
FISICA GENERALE

CORSO TENUTO DA MICHELE VELTRI

CREATO DA
STEFANO ZIZZI

*Università degli Studi di Urbino
Informatica Applicata*



MATRICOLA: 312793
GIUGNO 2023

Indice

1	Introduzione al Metodo Scientifico	9
1.1	Il Metodo Scientifico	9
1.2	Analisi Dimensionale	10
1.3	Stime di Ordini di Grandezza	10
2	Il Moto in una Dimensione	11
2.1	Definizioni	11
2.2	Legge Oraria del Moto	11
2.3	Velocità Media e Velocità Istantanea	11
2.4	Accelerazione Media e Accelerazione Istantanea	12
2.5	Diagrammi Spazio-Tempo	12
2.6	Moto Rettilineo Uniforme	13
2.7	Moto Uniformemente Accelerato	13
2.8	Moto dei Corpi in Caduta Libera	13
2.9	Esercizi	13
3	I vettori	17
3.1	Sistemi di Coordinate	18
3.2	Grandezze Scalari e Grandezze Vettoriali	18
3.3	Operazioni con i Vettori	19
3.3.1	Prodotto Scalare	19
3.3.2	Prodotto Vettoriale	19
3.4	Componenti di un Vettore e Vettori Unitari	20
3.4.1	Prodotto Vettore-Scalare	20
3.4.2	Prodotto Scalare	20
3.4.3	Prodotto Vettoriale	20
3.5	Esercizi	20
4	Il moto in Due e Tre Dimensioni	23
4.1	I Vettori	23
4.1.1	Vettore Spostamento	23
4.1.2	Vettore Velocità	23
4.1.3	Vettore Accelerazione	23
4.2	Il Moto dei Proiettili	24
4.2.1	Traiettoria parabolica	24
4.2.2	Gittata	24
4.2.3	Quota massima	25
4.2.4	Il proiettile contro il bersaglio	26
4.3	Il Moto Circolare Uniforme	27
4.3.1	Accelerazione centripeta	27
4.3.2	Velocità angolare	27
4.3.3	Velocità tangenziale	28
4.3.4	Periodo	28
4.3.5	Moto Circolare non Uniforme	29
4.4	Esercizi	29

5	I Principi della Dinamica	31
5.1	Il Principio di Inerzia	31
5.2	Il Secondo Principio della Dinamica	31
5.3	Il Terzo Principio della Dinamica	32
5.3.1	Forza normale	32
5.4	Quantità di Moto e Impulso	33
5.5	Massa e Peso	34
5.6	Esercizi	34
6	Applicazioni dei Principi della Dinamica	37
6.1	Il Moto sul Piano Inclinato	37
6.2	Le Forze di Attrito	37
6.2.1	Attrito Statico	37
6.2.2	Attrito Dinamico	38
6.2.3	Determinare il Coefficiente Statico	38
6.2.4	Determinare il Coefficiente Dinamico	38
6.3	Il Moto Armonico Semplice	39
6.4	La Forza Elastica	40
6.4.1	Moto di un Corpo Attaccato ad una Molla	41
6.5	Il Pendolo Semplice	41
6.6	Il Moto nei Sistemi Accelerati	43
6.6.1	Peso in Ascensore	43
6.7	Dinamica del Moto Circolare Uniforme	43
6.7.1	Curve su Strade	44
6.7.1.1	Percorrenza di una curva sopraelevata	44
6.7.2	Pendolo Conico	45
6.7.3	Il Peso sulla Ruota Panoramica	45
6.7.4	Pallina in Rotazione Verticale	46
6.8	Esercizi	46
7	Lavoro ed Energia	51
7.1	Lavoro	51
7.1.1	Lavoro di una Forza Costante su Traiettoria Rettilinea	51
7.1.2	Lavoro di Forze Variabili su Traiettorie Generiche	51
7.2	Energia Cinetica	52
7.3	Lavoro della Forza Peso	52
7.4	Lavoro della Forza Elastica	53
7.5	Lavoro della Forza di Attrito	53
7.6	Potenza	54
7.7	Forze Conservative e loro Proprietà	54
7.8	Energia Potenziale	55
7.9	Il Principio di Conservazione dell'Energia	55
7.9.1	Relazione tra Forza Conservativa ed Energia Potenziale	56
7.10	Applicazioni del Principio di Conservazione	56
7.10.1	Pendolo	56
7.10.2	Sistema Massa-Molla	56
7.11	Esercizi	57
8	La Gravitazione Universale	65
8.0.1	Legge di gravitazione universale	65
8.1	Le Leggi di Keplero	66
8.1.1	Prima Legge	66
8.1.2	Seconda Legge di Keplero	66
8.1.3	Terza Legge di Keplero	67
8.2	Il Momento Angolare	68
8.2.1	Teorema del Momento Angolare	68
8.2.2	Momento per le Forze Centrali	69
8.3	Moto dei Satelliti	69
8.3.1	Satelliti Geostazionari	69

8.4	Il Campo Gravitazionale	70
8.5	Energia Potenziale Gravitazionale	70
8.5.1	Energia Potenziale Gravitazionale di un Sistema di Masse	71
8.5.2	Energia Potenziale Vicino alla Superficie Terrestre	71
8.5.2.1	Energia di un Satellite	71
8.5.3	Velocità di Fuga	72
8.6	Esercizi	72
9	La Carica Elettrica	79
9.1	Carica Elettrica	79
9.2	Legge di Coulomb	79
9.3	Conduttori e Isolanti	80
9.4	Induzione Elettrica	80
9.4.1	Processo di Carica per Induzione	80
9.4.2	Induzione negli Isolanti	80
9.5	Quantizzazione della Carica Elettrica	81
9.6	Esercizi	81
10	Il Campo Elettrico	83
10.1	Il Dipolo Elettrico	84
10.2	Distribuzioni Continue di Cariche	84
10.3	Moto di una Carica in Campo Elettrico Uniforme	85
10.4	Deflessione di un Fascio di Elettroni	86
10.5	Energia Potenziale Elettrica	87
10.6	Differenza di Potenziale	87
10.7	Potenziale Elettrico	87
10.8	Differenza di Potenziale in Campi Uniformi	89
10.8.1	Punti a Stesso Potenziale	90
10.8.2	Potenziale di un Sistema di Cariche	90
10.9	Superfici Equipotenziali	91
10.10	Ricavare il Campo Elettrico dal Potenziale	91
10.11	Esercizi	92
11	La Legge di Gauss	95
11.1	Il Flusso del Campo Elettrico	95
11.2	La Legge di Gauss	96
11.2.1	Flusso per un Sistema di Cariche Puntiformi	96
11.2.2	Flusso di un Dipolo Elettrico	97
11.3	Applicazioni della Legge di Gauss al Calcolo dei Campi Elettrici	97
11.3.1	Superficie Sferica	97
11.3.2	Sfera Omogenea Carica	98
11.3.3	Carica Lineare	98
11.3.4	Piano Carico	99
11.4	Conduttori in Equilibrio Elettrostatico	99
11.4.1	Prima Proprietà	99
11.4.2	Seconda Proprietà	100
11.4.3	Terza Proprietà	100
11.4.4	Quarta Proprietà	101
11.4.5	Quinta Proprietà	101
11.4.6	Carica all'Interno di un Conduttore Cavo Isolato	101
11.5	Esercizi	102
12	Capacità e Condensatori	105
12.1	Capacità	105
12.2	Condensatore Piano	105
12.3	Condensatori in Serie e in Parallelo	106
12.3.1	Condensatori in Parallelo	106
12.3.2	Condensatori in Serie	107
12.4	Energia immagazzinata in un condensatore carico	107

12.5	Condensatore con Dielettrico	108
12.6	Esercizi	108
13	Corrente Elettrica	111
13.1	Relazione tra Corrente e Moto dei Portatori di Carica	111
13.2	Resistenza e legge di Ohm	112
13.2.1	Legge di Joule	113
14	Circuiti Elettrici in Corrente Continua	115
14.1	Forza Elettromotrice	115
14.2	Resistori in Serie e Parallelo	115
14.2.1	Resistori in Serie	115
14.2.2	Resistori in Parallelo	115
14.3	Leggi di Kirchoff	116
14.3.1	Definizioni Circuitali	116
14.3.2	Prima Legge di Kirchoff: Legge dei Nodi	116
14.3.3	Seconda Legge di Kirchoff: Legge delle Maglie	117
14.4	Circuiti RC	117
14.4.1	Introduzione ai Circuiti RC	117
14.4.2	Processo di Carica	118
14.4.3	Processo di scarica	119
14.5	Applicazioni Circuiti Elettrici in CC	120
14.5.1	Attenuatore	120
14.5.2	Partitore di Corrente	120
14.6	Esercizi	120
15	Il Campo Magnetico	125
15.0.1	Campo Magnetico	125
15.0.2	Forza di Lorentz	125
15.0.3	Moto in Campo Uniforme (θ generico)	126
15.0.4	Forza Magnetica su un Conduttore Percorso da Corrente	126
15.0.4.1	Conduttore rettilineo	127
15.0.4.2	Conduttore di Forma Arbitraria	127
15.0.4.3	Spira Semicircolare	128
15.0.5	Applicazioni Pratiche della Forza di Lorentz	128
15.0.5.1	Selettore di Velocità	128
15.0.5.2	Spettrometro di Massa	129
15.0.5.3	Ciclotrone	129
15.1	Esercizi	130
16	Sorgenti di Campo Magnetico	135
16.1	Legge di Gauss per il Campo Magnetico	135
16.2	Legge di Biot-Savart	135
16.2.1	Campo Magnetico Prodotto da un Filo di Lunghezza Infinita	136
16.2.2	Campo Magnetico Prodotto da un Filo Piegato ad Arco	137
16.2.3	Forza Magnetica tra Conduttori Paralleli	137
16.3	Legge di Ampere	138
16.3.1	Campo Magnetico in un Filo Rettilineo	139
16.3.2	Campo Magnetico nel Solenoide	140
16.4	Solenoide Ideale	140
16.5	Esercizi	141
17	Campi Elettrici e Magnetici Variabili nel Tempo	145
17.1	Induzione Elettromagnetica	145
17.2	Legge di Faraday	146
17.3	Legge di Lenz	147
17.4	Forza Elettromotrice nei Circuiti in Moto	148
17.5	Autoinduzione e Induttanza	149
17.6	Circuiti RL	150

17.7	Energia Potenziale Magnetica	151
17.8	Legge di Ampere-Maxwell	152
17.9	Le Quattro Equazioni di Maxwell	152
17.10	Esercizi	153
18	Onde Elettromagnetiche	159
18.1	Equazioni di Maxwell in Forma Differenziale	159
18.2	Legge di Gauss in Forma Differenziale	159
18.3	Legge di Faraday e Legge di Ampere-Maxwell in Forma Differenziale	160
18.4	Onde Elettromagnetiche	161
18.4.1	Onde Piane	161
18.4.2	Onda Piana Armonica	162
18.4.3	Equazioni di Maxwell come Onde	162
18.4.4	Vettore di Poynting	163
18.4.5	Spettro Elettromagnetico	164
19	Formulario	165
19.1	Meccanica	165
19.1.1	Moto rettilineo	165
19.1.2	Moto Parabolico	166
19.1.3	Moto Circolare	167
19.1.4	Moto Armonico	168
19.1.5	Forza Elastica	168
19.1.6	Piano Inclinato	169
19.1.7	Pendolo	169
19.1.8	Attrito	170
19.1.9	Lavoro ed Energia	170
19.2	Gravitazione	171
19.2.1	Leggi e Costanti	171
19.2.2	Moto satelliti	173
19.3	Elettrostatica	173
19.3.1	Costanti	173
19.3.2	Carica e Campo	173
19.3.3	Legge di Gauss	174
19.3.4	Capacità	175
19.4	Processo di scarica	176
19.5	Processo di carica	176
19.5.1	Corrente	176
19.5.2	Circuiti Elettrici	177
19.6	Magnetismo	177
19.7	Matematica	179
19.7.1	Derivate	179
19.7.2	Integrali	180

Capitolo 1

Introduzione al Metodo Scientifico

La fisica é la Descrizione quantitativa delle Natura fatta utilizzando strutture logiche della matematica.

Matematica

$$F = -kx$$

x : variabile indipendente

k : costante

F : variabile indipendente

Fisica

$$F = -kx$$

x : allungamento molla

k : costante elastica molla

F : forza elastica

1.1 Il Metodo Scientifico

Diffuso da Galileo il metodo scientifico é composto dai seguenti passaggi:

1. **Osservazione dei fenomeni naturali:**

solitamente in condizioni controllate del laboratorio;

2. **Definizione delle grandezze fisiche;**

3. **Misurazione:**

Confronto tra la grandezza fisica in esame ed un'altra grandezza ad essa omogenea.

4. **Unità di Misura:**

date dal Sistema Internazionale delle Unità di Misura;

5. **Strumenti;**

6. **Errori di misura:**

Quando si misura é comune compiere errori di misurazione, dunque si fa una media dei valori acquisiti:

$$\text{Valore Medio: } \overline{X} = \sum_{i=1}^N X_i$$

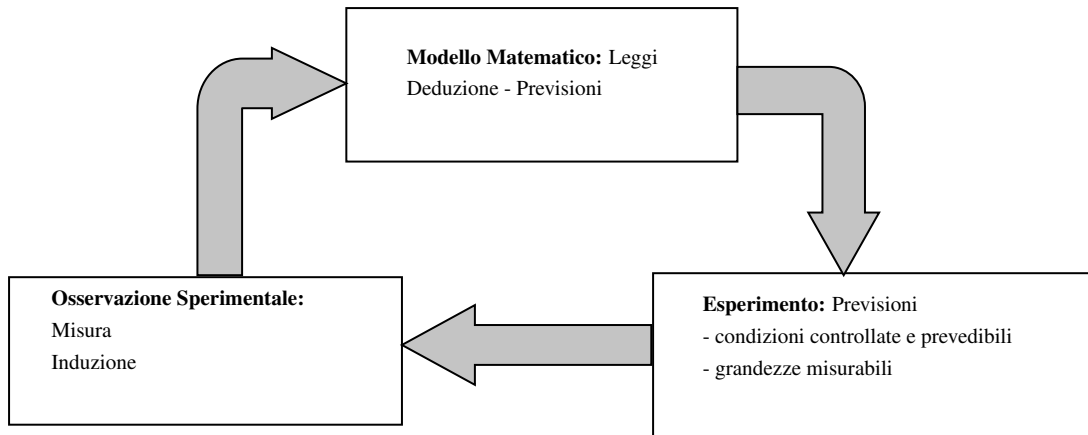
$$\text{Deviazione Standard: } \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\text{Risultato: } \overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

7. **Cifre Significative:**

L'approssimazione é data dall'elemento dell'equazione con minore numero di cifre significative(cifre note). Ad esempio:

$$r = 6.0cm \text{ (2 cifre significative)} \quad A = \pi r^2 = 113,09733... = 1.1 \cdot 10^2 cm^2$$



Una scienza si dice "esatta" non perché basata su informazioni infinitamente esatte ma perché la sua metodologia permette di conoscere il valore delle indeterminazioni ad esse associate.

1.2 Analisi Dimensionale

È buon uso controllare che le unità di misura del risultato corrispondano alla combinazione dei termini che lo compongono.

$$F = ma \quad [ML/T^2] = [M][L/T^2]$$

1.3 Stime di Ordini di Grandezza

La stima dell'ordine di grandezza di una variabile il cui valore preciso è sconosciuto è una stima arrotondata alla potenza di dieci più vicina. Ad esempio, una stima dell'ordine di grandezza per una variabile tra 3 miliardi e 30 miliardi è 10 miliardi.

Capitolo 2

Il Moto in una Dimensione

É quel ramo della meccanica newtoniana che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, ricorrendo esclusivamente alle nozioni di spazio e di tempo, indipendentemente dalle cause (forze) del moto stesso.

In fisica il **moto** è il cambiamento di posizione di un corpo in funzione del tempo, i 3 elementi principali per lo studio di un moto sono:

- Sistema di Riferimento;
- Sistema di Coordinate;
- Riferimento Temporale.

2.1 Definizioni

Punto materiale é un corpo dotato di massa ma di dimensioni infinitesime, é una approssimazione valida tutte le volte che le dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto alla distanza percorsa durante il moto.

Traiettoria é un insieme di punti occupati(nello spazio) del corpo durante il moto.

Spostamento é una grandezza vettoriale espressa in metri definita nel seguente modo:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Dove x_1 é la posizione occupata al tempo t_1 mentre x_2 é la posizione occupata al tempo t_2 successivo a t_1 .

Distanza é una grandezza scalare espressa in metri corrispondente alla lunghezza totale del tratto percorso ($d \geq 0$).

2.2 Legge Oraria del Moto

Una legge matematica che descrive la variazione di posizione di una funzione del tempo $X(t)$.

2.3 Velocità Media e Velocità Istantanea

La **velocità media** una grandezza vettoriale espressa in m/s definita come il rapporto tra lo spostamento effettuato da un corpo ed il tempo impiegato per compierlo:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

dove possiamo derivare che $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$. Allo stesso modo possiamo definire la **velocità media scalare**:

$$V_{ms} = \frac{d}{\Delta t}$$

La **velocità istantanea** è una grandezza vettoriale definita come la derivata della posizione di un corpo rispetto al tempo.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = V = \frac{dX(t)}{dt}$$

2.4 Accelerazione Media e Accelerazione Istantanea

L'**accelerazione media** è una grandezza vettoriale che rappresenta la variazione della velocità nell'unità di tempo.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad [a] = \left[\frac{LT^{-1}}{T} \right]$$

L'**accelerazione istantanea** è una grandezza vettoriale definita come la derivata della velocità rispetto al tempo, e che esprime la variazione di velocità di un corpo istante per istante.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

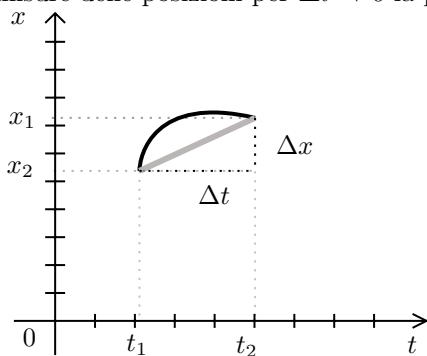
Da questo risulta che l'accelerazione istantanea non è altro che la derivata rispetto a t della velocità istantanea, quindi la derivata seconda del moto.

2.5 Diagrammi Spazio-Tempo

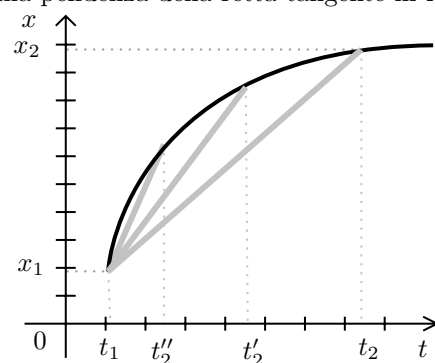
Il significato geometrico della velocità media è la pendenza media che congiunge i punti di inizio e fine del moto.

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Volendo fornire una rappresentazione "puntuale" del moto dobbiamo ridurre l'intervallo di tempo tra le misure delle posizioni per $\Delta t \rightarrow 0$ la pendenza media tende alla pendenza della retta tangente in X_1 .



Velocità media



Velocità istantanea

2.6 Moto Rettilineo Uniforme

Il moto di un corpo è rettilineo uniforme se si sposta lungo una retta con velocità costante (v_0) nel tempo. Viene descritto dalla formula:

$$v_0 = \frac{dX(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow dt \cdot v_0 = dX(t) \Rightarrow \int_0^t v_0 dt = \int_{x_0}^x X(t) dx \Rightarrow v_0 \int_0^t dt = \int_{x_0}^x X(t) dx \Rightarrow v_0 t = x - x_0$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0 t \quad [m] = [m] + \left[\frac{m}{s} \right] [s]$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t}$$

$$[m] = [m] + \left[\frac{m}{s} \right] [s]$$

2.7 Moto Uniformemente Accelerato

Il moto di un corpo è rettilineo uniformemente accelerato se si muove lungo una retta con accelerazione costante (a) nel tempo. Viene descritto dalla formula:

$$v_0 = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \Rightarrow v - v_0 = a \cdot t$$

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

$$\left[\frac{m}{s} \right] = \left[\frac{m}{s} \right] + \left[\frac{m}{s^2} \right] [s]$$

Possiamo ora ricavare la legge oraria:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$\Rightarrow dx = (v_0 + at)dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2}$$

$$[m] = [m] + \left[\frac{m}{s} \right] [s] + \left[\frac{m}{s^2} \right] [s]$$

2.8 Moto dei Corpi in Caduta Libera

2.9 Esercizi

Esercizio 1:

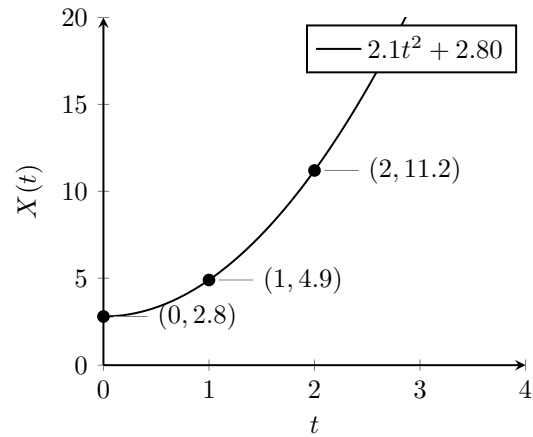
Data la seguente legge oraria ricavare (a) velocità media tra $t_1 = 3s$ e $t_2 = 5s$, (b) calcolare la velocità istantanea.

