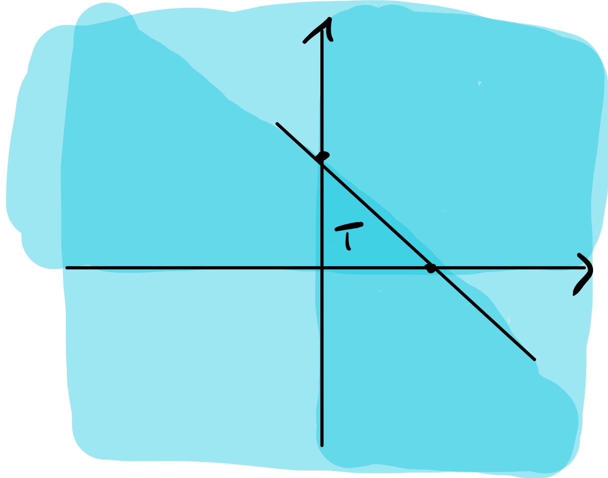
Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x,y)=x^2ye^{-(x+y)}$$

e dato l'insieme

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 4\},$$

si chiede di
disegnare T



stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo e minimo assoluti in T e, in caso affermativo, determinarli

f CONTINUA, D CHIUSO, LIMITATO $\Rightarrow$ WEIERSTRASS

$f \in C^1(T)$

$$\nabla f = \left\{ 2xy\cdot e^{-(x+y)} - x^2y\cdot e^{-(x+y)},\ x^2\cdot e^{-(x+y)} - x^2y\, e^{-(x+y)} \right\}$$

$$\frac{2xy-x^2y}{e^{(x+y)}} \qquad \frac{x^2-x^2y}{e^{(x+y)}}$$

$$\frac{xy(2-x)}{e^{(x+y)}} \qquad \frac{x^2(1-y)}{e^{(x+y)}}$$

$(0,y)$

$(2,1)$

$$\begin{cases} xy(2-x)=0 \\ x^2(1-y)=0 \end{cases}$$

$(0,y)\notin \mathring{T}$

$(2,1)\in \mathring{T}$

PUNTI DEL BORDO

$AB: \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[0,4]$

$BC: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad t\in[0,4]$

$\to$ PUNTI CRITICI POICHÉ $f_{|AB} = f_{|BC} = 0$

$CA: \begin{cases} x=t \\ y=4-t \end{cases} \quad t\in[0,4] \to t^2(4-t)\cdot e^{-(t+4-t)}$ $(4t^2-t^3)e^{-4}$ $=(8t-3t^2)e^{-4}$ $= 0$

$t(8-3t) \Rightarrow t=0,\frac{8}{3}$

$(0,4),\ \left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$

$f(0,4) = 0 \rightarrow$ MIN

$f\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{-\left(\frac{12}{3}\right)} = \frac{64}{9}\cdot\frac{4}{3}\cdot e^{-\frac{12}{3}} = \frac{256}{9}\cdot e^{-\frac{12}{13}}$

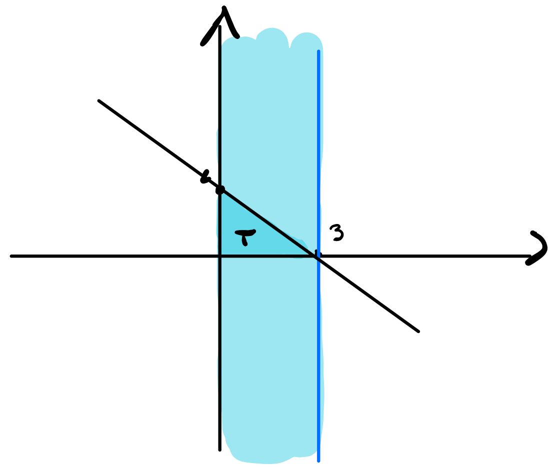
$f(2,1) = 4\cdot 1\cdot e^{-(3)} \Rightarrow$ MAX

Esercizio 5. **Calcolare il seguente integrale doppio**

$$\iint_T (3+3x+y)\,dxdy\,,$$

dove

$$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 3\,,\ 0\le y\le -\frac{2}{3}(x-3)\}\,.$$