Soluzione 1:

$$X(t) = 2,1t^2 + 2,80$$

conoscendo la legge oraria di un moto uniformemente accelerato è facile capire che:

$$v_0 = 0 \quad a = 4,2 \quad x_0 = 2,80$$



a) Calcolare v_m tra $t_1 = 3s$ e $t_2 = 5s$:

$$x_1 = 2.1(3)^2 + 2.8 = 21.7m$$

$$x_2 = 2.1(5)^2 + 2.8 = 55.3m$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{55.3 - 21.7}{5 - 3} = 16.8 \frac{m}{s}$$

b) Calcolare velocità istantanea:

$$X'(t) = 2.1 \cdot 2t$$

$$v = 4.2t$$

Esercizio 2:

Nel momento in cui il semaforo volge al verde, un'auto parte con accelerazione costante $a = 2.2m/s^2$. Nello stesso istante un autocarro che sopravviene alla velocità costante di $9.5m/s$ sorpassa l'auto. (a) A quale distanza oltre il semaforo l'auto sorpasserà il camion? (b) Che velocità avrà in quel momento? Dalla traccia possiamo già capire che:

$$\begin{aligned} a_A &= 2.2m/s^2 & v_{0A} &= 0 & x_{0A} &= 0 \\ v_B &= 9.5m/s & x_{0B} &= 0 \end{aligned}$$

sappiamo dunque che la macchina segue un moto uniformemente accelerato mentre il camion un moto rettilineo uniforme dunque:

$$X_A = \frac{1}{2} 2.2t^2 = 1.1t^2 \qquad X_B = 9.5t$$

Soluzione 2:

a) A quale distanza oltre il semaforo l'auto sorpasserà il camion?

$$\begin{cases} X = 1.1t^2 \\ X = 9.5t \end{cases} \quad t(1.1t - 9.5) = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{9.5}{1.1} \quad X_B = 9.5 \frac{9.5}{1.1} = 82$$

b) Che velocità avrà in quel momento?

$$v_A = 1.1 \cdot 2t = 2.2t = 2.2 \frac{9.5}{1.1} = 19$$

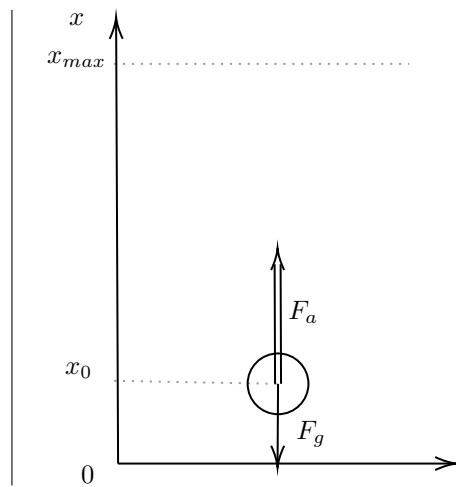
Esercizio 3:

Lancio una pallina verso l'alto con velocità iniziale pari a $25m/s$, in che istante di tempo raggiungerá la sua altezza massima?

Soluzione 3:

Considerando che l'accelerazione di gravitá sulla terra é pari a $9.8m/s^2$, cerchiamo il punto in cui la velocità si annulla:

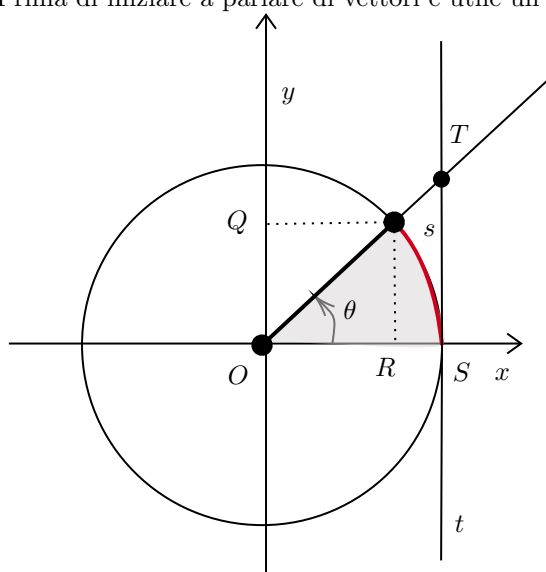
$$v = v_0 + at \Rightarrow 0 = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = 2.5s$$



Capitolo 3

I vettori

Prima di iniziare a parlare di vettori é utile un veloce ripasso di trigonometria.



$$r = 1$$

$$s = r\theta$$

Lunghezze :

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\overline{OR} = \cos \theta$$

$$\overline{ST} = \tan \theta$$

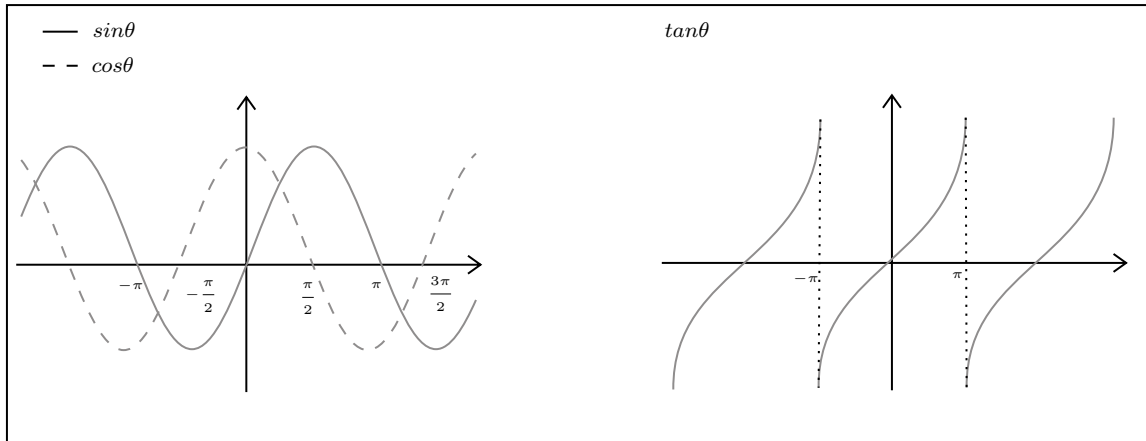
$$\overset{\Delta}{ORP} = \overset{\Delta}{OST}$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{OS}}$$

Dove oltre ad avere la relazione fondamentale della trigonometria:

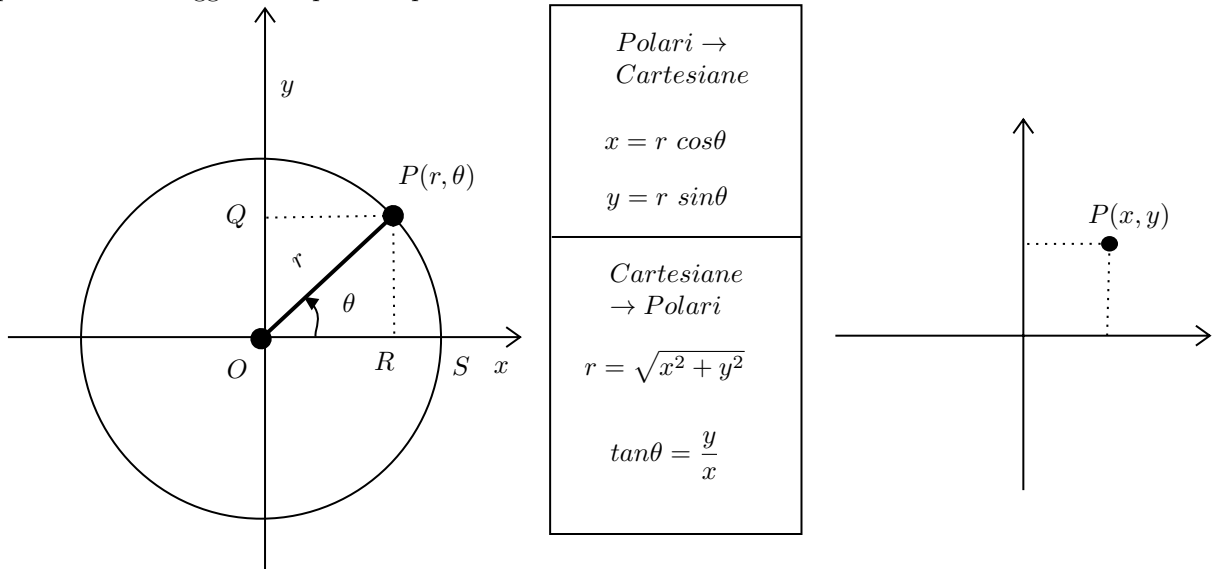
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Angolo (θ)		$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
Gradi	Rad			
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	NE



3.1 Sistemi di Coordinate

Si definisce sistema di coordinate un sistema di riferimento basato su coordinate, le quali individuano la posizione di un oggetto in qualche spazio.



3.2 Grandezze Scalari e Grandezze Vettoriali

Grandezze vettoriali e **scalari** sono due tipi di grandezze fisiche: le grandezze scalari sono caratterizzate solamente da un valore numerico e da un'unità di misura, mentre le grandezze vettoriali sono vettori caratterizzati da un'unità di misura.

le grandezze vettoriali sono composte da:

- Modulo: corrisponde al valore numerico;
- Direzione: data la retta su cui giace il vettore;
- Verso: indica da che parte punta la freccia.

Il modulo di una grandezza vettoriale é una grandezza scalare.

3.3 Operazioni con i Vettori

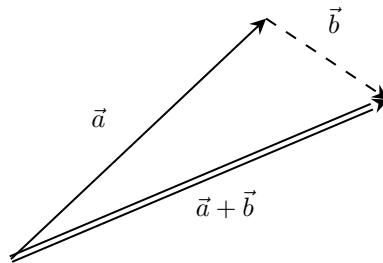
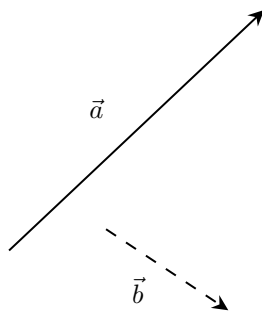
Prodotto per uno Scalare Il prodotto per uno scalare é definito nel seguente modo:

$$\vec{b} = m\vec{a}$$

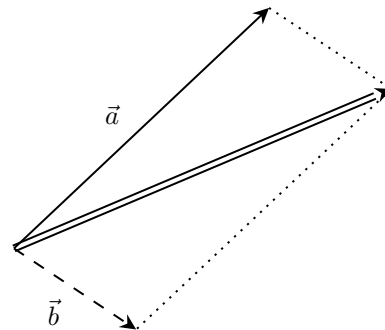
Da quí possiamo definire il vettore opposto come $\vec{b} = -\vec{a}$

Somma di Vettori La somma di vettori gode delle seguenti proprietà:

- Commutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Associativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$



metodo punta – coda



metodo parallelogramma

3.3.1 Prodotto Scalare

Il prodotto scalare é definito come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

dove θ é l'angolo compreso tra i due vettori. Il prodotto scalare vale delle seguenti proprietà:

- Commutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

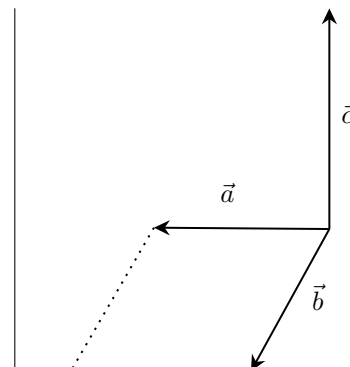
3.3.2 Prodotto Vettoriale

Il prodotto vettoriale é definito come:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = ab \sin \theta$$

Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa.



3.4 Componenti di un Vettore e Vettori Unitari

Preso un vettore \vec{a} possiamo individuarne le componenti:

$$\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a} \quad | \quad \text{Grafico}$$

Per utilizzare una forma diversa è possibile utilizzare i versori.

Versore è un vettore in uno spazio normato di modulo uguale ad 1. Un versore è utilizzato per indicare una particolare direzione e verso. In questo modo:

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= a_x \cdot \hat{i} & \vec{a}_y &= a_y \cdot \hat{j} \\ a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} &= \vec{a} \end{aligned}$$

In tre dimensioni basta aggiungere le componenti corrispettive, ottenendo:

$$a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k} = \vec{a}$$

Tramite questa forma possiamo ridare le definizioni trattate in precedenza.

3.4.1 Prodotto Vettore-Scalare

$$\vec{b} = m\vec{a}$$

Allo stesso modo, somma e differenza vengono effettuate in questo modo:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k}) \pm (b_x \cdot \hat{i} + b_y \cdot \hat{j} + b_z \cdot \hat{k}) = (a_x \pm b_x)\hat{i} + (a_y \pm b_y)\hat{j} + (a_z \pm b_z)\hat{k}$$

3.4.2 Prodotto Scalare

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k} \cdot (b_x \cdot \hat{i} + b_y \cdot \hat{j} + b_z \cdot \hat{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

3.4.3 Prodotto Vettoriale

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{j}(-a_x b_z + b_x a_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

3.5 Esercizi

Esercizio 4:

Una studentessa lancia verso l'alto un mazzo di chiavi ad un'amica, affacciata ad una finestra, situata ad un'altezza di 4.00m sopra di lei. Le chiavi vengono afferrate dopo 1.50s. Si determini la velocità del mazzo di chiavi (a) nel momento del lancio e (b) nell'istante in cui vengono raccolte.

Soluzione 4:

a) Calcolare la velocità del mazzo di chiavi nel momento del lancio:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$h + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t$$

$$v_0 = \frac{1}{t} (h + \frac{1}{2} a t^2) = 10 \text{ m/s}$$

b) Calcolare la velocità nell'istante in cui vengono raccolte.

$$v = v_0 - g t = -4.7 \text{ m/s}$$

Possiamo calcolare anche il momento in cui il mazzo di chiavi raggiunge massima altezza:

$$t_{max} = \frac{v_0}{g} = 1.02 \text{ s}$$

Esercizio 5:

Uno studente di fisica, indagatore ed alpinista, scala una parete di 50.0m che si affaccia su di uno specchio d'acqua. Egli scaglia due pietre verticalmente verso il basso ad 1.00s l'una dall'altra ed osserva che entrambe provocano un unico tonfo. La prima pietra ha una velocità iniziale di 2.00m/s. (a) Quanto tempo dopo il rilascio della prima pietra le due pietre cadono in acqua? (b) Quale velocità iniziale deve avere la seconda pietra se entrambe devono arrivare simultaneamente? (c) Quale sarà la velocità di ciascuna pietra all'istante in cui toccano l'acqua?

Soluzione 5:

a) Quanto tempo dopo il rilascio della prima pietra le due pietre cadono in acqua?

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad -h = v_{0A} t_A + \frac{1}{2} a t_A^2 \Rightarrow t_A = 3 \text{ s}$$

b) Quale velocità iniziale deve avere la seconda pietra se entrambe devono arrivare simultaneamente?

$$t_B = t_A - \Delta t = 2 \text{ s} \qquad -h = v_{0B} t_B + \frac{1}{2} a t_B^2 \Rightarrow v_{0B} = -15.2 \text{ m/s}$$

c) Quale sarà la velocità di ciascuna pietra all'istante in cui toccano l'acqua?

$$v_A = -v_{0A} - g t_A = -31.4 \text{ m/s} \qquad v_B = -v_{0B} - g t_B = -34.8 \text{ m/s}$$

Esercizio 6:

Due treni viaggiano uno a 72 km/h e l'altro a 144 km/h, sono diretti l'uno contro l'altro su un binario rettilineo in piano. Quando si trovano a 950m di distanza, ciascun macchinista vede l'altro treno e si affretta a frenare. Verificate se avviene lo scontro qualora entrambi i treni rallentino con accelerazione, in modulo, di 1.0 m/s^2 .

Soluzione 6:

$$v_{0A} = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

$$a_1 = -1 \text{ m/s}^2$$

$$v_{0B} = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$$

$$a_2 = 1 \text{ m/s}^2$$

Calcoliamo il tempo necessario affinché si fermino i treni:

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow 0 = 20 - t \Rightarrow t_A = 20s$$

$$\text{Allo stesso modo: } t_B = 40s$$

Sapendo il tempo per fermarsi possiamo calcolare che distanza avranno percorso:

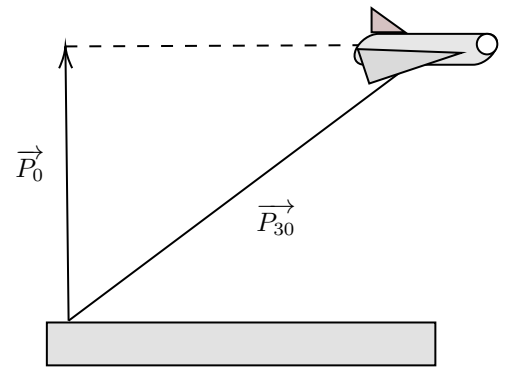
$$x_A = t(v_0 - \frac{1}{2}at) = 200m$$

$$x_B = t(v_0 - \frac{1}{2}at) = 150m$$

Trovandosi il treno A in posizione 200m e il treno B in posizione 150m, sappiamo che i due treni si scontreranno.

Esercizio 7:

Siamo in piedi sul terreno nell'origine del sistema di coordinate. Un aeroplano vola sopra di noi mantenendo costante la sua quota a 7.6×10^3m e la sua velocità, che è parallela all'asse x è costante. All'istante $t = 0$ l'aereo si trova proprio sopra la nostra testa così che il vettore posizione che va da noi all'aereo stesso è $\vec{P}_0 = 7.6 \times 10^3 \hat{j}m$. A $t=30.0s$ il vettore posizione $\vec{P}_{30} = 8.4 \times 10^3 \hat{i}m + 7.6 \times 10^3 \hat{j}m$ come illustrato nella Figura. Si trovino il modulo e la direzione orientata del vettore posizione dell'aereo all'istante $t = 45.0s$.



Soluzione 7:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 268m/s$$

$$\vec{P}_{45} = v_x t_{45} \hat{i} + y \hat{j} = (1.21 \times 10^4 \hat{i}) + (7.6 \times 10^3 \hat{j})$$

$$P_{45} = \sqrt{P_{45x}^2 + P_{45y}^2} = 1.43 \times 10^4 m$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{P_{45y}}{P_{45x}}\right) = 32.2^\circ$$

Capitolo 4

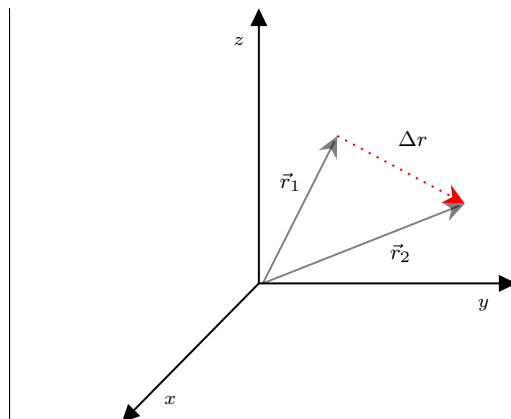
Il moto in Due e Tre Dimensioni

4.1 I Vettori

4.1.1 Vettore Spostamento

Il *vettore di posizione* indica un punto rispetto a un sistema di riferimento. Il *vettore di spostamento*, invece, indica la variazione del vettore di posizione.

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \Delta \vec{r} &= \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k} = \\ &= (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k}\end{aligned}$$



4.1.2 Vettore Velocità

Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria dello spostamento del corpo nello spazio. A ogni punto della traiettoria (o istante temporale) è associato un vettore velocità $v(t)$ specifico che descrive il moto del corpo in quel preciso istante.

Velocità Media

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}$$

Velocità Istantanea

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}(\hat{i}) + \frac{dy}{dt}(\hat{j}) + \frac{dz}{dt}(\hat{k}) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

4.1.3 Vettore Accelerazione

Il vettore accelerazione $A(t)$ non è altro che la velocità del punto $V(t)$, quindi sarà tangente a questa seconda circonferenza e perciò ortogonale a $V(t)$. In altri termini, applicata in $P(t)$ il vettore accelerazione è perpendicolare a $V(t)$ e quindi è diretto verso il centro della circonferenza.

Accelerazione Media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Accelerazione Istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \frac{dv_x}{dt}(\hat{i}) + \frac{dv_y}{dt}(\hat{j}) + \frac{dv_z}{dt}(\hat{k}) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

4.2 Il Moto dei Proiettili

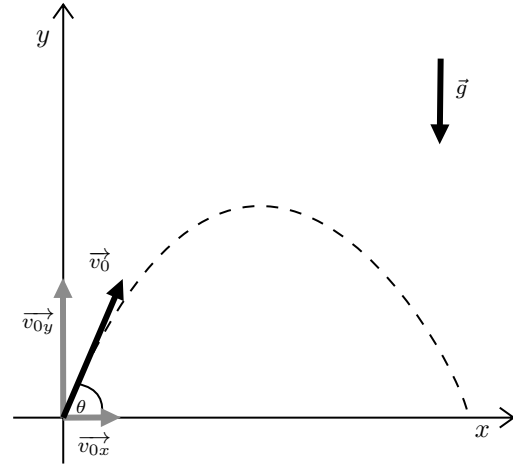
Il moto parabolico è un modo in due dimensioni in cui la componente orizzontale della velocità è sempre costante (moto rettilineo uniforme), mentre la componente verticale della velocità varia (moto uniformemente accelerato).

Le leggi orarie delle due componenti sono:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

dove:

- $v_{0x} = v_0 \cos \theta$
- $v_{0y} = v_0 \sin \theta$



4.2.1 Traiettoria parabolica

Ricaviamo l'equazione del percorso che segue il proiettile. Ricaviamo il tempo t dalla 1 e lo sostituiamo nella 2

$$\begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y &= y_0 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x - x_0}{v_0} \right)^2 \end{aligned}$$

Ponendo:

- $v_{0x} = v_0 \cos \theta$
- $v_{0y} = v_0 \sin \theta$
- $x_0 = y_0 = 0$

si ottiene l'equazione della traiettoria

$$y = x \tan \vartheta - \frac{g}{2(v_0 \cos \vartheta)^2} x^2$$

Da notare che la traiettoria parabolica è proprio l'equazione di una parabola.

4.2.2 Gittata

La gittata è la distanza orizzontale percorsa dal proiettile all'istante in cui raggiunge di nuovo la quota di lancio. Imponiamo $y = 0$ nell'equazione della traiettoria

$$x \tan \vartheta - \frac{g}{2(v_0 \cos \vartheta)^2} x^2 = 0$$

Raccogliamo la x

$$x \left(\tan \vartheta - \frac{g}{2 (v_0 \cos \vartheta)^2} x \right) = 0$$

L'equazione (le soluzioni sono) si annulla per $x = 0$ e

$$x = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Applicando l'identità

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

si ottiene

$$x_R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

4.2.3 Quota massima

Per trovare la quota massima si possono usare due metodi:

1. Ricavare il momento in cui la velocità verticale è uguale a 0 (il corpo si ferma un attimo prima di ricominciare a cadere) e sostituirlo nella legge oraria per l'asse y .
2. Trovare la distanza dal punto di quota massima, dividendo la gittata per due, e sostituire la tale distanza all'equazione della traiettoria.

Metodo 1

Ricaviamo t nel momento di massima altezza

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt = 0 \\ t &= \frac{v_{0y}}{g} \end{aligned}$$

Sostituiamolo nella legge oraria del moto verticale

$$\begin{aligned} y_{\max} &= v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} \\ &= \frac{2v_{0y}^2 - v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

e infine

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Metodo 2

Dividendo per 2 si ottiene la distanza dal punto di quota massima

$$x_{\max} = \frac{x_R}{2} = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Sostituendo x_{\max} nell'equazione delle traiettoria si trova la quota massima

$$y = x_{\max} \tan \vartheta - \frac{g}{2 (v_0 \cos \vartheta)^2} x_{\max}^2 = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

4.2.4 Il proiettile contro il bersaglio

Se si mira con un cannoncino verso un bersaglio ad una certa distanza e una certa altezza, e si spara nello stesso momento in cui si fa cadere il bersaglio, il proiettile lo colpirà sempre (ovviamente la velocità deve essere tale da consentire una gittata almeno uguale alla distanza orizzontale da coprire). Se l'accelerazione di gravità fosse nulla, il proiettile seguirebbe una traiettoria dritta e colpirebbe il bersaglio. Con l'accelerazione di gravità, sia il proiettile che il bersaglio coprono la stessa altezza di caduta, quindi il proiettile colpisce ugualmente il bersaglio. Quanto più veloce va il proiettile, tanto minori saranno il tempo di volo e l'altezza di caduta.

Il bersaglio segue un moto uniformemente accelerato

$$y_T = y_{0T} - \frac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \vartheta - \frac{1}{2}gt^2$$

dove il punto iniziale di caduta è stato ricavato in questo modo

$$y_{0T} = x_T \tan \vartheta$$

Il proiettile ha le seguenti leggi orarie

$$\begin{cases} x_P = v_0 t \cos \vartheta \\ y_P = v_0 t \sin \vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ricavo l'istante in cui vale $x_P = x_T$

$$v_0 t \cos \vartheta = x_T \rightarrow t = \frac{x_T}{v_0 \cos \vartheta}$$

Sostituisco questo tempo nell'equazione del moto verticale del proiettile

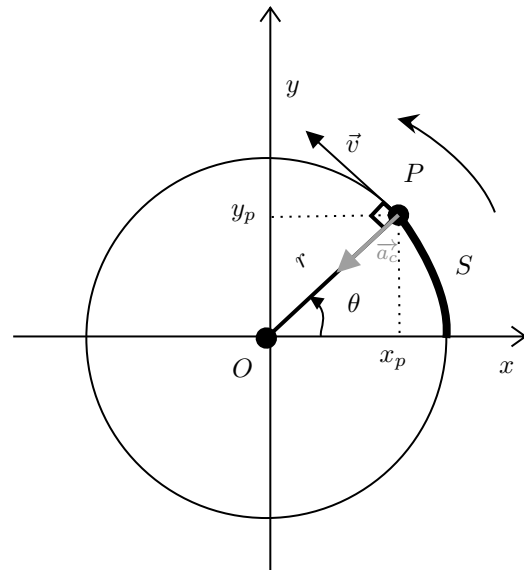
$$\begin{aligned} y_P &= v_0 t \sin \vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_0 \sin \vartheta \frac{x_T}{v_0 \cos \vartheta} - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= x_T \tan \vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

da cui si nota chiaramente che al momento in cui il proiettile il punto di distanza orizzontale, le posizioni sull'asse y dei due coincidono, e quindi avviene l'impatto:

$$x_P = x_T \implies y_P = y_T$$

4.3 Il Moto Circolare Uniforme

Il moto circolare è il moto di un punto materiale che segue una traiettoria circolare. Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante lungo tutta la traiettoria.



4.3.1 Accelerazione centripeta

L'accelerazione centripeta è un vettore con direzione radiale, ossia che punta sempre verso il centro della circonferenza. Data una velocità iniziale e finale, l'accelerazione centripeta è definita come

$$\vec{a}_c = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$

e il suo modulo è dato da

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

il quale è costante nel moto circolare uniforme (dipende solo dalla velocità tangenziale, la quale è costante).

4.3.2 Velocità angolare

La velocità angolare misura la velocità con cui un punto materiale si muove su una circonferenza. Quella media è definita come il rapporto tra l'angolo descritto e il tempo impiegato a descriverlo

$$\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

L'unità di misura è il radiante al secondo (rad/s).

La velocità angolare istantanea in un determinato istante di tempo si ottiene facendo tendere l'intervallo di tempo a zero

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Dato che nel moto circolare uniforme la velocità angolare è uniforme, si può considerare il caso di un giro completo. In questo caso $\Delta\vartheta = 2\pi$ e $\Delta t = T$, dove T rappresenta il periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

4.3.3 Velocità tangenziale

La velocità tangenziale è la velocità di percorrenza della circonferenza, e più in generale, di una traiettoria curvilinea. Indichiamo con $\vartheta = \vartheta(t)$ la posizione angolare del punto in funzione di t , che nel seguente moto è definita come

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$

Si può anche definire la posizione del punto nella circonferenza in termini di coordinate polari

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta = r \cos (\vartheta_0 + \omega t) \\ y &= r \sin \vartheta = r \sin (\vartheta_0 + \omega t) \end{aligned}$$

Si può definire la velocità tangenziale come

$$v = \frac{r \Delta \vartheta}{\Delta t}$$

dove il prodotto a numeratore $r \Delta \vartheta$ equivale all'arco di circonferenza descritto dal punto. Infatti l'angolo in radianti si può trovare facendo

$$\Delta \vartheta = \frac{\text{arcol}}{\text{raggio } r}$$

da cui

$$l = r \Delta \vartheta$$

Notare che, a parità di velocità angolare, un corpo che si muove su una circonferenza con raggio più grande avrà una velocità periferica più alta. Questa invece è la velocità tangenziale in un dato istante di tempo (istantanea)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \vartheta}{\Delta t}$$

4.3.4 Periodo

Si chiama periodo il tempo che ci impiega il punto a compiere un giro completo della circonferenza. In questo caso l'angolo descritto è uguale a 2π radianti, per cui la velocità tangenziale è data da

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Notare che la velocità tangenziale è direttamente proporzionale al raggio della circonferenza e inversamente proporzionale al periodo. Ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ possiamo scrivere questa relazione tra velocità angolare e velocità tangenziale

$$v = \omega r$$

Andando a sostituire questa nella formula dell'accelerazione centripeta si trova

$$a_c = \omega^2 r$$

Infine, facendo l'inversa si ottiene un'altra formulazione per la velocità angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$$

4.3.5 Moto Circolare non Uniforme

Nel moto circolare non uniforme il modulo della velocità varia. Oltre all'accelerazione centripeta (variabile perchè v non è costante) bisogna considerare anche l'accelerazione tangenziale

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}$$

L'accelerazione totale è composta dall'accelerazione centripeta più quella tangenziale, due vettori che sono ortogonali tra loro

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$$

e il suo modulo è dato da

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2}$$

Accelerazione angolare Si può definire una nuova grandezza, ossia l'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vartheta(t)}{dt} \right) = \frac{dv}{r dt} = \frac{a_T}{r}$$

per cui

$$\alpha = \frac{a_T}{r}$$

4.4 Esercizi

Esercizio 8:

(a) Quale è l'accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra per un oggetto che si trova all'equatore? (b) Quale dovrebbe essere il periodo di rotazione della Terra affinché questa accelerazione sia uguale a 9.8 m/s^2 .

Soluzione 8:

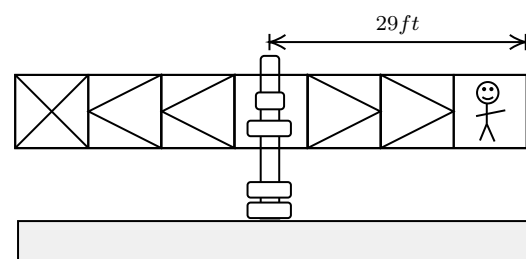
Sapendo che il raggio terrestre è pari a 6370km, possiamo utilizzare la formula:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi 6.37 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} \text{ m/s}$$

$$a_c = 3.4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

Esercizio 9:

La centrifuga da 20g al Nasa Ames Research Center di Mountain View (California), è il tubo cilindrico orizzontale lungo 58.0 piedi, mostrato in figura. Un astronauta, durante una seduta di allenamento, si siede ad una estremità con lo sguardo rivolto verso l'asse di rotazione che si trova a 29.0 piedi di distanza dalla sua posizione. Si determini la frequenza di rotazione, espressa in giri al secondo, necessaria per fornire all'astronauta una accelerazione centripeta di $20.0g$.



Soluzione 9:

Considerando che $1ft = 0.3048m$ sappiamo che $R = 29ft = 8.84m$ e che $a_c = 20g = 20 \cdot 9.8m/s^2$, dunque:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = 20gR = 1732.6m^2/s^2 \Rightarrow v = 41.6m/s$$
$$f = \frac{v}{2\pi R} = 0.75Hz$$

Capitolo 5

I Principi della Dinamica

La Dinamica è la parte della Fisica che si occupa dello studio delle cause che determinano il moto dei corpi. I corpi si muovono per effetto di interazioni reciproche, chiamate forze. Nel 1687 Isaac Newton definisce i 3 principi della Dinamica detti "Leggi di Newton".

5.1 Il Principio di Inerzia

Formulato da Galileo e poi posto sotto forma di legge da Newton:

Un corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se su di esso non agisce alcuna forza esterna.

Non è una definizione della forza ma delle sue conseguenze. Il motivo per cui la legge non è osservabile nell'esperienza comune è l'attrito. Il caso di assenza di forze non comporta un'assenza di moto ma un'assenza di accelerazione (velocità costante).

Inerzia Tendenza di un corpo di opporsi ad una variazione del moto.

Il principio di inerzia è valido in una particolare classe di sistemi di riferimento, quelli inerziali. Un SR di riferimento è detto inerziale se si muove a velocità costante, così come ogni sistema che si muove a velocità costante rispetto a quest'ultimo.

5.2 Il Secondo Principio della Dinamica

Il secondo principio della dinamica è una formulazione quantitativa della relazione tra forza e accelerazione:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad [kg \cdot m/s^2] = [N]$$

dove \vec{F} e \vec{a} hanno stessa direzione, ed m è la massa inerziale.

Equilibrio Un sistema è detto in equilibrio se la risultante delle forze è pari a zero (anche l'accelerazione lo è).

Misura Dinamica della Forza La seconda legge ci permette di determinare la forza tramite la misura della accelerazione di una massa di prova.

Misura Statica della Forza Le forze possono indurre deformazioni negli oggetti quando questi non possono muoversi.

Possiamo anche interpretare la seconda legge come equazione del moto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Ovvero quella relazione ci fornisce la legge oraria e tutte le informazioni relative al moto del corpo. La seconda legge è valida se:

- SR inerziali;
- Velocità piccole rispetto a quelle della luce.

Forze Esistono 4 tipi di forze fondamentali:

- interazione forte;
- elettromagnetica;
- gravitazionale;
- interazione debole;

Le forze si possono anche distinguere per come vengono esercitate:

- *Forze di contatto*: attraverso il contatto fisico tra 2 oggetti;
- *Forze di campo*: Nessun contatto, agiscono nello spazio vuoto.

Anche se a livello atomico tutte le forze di contatto sono in realtà dovute alla forza elettromagnetica.

5.3 Il Terzo Principio della Dinamica

Il terzo principio afferma che:

Se un corpo A agisce con una forza su un corpo B, il corpo B reagisce sul corpo A con una forza che ha la stessa intensità e direzione, ma verso opposto. Ovvero ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

In formulazione

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Ci dice che in natura non esistono forze isolate, esse si manifestano a coppie e creano un'interazione tra sistemi fisici. I due membri della coppia agiscono sempre su corpi diversi, non si combinano in una forza risultante e non si elidono a vicenda. Le forze in gioco vengono visualizzate mediante un diagramma di corpo libero, ossia una rappresentazione grafica che riporta tutte le forze agenti su un corpo.

5.3.1 Forza normale

La forza normale è la forza perpendicolare alla superficie su cui è in contatto l'oggetto, che sostiene quest'ultimo evitando di farlo sprofondare. Infatti, se l'oggetto rimane fermo, dal secondo principio della dinamica abbiamo che

$$n - mg = 0 \rightarrow n = mg$$

Attenzione: la forza normale non è sempre uguale alla forza peso. Se si fa pressione su un libro poggiato su un tavolo, la risposta della superficie è maggiore della forza peso. Inoltre, la forza normale non è sempre verticale. Se si preme contro un muro, ad esempio, la forza normale sarà perpendicolare alla parete.

5.4 Quantità di Moto e Impulso

La **quantità di moto** è una grandezza vettoriale definita come il prodotto della massa di un oggetto per la sua velocità

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

L'unità di misura della quantità di moto è il kg per metro al secondo

$$kg \cdot \frac{m}{s}$$

Principio di conservazione della quantità di moto

La legge di conservazione della quantità di moto stabilisce che se la risultante delle forze che agiscono su un sistema è nulla, allora la quantità di moto non cambia.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Seconda legge in termini della quantità di moto

Si può enunciare la seconda legge usando la quantità di moto

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dove \vec{F} è la risultante delle forze. Questa enunciazione permette di generalizzare la seconda legge ai casi in cui la massa non è costante. Questo perchè

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Questa riscrittura stabilisce che la forza è pari alla variazione di quantità di moto nel tempo, ossia alla variazione di velocità, di massa o di entrambe. Se la massa dovesse essere costante, si può ritornare alla formulazione classica. Infatti, basta notare come

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Un **impulso** è una grandezza vettoriale definita come l'integrale di una forza rispetto al tempo

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Nel caso particolare di una forza costante nel tempo, l'impulso è il prodotto tra la forza e il tempo in cui viene esercitata

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

L'unità di misura dell'impulso è il newton per secondo ($N \cdot s$).

Teorema dell'impulso

Riprendendo la $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, si può spostare il termine dt a sinistra e poi risolvere l'equazione differenziale, ottenendo

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale corrisponde alla variazione della quantità di moto di tale punto nell'intervallo di tempo.

5.5 Massa e Peso

La massa è una proprietà intrinseca della materia che misura l'inerzia di un corpo ovvero la resistenza che esso oppone alla variazione del suo stato di moto (quantità scalare). Il peso invece una forza (quantità vettoriale) definita come:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

1. Dipende dalla intensità della attrazione e varia con altezza e altitudine;
2. In assenza di forza gravitazionale un corpo è privo di peso ma conserva la sua massa.

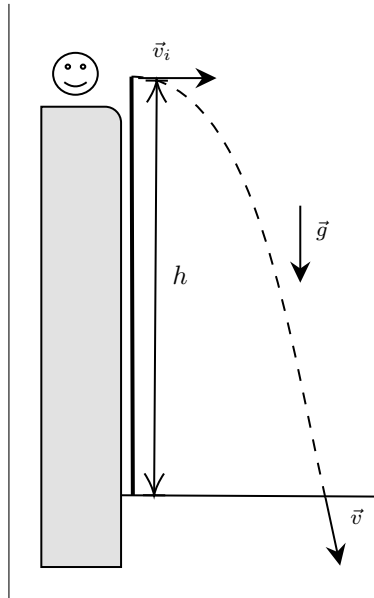
5.6 Esercizi

Per risolvere un problema di dinamica si devono seguire i seguenti passi:

1. Definire il sistema di coordinate;
2. Disegnare il diagramma di corpo libero;
3. Applicare la seconda legge di Newton.

Esercizio 10:

Uno studente è in piedi alla sommità di una parete e lancia un sasso orizzontalmente oltre il bordo della parete con una velocità $v_i = 18.0\text{ m/s}$. La parete ha un'altezza $h = 50.0\text{ m}$ sopra una superficie d'acqua, come mostrato in figura. (a) Quali sono le coordinate della posizione iniziale del sasso? (b) Quali sono le componenti della velocità iniziale del sasso? (c) Qual è il modello di analisi appropriato per il moto verticale del sasso? (d) Qual è il modello di analisi appropriato per il moto orizzontale del sasso? (e) Si scrivano le equazioni per le componenti x e y della velocità del sasso in funzione del tempo. (f) Si scrivano le equazioni per la posizione del sasso in funzione del tempo. (g) Dopo quanto tempo dal momento del lancio il sasso finisce in acqua? (h) Con quale modulo della velocità e con quale angolo il sasso cade nell'acqua?



Soluzione 10:

a) $P(0, 50)$;

b) $\vec{v}(18\hat{i} + 0\hat{j})\text{ m/s}$

e)

$$v_x = 18\text{ m/s}$$

$$v_y = -gt\text{ m/s}$$

f)

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_0 = 50\text{ m} = v_x t$$

g) $y = 0$ (sasso nell'acqua)

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t^2 = \frac{2y_0}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 3.2\text{ s}$$

h)

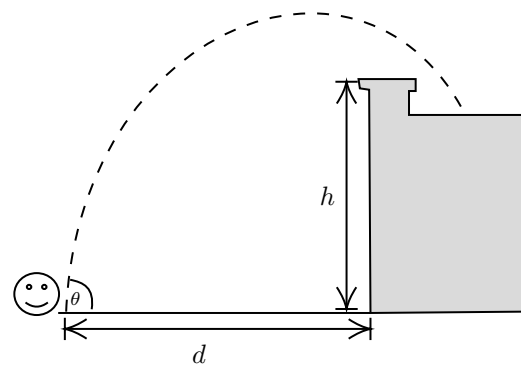
$$v_x = 18 \text{ m/s}$$

$$v_f = v_0 + at \quad v_{fy} = -gt_{\text{volo}} = -31.3 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = (18\hat{i} - 31.3\hat{j}) \text{ m/s} \quad \theta = \arctan\left(\frac{v_{fy}}{v_x}\right) = -60^\circ$$

Esercizio 11:

La terrazza di copertura di una scuola di città, che si trova a 6.00m di altezza dalla strada, è stata utilizzata come campo giochi per allievi. La parete verticale dell'edificio è alta in totale $h = 7.00 \text{ m}$ e forma così una balaustra alta 1 metro tutto attorno al campo giochi. Una palla è caduta nella strada sottostante ed un passante la rilancia in alto con un angolo di 53° rispetto al terreno da un punto che dista 24.0m dalla base dell'edificio. La palla impiega 2.20 s per raggiungere un punto che si trova perpendicolo sopra la balaustra ad una certa quota. (a) Si trovi la velocità con cui la palla era stata lanciata. (b) Si trovi a quanti metri più in alto la palla sorvola la balaustra. (c) Si trovi la distanza della balaustra dal punto di atterraggio della palla sul pavimento della terrazza.

**Soluzione 11:**

$$t_{\text{volo}} = 2.2 \text{ s}$$

$$x = vt = v_0 \cos \theta t_{\text{volo}} \Rightarrow v_0 = 18.1 \text{ m/s}$$

b)

$$y = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = 8.1 \text{ m}$$

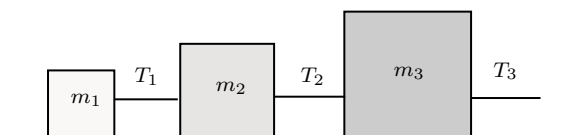
$$\Delta h = 8.1 - 7 = 1.1 \text{ m}$$

c)

$$\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} - \tan \theta x + y_{\text{tetto}} = 0 \Rightarrow x = 5.35 \text{ m}, 26.79 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 26.79 - 24 = 2.79 \text{ m}$$

Esercizio 12:

Tre blocchi sono collegati come mostrato in figura e trascinati su un piano orizzontale privo di attrito da una forza $T_3 = 6.5 \text{ N}$. Se $m_1 = 1.2 \text{ kg}$, $m_2 = 2.4 \text{ kg}$ e $m_3 = 3.1 \text{ kg}$, calcolare: (a) l'accelerazione del sistema e (b) le tensioni T_1 e T_2 . Si faccia un paragone con il caso del traino dei corpi collegati (per esempio una locomotiva che tira un treno di vagoni)

**Soluzione 12:**

a)

$$T_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.97 \text{ m/s}^2$$

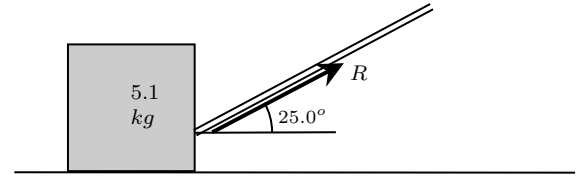
b)

$$T_1 = m_1 a = 1.2 N$$

$$T_2 - T_1 = m_2 a \Rightarrow T_2 = T_1 + m_2 a = 3.5 N$$

Esercizio 13:

Come mostrato in figura, un blocco di 5.1 kg è tirato da una fune lungo un piano orizzontale privo di attrito. La fune esercita una forza $R = 12 N$ che forma un angolo $\theta = 25^\circ$ con l'orizzontale. (a) Quanto è l'accelerazione del blocco? (b) La forza R cresce lentamente. Qual è il valore di R un istante prima che il blocco si sollevi dal piano? (c) Quanto è l'accelerazione del blocco un istante prima che si sollevi dal piano?