$x\in[0,3] \qquad 0\le y\le -\frac{2}{3}(x-3)$

$$\int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} 3+3x+y\,dy\,dx = \int_0^3 [3y]_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} + [3xy]_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} dx =$$

$$= \int_0^3 -2(x-3) - 2x(x-3) - \frac{\frac{\cancel{4}}{9}(x-3)}{\cancel{2}}\,dx =$$

$$= \int_0^3 -2x+6-2x^2+6-\frac{2}{9}x+\frac{6}{9}\,dx = \int_0^3 -18x^2-20x+114\,dx = -18\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{3}} - \overset{10}{\cancel{20}}\cdot\frac{9}{\cancel{2}} + 342 =$$

$-18x+108-18x^2-2x+6$

$= -162 - 90 + 342$

$= 342 - 252 = 90$

ERRORI DI CALCOLO

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$z' = \frac{1}{2x}\left(z^2 - 1\right) ,$$

si chiede di

determinarne, motivando la risposta, l'integrale generale

$$\int \frac{1}{z^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\log|z-1| - \frac{1}{2}\log|z+1| = \frac{1}{2}\log|x| + c_1$$

$$\frac{z-1}{z+1} = c_1 x \Rightarrow z - 1 = zc_1 x + c_1 x \qquad z - zc_1 x = c_1 x + 1 \Rightarrow z(1 - c_1 x) = c_1 x + 1$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{c_1 x + 1}{1 - c_1 x}$$

stabilire, motivando la risposta, se l'equazione data ammette una soluzione $z = z(x)$ tale che $\int_0^{+\infty} z(x)\,dx = +\infty$

$$z = 1 \iff \frac{cx+1}{1-c_1 x} = 1 \Rightarrow cx + x = 1 - c_1 x \Rightarrow c = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x 1 = +\infty$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 6 GIUGNO 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimi e minimi locali nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarli

Svolgimento: La funzione f è definita in $\mathbb{R}^2$. Inoltre f è derivabile in $\mathbb{R}^2$ e risulta

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3$$

e

$$f_y(x,y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2\,.$$

Per trovare i punti critici di f in D, basta risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\[2ex] 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0\,, \end{cases}$$

che si può riscrivere come

$$\begin{cases} x^2y^2\,(3 - 4x - 3y) = 0 \\[2ex] x^3y\,(2 - 2x - 3y) = 0\,, \end{cases}$$

le cui uniche soluzioni sono date da $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, e $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ che rappresentano tutti i punti critici di f.

Per classificare tali punti consideriamo le derivate seconde di f e scriviamo la matrice hessiana di f in (x,y):

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$H(1/2,1/3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

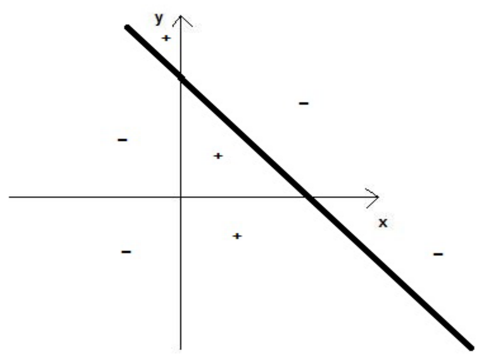
da cui segue che $|H(\frac{1}{2},\frac{1}{3})| = \frac{1}{144}$. Allora, poiché $-\frac{1}{9} < 0$, il punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ è un massimo locale per f. Poiché $|H(x,0)| = |H(0,y)| = 0$, il metodo della matrice hessiana non consente di classificare i punti $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, e $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Per questi punti si può procedere utilizzando la definizione di massimo o minimo locale. Consideriamo i punti $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, studiando la disequazione

$$f(x,y) \geq f(x,0) = 0\,.$$

Si ha

$$f(x,y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3y^2\,(1-x-y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{vedi disegno qui sotto}$$