**Soluzione 13:**

a) Usiamo la direzione x :

$$R_x = R \cos \theta = m a \Rightarrow a = \frac{R \cos \theta}{m} = 2.1 m/s^2$$

Quando al crescere di R , m si solleva la reazione vincolare si annulla e la componente verticale di R è uguale alla forza peso.

b)

$$R_y - mg = 0 \Rightarrow R \sin(25^\circ) = mg \Rightarrow R = \frac{mg}{\sin(25^\circ)}$$

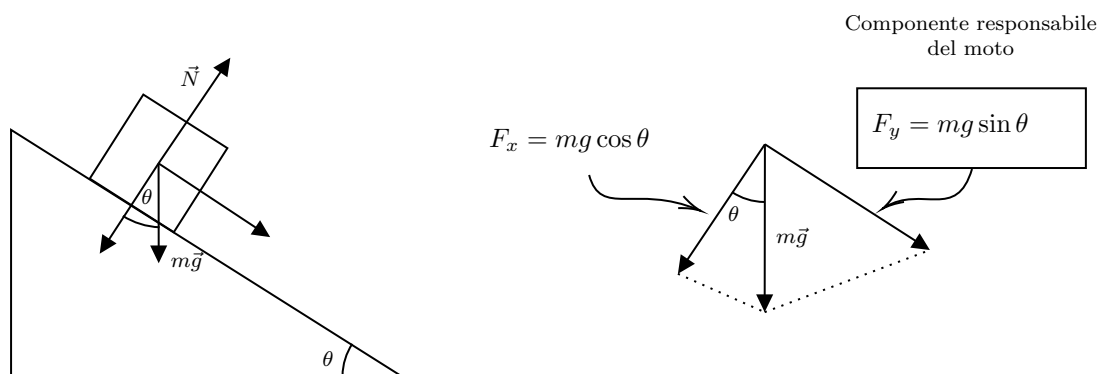
c) Noto R al momento del distacco, calcolo a dalla componente x di R :

$$a = \frac{R \cos(25^\circ)}{m} = 21 m/s^2$$

Capitolo 6

Applicazioni dei Principi della Dinamica

6.1 Il Moto sul Piano Inclinato



Il piano inclinato può essere considerato un riduttore di gravità in quanto:

$$a = g \sin \theta \Rightarrow a \leq g \forall \theta$$

Nella direzione y abbiamo:

$$N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

6.2 Le Forze di Attrito

L'attrito è una forza che si oppone al movimento o allo spostamento di un corpo relativo alla superficie su cui si trova. A livello microscopico è dovuto a saldature "a freddo" che si formano a causa delle asperità delle superfici a contatto, dunque alle forze di coesione di materia elettrica tra gli atomi/molecole dei materiali.

6.2.1 Attrito Statico

L'attrito statico è la forza che impedisce al corpo di muoversi, fintanto che la forza di attrito statico supera quella imposta sul corpo il corpo non entra in movimento. La sua formula è:

$$f_s = \mu_s N$$

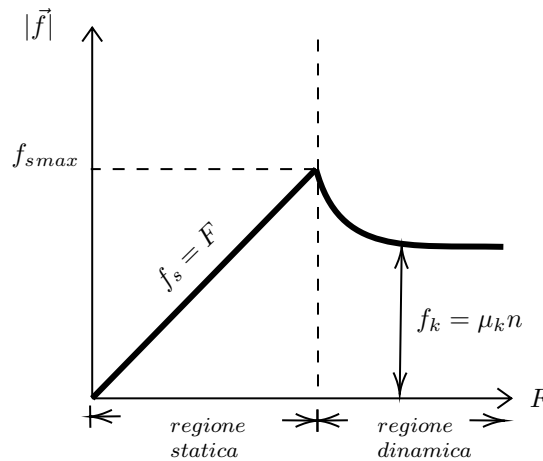
dove μ_s è il coefficiente di attrito statico.

6.2.2 Attrito Dinamico

Quando la forza imposta sul corpo super la forza massima dell'attrito statico il corpo inizia ad accelerare nel verso della forza, e la forza di attrito diminuisce. Questo attrito è detto dinamico:

$$f_k = \mu_k N$$

Grafico attrito all'aumentare della forza :



6.2.3 Determinare il Coefficiente Statico

Per trovare il coefficiente di attrito statico si posiziona il corpo fatto del materiale che si vuole valutare sul piano inclinato. Si inclina il piano inclinato in modo da raggiungere l'inclinazione massima per cui il corpo resti fermo (θ_s).

Ciò significa che la forza di attrito statico è massima (basta una piccola inclinazione per fare scivolare il corpo). Per la direzione x si ha

$$mg \sin \theta_s - \rho_{s \max} = 0 \rightarrow \rho_{s \max} = mg \sin \theta_s$$

Invece per la direzione y

$$n - mg \cos \theta_s = 0 \rightarrow n = mg \cos \theta_s$$

Sapendo che $\rho_{s \max} = \mu_s n$ si può sostituire e ottenere

$$\mu_s mg \cos \theta_s = mg \sin \theta_s \rightarrow \mu_s = \tan \theta_s$$

6.2.4 Determinare il Coefficiente Dinamico

Una volta che il corpo si è messo in moto, si riduce l'inclinazione fino a trovare la pendenza massima che permetta al corpo di mantenere una velocità costante (θ_k). Si seguono gli stessi passaggi (sostituendo θ_k a θ_s) e si ottiene

$$\mu_k = \tan \theta_k$$

Da notare come il coefficiente non dipenda dalle dimensioni dell'oggetto.

6.3 Il Moto Armonico Semplice

Il moto armonico semplice è un particolare tipo di moto unidimensionale. E' un caso particolare di moto periodico, con piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, compresa tra due limiti di oscillazione equidistanti.

L'equazione del moto armonico è definita come

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

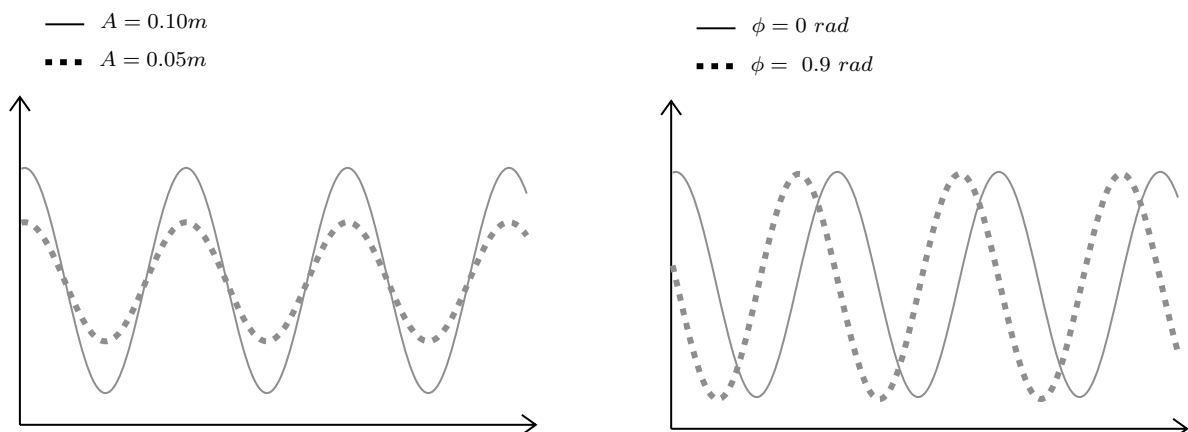
che ci dice che la forza agente sul punto materiale è proporzionale allo spostamento, ma ha verso opposto. Dunque $-\omega^2$ rappresenta la forza di richiamo che riporta il corpo al punto di equilibrio.

La soluzione dell'equazione del moto è

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove:

- A : è l'ampiezza dell'oscillazione.
- ϕ : è la fase iniziale, ossia la frazione di periodo trascorsa rispetto ad un tempo fissato. Assieme all'ampiezza forma le condizioni iniziali del moto. Misurata in radianti.
- ω : è la pulsazione, ossia la velocità cui viene effettuata una oscillazione completa. Misura in rad/s.



Ecco le equazioni di velocità e accelerazione nel moto armonico:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \\ a(t) &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Combinando le equazioni $x(t)$ e $a(t)$ si ottiene

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Che ci dice che nel moto armonico semplice l'accelerazione è proporzionale allo spostamento ma di segno opposto, e le due quantità sono legate dal quadrato della pulsazione.

Chiamiamo periodo T il tempo necessario per fare un'oscillazione completa

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Più è grande la pulsazione, più il periodo sarà piccolo. Inoltre per via della periodicità della funzione coseno, aggiungendo il periodo al tempo t il corpo si ritrova nella stessa posizione. Dimostriamolo

$$\begin{aligned} x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) &= A \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) + \phi \\ &= A \cos(\omega t + 2\pi + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

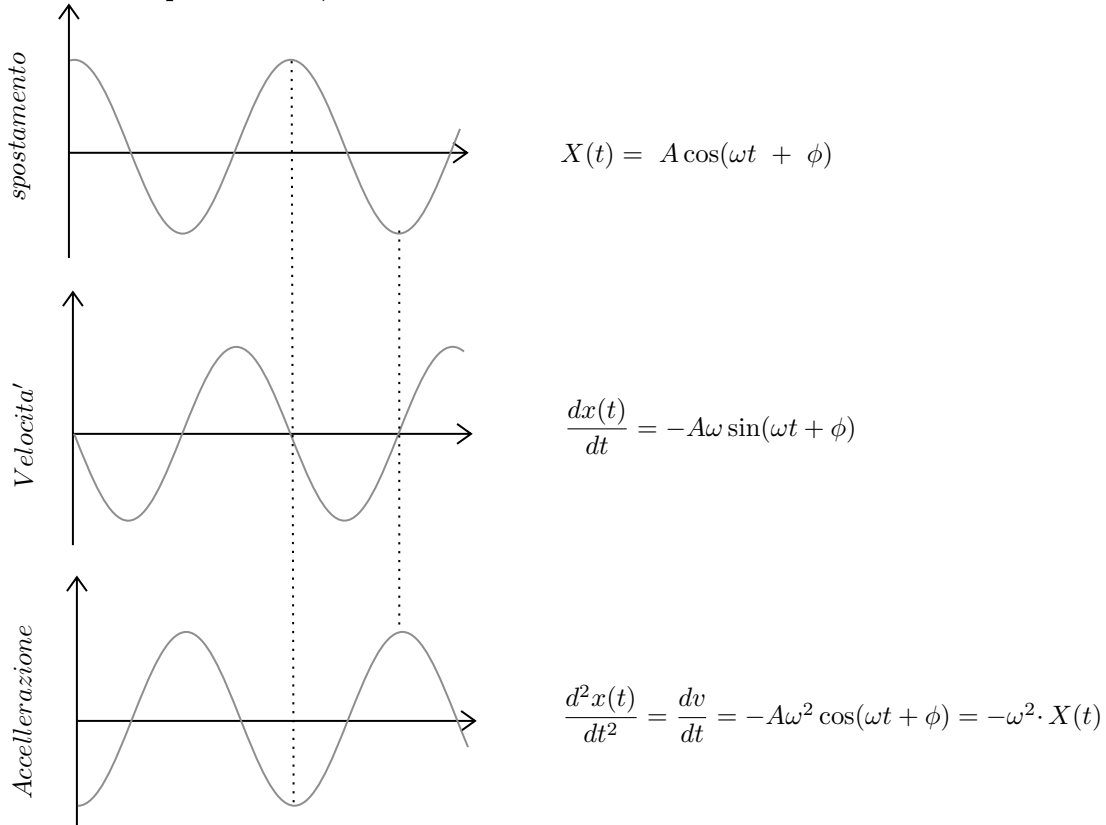
Inoltre definiamo la frequenza, ossia il numero di periodi compiuti nell'unità di tempo

$$f = \frac{1}{T}$$

che ne SI ha come unità di misura l'hertz.

Vi è una specifica relazione tra spostamento, velocità ed accelerazione nel moto armonico. Nei punti di equilibrio la velocità è massima e l'accelerazione è nulla, mentre nei punti estremi il modulo della velocità è nullo e l'accelerazione è massima.

Relazione tra spostamento, velocità ed accelerazione



6.4 La Forza Elastica

La forza elastica è una forza di contatto esercitata dai corpi a seguito di una deformazione che li comprime o che li dilata per permettergli di tornare alla forma originale. La legge di Hooke è una legge sperimentale

che permette di calcolare la forza elastica delle molle, secondo la formula:

$$F = -kx$$

Questa formula è valida per piccole deformazioni rispetto alla lunghezza di riposo della molla. k è detta costante elastica della molla, cioè la misura della sua rigidità.

6.4.1 Moto di un Corpo Attaccato ad una Molla

Supponiamo di avere una massa attaccata ad una molla disposta su una superficie senza attrito. Se la forza elastica è l'unica ad agire vale

$$F_e = ma$$

Riscriviamo l'equazione

$$\begin{aligned} -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x \end{aligned}$$

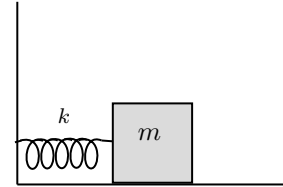
Ponendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Definiamo la pulsazione in questo modo

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

ossia il periodo dell'oscillazione dipende solo dalla massa e dalla costante elastica.



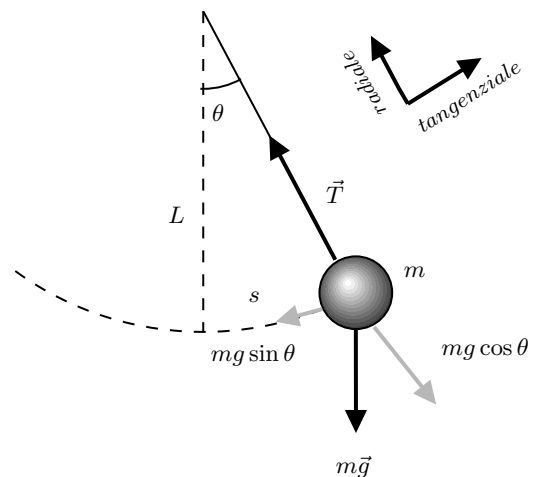
6.5 Il Pendolo Semplice

Il pendolo semplice è un sistema fisico in cui è presente una massa puntiforme appesa ad un filo inestensibile di lunghezza L . È un oscillatore armonico perché è presente una forza di richiamo (forza peso) proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Direzione tangenziale:

Prendiamo la direzione tangenziale all'arco di circonferenza percorso. Il corpo ha un'accelerazione opposta alla componente perpendicolare della forza peso, perciò si ha che

$$-mg \sin \theta = ma = m \frac{d^2s}{dt^2}$$



Sapendo che $s = L\theta$ allora $ds = Ld\theta$ dunque la si può riscrivere in questo modo

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Per angoli piccoli $\sin \theta \approx \theta$ e dunque la si può nuovamente riscrivere come

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

Se poniamo $\omega^2 = \frac{g}{L}$ si nota come per angoli piccoli il sistema ha lo stesso comportamento di un oscillatore armonico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$$

Allora il periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Si noti come esso sia costante. Non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni né dalla massa, ma solo dalla lunghezza del filo e dalla gravità. Questa proprietà è detta isocronismo del pendolo. I pendoli di uguale lunghezza hanno tutti lo stesso periodo, indipendentemente dall'ampiezza dell'oscillazione o dalla massa del grave.

La legge oraria riguardante l'angolo è data da

$$\theta(t) = \theta_{msx} \cos \omega t + \phi$$

mentre la legge oraria riguardante l'arco è data da

$$s(t) = L\theta_{\max} \cos \omega t + \phi = L\theta(t)$$

Derivando si ottiene la velocità

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega \theta_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt}$$

Derivando una seconda volta si ottiene l'accelerazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 \theta$$

Direzione radiale:

Adesso consideriamo la direzione radiale. In questa direzione agiscono due forze: la componente verticale della parallela della forza peso e la tensione del filo. Inoltre il corpo subisce l'accelerazione centripeta, dunque dalla seconda legge della dinamica si ha che

$$T - mg \cos \theta = ma_c$$

Riscrivendo l'equazione si ricava che

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v^2(t)}{L}$$

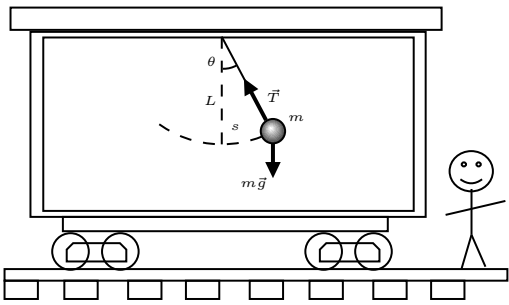
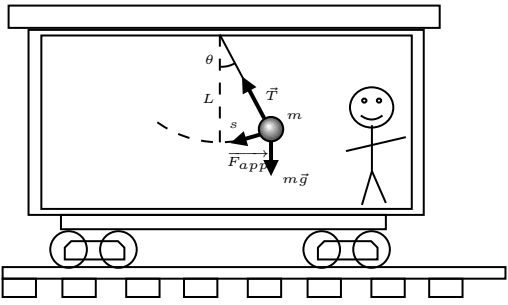
Questo ci dice che la tensione del filo non è costante. Essa equilibra la componente radiale della forza peso e fornisce la forza centripeta necessaria alla massa per muoversi lungo l'arco di circonferenza.

$$U = mgh$$

6.6 Il Moto nei Sistemi Accelerati

Le leggi di Newton descrivono il moto in un sistema di riferimento inerziale, le cose possono cambiare in caso il sistema non lo sia.

Si sperimentano forze non riconducibili a interazioni fondamentali tra sistemi fisici (dette forze apparenti o fittizie). Si tratta in realtà di effetti dovuti alla accelerazione del sistema di riferimento.

<i>Osservatore Inerziale</i>	<i>Osservatore Non Inerziale</i>
	
$\begin{aligned} x : \quad T \sin \theta &= ma \\ y : \quad T \cos \theta &= mg \end{aligned}$	$\begin{aligned} x : \quad T \sin \theta &= F_{app} \\ y : \quad T \cos \theta &= mg \end{aligned}$

6.6.1 Peso in Ascensore

(1) Ascensore fermo:

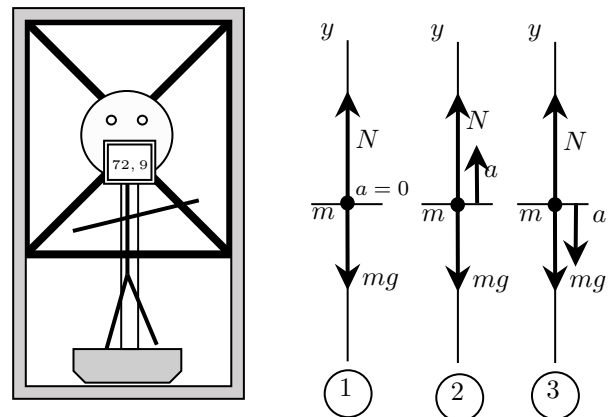
$$a_0 = 0 \quad P' = mg = P$$

(2) Ascensore che sale:

$$P' - mg = ma_A \Rightarrow P' = m(g + a_A)$$

(3) Ascensore che scende:

$$P' - mg = -ma_A \Rightarrow P' = m(g - a_A)$$



6.7 Dinamica del Moto Circolare Uniforme

Se una particella si muove di moto circolare uniforme è sottoposta ad una accelerazione centripeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Tale accelerazione è dovuta alla forza centripeta:

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Quella che solitamente chiamiamo "forza centrifuga" non è altro che una forza fittizia che appare agire su di un corpo in rotazione quando tale moto viene analizzato in un sistema di riferimento non inerziale.

6.7.1 Curve su Strade

Qual'è la massima velocità con cui un'auto può affrontare una curva piana di raggio r ? La forza centripeta necessaria a percorrere la curva viene fornita dall'attrito statico lungo la direzione radiale, dunque si ha che

$$\rho_s = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

Sapendo che $\rho_s = \mu_s N = \mu_s mg$ si ha che

$$\mu_s mg = m \frac{v^2}{r}$$

da cui ricaviamo la velocità massima a cui l'auto può andare prima che le ruote perdano aderenza:

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{r\mu_s g}$$

6.7.1.1 Percorrenza di una curva sopraelevata

Per quali condizioni un'auto in assenza di attrito percorre una curva sopraelevata?

Prendiamo un sistema di riferimento con l'asse x positivo in direzione radiale. La forza centripeta necessaria a percorrere la curva viene fornita dalla componente radiale della forza normale

$$N_x = N \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

Nell'asse verticale il corpo è in equilibrio

$$N_y = N \cos \theta = mg$$

Dividendo N_x per N_y si ottiene

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr}$$

dal terzo teorema trigonometrico dei rettangoli. Da questa si può ricavare la velocità a cui deve andare l'auto per percorrere la curva senza andare fuori pista

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}$$

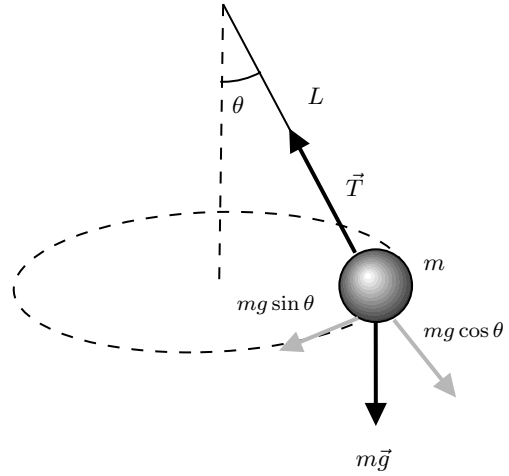
6.7.2 Pendolo Conico

Nel pendolo conico, una massa è sospesa a un filo di lunghezza L che forma un angolo θ con la verticale. Esaminiamo le forze agenti sulla massa lungo gli assi x e y :

$$\begin{aligned} x : \quad T \sin \theta &= m \frac{v^2}{R} \\ y : \quad T \cos \theta &= mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$$

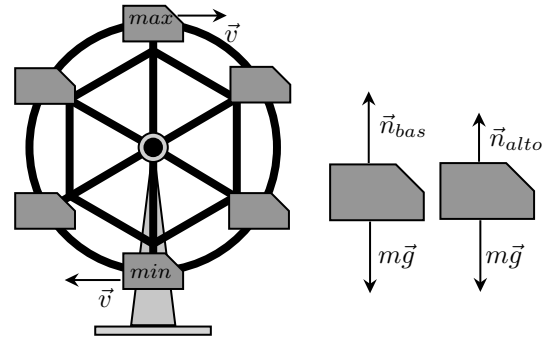
$$v = \sqrt{gR \tan \theta} = \sqrt{gL \sin \theta \tan \theta}$$



6.7.3 Il Peso sulla Ruota Panoramica

Immaginiamo di voler misurare il nostro peso sulla ruota panoramica. Prendiamo il caso di un osservatore esterno su un sistema di riferimento inerziale.

Quando si è in alto, la forza centripeta punta verso il basso, e peseremo meno sulla bilancia perchè $N < mg$:



$$\begin{aligned} N - mg &= -m \frac{v^2}{r} \\ N &= mg - \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

Quando si è in basso, la forza centripeta punta verso l'alto, e la bilancia ci dirà che pesiamo di più perchè $N > mg$:

$$\begin{aligned} N - mg &= m \frac{v^2}{r} \\ N &= mg + \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

6.7.4 Pallina in Rotazione Verticale

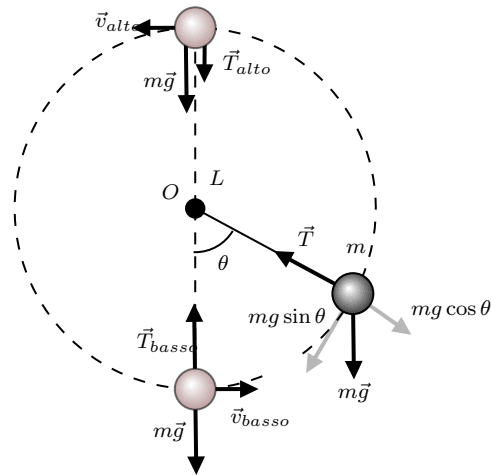
Determiniamo la tensione del filo nel punto più alto e più basso della traiettoria.

Alto:

$$-T - mg = -m \frac{v^2}{R} \Rightarrow T < mg$$

Basso:

$$T - mg = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow T > mg$$



6.8 Esercizi

Esercizio 14:

Il coefficiente di attrito statico tra il teflon e le uova strapazzate è di 0.04. Qual è il più piccolo angolo rispetto all'orizzontale che fa uscire le uova da una padella con il fondo di teflon?

Soluzione 14:

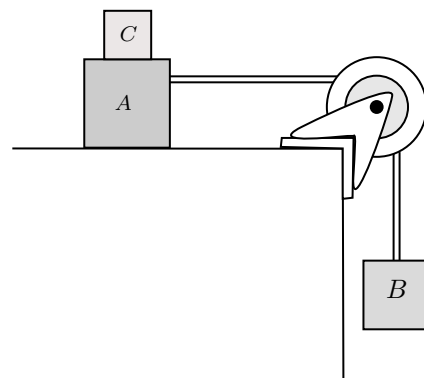
$$\mu_s = 0.04$$

$$f_s \geq mg \sin \theta \Rightarrow f_s = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \mu_s = \tan \theta$$

$$\theta = \arctan(\mu_s) = 2.3^\circ$$

Esercizio 15:

Nella figura, A e B sono due blocchi rispettivamente di 4.4kg e 2.6kg. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra il blocco A e il tavolo sono rispettivamente uguali a 0.18 e 0.15. (a) Si determini la minima massa del blocco C che impedisce ad A di scivolare. (b) Improvvisamente il blocco C viene tolto da A. Quanto vale l'accelerazione di A?



Soluzione 15:

$$m_a = 4.4kg$$

$$\mu_s = 0.18$$

$$m_b = 2.6kg$$

$$\mu_k = 0.15$$

a)

Massa B: $T - m_b g = 0$

Massa AC: $T - f_s = 0 \Rightarrow T = f_s = \mu_s(m_a + m_c)g$

Combinando le due equazioni:

$$m_b g = \mu_s(m_a + m_c)g \Rightarrow mc = \frac{m_m - \mu_s m_a}{\mu_s} = 10 \text{ kg}$$

b) Riscrivo l'equazione del moto, nel caso in cui m_a ora viene trascinato dalla caduta di m_b .

Massa B: $T - m_b g = -m_b a$

Massa A:

$$T - f_k = m_a a$$

$$m_b g - m_b a - \mu_k m_a g = m_a a \Rightarrow a = \frac{g(m_b - \mu_k m_a)}{m_a + m_b} = 2.7 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 16:

Una molla con una costante elastica di 120 N/m viene usata per spingere un pezzo di legno di 0.27 kg contro un muro.

- Trova la compressione minima necessaria perchè la molla trattenga il pezzo di legno dal cadere, dato che il coefficiente di attrito statico fra il pezzo di legno e il muro è 0.46.
- La tua risposta alla domanda a. cambia se la massa del pezzo di legno viene raddoppiata? Giustifica la tua risposta.

Soluzione 16:

a)

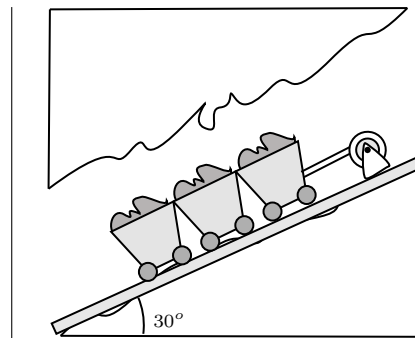
$$f_s - mg = 0 \Rightarrow f_s = \mu_s N = mg = \mu_s F$$

$$F = \frac{mg}{\mu_s} = 5.57 \text{ N}$$

- b) Dato che F è linearmente dipendente da m , se m raddoppia, anche F raddoppierà.

Esercizio 17:

Tre vagoni pieni di carbone di 10 000 kg ciascuno sono tenuti fermi in miniera su un binario inclinato di 30° per mezzo di un cavo parallelo al piano del binario, come nella figura. Si è osservato un allungamento del cavo di 15 cm un istante prima che cadesse il gancio fra i due vagoni inferiori, lasciando così libero di scendere per il piano inclinato l'ultimo vagone. Ammettendo che il cavo obbedisca alla legge di Hooke, trovate (a) la frequenza e (b) l'ampiezza delle oscillazioni indotte nei due vagoni rimanti.



Soluzione 17:

$$\theta = 30^\circ \quad m = 3 \cdot 10^4 \text{ kg} \quad x = 15 \text{ cm}$$

$$kx - mg \sin \theta = 0 \Rightarrow k = \frac{mg \sin \theta}{x} = 9.8 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

a)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.1 \text{ Hz}$$

- b) La nuova posizione di equilibrio:

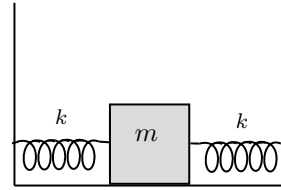
$$\frac{mg \sin \theta}{k} = x = 0.10 \text{ m}$$

Con nuova ampiezza $\Delta x = (15 - 10) = 5\text{cm}$.

Esercizio 18:

Due molle identiche sono attaccate a un blocco di massa m e fissate agli estremi liberi come si vede nella figura. Dimostrate che la frequenza di oscillazione sulla superficie priva di attrito è

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



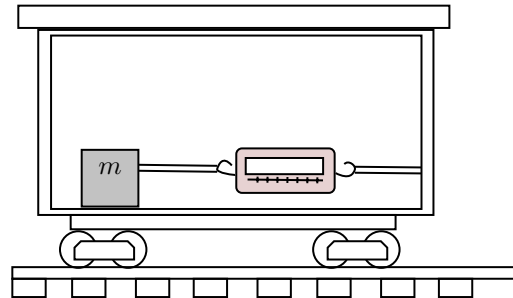
Soluzione 18:

$$-F_1 - F_2 = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-2kx}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Esercizio 19:

Un corpo di massa $m = 5.00\text{kg}$, collegato ad un dinamometro, sta fermo su di un piano orizzontale privo di attrito, come mostrato in figura. Sul dinamometro, attaccato alla parete anteriore del vagone, quando il vagone è in quiete, si legge zero. (a) Se il dinamometro segna 18N quando il vagone è in moto, quanto vale l'accelerazione del vagone? (b) Quale valore costante misura il dinamometro se il vagone si muove a velocità costante? Si dia una descrizione delle forze agenti sul corpo (c) per un osservatore interno al vagone e (d) per un osservatore fermo all'esterno.



Soluzione 19:

a)

$$F_{app} = 18\text{N}$$

$$a = \frac{F_{app}}{m} = 3.6\text{m/s}$$

b) zero

c) Osservatore non inerziale:

$$\begin{aligned} x : \quad T &= F_{app} \\ F_{app} &= ma \end{aligned}$$

$$y : \quad N = mg$$

c) Osservatore inerziale:

$$x : \quad T = ma$$

$$y : \quad N = mg$$

Esercizio 20:

Uno studente è fermo in un ascensore uniformemente accelerato verso l'alto, con accelerazione a . Il suo zaino si trova sul pavimento, vicino alla parete. La larghezza dell'ascensore è L . Nell'istante $t = 0$, lo studente dà un piccolo calcio al suo zaino, impartendogli una velocità v_0 e facendolo scivolare attraverso

il pavimento dell'ascensore. Nell'istante t , lo zaino colpisce la parete opposta. Si trovi il coefficiente di attrito dinamico tra lo zaino e il pavimento.

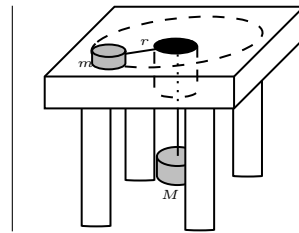
Soluzione 20:

$$N = m(g + a) \quad f_k = -\mu_k N = -\mu_k m(g + a) \quad a_x = -\mu_k(g + a)$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow L = v_0 t - \frac{1}{2} \mu_k (g + a) t^2 \Rightarrow \mu_k = \frac{2(v_0 t - L)}{(g + a) t^2}$$

Esercizio 21:

La figura mostra una massa m che percorre una circonferenza sul piano privo di attrito di un tavolo e sostiene una massa M appesa a un filo che passa attraverso un foro al centro del cerchio. Trovate a quale velocità deve muoversi m per impedire la caduta di M .



Soluzione 21:

La tensione del filo permette alla pallina di muoversi di moto circolare.

$$T = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow Mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Mg r}{m}}$$

Esercizio 22:

Uno stuntman guida un'auto su un dosso avente un raggio di curvatura verticale di 250m. Qual è la massima velocità che può tenere senza che l'auto si stacchi dal fondo stradale nel punto più elevato?

Soluzione 22:

$$-mg = -m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR} = 49.5 \text{ m/s}$$

Esercizio 23:

In un rotore di un luna park una persona, assimilabile ad una massa puntiforme m , si posiziona in piedi (sul pavimento) con la schiena contro la parete interna del cilindro. Il rotore di raggio $R = 2.5m$, viene quindi messo in rotazione attorno al proprio asse e quando raggiunge un'opportuna velocità il pavimento sprofonda. Sapendo che i coefficienti di attrito persona-parete sono: statico $\mu_s = 0.45$, dinamico $\mu_k = 0.38$, si determini:

- 1) la minima velocità affinché la persona non cada quando viene rimosso il pavimento;
- 2) l'accelerazione di m (in assenza di movimento) se la minima velocità viene ridotta del 5% ;

Soluzione 23:

$$f_s - mg = 0 \Rightarrow f_s = \mu_s N = mg$$

$$N = m \frac{v^2}{R}$$

1) Velocità minima:

$$\mu_s N = \mu_s m \frac{v^2}{R} = mg \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = 7.4 m/s$$

2) Accelerazione:

$$f_k - mg = -ma \Rightarrow f_k = \mu_k N = \mu_k \frac{v^2}{R}$$
$$ma = mg - \mu_k m \frac{v^2}{R} \Rightarrow a = g - \frac{\mu_k (0.95v)^2}{R} = 2.3 m/s^2$$

Capitolo 7

Lavoro ed Energia

7.1 Lavoro

7.1.1 Lavoro di una Forza Costante su Traiettoria Rettilinea

Il lavoro è una grandezza fisica che rappresenta un trasferimento di energia. Definiamo il lavoro W con il seguente prodotto scalare

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \theta$$

L'angolo θ è costante durante il moto e rappresenta l'angolo compreso tra il vettore forza e il vettore spostamento. Consideriamo solo la componente della forza lungo la direzione dello spostamento subito dal corpo. Il segno del lavoro dipende dalle direzioni dei due vettori:

- Angolo $< 90^\circ$: lavoro negativo
- Angolo $= 90^\circ$: lavoro nullo
- Angolo $> 90^\circ$: lavoro positivo

Nel SI il lavoro ha come unità il newton per metro ($N \cdot m$), a cui viene dato il nome di Joule (J), che è la stessa unità di misura dell'energia.

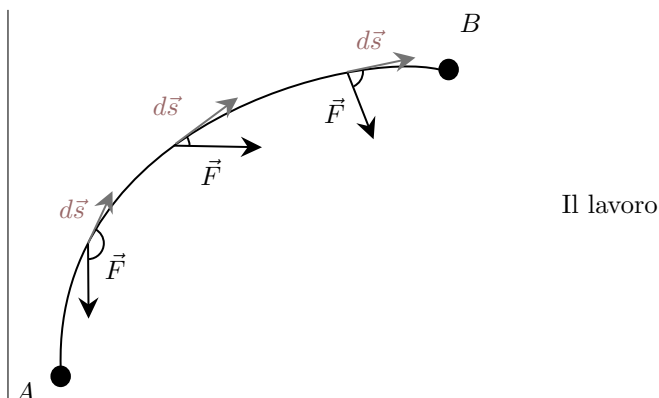
Non tutte le forze applicate su un corpo in moto fanno lavoro. Ad esempio, il peso di un corpo spostato orizzontalmente non fa lavoro perché è perpendicolare allo spostamento. Il lavoro è invece fatto dalle forze d'attrito. Inoltre, nel moto circolare di una pallina attaccata ad un filo, la tensione del filo non fa lavoro, perché anch'essa è perpendicolare alla direzione del moto.

7.1.2 Lavoro di Forze Variabili su Traiettorie Generiche

Spesso la forza non è costante durante tutto il percorso di una traiettoria, la quale non è sempre rettilinea. Consideriamo uno spostamento infinitesimo durante il quale viene compiuto un lavoro infinitesimo, tramite la componente tangenziale alla direzione dello spostamento

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \theta ds = F_T ds$$

è l'integrale di linea della forza, ossia la somma degli infiniti contributi infinitesimi del lavoro



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove A e B sono gli estremi della traiettoria.

7.2 Energia Cinetica

A valori infinitesimali la forza è costante e lo spostamento è rettilineo. Dunque è possibile trattare l'infinitesimo di lavoro come lavoro di una forza costante su traiettoria rettilinea

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \theta ds = F_T ds = m a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds$$

dove F_T e a_T sono rispettivamente forza e accelerazione tangenziali allo spostamento. Dunque

$$dW = m v dv$$

Allora il lavoro totale sarà dato da

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m [v^2]_A^B$$

e cioè

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Chiamiamo energia cinetica la quantità

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Risulta perciò che il lavoro totale è uguale alla variazione di energia cinetica tra l'inizio e la fine dello spostamento

$$W = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$$

L'energia cinetica è l'energia associata allo stato di moto di un corpo. Quanto più l'oggetto è veloce, tanto maggiore è la sua energia cinetica. Quando l'oggetto è a riposo la sua energia cinetica è zero.

7.3 Lavoro della Forza Peso

Quando un oggetto è in caduta libera, l'unica forza che produce spostamento è la forza peso. In questo caso la forza è costante e lo spostamento è rettilineo. Prendiamo un sistema di riferimento positivo verso l'alto. Abbiamo che

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -m\vec{g} \cdot d\vec{s} = -mg(y_B - y_A) = -\Delta(mgy)$$

ossia possiamo esprimere il lavoro come la differenza di una funzione della sola posizione (mgy) tra il punto finale e iniziale della traiettoria. La notazione vettoriale se ne va perchè $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ e quindi

$$-mg\hat{j} \cdot (y_B - y_A)\hat{j} = -mg(y_B - y_A)$$

Poichè forza peso e spostamento hanno stessa direzione si possono considerare direttamente i moduli nell'integrale.

Cosa succede se cambiamo la traiettoria del punto materiale?

Il lavoro totale è la somma dei lavori infinitesimi compiuti sui vari tragitti infinitesimi in viene suddivisa la traiettoria. Il lavoro infinitesimo è dato da

$$dW = mg \cos \theta ds$$

La somma di tutti i contributi $ds \cos \theta$ da come risultato $y_B - y_A$ mentre la forza peso è costante, dunque il lavoro compiuto è uguale al caso precedente

$$W = -mg(y_B - y_A) = -\Delta(mgy)$$

7.4 Lavoro della Forza Elastica

La forza elastica è una forza di richiamo unidimensionale proporzionale alla deformazione. Per comodità scriviamola con i versori

$$F = -kx\hat{i}$$

Consideriamo il lavoro prodotto dalla forza elastica per compiere uno spostamento infinitesimo

$$dW = -kx\hat{i} \cdot dx\hat{i} = kxdx$$

Il versore scompare in quanto $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$. Il lavoro totale è quindi l'integrale di linea della forza elastica, ovvero la somma degli infiniti contributi infinitesimi di lavoro tra i punti A e B

$$W = \int_A^B -kxdx = -\frac{1}{2}k[x^2]_A^B$$

Cioè uguale a

$$W_{el} = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) = -\Delta\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

Anche in questo caso, si può esprimere il lavoro come la differenza tra il valore nel punto finale e quello iniziale della traiettoria di una funzione della posizione $\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$.

7.5 Lavoro della Forza di Attrito

Assumendo che la superficie su cui si muove il corpo abbia coefficiente di attrito costante (quindi forza d'attrito costante), il lavoro infinitesimo è dato da

$$dW = \vec{\rho}_k \cdot d\vec{s} = -\mu_k N \hat{v} \cdot d\hat{s} = -\mu_k N ds$$

dove \hat{v} è il versore della velocità che ha stessa direzione e verso dello spostamento. Lo mettiamo per far vedere che la forza d'attrito si oppone alla velocità e per prendere il modulo dello spostamento.

Facendo la somma dei contributi infinitesimi otteniamo

$$W = \int_A^B -\mu_k N ds = -\mu_k N \int_A^B ds$$

Notare che:

- Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito è sempre negativo.
- A differenza dei due casi precedenti, questa volta non si può esprimere il lavoro solo come variazione di una funzione della posizione. Il lavoro svolto dipende dalla traiettoria percorsa. Un percorso più lungo coincide con un lavoro maggiore.

7.6 Potenza

La potenza è una grandezza fisica che determina la quantità di lavoro in un'unità di tempo. Serve a quantificare le prestazioni di un dispositivo che fornisce lavoro.

La potenza media rappresenta il lavoro svolto in un certo intervallo di tempo:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

La potenza istantanea rappresenta la quantità di lavoro svolta in un determinato istante di tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

L'unità di misura nel SI è il watt (W) che equivale a un joule al secondo (J/s).

7.7 Forze Conservative e loro Proprietà

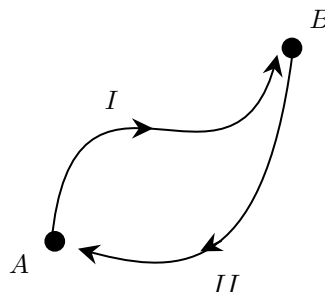
Una forza si dice conservativa se:

- Il lavoro da essa compiuto non dipende dal percorso effettuato. i.e: se consideriamo due punti A e B e due percorsi diversi che li congiungono allora per una forza conservativa vale la seguente uguaglianza

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II}$$

Il lavoro è esprimibile come differenza di valori che una funzione delle coordinate assume in A e B . Inoltre, se si inverte il senso di percorrenza cambia il segno del lavoro

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



- Il suo lavoro lungo qualsiasi percorso chiuso è nullo.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

o anche

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

In generale, la forza è diversa da punto a punto su ognuna delle possibili traiettorie, il lavoro totale nel percorso chiuso è nullo.

7.8 Energia Potenziale

Il lavoro svolto dalle forze conservative è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate valutata agli estremi del percorso. Tale funzione si chiama energia potenziale U

$$W = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

La funzione U non è determinabile a priori e va calcolata caso per caso. Ecco ad esempio i casi dell'energia potenziale per la forza peso e per la forza elastica:

- $W_P = -\Delta(mgy)$
- $W_{el} = -\Delta\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$

7.9 Il Principio di Conservazione dell'Energia

Per ogni forza vale la relazione

$$W = \Delta E_k$$

ossia il lavoro è dato dalla differenza di energia cinetica all'inizio e alla fine del moto. Inoltre, solo per le forze conservative vale

$$W = -\Delta U$$

Dunque eguagliando

$$\Delta E_k = -\Delta U$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= -(U_B - U_A) \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + U_A &= \frac{1}{2}mv_B^2 + U_B \end{aligned}$$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un corpo che si muove sotto l'azione di forze conservative è costante durante il moto. Ossia l'energia meccanica

$$E_M = E_k + U$$

è costante. Non a caso sono chiamate forze "conservative": esse conservano l'energia meccanica.

7.9.1 Relazione tra Forza Conservativa ed Energia Potenziale

Il lavoro è dato da

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

L'energia potenziale alla fine del percorso è dunque pari a

$$U_B = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + U_A$$

Derivandola si ottiene

$$dU = -F(x)dx \implies F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

da cui si può notare che: una forza conservativa è uguale alla derivata della sua energia potenziale cambiata di segno.

La formula in 3 dimensioni diventa

$$\vec{F}(x, y, z) = -\Delta U(x, y, z)$$

dove Δ indica il gradiente. Esplicitamente diventa

$$\vec{F}(x, y, z) = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$$

7.10 Applicazioni del Principio di Conservazione

7.10.1 Pendolo

Un esempio di questo principio si ha con i pendoli. Durante le oscillazione del pendolo i valori dell'energia cinetica e potenziale variano in funzione dell'altezza del punto materiale, ma l'energia meccanica del sistema resta costante.

Appena prima di rilasciare la massa l'energia è potenziale è massima e l'energia cinetica è nulla. Man mano che la massa raggiunge il punto di equilibrio acquista velocità. Una volta raggiunto il punto di equilibrio l'energia cinetica è massima e l'energia potenziale è nulla.