$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$, $\quad D = \mathbb{R}$

f DERIVABILE IN D

$$\nabla f = \{3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3,\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2\}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2(3 - 4x - 3y) = 0 \\ x^3y(2 - 2x - 3y) = 0 \end{cases} \qquad (x,0) \quad (y,0) \qquad \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right)$$

$$1 + 2x = 0 \qquad x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$H = \begin{vmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3, & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2, & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{vmatrix}$$

$$H\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} - 12\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} - 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}, & 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} - 8\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} - 9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} \\ //, & 2\cdot\frac{1}{8} - 2\cdot\frac{1}{16} - 6\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{9}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ //, & \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{4}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12}, & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} = \frac{1}{18}$$

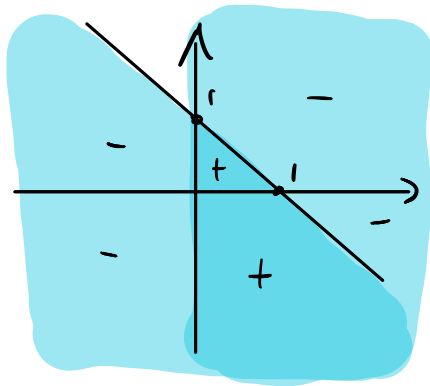
$\Downarrow$

MAX

$H(x,0) = H(y,0) = 0 \Rightarrow$ NON POSSIAMO DIRE NULLA

$f(x,y) \geq f(x,0)$

$x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^2 \geq 0 \qquad x^3y^2(1-x-y) \geq 0$



$x \geq 0$

$-x-y+1 \geq 0$

$x+y-1 \leq 0 \Rightarrow x+y \leq 1$

$0 < x < 1$ MIN LOC.

$0 > x > 1$ MAX LOC.

$(0,0), (0,1), (1,0) \Rightarrow$ SELLA

$f(x,y) \geq f(0,y)$ SI OTTIENE LA STESSA DISEQUAZIONE

TUTTI I PUNTI $(0,y)$ SONO DI SELLA

Allora si ha:

- i punti $(x, 0)$ con $x < 0$ o $x > 1$ sono punti di massimo locale per f
- i punti $(x, 0)$ con $0 < x < 1$ sono punti di minimo locale per f
- i punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti di sella per f.

Ora consideriamo i punti $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso la disequazione da studiare è

$$f(x, y) \geq f(0, y) = 0 .$$

Dal disegno precedente si evince che i punti $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$ sono punti di sella per f.

A

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D y\,dxdy\,,$$

dove

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\,, y\geq 0\,, 1\leq x^2+y^2\leq 4\Big\}.$$

Svolgimento: Il dominio D è la parte di corona circolare delimitata dalle circonferenze di equazioni

$$x^2+y^2=1 \quad \text{e} \quad x^2+y^2=4$$

e contenuta nel primo quadrante. Passando a coordinate polari

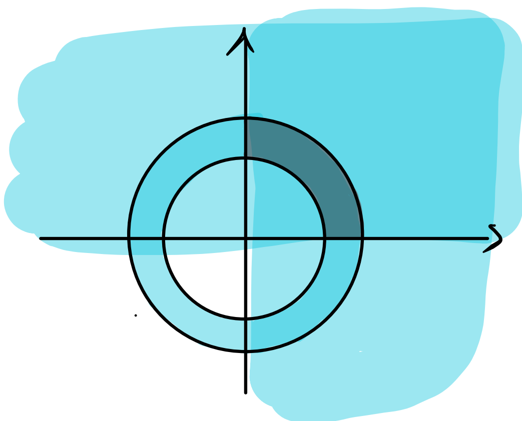
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho\in[1,2]\,,\quad \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\,,$$

si ottiene

$$\iint_D y\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_1^2\rho\sin\theta\rho\,d\rho\Big)\,d\theta$$
$$=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{3}\Big[\rho^3\Big]_1^2=\frac{7}{3}.$$

$$\iint_D y\,dxdy\,,$$

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\,, y\geq 0\,, 1\leq x^2+y^2\leq 4\Big\}.$$



$\rho\in[1,2] \qquad \theta=[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2\rho^2\sin\theta\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2\right)\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)d\theta=\frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta=$$

$$=-\frac{7}{3}\cos\theta\Big|_0^{\pi}=-\frac{7}{3}(-1)=\frac{7}{3}$$

$$y' = \frac{6y}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3},$$

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$y' = 6y \cdot \frac{1}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3}$

$z = (y)^{1-\alpha} \Rightarrow z = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = z^3$

$y' = 3z^2 \cdot z'$

$$3z^2 \cdot z' = 6z^3 \frac{1}{x} - 12x^3 \cdot e^{x^2} \cdot z^2$$

$$z' = 2z \frac{1}{x} - 4x^3 \cdot e^{x^2}$$

$$e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[\int -4x^3 \cdot e^{x^2} \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right] \Rightarrow x^2 \left[\int -4x^3 \cdot e^{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} dx + c \right]$$

$$\Rightarrow x^2 \left[\int -4x \cdot e^{x^2} dx + c \right] \Rightarrow x^2 \left[-4 \int x \cdot e^{x^2} dx + c \right] =$$

$t = x^2$

$dt = 2x\, dx$

$\frac{1}{2x} dt = dx$

$$x^2 \left[-4 \int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x} dt + c \right] = x^2 \left[-2 \int e^t dt + c \right] = x^2 \left[-2e^t + c \right] = -2x^2 e^{x^2} + cx^2$$

$$y = z^3 = \left[-2x^2 e^{x^2} + cx^2 \right]^3$$

$y = 0$ È SOLUZIONE

$$\begin{cases} y' = \frac{6y}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$\left[-2e + c \right]^3 = 0 \iff c = 2e$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{6y}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3}\,,$$

si chiede di

determinarne, motivando la risposta, l'integrale generale

Svolgimento: L'equazione data è un'equazione differenziale del primo ordine di Bernouilli. Ponendo

$$z(x) = (y(x))^{1/3}$$

si ha

$$z'(x) = \frac{1}{3}\,(y(x))^{-2/3}\,y'(x)\,.$$

Allora, sostituendo nell'equazione data si ottiene

$$3z^2 z' = \frac{6z^3}{x} - 12x^3 e^{x^2} z^2.$$

Una soluzione di tale equazione è $z(x) = 0$, da cui si ottiene $y(x) = 0$. Mentre, se $z(x) \neq 0$, tale equazione si può scrivere come

$$z' = \frac{2z}{x} - 4x^3 e^{x^2}\,,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$\begin{aligned}
z(x) &= e^{\int 2/x dx}\left[\int \left(-4x^3 e^{x^2} e^{-\int 2/x dx}\right) dx + c\right] \\
&= -x^2\left[\int \frac{4x^3 e^{x^2}}{x^2}\, dx - c\right] \\
&= -x^2\left[4\int x e^{x^2}\, dx - c\right] \\
&= -x^2\left[2e^{x^2} - c\right] \\
&= x^2\left[c - 2e^{x^2}\right]\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Essendo $z(x) = (y(x))^{1/3}$, allora l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = (z(x))^3 = \left(x^2\left[c - 2e^{x^2}\right]\right)^3 = x^6\left[c - 2e^{x^2}\right]^3\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

stabilire, motivando la risposta, se l'equazione data ammette una soluzione costante

Svolgimento: La funzione $y(x) = 0$ risolve l'equazione data. Quindi la risposta alla domanda posta è affermativa.

trovare, motivando la risposta, una soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{6y}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Poiché $y(x) = 0$ risolve l'equazione data e verifica la condizione $y(1) = 0$, una soluzione del problema di Cauchy dato è $y(x) = 0$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 15 SETTEMBRE 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 4. Data la funzione

$$\frac{2xy - x^2y^2}{2(x+y)}\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 2, x, y > 0\}$$

e, in caso affermativo, determinarlo

Svolgimento: La funzione f è definita in A e risulta

$$0 < f(x,y) = \frac{2xy - x^2y^2}{2(x+y)} < \frac{2xy}{2(x+y)} < \frac{4}{2(x+y)}\,.$$