L'altezza della massa in ogni momento è data da

$$h = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

Se il pendolo parte ad una certa altezza, abbiamo una certa energia potenziale data da

$$U_A = mgh$$

7.10.2 Sistema Massa-Molla

Il principio vale per tutti gli oscillatori armonici, come nel caso delle molle. Anche nel caso di un sistema massa-molla l'energia meccanica rimane costante. Nel punto di massima elongazione si ha U massima e E_k nulla, e nel punto di riposo della molla si ha E_k massima e U nulla. La legge oraria dell'oscillatore armonico è

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

e la velocità è

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

Dunque l'energia cinetica in certo istante di tempo sarà data da

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$ da cui

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

L'energia potenziale della molla è data da

$$U = \frac{1}{2}kx = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Si può verificare analiticamente che vale il principio di conservazione dell'energia

$$E_m = E_k + U = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

Dall'identità fondamentale della trigonometria il termine tra parentesi quadre vale 1, e quindi l'energia meccanica è pari a

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

Come si nota, l'energia meccanica è costante perchè non dipende dalla posizione o dal tempo, ma solo dalla costante elastica e dall'ampiezza dell'oscillazione.

7.11 Esercizi

Esercizio 24:

Un blocco di massa $m = 11.7kg$ é spinto lungo un piano inclinato e percorre una distanza $s = 4.65m$ sta raggiungendo un'altezza $h = 2.86m$ dal suolo. Supponendo nullo l'attrito, calcolare il lavoro necessario allo spostamento se viene applicata una forza parallela al piano se il blocco viene spinto con velocità costante.

Soluzione 24:

$$x : \quad F - mg \sin \theta = 0$$

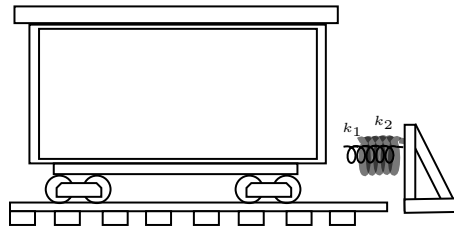
$$y : \quad F - mg \cos \theta = 0$$

$$F = mg \sin \theta = 70.5N$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta = Fs = 328J$$

Esercizio 25:

Un carro merci di 6000kg si muove lungo i binari senza apprezzabile attrito. Il carro viene fermato mediante un sistema combinato di due molle, come illustrato in figura. Entrambe le molle seguono la legge di Hooke con costanti elastiche $k_1 = 1600\text{N/m}$ e $k_2 = 3400\text{N/m}$. Dopo che la prima molla viene compressa per 30.0cm comincia ad agire anche la seconda molla aumentando la forza frenante che varia con la posizione. Dal primo contatto col sistema di molle il carro percorre un tratto di 50.0cm prima di fermarsi. Si trovi la velocità iniziale del carro.

**Soluzione 25:**

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A^2$$

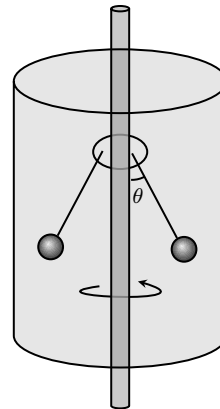
$$W_1 = \int_0^{0.3} \vec{F} d\vec{s} = \frac{1}{2}k_1[x^2]_0^{0.3} = 72J$$

$$W_1 = \int_{0.3}^{0.5} \vec{F}_1 d\vec{s} + \int_0^{0.2} \vec{F}_2 d\vec{s} = \frac{1}{2}k_1[x^2]_{0.3}^{0.5} + \frac{1}{2}k_2[x^2]_0^{0.2} = 128J + 68J$$

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = 0.3m/s$$

Esercizio 26:

Un regolatore consiste in due sfere di 200 g attaccate a un asse rotante mediante due fili rigidi lunghi 10.0 cm. I fili sono fissati in modo da consentire alle sfere di allontanarsi dall'asse in rotazione. Quando l'angolo θ che il filo forma con la verticale raggiunge i 45° , le sfere incontrano le pareti del cilindro entro il quale è inserito il regolatore. (a) Quale è la minima velocità di rotazione in giri al minuto che consente alle sfere di toccare la parete del cilindro? (b) Se il coefficiente di attrito dinamico tra sfere e pareti del cilindro è di 0.35, quanto vale la potenza dissipata se le sfere strisciano sulle pareti del cilindro alla velocità di 300giri/min?

**Soluzione 26:**

a)

$$R = L \sin \theta = 0.0707m$$

$$F_c = mg \tan \theta = mg$$

$$mg = m \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{gR} = 0.83m/s$$

b)

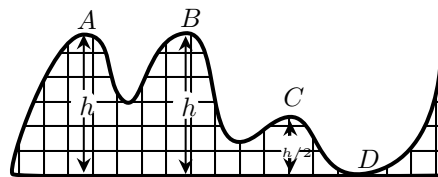
$$300GPM = \frac{300\pi 2R}{60} = 2.22m/s$$

$$f_k = \mu_k N = 2\mu_k m \frac{v^2}{R}$$

$$P = f_k v = 2\mu_k \frac{v^3}{R} = 21.7N$$

Esercizio 27:

Un carrello da montagne russe parte dal punto A della figura con una velocità in modulo uguale a v_0 . Quanto vale il modulo della velocità del carrello (a) nel punto B , (b) nel punto C e (c) nel punto D ? Si consideri il carrello come un punto materiale sempre aderente alle rotaie.

**Soluzione 27:**

a)

$$W_A = U_A + E_{kA} = W_B = U_B + E_{kB}$$

$$W_A = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

$$W_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh$$

$$W_A = W_B \Rightarrow v_0 = v_B$$

b)

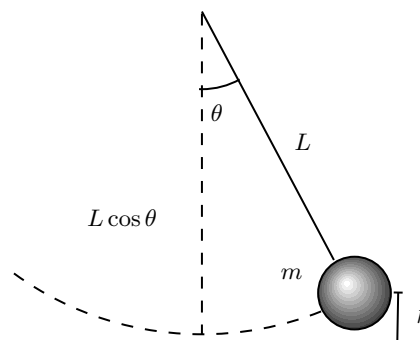
$$E_{kA} + U_A = E_{kC} + U_C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_0^2 + gh}$$

c)

$$E_{kA} + U_A = E_{kD} + U_D \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_D^2 \quad \Rightarrow \quad v_D = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Esercizio 28:

Una sbarretta sottile di lunghezza $L = 2.13\text{m}$ e di massa trascurabile è fissata ad una sua estremità in modo da ruotare su un piano verticale. Essa viene spinta lateralmente di un angolo $\theta = 35.0^\circ$ rispetto alla verticale e quindi è lasciata andare. Qual è la velocità della pallina pesante fissata alla estremità libera della sbarra nell'istante in cui si trova nel punto più basso?

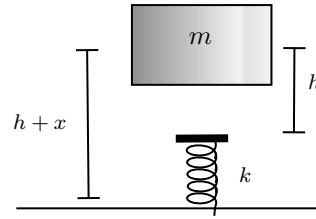
**Soluzione 28:**

$$L - L \cos \theta = 0.39\text{m}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 2.75\text{m/s}$$

Esercizio 29:

Un blocco di 2.14kg viene lasciato cadere da un'altezza di 43.6cm su una molla di costante elastica $k = 18.6\text{N/m}$. Si determini la massima compressione della molla.

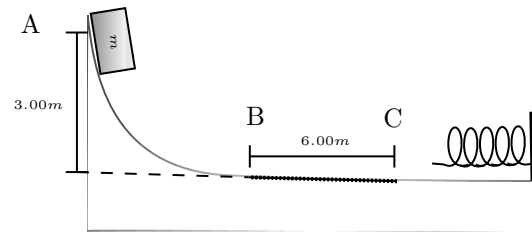


Soluzione 29:

$$mgh(h+x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad 2mgh + 2mx = kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k} = 0.11m$$

Esercizio 30:

Un blocco di 10.0kg viene lasciato libero nel punto A. Il pinnao è privo di attrito, fatta eccezione per il tratto tra B e C lungo 6.00m. Il blocco scende lungo la pista, colpisce una molla di costante elastica 2250N/m e la comprime di 0.3m prima di arrestarsi momentaneamente. Si determini il coefficiente di attrito dinamico tra la superficie e blocco nel tratto scabro tra B e C.



Soluzione 30:

Bisogna sottrarre il contributo del lavoro della forza d'attrito che si è trasformata in calore.

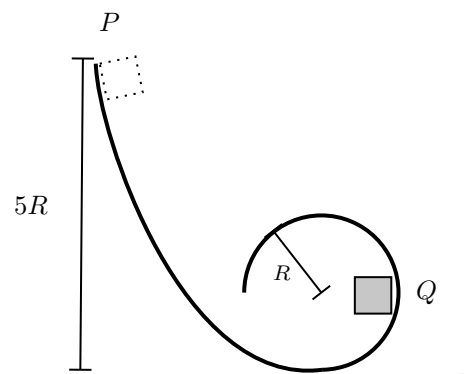
$$E_0 - W_{att} = E_f$$

$$E_0 - W_{att} = mgh - \mu_k Nl = E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\mu_k = \frac{2mgh - kx^2}{2mgl} = 0.33$$

Esercizio 31:

Un piccolo blocco di massa m scivola lungo la guida mostrata nella figura. (a) Il blocco è lasciato cadere da fermo dal punto P. Quanto è la risultante delle forze agenti sul blocco nel punto Q? (b) Da quale altezza dal suolo deve essere lasciato andare per perdere contatto con la guida del punto più alto della parte circolare?



Soluzione 31:

a)

$$F_c = N = m \frac{v^2}{R}$$

$$v^2 = 8gR$$

$$mg5R = \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

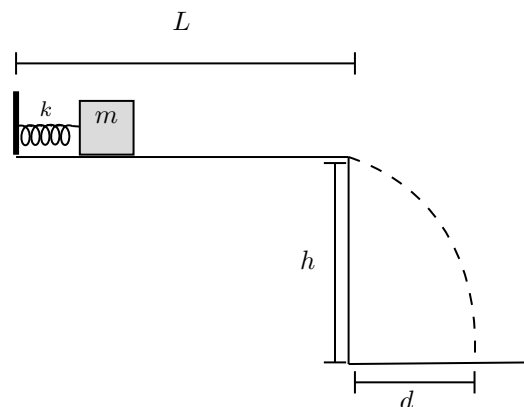
$$F_c = m \frac{8gR}{R} = m8g$$

b)

$$\begin{aligned}
 -mg &= -m \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad mv^2 = mgR \\
 mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mgR + mg2R \quad \Rightarrow \quad h \geq \frac{5}{2}R
 \end{aligned}$$

Esercizio 32:

Nel sistema in figura una massa puntiforme $m = 0.2\text{kg}$ comprime una molla ideale, di costante elastica $k = 500\text{N/m}$ e lunghezza a riposo $x_0 = 8\text{cm}$, sino a dimezzarne la lunghezza. Una volta sbloccata la molla, m viene spinta sul piano, orizzontale e scabro, di lunghezza $L = 1\text{m}$. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra la massa ed il piano è $\mu = 0.1$ si determinino: (a) velocità ed accelerazione alla fine del piano, (b) l'altezza h se m atterra ad una distanza di $d = 0.7\text{m}$ dal bordo del piano.

**Soluzione 32:**

a)

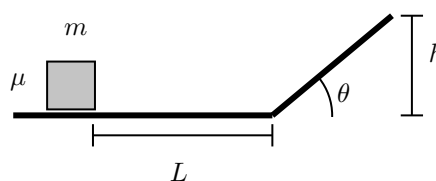
$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x_0}{2} = 0.04 \\
 \frac{1}{2} &= kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \mu_k N(L - x) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{kx^2 - 2\mu_k mg(L - x)}{m}} = 1.45\text{m/s}
 \end{aligned}$$

b)

$$y: \quad h = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2h}{g} = \left(\frac{d}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{d}{v}\right)^2 \frac{g}{2} = 1.15\text{m}$$

Esercizio 33:

Un corpo puntiforme di massa m viene lanciato con velocità iniziale v sul tratto orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.25$) percorrendo un tratto di lunghezza $L = 4\text{m}$ prima di salire sul piano inclinato (angolo $\theta = 30^\circ$), anche esso scabro e con uguale coefficiente di attrito. La massa sale sino all'altezza $h = 3\text{m}$ dove si ferma. Si determini: (a) la velocità iniziale, (b) il valore minimo del coefficiente di attrito statico del piano inclinato che trattiene il corpo nella posizione di arresto, (c) la distanza percorsa da m , sul tratto orizzontale prima di fermarsi, nel caso in cui l'attrito statico non sia in grado di impedire la risalita del corpo.

**Soluzione 33:**

1)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}mv^2 &= W_{att} + mgh \quad \Rightarrow \quad W_{att} = \mu_k mgL + \mu_k mg \cos(\theta)l \\
 l &= \frac{h}{\sin \theta} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh + 2\mu_k gL + 2g \cos(\theta)l = (10.2\text{m/s})^2
 \end{aligned}$$

2)

$$f_s - mg \sin \theta = 0 \quad \mu_s mg \sin \theta = mg \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \tan \theta$$

3)

$$mgh = \mu_k mg \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} + \mu_k mgd \quad \Rightarrow \quad d = \frac{h - \mu_k \cos \theta \frac{h}{\sin \theta}}{\mu_k} = 6.8m$$

Esercizio 34:

12 GIUGNO 2023

Problema 1

Una massa puntiforme m viene lasciata scivolare, partendo da ferma, lungo uno scivolo privo di attrito formato da un piano inclinato (angolo alla base $\theta = 45^\circ$), raccordato ad una guida orizzontale, posta alla quota $s = 80$ cm rispetto al suolo (vedi figura). Calcolare: 1) la velocità v che m deve avere all'uscita dello scivolo per colpire il bersaglio B , posto sul suolo a distanza $d = 2$ m dalla fine dello scivolo; [$v = 5.0$ m/s] 2) la quota h da cui m deve partire per colpire B ; [$h = 2.1$ m] 3) la quota h' da cui bisognerebbe lanciare m , con velocità iniziale $v_i = 1.5$ m/s, se lo scivolo fosse scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.5$, e la guida orizzontale liscia. [$h' = 1.5$ m]

Soluzione 34:**1) Velocità v all'uscita dello scivolo per colpire il bersaglio B :**

Usando il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Da cui:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Il tempo t che impiega per raggiungere il suolo è:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Dove $s = 0.8$ m e $g = 9.81$ m/s². Da cui:

$$t \approx 0.404 \text{ secondi}$$

La distanza d che la massa percorre orizzontalmente durante questo tempo è:

$$d = vt$$

Da cui:

$$d \approx 2.02 \text{ metri}$$

2) Quota h da cui m deve partire per colpire B :

Usando la conservazione dell'energia:

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Da cui:

$$h \approx 1.274 \text{ metri}$$

3) Quota h' con attrito e velocità iniziale v_i :

L'energia persa a causa dell'attrito è:

$$\Delta E = \mu mgh'$$

Dove $\mu = 0.5$.

La velocità alla fine dello scivolo con attrito è:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh' - \Delta E + \frac{1}{2}mv_i^2$$

Da cui:

$$v^2 = 2g(h' - \mu h') + v_i^2$$

Dove $v_i = 1.5 \text{ m/s}$.

Risolvendo per h' :

$$h' \approx 2.319 \text{ metri}$$

Capitolo 8

La Gravitazione Universale

8.0.1 Legge di gravitazione universale

La forza gravitazionale è una forza attrattiva, che avvicina tra di loro due corpi rispettando la terza legge di Newton (principio di azione o reazione).

Lo stesso Newton formulò la *legge di gravitazione universale*, cioè un'equazione che permette di trovare la forza di gravità tra due corpi. Essa ci dice che la forza gravitazionale è direttamente proporzionale alle masse dei corpi e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza, ovvero:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

dove:

- G : è la costante di gravitazione universale
- r : è la distanza tra i due corpi
- \hat{r}_{12} : è un versore con direzione e verso che punta verso la seconda massa

La costante di gravitazione fu misurata per la prima volta da Henry Cavendish e vale

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Questa costante così piccola è il motivo per cui oggetti di piccola massa esercitano un'attrazione gravitazionale trascurabile.

La forza gravitazionale agente su di un corpo posto sulla superficie terrestre è la forza peso. Per un corpo posto ad una certa altezza dalla superficie vale

$$P = mg = G \frac{mM_t}{(r_t + h)^2}$$

dove M_t e r_t sono rispettivamente la massa e il raggio della terra. La validità di questa formula si basa sul teorema del guscio sferico: la forza gravitazionale esercitata da una distribuzione di massa sferica su di un punto al suo esterno è la stessa che si eserciterebbe se tutta la massa fosse concentrata nel suo centro. Pertanto dall'equazione, eliminando m , si ricava

$$g = G \frac{M_t}{(r_t + h)^2}$$

dove si nota che g è costante e non dipende dalla massa di prova. Esso varia solo in funzione dell'altezza, cioè diminuisce man mano che ci si allontana dal centro.

8.1 Le Leggi di Keplero

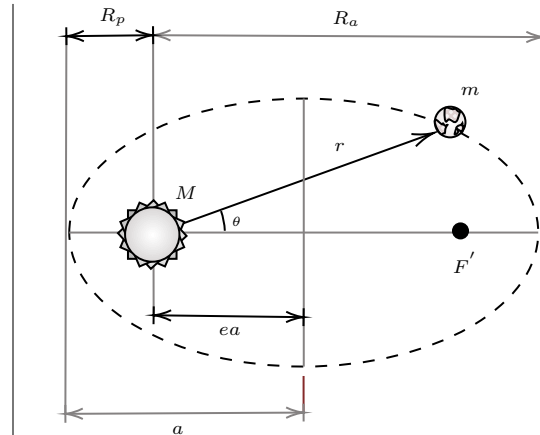
8.1.1 Prima Legge

La prima legge afferma:

Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il sole occupa uno dei due fuochi.

L'orbita è descritta da due parametri: il semiasse maggiore e l'eccentricità, che ci indica di quanto è schiacciata l'ellisse ed è definita come

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



Avremo che $0 \leq e \leq 1$. Più il valore è vicino a 1 e più l'ellisse è schiacciata. Il punto dell'orbita più vicino alla stella si chiama perielio e quello più lontano afelio.

Ad esempio, l'orbita terrestre ha un'eccentricità di 0,0167, cioè ha un'orbita praticamente circolare. La cometa di Halley ha un'orbita molto schiacciata con eccentricità di 0.967, quasi pari a 1.

8.1.2 Seconda Legge di Keplero

La seconda legge afferma:

il segmento che congiunge un qualsiasi pianeta al sole descrive aree uguali in tempi uguali.

Ciò significa che la velocità areolare del vettore che unisce il sole ad un pianeta è costante. La velocità dei pianeti invece non è costante: è massima al perielio e minima all'afelio.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$$

dove A rappresenta l'area dell'ellisse percorsa dal pianeta in un intervallo di tempo, r è la distanza tra il pianeta e il Sole e θ è l'angolo tra la retta che congiunge il pianeta con il Sole e la direzione del perielio.

Deduzioni L'area spazzata dal raggio vettore nell'intervallo di tempo infinitesimo dt è metà dell'area del parallelogramma. L'area del parallelogramma è data dal modulo del prodotto vettoriale dei due vettori posizione e velocità (\vec{r} e \vec{v})

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt|$$

Moltiplichiamo e dividiamo per la massa

$$dA = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| dt$$

Il termine $\vec{r} \times m\vec{v}$ rappresenta il momento angolare, dunque

$$dA = \frac{1}{2m} L dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Ossia si esprime la velocità areolare in funzione del momento angolare. Dato che il momento angolare della forza gravitazione è costante, significa che la derivata dell'area percorsa rispetto al tempo è costante, cioè la velocità areolare è costante. Dunque in intervalli di tempo uguali l'area percorsa è la stessa.

8.1.3 Terza Legge di Keplero

La terza legge di Keplero afferma:

il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita.

In formulazione

$$T^2 = ka^3$$

dove k è la costante di proporzionalità.

Deduzioni Consideriamo il moto di un pianeta su un'orbita circolare di raggio r

$$T^2 = kr^3$$

La forza gravitazionale è la forza centripeta necessaria per mantenerlo sull'orbita

ovvero

$$F_g = m \frac{v^2}{r}$$

Sapendo che $\omega = 2\pi/T$ si può scrivere

$$G \frac{m_p M_s}{r^2} = m_p \frac{v^2}{r} = m_p \omega^2 r$$

$$G \frac{M_s}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \implies T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

Considerando $K = \frac{4\pi^2}{GM_s}$ si ottiene

$$T^2 = Kr^3$$

Il termine k non dipende dalla massa del pianeta, per cui è un'equazione che vale per tutti i pianeti.

Questa relazione ci permette di calcolare la massa del sole, noto il periodo e il semiasse maggiore/raggio dell'orbita:

$$T = 365d = 365d \cdot 24h/d \cdot 3600 \text{ s/h} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$r = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

per cui la massa del sole è data da

$$M_S = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

8.2 Il Momento Angolare

Il *momento di una forza* esprime l'attitudine di una forza a imprimere una rotazione ad un corpo rigido attorno ad un asse, quando tale forza è applicata in un punto diverso dal centro di rotazione. E' definita come

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ad esempio, quando si spinge una porta si genera un momento: il centro di rotazione è il cardine, la forza è la spinta e il vettore posizione va dal punto in cui spingo al cardine. E' la componente tangenziale della spinta che causa la rotazione.

Il *momento angolare* è il momento del vettore quantità di moto rispetto al polo di origine. E' definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

dove r rappresenta il vettore posizione della particella riferito all'origine. Il modulo del momento angolare è

$$L = rmv \sin \theta$$

8.2.1 Teorema del Momento Angolare

Calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare derivando

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned}$$

Si osserva che $d\vec{r}/dt$ equivale alla velocità tangenziale e $d\vec{v}/dt$ equivale all'accelerazione tangenziale. Scriviamo allora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

Si ha che $\vec{v} \times m\vec{v}$ è nullo perchè il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo. Dunque rimane

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Il prodotto $\vec{r} \times \vec{F}$ è il momento della forza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza.

Principio di Conservazione del Momento Angolare Se il momento netto delle forze agenti su un sistema è nullo, il momento angolare rimane costante

$$\frac{dL}{dt} = 0 \implies \vec{L} = \text{costante}$$

Il momento delle forze può essere nullo:

- Se la forza netta è nulla
- Se la forza applicata è parallela al vettore posizione \vec{r}

8.2.2 Momento per le Forze Centrali

Una *forza centrale* è una forza la cui direzione passa sempre per un punto fisso detto centro della forza e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}$$

In un campo di forze centrali il momento delle forze è nullo dato che le forze sono parallele ai vettori posizione. Pertanto il momento angolare si conserva. Questo è il caso della forza gravitazionale che è una forza centrale, pertanto è parallela al vettore posizione che congiunge il pianeta al sole

$$M_g = \vec{r} \times \vec{F}_g = \vec{r} \times G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 0$$

8.3 Moto dei Satelliti

Con considerazioni simili alle deduzioni sulla terza legge di Keplero, studiamo il moto di un satellite attorno alla terra ad una quota h dalla superficie. Esso si muove di moto circolare uniforme e la forza centripeta è la forza gravitazionale della terra

$$F_g = m_s \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

$$G \frac{m_s M_T}{(R_T + h)} = m \frac{v^2}{(R_T + h)} = m \omega^2 (R_T + h)$$

Sapendo che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e rimuovendo a m troviamo

$$G \frac{m_s M_T}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2}{T^2} (R_T + h)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3$$

8.3.1 Satelliti Geostazionari

Un satellite geostazionario ruota alla stessa velocità angolare della terra. Ad un osservatore sulla terra appare fermo in cielo. Sono essenziali per trasmettere segnali. Essi hanno un periodo uguale a quello terrestre, ossia

$$24h \cdot 3600 \text{ s/h} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Si può calcolare a che altezza devono stare usando la terza legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

$$(R_T + h) = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \approx 42300 \text{ km}$$

Sapendo che il raggio della terra è di circa 6300 km allora un satellite geostazionario deve

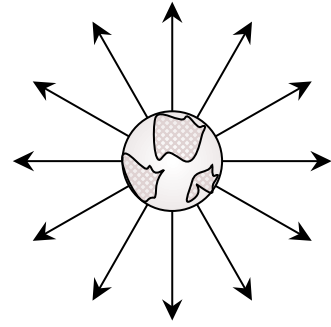
8.4 Il Campo Gravitazionale

La forza è un'interazione diretta fra le masse.

$$\text{massa} \leftrightarrow \text{massa}$$

In realtà un corpo genera un campo gravitazionale e ogni altra massa al suo interno subisce una forza di attrazione gravitazionale

$$\text{massa} \rightarrow \text{campo} \leftarrow \text{massa}$$



Partendo dalla legge di gravitazione universale troviamo il campo generato da una massa m_1

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}_{12} = \left(-G \frac{m_1}{r^2} \hat{r}_{12} \right) m_2$$

ricaviamo il campo gravitazionale generato da una massa

$$\vec{g}_1 = \frac{-Gm_1}{r^2} \hat{r}_{12}$$

dove:

- r : è la distanza dal corpo che genera il campo e il punto nello spazio che viene valutato
- \hat{r} : è il versore che va dal punto di valutazione al centro della massa

Dunque la massa m_2 nel campo di m_1 sarà soggetta alla forza

$$\vec{F}_{12} = \vec{g}_1 m_2$$

Inoltre sulla superficie della terra il campo gravitazionale coincide con l'accelerazione di gravità g .

8.5 Energia Potenziale Gravitazionale

La forza gravitazionale è una forza conservativa. Il lavoro infinitesimo per spostare di un tratto infinitesimo una massa nel campo gravitazionale generato dalla terra è dato da

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -G \frac{mM_T}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

Notiamo che $\hat{r} \cdot d\vec{s}$ è la proiezione di $d\vec{s}$ su \hat{r} , ossia uno spostamento infinitesimo dr sull'asse della terra (la forza è centrale). Dunque

$$dw = -G \frac{mM_T}{r^2} dr$$

Integrando da r_i a r_f otteniamo il lavoro svolto

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_i}^{r_f} -G \frac{mM_T}{r^2} dr \\ &= -GmM_T \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r^2} dr \\ &= -GmM_T \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} \\ &= -GmM_T \left(-\frac{1}{r_f} + \frac{1}{r_i} \right) \end{aligned}$$

In generale, per due masse qualsiasi si può definire l'energia potenziale gravitazionale come

$$U(r) = -G \frac{mM_T}{r}$$

Notiamo che per $r \rightarrow \infty$ l'energia potenziale tende a zero. La gravità è trascurabile su distanze molto grandi.

8.5.1 Energia Potenziale Gravitazionale di un Sistema di Masse

L'energia potenziale totale è la somma tra tutte le coppie di energia potenziale delle masse. Ad esempio, nel caso di un sistema con 3 masse

$$\begin{aligned} U_{tot} &= U_{12} + U_{13} + U_{23} = \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \\ &= -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \end{aligned}$$

Dato che $U(\infty) = 0$ il valore assoluto di energia totale rappresenta il lavoro necessario per separare le particelle e portarle a distanza infinita.

8.5.2 Energia Potenziale Vicino alla Superficie Terrestre

Immaginiamo di avere un punto materiale che cade da un punto A a un punto B , entrambi vicini alla superficie terrestre. Avremo che

$$\begin{aligned} \Delta U &= -GmM_T \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \\ &= -GmM_T \left(\frac{r_a - r_b}{r_b r_a} \right) \end{aligned}$$

Dato che i valori sono molto simili, possiamo approssimare $r_a r_b$ come r_t^2 . Inoltre $r_a - r_b = h$. Avremo che

$$\Delta U \approx -GmM_T \frac{h}{r_t^2} = -mgh$$

dato che $g = G \frac{M_T}{(r_t)^2}$.

8.5.2.1 Energia di un Satellite

Un satellite in orbita ad una certa distanza dal centro della terra possiede sia energia cinetica che energia potenziale gravitazionale. Prendiamo l'equazione del moto del satellite con $r = r_t + h$

$$G \frac{mM_T}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Ricaviamo il quadrato della velocità

$$v^2 = G \frac{M_T}{r}$$

L'energia meccanica è data da

$$\begin{aligned}
 E_m &= E_k + U \\
 &= \frac{1}{2} \frac{GmM_t}{r} - \frac{GmM_T}{r}
 \end{aligned}$$

Pertanto l'energia meccanica di un satellite in orbita è data da

$$E_m = -\frac{GmM_T}{2r}$$

8.5.3 Velocità di Fuga

La velocità di fuga è la velocità minima che un corpo deve avere per sfuggire all'attrazione gravitazionale. Per calcolarla confrontiamo l'energia meccanica in partenza con l'energia meccanica ad una distanza infinita

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{mM_t}{r_t} = \frac{1}{2}mv_f^2 + U(\infty)$$

dove $U(\infty) = 0$. Ossia l'energia cinetica iniziale sommata all'energia potenziale sulla superficie terrestre è uguale all'energia cinetica finale sommata all'energia potenziale a distanza infinita. La velocità minima si ottiene quando il corpo a distanza infinita ha velocità nulla

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mM_t}{r_t} = 0$$

Da cui si ottiene la velocità necessaria per sfuggire all'attrazione gravitazionale

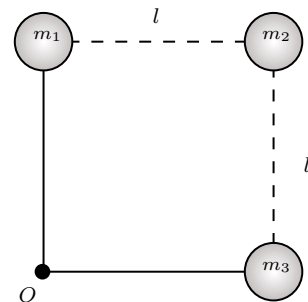
$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_t}{r_t}}$$

Aggiustando opportunamente la massa e il raggio la formula vale per qualsiasi pianeta. Ad esempio, la velocità di fuga sulla terra è 11.2 km/s o $4 \cdot 10^4$ km/h

8.6 Esercizi

Esercizio 35:

Tre corpi di massa uguale sono posti nei tre vertici di un quadrato di lato l come mostrato in figura. Si trovi il campo gravitazionale, dovuto alle tre masse, che è presente nel quarto vertice.



Soluzione 35:

$$\begin{aligned}
 g_x &= g_3 + g_{2x} = \frac{Gm}{l^2} + \frac{Gm}{2l^2} \cos 45^\circ = \frac{Gm}{l^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\
 g_y &= g_3 + g_{2y} = \frac{Gm}{l^2} + \frac{Gm}{2l^2} \sin 45^\circ = \frac{Gm}{l^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\
 g &= \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \frac{Gm}{l^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Esercizio 36:

Un sistema è composto da tre punti materiali, ognuno di massa 5.00g che si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di 30.0cm di lato. (a) Si calcoli l'energia potenziale del sistema. (b) I tre punti materiali vengono, nello stesso istante, lasciati liberi di muoversi. Si descriva il moto di ognuno negli istanti successivi. Entreranno in collisione? Si spieghi.

Soluzione 36:

(a)

$$U = -\frac{Gm^2}{r} - \frac{Gm^2}{r} - \frac{Gm^2}{r} = -\frac{3Gm^2}{r} = -2.50 \times 1.67^{-14} \text{ J}$$

(b)

Massa 1:

$$F_{1x} = F_{21} + F_{31x} = \frac{Gm^2}{l^2} + \frac{Gm^2}{l^2} \cos 60^\circ = \frac{3}{2} \frac{Gm^2}{l^2}$$

$$F_{1y} = F_{31y} = \frac{Gm^2}{l^2} \sin 60^\circ = \frac{Gm^2}{l^2} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Massa 2:

$$F_{2x} = -F_{1x}$$

$$F_{2y} = -F_{1y}$$

Massa 3:

$$F_{3x} = 0$$

$$F_{3y} = -2 \frac{Gm^2}{l^2} \cos 30^\circ = -\frac{Gm^2}{l^2} \sqrt{3}$$

Esercizio 37:

(a) Che velocità lineare deve avere un satellite terrestre per stare su un'orbita circolare a un'altitudine di 160km? (b) Quale sarà il suo periodo di rivoluzione?

Soluzione 37:

(a) La velocità lineare di un satellite terrestre su un'orbita circolare a un'altitudine h sopra la superficie terrestre è data da:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

Dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa della Terra, R è il raggio della Terra e h è l'altitudine sopra la superficie terrestre.

Sostituendo i valori numerici, otteniamo:

$$v = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 160 \text{ km})}} = 7.81 \text{ km/s}$$

Quindi, la velocità lineare del satellite terrestre su un'orbita circolare a un'altitudine di 160 km sopra la superficie terrestre è di 7.81 km/s.

(b) Il periodo di rivoluzione del satellite terrestre può essere calcolato utilizzando la seguente formula:

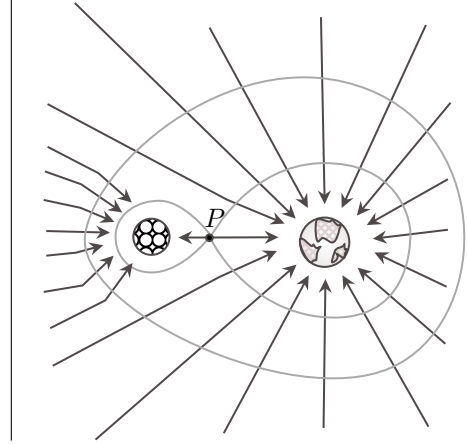
$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$$

Sostituendo i valori numerici, otteniamo:

$$T = \frac{2\pi(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 160 \text{ km})}{7.81 \times 10^3 \text{ m/s}} = 5244 \text{ s} \approx 1.46 \text{ h}$$

Esercizio 38:

Un'astronave viaggia su una rotta rettilinea dalla terra alla Luna. A che distanza dalla Terra si annulla la risultante delle forze gravitazionali che agiscono sull'astronave?

**Soluzione 38:**

La risultante delle forze gravitazionali che agiscono sull'astronave sarà nulla quando la forza gravitazionale esercitata dalla Terra F_T sulla navicella sarà uguale e opposta alla forza gravitazionale esercitata dalla Luna F_L sulla navicella. Quindi, possiamo scrivere:

$$F_T = F_L$$

La forza gravitazionale esercitata sulla navicella dalla Terra è data da:

$$F_T = \frac{GM_T m}{r_T^2}$$

Dove G è la costante di gravitazione universale, M_T è la massa della Terra, m è la massa dell'astronave e r_T è la distanza tra l'astronave e la Terra.

Analogamente, la forza gravitazionale esercitata sulla navicella dalla Luna è data da:

$$F_L = \frac{GM_L m}{r_L^2}$$

Dove M_L è la massa della Luna e r_L è la distanza tra l'astronave e la Luna.

Uguagliando le due forze, otteniamo:

$$\frac{GM_T m}{r_T^2} = \frac{GM_L m}{r_L^2}$$

Rearrangiando la formula, abbiamo:

$$r_T = r_L \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$$

Dove abbiamo sostituito r_L con la distanza media tra la Terra e la Luna, che è di circa 3.84×10^8 metri, M_L con la massa della Luna, che è di circa 7.35×10^{22} kg e M_T con la massa della Terra, che è di circa 5.97×10^{24} kg.

Sostituendo i valori numerici, otteniamo:

$$r_T = (3.84 \times 10^8 \text{ m}) \sqrt{\frac{7.35 \times 10^{22} \text{ kg}}{5.97 \times 10^{24} \text{ kg}}} \approx 4.06 \times 10^5 \text{ m}$$

Esercizio 39:

Ganimede è la più grande tra le lune di Giove. Si consideri un razzo sulla superficie di Ganimede dal lato posto di Giove. (a) La presenza di Ganimede altera in qualche modo la forza gravitazionale esercitata sul razzo da Giove? (b) Si calcoli la velocità di fuga del razzo dal sistema pianeta-luna. Il raggio di Ganimede è $2.64 \times 10^6 \text{ m}$, e la sua massa $1.495 \times 10^{25} \text{ kg}$. La distanza tra Giove e Ganimede è $1.071 \times 10^9 \text{ m}$ e la massa di Giove è $1.90 \times 10^{27} \text{ kg}$. Per il calcolo si trascuri il moto di rivoluzione sia di Giove che di Ganimede.

Soluzione 39:

(a) La presenza di Ganimede non altera la forza gravitazionale esercitata su un razzo posta sulla sua superficie da parte di Giove. Ciò è dovuto al fatto che la forza gravitazionale tra due corpi dipende solo dalle loro masse e dalla loro distanza relativa. La presenza di Ganimede non ha influenza sulla forza gravitazionale tra Giove e il razzo sul suo satellite.

(b) La velocità di fuga del razzo dal sistema pianeta-luna può essere calcolata usando l'energia meccanica del sistema. L'energia meccanica totale del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica del razzo e dell'energia potenziale gravitazionale del razzo rispetto al sistema pianeta-luna. Quando la velocità del razzo raggiunge la velocità di fuga, l'energia meccanica del sistema è uguale a zero.

Quindi, la velocità di fuga del razzo dal sistema pianeta-luna sarebbe la stessa, indipendentemente dalla massa del razzo. Si ha:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_{Giove}}{r_{Giove-luna} + r_{luna-razzo}}}$$

Sostituendo i valori numerici, otteniamo:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2 \times 6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \times 1.90 \times 10^{27} \text{ kg}}{(1.071 \times 10^9 \text{ m} + 2.64 \times 10^6 \text{ m}) + 2.64 \times 10^6 \text{ m}}} \approx 15.6 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Pertanto, la velocità di fuga del razzo dal sistema pianeta-luna è di circa 15.6×10^3 metri al secondo, indipendentemente dalla massa del razzo.

Esercizio 40:

In una stella doppia, due stelle di ugual massa di $3.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ruotano intorno al centro di massa del sistema su un raggio di $1.0 \times 10^{11} \text{ m}$. (a) Qual è la loro comune velocità angolare? (b) Se un meteorite passa attraverso il centro di massa con rotta perpendicolare al piano orbitale delle due stelle, quale velocità minima deve avere in quel punto per poter proseguire verso l'infinito, senza lasciarsi catturare dal sistema delle due stelle?

Soluzione 40:

(a) La velocità angolare delle due stelle intorno al centro di massa del sistema è data da:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

dove v è la velocità lineare delle stelle e r è la distanza delle stelle dal centro di massa del sistema. In questo caso, le due stelle ruotano intorno al centro di massa del sistema su un raggio di $1.0 \times 10^{11} \text{ m}$. Poiché le stelle hanno la stessa massa, la distanza del centro di massa dal centro di ciascuna stella è la stessa. Quindi, la velocità lineare delle stelle è uguale e la loro velocità angolare comune è data da:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{1.0 \times 10^{11} \text{ m}}$$

Per calcolare la velocità delle stelle, dobbiamo usare la legge di gravitazione universale, che afferma che la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi è data da:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e r è la loro distanza reciproca. Nella situazione delle due stelle, la forza gravitazionale che agisce su una stella è uguale alla forza che l'altra stella esercita su di essa e quindi:

$$\frac{Gm^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

dove m è la massa di ciascuna stella e v è la loro velocità lineare. Risolvendo per v , otteniamo:

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \times 3.0 \times 10^{30} \text{ kg}}{1.0 \times 10^{11} \text{ m}}} \approx 1.76 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Sostituendo il valore numerico nella formula per la velocità angolare, otteniamo:

$$\omega = \frac{1.76 \times 10^4 \text{ m/s}}{1.0 \times 10^{11} \text{ m}} \approx 1.76 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Pertanto, la velocità angolare comune delle due stelle intorno al centro di massa del sistema è di circa $1.76 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$.

(b) Perché il meteorite passi attraverso il centro di massa del sistema delle due stelle e prosegua verso l'infinito, deve avere una velocità tale da superare l'attrazione gravitazionale delle stelle. Questa velocità minima è la velocità di fuga dal sistema delle stelle. La velocità di fuga è data da:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

dove M è la massa totale del sistema delle stelle e r è la distanza del meteorite dal centro di massa del sistema. In questo caso, la massa totale del sistema delle stelle è $2m = 6.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, dove m è la massa di ciascuna stella. Se il meteorite passa attraverso il centro di massa del sistema delle due stelle, la distanza dal centro di massa del sistema è $1.0 \times 10^{11} \text{ m}$. Sostituendo i valori numerici nella formula, otteniamo:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \times 6.0 \times 10^{30} \text{ kg}}{1.0 \times 10^{11} \text{ m}}} \approx 8.95 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Pertanto, la velocità minima del meteorite per poter proseguire verso l'infinito senza lasciarsi catturare dal sistema delle due stelle è di circa $8.95 \times 10^4 \text{ m/s}$.

Esercizio 41:

Un meteorite di massa 2 tonnellate proviene dallo spazio con una velocità di 5000m/s e passa a una distanza minima dalla Terra di 60.000km. Qual è la forza di attrazione che esso subisce da parte della Terra nel punto di minima distanza, e quale è la sua velocità in tale posizione? Con quale velocità di allontana verso lo spazio?

Soluzione 41:

La forza di attrazione gravitazionale tra la Terra e il meteorite è data dalla legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e r è la loro distanza reciproca.

(a). La forza di attrazione gravitazionale tra la Terra e il meteorite nel punto di minima distanza è data da:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e r è la loro distanza reciproca.

La massa del meteorite è di 2 tonnellate, ovvero $2 \times 10^3 \text{ kg}$. La massa della Terra è $5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$ e la distanza minima tra il meteorite e la Terra è di $6 \times 10^7 \text{ m}$. Sostituendo i valori numerici nella formula della forza di attrazione gravitazionale, otteniamo:

$$F = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5.972 \times 10^{24} \text{ kg} \cdot 2 \times 10^3 \text{ kg}}{(6 \times 10^7 \text{ m})^2} \approx 221.2 \text{ N}$$

Quindi la forza di attrazione gravitazionale che agisce sul meteorite nel punto di minima distanza dalla Terra è di circa 221.2 N.

(b) La velocità del meteorite nel punto di minima distanza può essere calcolata usando la conservazione dell'energia. Poiché la forza di attrazione gravitazionale è conservativa, l'energia meccanica del meteorite è conservata durante il suo movimento. Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{costante}$$

dove m è la massa del meteorite, v è la sua velocità e G è la costante di gravitazione universale. La costante dell'energia meccanica è data dalla somma della sua energia cinetica e potenziale quando è a una distanza infinita dalla Terra, ovvero:

$$\text{costante} = \frac{1}{2}m(5000 \text{ m/s})^2 - \frac{GMm}{\infty} = 1.25 \times 10^{10} \text{ J}$$

Sostituendo i valori numerici nella prima equazione e risolvendo per v , otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} &= \\ &= \text{costante} \quad \frac{1}{2}(2 \times 10^3 \text{ kg})v^2 - \frac{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5.972 \times 10^{24} \text{ kg} \cdot 2 \times 10^3 \text{ kg}}{6.6371 \times 10^7 \text{ m}} \\ &= 1.25 \times 10^{10} \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{GMm}{r} + \text{costante} \right)} \\ v &= \sqrt{\frac{2}{2 \times 10^3 \text{ kg}} \left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5.972 \times 10^{24} \text{ kg} \cdot 2 \times 10^3 \text{ kg}}{6.6371 \times 10^7 \text{ m}} + 1.25 \times 10^{10} \text{ J} \right)} \end{aligned}$$

$$v \approx 6190 \text{ m/s}$$

Quindi la velocità del meteorite nel punto di minima distanza dalla Terra è di circa 6190 m/s.

(c) Poiché la forza gravitazionale tra la Terra e il meteorite diminuisce allontanandosi dalla Terra, la velocità del meteorite aumenterà man mano che si allontana dalla Terra. Tuttavia, poiché la sua energia meccanica è conservata, la sua velocità nel punto in cui lascia la sfera di influenza della Terra sarà la stessa della velocità con cui è entrato nell'atmosfera terrestre, ovvero 5000 m/s. Quindi la velocità di allontanamento del meteorite è di 5000 m/s.

Capitolo 9

La Carica Elettrica

9.1 Carica Elettrica

La *carica elettrica* è una grandezza fisica scalare dotata di segno responsabile di una delle 4 forze fondamentali, l'interazione elettromagnetica. La carica elettrica di un materiale è la sua differenza di elettroni rispetto ai protoni. La carica ha le seguenti proprietà:

1. Vi sono due tipi di carica elettrica: negativa e positiva. Gli elettroni possiedono carica negativa. Se essi sono presenti in quantità maggiori allora la carica elettrica del materiale è negativa, viceversa quando abbiamo più protoni la carica è positiva.
2. Cariche dello stesso segno si respingono, mentre cariche di segno opposto di attraggono.