Allora, se $x \to +\infty$ (oppure $y \to +\infty$), f tende a zero. Come conseguenza di ciò e del fatto che $f > 0$ in A, la funzione f ha massimo in qualche punto di A.
Per determinare questo massimo osserviamo che la funzione f è derivabile in A e si ha

$$f_x(x,y) = \frac{2(2y - 2xy^2)(x+y) - 2(2xy - x^2y^2)}{4(x+y)^2} = \frac{y^2(2 - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2}$$

e

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(2 - y^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} \qquad \text{per simmetria}\,.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

e tenendo conto che $x, y > 0$ per ipotesi, si ottiene

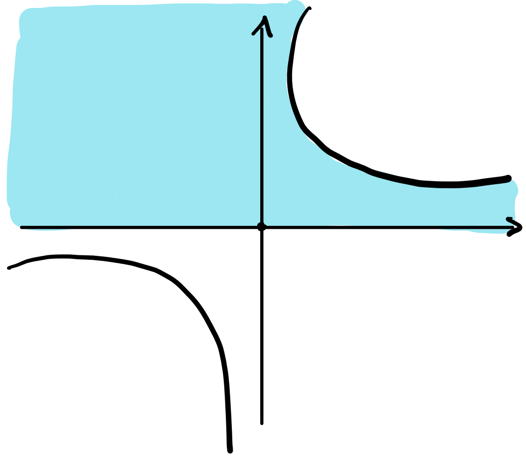
$$\begin{cases} 2 - x^2 - 2xy = 0 \\ 2 - y^2 - 2xy = 0\,, \end{cases}$$

che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} y = -x \\ 2 - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x \\ 2 - x^2 - 2xy = 0\,. \end{cases}$$

Il primo sistema non va preso in considerazione, poiché $x, y > 0$ per ipotesi. Risolvendo il secondo sistema sistema si ottiene l'unica soluzione $y = x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Allora l'unico punto critico di f è dato da $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Per quanto detto in precedenza tale punto è il massimo assoluto di f cercato. Quindi, il massimo assoluto di f in A è $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

$$\frac{2xy - x^2y^2}{2(x+y)}, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 2, x, y > 0\}$$



NO WEISTRASS

$$\lim_{(x,y)\to+\infty} \frac{2xy - x^2y^2}{2(x+y)} = \frac{\overset{<2}{xy}\,\overset{>0}{(2-xy)}}{2(x+y)}$$

$x \cdot y \to +\infty$

$\to 0$

$$0 < \frac{xy}{2(x+y)} < \frac{4}{2x+y}$$

f AMMETTE MAX.

$$\nabla f \left\{ \frac{(2y - 2xy^2)\,\cancel{2}(x+y) - (2xy - x^2y^2)(\cancel{2})}{2\,\cancel{4}(x+y)^2} , \frac{(2x - 2x^2y)\,2(x+y) - 2(xy - x^2y^2)\cdot 2}{4(x+y)^2} \right\}$$

$$2y^2 + \cancel{2xy} - 2x^2y^2 - 2xy^3 - \cancel{2xy} + x^2y^2$$

$$\frac{y^2(2 - x^2 - 2xy)}{(x+y)^2}$$

$$\begin{cases} 2 - x^2 - 2xy = 0 \\ 2 - y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{2 - x^2 - 2xy = 2 - y^2 - 2xy}$$

$$x = y \implies 2 - x^2 - 2x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{MAX} = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) =$$

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T (xy - 2y)\, dx\, dy\,,$$

dove

$$T = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}(x-2)\,, (x-2)^2 + y^2 \le 1\Big\}\,.$$

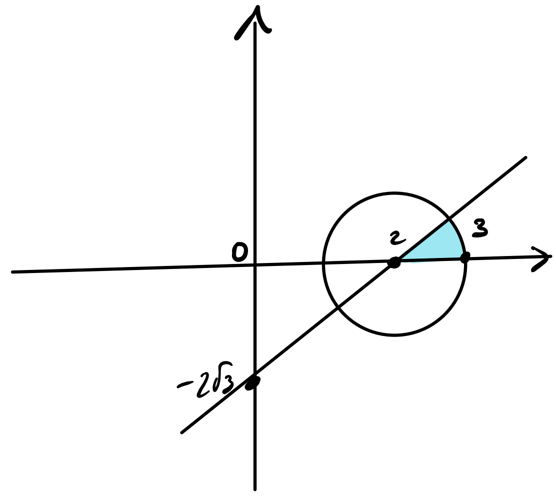
Svolgimento: Per calcolare l'integrale su T passiamo a coordinate polari con polo $(2, 0)$:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1]\,,\ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{3}]\,.$$

Con questo cambio di variabili lo jacobiano è pari a ρ.
Utilizzando la formula di riduzione sui rettangoli si ha:

$$\begin{aligned}\iint_T (xy - 2y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \rho\, d\theta\Big)\, d\rho \\ &= \int_0^1 \rho^3\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{32}\,.\end{aligned}$$

$$\iint_T (xy-2y)\,dx\,dy\,,$$



$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \sqrt{3}(x-2)\,,\,(x-2)^2+y^2\le 1\right\}.$$

TROVO INTERSEZIONE:

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-2) \\ (x-2)^2+\left(\sqrt{3}(x-2)\right)^2=1 \end{cases}$$

$$4x^2-16x+15=0 \qquad x=\begin{cases}\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2}\end{cases}$$

$$x=\frac{5}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2 \qquad y=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x=2+\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho\in[0,1] \qquad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left((2+\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)-2\rho\sin\theta\right)\rho\,d\theta\,d\rho =$$

$$\left(2\rho\cancel{\sin\theta}+\rho^2\sin\theta\cos\theta-2\rho\cancel{\sin\theta}\right)\rho$$

$$2\theta=t \qquad 2d\theta=dt \qquad d\theta=\frac{1}{2}dt$$

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{3}}\rho^3\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\rho=\int_0^1\rho^3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta\,d\rho=\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot\frac{1}{2}\left[-\cos t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{32}$$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$4y''' + 2y'' + 16y' + 8y = 0\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se ammette soluzioni periodiche non banali e, in caso affermativo, determinarle

Svolgimento: L'equazione data è lineare, omogenea e a coefficienti costanti. Quindi, per determinarne l'integrale generale, basta cercare soluzioni del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$.

Il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda) = 4\lambda^3+2\lambda^2+16\lambda+8$, i cui zeri si ottengono risolvendo l'equazione algebrica

$$2\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0\,.$$

Mettendo in evidenza a fattor parziale si ottiene

$$\lambda^2(2\lambda + 1) + 4(2\lambda + 1) = 0$$

da cui si ha

$$(2\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = 0\,,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = -\frac{1}{2}\,, \quad \lambda = 2i \quad \text{e} \quad \lambda = -2i\,.$$

Poiché il polinomio caratteristico ammette le radici immaginarie $\pm 2i$, allora l'equazione differenziale data ammette soluzioni periodiche non banali date da

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,, (c_1, c_2) \neq (0, 0)\,.$$

determinarne, se esiste, una soluzione $y = y(x)$ **tale che** $y(0) = 1$ **e** $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$

Svolgimento: Dai passaggi precedenti si ha che l'integrale generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$ non esiste a meno che $c_1 = c_2 = 0$ e tenendo conto che $\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$, allora, affinché valga la condizione $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$, basta imporre che $c_1 = c_2 = 0$ e che $c_3 > 0$. Quindi si ottiene

$$y(x) = c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\,, \qquad c_3 > 0\,.$$

Infine, affinché valga la condizione $y(0) = 1$, deve essere $c_3 = 1$. Allora la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\,.$$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$4y''' + 2y'' + 16y' + 8y = 0\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se ammette soluzioni periodiche non banali e, in caso affermativo, determinarle

E' LINEARE OMOGENEA A COEF. COSTANTI DI 3° GRADO

$\Rightarrow$ AMMETTE SOLUZIONI DEL TIPO $y = e^{\alpha x}$

$$4\alpha^3 + 2\alpha^2 + 16\alpha + 8 = 0$$

$$2\alpha^3 + \alpha^2 + 8\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha^2(2\alpha + 1) + 4(2\alpha + 1) = 0$$

$$(2\alpha + 1)(\alpha^2 + 4) = 0$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\alpha = \pm 2i$ $\qquad$ $y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 \cos 2\theta + c_3 \sin 2\theta$

determinarne, se esiste, una soluzione $y = y(x)$ **tale che** $y(0) = 1$ **e** $\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$

$$c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 \cos 2\theta + c_3 \sin 2\theta = 1$$

$c_2, c_3 = 0$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}$$