L'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb (C). Un coulomb vale

$$1C = 6.24 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

La carica elettrica non assume valori qualunque, ma esiste solo con valori interi multipli della carica fondamentale e

$$q = \pm ne$$

con $n \in F$. Il valore della carica elementare e (in modulo) è lo stesso per l'elettrone e per il protone e vale

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

In un sistema isolato la somma algebrica di tutte le cariche rimane costante nel tempo.

9.2 Legge di Coulomb

La legge di Coulomb esprime l'intensità della forza che si esercita tra due cariche puntiformi a riposo

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \hat{r}_{12}$$

dove:

- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$: è la costante elettrostatica
- ϵ_0 : è la costante dielettrica
- q_1, q_2 : sono le cariche elettriche delle due particelle

- r : è la distanza tra le due particelle
- \hat{r}_{12} : è il versore che punta dalla prima alla seconda particella

Dalla terza legge della dinamica vale

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

9.3 Conduttori e Isolanti

Vi sono due categorie di materiali.

Conduttori Nei conduttori (come i metalli) uno o più elettroni, esterni e debolmente legati al nucleo, sono liberi di muoversi in tutto il volume in maniera analoga (in maniera analoga alle molecole di gas in un contenitore). Nei materiali conduttori gli atomi sono legati tramite legame ionico, perciò gli atomi "perdono" elettroni, i quali diventano ioni e girano liberamente nel volume.

Isolanti Negli isolanti invece non ci sono cariche libere, cioè tutti gli elettroni sono legati agli atomi. Pertanto non conducono corrente elettrica. Gli isolanti possono essere caricati elettricamente per strofinio. Attraverso un agente meccanico è possibile separare degli elettroni, trasferendoli da un corpo all'altro (e.g., da bacchetta a panno), in questo modo si ottiene un corpo carico positivamente e uno carico negativamente. Con semplici esperimenti si possono facilmente verificare tali proprietà.

9.4 Induzione Elettrica

Vi è un altro modo per caricare gli oggetti, ossia l'induzione. L'induzione elettrostatica è un fenomeno tale per cui la carica elettrica all'interno di un oggetto viene re-distribuita a causa della presenza di un altro oggetto carico nelle vicinanze. In altre parole, quando si pone un oggetto carico vicino ad un conduttore neutro, l'induzione fa sì che le cariche all'interno del conduttore si distribuiscano in maniera non uniforme, andando quindi a "caricare" il conduttore.

Al contrario per quanto accade nel caso di caricamento per strofinio, il caricamento per induzione non richiede il contatto tra i due materiali. Non viene ceduta infatti alcuna carica.

9.4.1 Processo di Carica per Induzione

Il processo di carica per induzione è il seguente:

1. Supponiamo di avvicinare una bacchetta carica negativamente ad una sfera conduttrice neutra. Gli elettroni vengono respinti tutti dalla parte opposta della sfera.
2. Collegando un filo di terra, alcuni elettroni attraversano il filo e si scaricano a terra, lasciando la sfera con meno elettroni di prima.
3. Eliminando il filo e allontanando la bacchetta carica negativamente, gli elettroni rimanenti si ridistribuiscono uniformemente. Sulla sfera resta una distribuzione di carica positiva totale uniforme.

9.4.2 Induzione negli Isolanti

Se si mette a contatto un isolante carico con un isolante neutro, avviene un processo di induzione simile a quanto avviene nei conduttori. La differenza è che l'induzione negli isolanti avviene tramite la polarizzazione del materiale.

La *polarizzazione elettrica* consiste nello spostamento delle cariche dalla loro posizione di equilibrio, andando a formare dei dipoli elettrici microscopici. Si viene quindi a formare uno strato di carica sulla superficie dell'isolante di segno opposto rispetto alle cariche dell'induttore. Ciò porta ad avere una forza attrattiva tra corpo e isolante, qualunque sia la sua carica.

La polarizzazione può avvenire in due modi:

- **Deformazione:** formazione di dipoli elettrici grazie alla deformazione degli atomi/molecole nei dielettrici non polari. La carica esterna deforma l'atomo, portando il nucleo positivo da una parte e gli elettroni negativi dalla parte opposta.
- **Orientamento:** formazione di dipoli elettrici grazie all'orientamento dei dipoli permanenti nei dielettrici polari. Vi sono molecole in cui il centro di carica positiva non coincide con quello di carica negativa, creando un dipolo costante. Applicando una carica esterna, i dipoli presenti si orientano, creando attrazione.

Ad esempio, un palloncino carico induce una separazione di cariche sulla superficie della parete, dovuta al riallineamento delle cariche nelle molecole della parete.

9.5 Quantizzazione della Carica Elettrica

La carica elettrica è quantizzata, il che significa che la carica totale di una particella è sempre un multiplo intero della carica elementare e , con valore $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$. Questo è uno dei risultati fondamentali della fisica quantistica, e ha importanti implicazioni nella comprensione della struttura della materia.

In un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche rimane costante nel tempo

9.6 Esercizi

Esercizio 42:

L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media $r = 0.53 \times 10^{-10} \text{m}$, che coincide con le dimensioni dell'atomo. Calcolare l'intensità della forza gravitazionale e della forza elettrica tra il protone e l'elettrone.

Soluzione 42:

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2} = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \cdot \frac{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(0.53 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \approx 3.61 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p q_e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(0.53 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \approx 8.24 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.3 \times 10^{39}$$

Esercizio 43:

Calcolare la forza repulsiva tra due protoni nel nucleo sapendo che la distanza è 10^{-15}m (1fm).

Soluzione 43:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(1 \times 10^{-15} \text{ m})^2} \approx 2.30 \times 10^{11} \text{ N}$$

La forza che tiene uniti i protoni uniti nel nucleo è una Forza Forte.

Esercizio 44:

Un uomo di massa $m = 70 \text{kg}$, isolato da terra, possiede una carica $-q$ che, per queste considerazioni, pensiamo concentrata in un punto a distanza $r = 1 \text{m}$ dal suolo. Sul suolo è posta una carica q , a distanza r da $-q$. Calcolare il valore di q per cui la forza elettrica tra le cariche è pari al peso dell'uomo.

Soluzione 44:

$$q = \sqrt{-4\pi\epsilon_0 mgr^2} = \sqrt{-4\pi\epsilon_0(70 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(1 \text{ m})^2} \approx 2.76 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Se i corpi non fossero elettricamente neutri, anche in presenza di cariche molto piccole, gli effetti della forza elettrica maschererebbero completamente la forza gravitazionale.

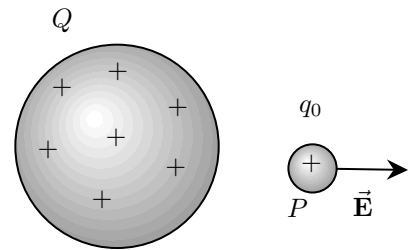
Capitolo 10

Il Campo Elettrico

Le forze elettriche non avvengono tra le particelle dirette ma mediante un campo elettrico. Una carica sorgente genera un campo elettrico che interagisce con una carica di prova

carica sorgente \rightarrow campo \leftarrow carica di prova

Il campo elettrico è un campo vettoriale a tre dimensioni che viene rappresentato tramite una tripla di valori $\vec{E} = (x, y, z)$. Il valore del campo è dato dal rapporto tra la forza elettrica e la carica di prova



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} \hat{r}_{12} \frac{1}{q_0}$$

che semplificando diventa

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}_{12}$$

dove la direzione e il verso di E sono quelli della forza F che agisce sulla carica di prova. Nel SI il campo elettrico ha come unità di misura il Newton su Coulomb (N/C).

Un campo elettrico è formato dalle linee di campo, le quali hanno le seguenti proprietà:

1. In ogni punto sono tangenti alla direzione del campo in quel punto.
2. Sono determinate usando una carica di prova positiva. Se la carica sorgente è positiva, le linee sono radiali e uscenti. Se la carica sorgente è negativa, le linee sono radiali ed entranti.
3. Il numero di linee che attraversano una superficie perpendicolare ad esse è proporzionale all'intensità del campo. Le linee diventano sempre più fitte man mano che ci si avvicina alla sorgente della carica.

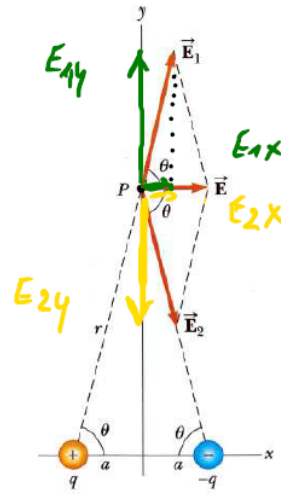
10.1 Il Dipolo Elettrico

Calcoliamo il campo elettrico nel punto P . Nel punto è presente la forza repulsiva della carica positiva e la forza attrattiva della carica negativa. Dato che hanno la stessa intensità le componenti orizzontali di queste forze sono uguali

$$E_{1x} = E_{2x}$$

La loro risultante è quindi il doppio di una delle due componenti

$$E = 2E_{1x} \cos \theta = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \theta$$



Considerando il punto ad altezza y e usando il teorema di Pitagora, si osserva che

$$\cos \theta = a/r = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Sostituendo otteniamo

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Nell'equazione $2aq$ è chiamato momento di dipolo elettrico (prodotto della carica per la distanza tra particelle). Si indica con l'unità di misura $C \cdot m$.

In conclusione, il campo elettrico generato sotto l'effetto di un dipolo elettrico, quando la distanza y del punto è molto maggiore rispetto alla distanza tra le particelle ($y \gg a$), è dato da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{y^3}$$

10.2 Distribuzioni Continue di Cariche

In realtà nella maggior parte dei casi le cariche possono formare delle distribuzioni continue di carica, ossia un'enorme quantità di cariche puntiformi ravvicinate si distribuiscono disposte su delle linee, superfici o volumi. Quando si parla di distribuzioni continue la carica di un oggetto viene espressa come una densità di carica, piuttosto che come una carica totale.

L'unità di misura della densità di carica è il coulomb al metro (C/m). Vi sono diversi tipi di densità di carica:

1. λ : densità di carica lineare (C/m)
2. σ : densità di carica superficiale (C/m^2)
3. ρ : densità di carica di volume (C/m^3)

Suddividiamo idealmente la distribuzione di carica in elementi infinitesimi di carica dq . Il campo elettrico risultante è dato dalla somma vettoriale dei campi $\Delta \vec{E}$, dovuti a tutti gli elementi infinitesimi dq della distribuzione di carica. Basta quindi fare l'integrale su tutti i contributi per trovare il campo elettrico in un punto P dovuto a una distribuzione continua di carica.

Distribuzione di carica di volume Prendiamo l'esempio della carica di volume: calcoliamo il contributo infinitesimo di carica

$$dq = \rho(x, y, z)d\tau$$

Calcoliamo la carica totale

$$q = \int_{\tau} \rho d\tau$$

Calcoliamo il contributo infinitesimo di campo

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Distribuzione di carica di superficie

$$dq = \sigma(x, y, z)d\Sigma$$

Distribuzione di carica lineare

$$dq = \lambda(x, y, z)dx$$

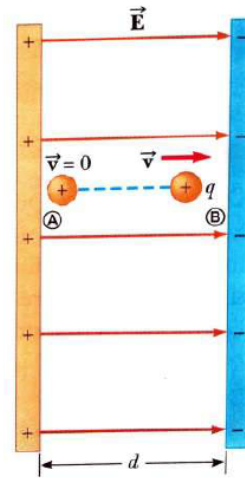
10.3 Moto di una Carica in Campo Elettrico Uniforme

Poiché il campo è costante, viene applicata costantemente una forza sulla carica di prova, che genera un'accelerazione (moto uniformemente accelerato). Sapendo che $\vec{F} = q\vec{E}$ si ha

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

La particella parte dall'origine con velocità iniziale nulla, quindi la velocità finale è data da

$$v_f = v_0 + at = \frac{qE}{m}t$$



Da cui ricaviamo il tempo di percorrenza della particella fino al raggiungimento della velocità finale

$$t = \frac{mv}{qE}$$

La legge oraria è data da

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

Sostituiamo il tempo trovato

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{m^2 v_f^2}{(qt)^2} = \frac{mv_f^2}{2qE}$$

Da cui si ricava la velocità finale al quadrato

$$v^2 = \frac{2qE}{m}x$$

Grazie ad essa calcoliamo l'energia cinetica della particella alla fine del percorso

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{2qE}{m}x = qEx$$

Il lavoro compiuto dal campo elettrico è dato da

$$W = \Delta E_k = qEx$$

dal teorema dell'energia cinetica. Si noti che il valore del campo equivale all'energia cinetica della particella.

10.4 Deflessione di un Fascio di Elettroni

Vediamo il caso in cui le piastre sono orizzontali, e l'elettrone viene lanciato perpendicolarmente nel campo elettrico uniforme con velocità iniziale v_i . Si ha una descrizione del moto analoga al moto dei proiettili.

Sull'asse x la particella non subisce forze e quindi si muove di una velocità orizzontale costante

$$x = v_i t$$

da cui si ricava il tempo

$$t = \frac{x}{v_i}$$

Sull'asse y il campo elettrico provoca una forza costante per tutta la traiettoria. Si ha quindi un moto uniformemente accelerato. L'accelerazione è pari a

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$$

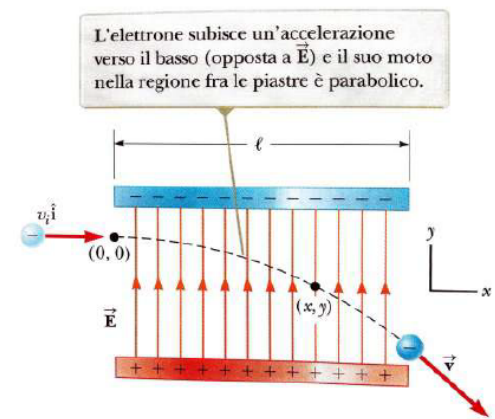
La legge oraria quindi è

$$y = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{eE}{2m}t^2$$

Eliminando t dalle equazioni si ottiene

$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_i^2}$$

Questa è l'equazione di una parabola. L'elettrone si muove di moto parabolico.



10.5 Energia Potenziale Elettrica

Ipotizziamo di avere una particella di carica q_0 che si muove dal punto A al punto B all'interno di un campo elettrico. Calcoliamo l'infinitesimo di lavoro

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \cdot \hat{r}$$

Notiamo (analogamente al campo gravitazionale) che $d\vec{s} \cdot \hat{r}$ è la proiezione di $d\vec{s}$ sul versore \hat{r} . Questo è l'infinitesimo di spostamento lungo il vettore posizione che va dalla sorgente alla carica di prova ($dr = ds \cos \theta$). Dunque avremo

$$dW = F dr$$

Integriamo

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B F dr \\ &= \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

Il lavoro è indipendente dalla traiettoria. Si può esprimere come la differenza di valore che una funzione della sola posizione assume nel punto finale e iniziale dello spostamento. Cioè il campo elettrostatico è conservativo. La funzione è l'energia potenziale di una carica elettrica q_0 in un campo elettrico generato da un'altra carica elettrica q :

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'energia potenziale di una carica di prova in un punto è il lavoro che deve compiere il campo elettrico per spostare la carica dall'infinito al punto.

10.6 Differenza di Potenziale

Immaginiamo di avere due cariche elettriche: una carica sorgente ferma e una carica di prova usata per sondare il campo elettrico. Durante uno spostamento della carica di prova la carica sorgente esercita lavoro su di essa tramite la forza elettrica. Essendo le forze campo elettrico conservative, vale la relazione

$$\Delta U = U_B - U_A = -W$$

La variazione ΔU dipende da entrambe le cariche. Si vuole definire una variazione indipendente dalla carica di prova. Per farlo si divide la differenza di energia potenziale per la carica di prova, ottenendo una nuova grandezza: la differenza di potenziale

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

10.7 Potenziale Elettrico

La forza tra due cariche decresce con la distanza. Ciò implica che per cariche molto lontane fra loro la forza è trascurabile, cioè non vi è interazione. Al limite, a distanza infinita, è lecito assumere che:

- $E(\infty) = 0$

- $U(\infty) = 0$
- $V(\infty) = 0$

Confrontiamo il potenziale del punto a distanza infinita con il potenziale del punto a distanza r :

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) = 0 - V(r) \implies \Delta V = -V(r)$$

Sappiamo che, dato che le forze in un campo elettrico sono conservative, vale la relazione $\Delta U = -W$. Dunque è possibile scrivere

$$\Delta V = -V(r) = \frac{-W}{q}$$

Ricordando che $\vec{E} = q\vec{F}$, la definizione di lavoro elettrico in termini del campo è

$$L = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Dunque

$$-V(r) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

che diventa

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Moltiplicando e dividendo per la carica di prova q_0 si ottiene anche

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0}$$

Il *potenziale elettrico* in un punto è il valore scalare dato dal rapporto tra l'energia potenziale nel punto e la carica di prova. L'unità di misura del potenziale elettrico nel SI è il *joule su coulomb*, che prende il nome di *volt* (V).

Potenziale elettrico ed energia potenziale sono grandezze ben diverse e non vanno confuse:

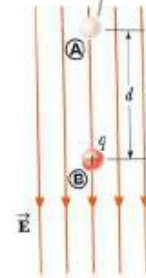
- il *potenziale elettrico* è una proprietà del campo stesso, esistente sia che un oggetto carico si trovi o non si trovi in esso, ed è misurato in joule su coulomb, o volt.
- l'*energia potenziale elettrica* è l'energia di un oggetto carico sottoposto a un campo elettrico esterno. Più esattamente, è l'energia del sistema costituito dall'oggetto e dal campo elettrico che deriva dalla carica sorgente. Essendo un'energia è misurata in joule.

10.8 Differenza di Potenziale in Campi Uniformi

Supponiamo di avere una carica positiva che si sposta da un punto A a un punto B in un campo elettrico uniforme.

Diamo la seguente descrizione:

Quando una carica positiva si sposta dal punto A al punto B , l'energia potenziale elettrica del sistema carica-campo diminuisce.



- - Percorso $A-B$:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Poichè il campo è parallelo allo spostamento ($\vec{E} \parallel d\vec{s}$) possiamo rimuovere il prodotto scalare

$$\Delta V = - \int_A^B E ds = -E \Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed$$

Ricordando che $\Delta V = \Delta U/q$, la differenza di energia potenziale è allora data da

$$\Delta U = q\Delta V = -qEd$$

La differenza di energia potenziale è negativa perché l'energia potenziale del sistema carica-campo diminuisce durante lo spostamento.

- Percorso $B - A$: nel caso la carica positiva dovesse muoversi da B ad A si avrebbe che

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \cos \pi$$

in quanto il campo e lo spostamento hanno verso opposto. Si ottiene cioè

$$\Delta V = -E \cos \pi \int_B^A ds = Ed$$

E quindi

$$\Delta U = q\Delta V = qEd$$

In questo caso la differenza è positiva, perché l'energia potenziale aumenta andando da B ad A .

Riassumendo:

- Carica positiva da A a B :

$$-\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \cos 0 d = -Ed$$

$$-\Delta U = -qEd (U \text{ diminuisce})$$

$$-W = -\Delta U = qEd (> 0)$$

- Carica positiva da B ad A :

$$-\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \cos 180 d = Ed$$

$$-\Delta U = qEd (U \text{ aumenta})$$

$$-W = -\Delta U = -qEd (< 0)$$

- Carica negativa da A a B :

$$-\Delta V = -Ed$$

$$-\Delta U = q\Delta V = qEd (U \text{ aumenta})$$

$$-W = -\Delta U = -qEd (< 0)$$

- Carica positiva da B a A :

$$-\Delta V = -E \cos 180 d = Ed$$

$$-\Delta U = q\Delta V = -qEd (U \text{ diminuisce})$$

$$-W = -\Delta U = qEd (> 0)$$

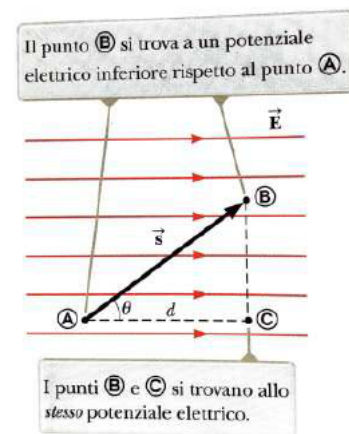
10.8.1 Punti a Stesso Potenziale

La differenza di potenziale è data da

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_B^A d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

Osserviamo che $ds \cos \theta$ è la proiezione di \vec{s} su d , dunque

$$\Delta V = -Es \cos \theta = V_C - V_A = V_B - V_A = -Ed$$



Il punto B si trova a un potenziale elettrico inferiore rispetto al punto A . Invece i punti B e C si trovano allo stesso potenziale elettrico. Questo ci dice che la differenza di potenziale tra due punti non è determinata dalla traiettoria che si segue.

10.8.2 Potenziale di un Sistema di Cariche

Supponiamo di avere 3 cariche nello spazio. L'energia potenziale di un sistema di cariche si ottiene sommando algebricamente il valore dell'energia potenziale calcolato per ogni coppia di cariche:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

In generale

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

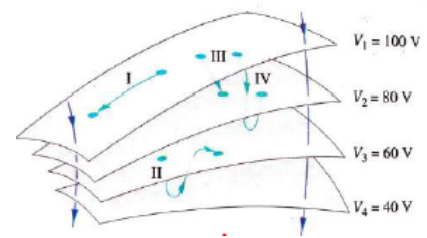
Similmente per il potenziale

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

10.9 Superfici Equipotenziali

Una superficie equipotenziale è il luogo dei punti nello spazio aventi il medesimo potenziale. Per muovere una carica lungo una superficie equipotenziale, non è necessario compiere lavoro. Infatti se la differenza di potenziale è nulla, allora anche il lavoro deve esserlo, dato che

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W}{q}$$



Se la differenza di potenziale è nulla significa che

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Non essendo né il campo né lo spostamento uguali a zero, ciò è possibile solo se la superficie è perpendicolare allo spostamento

$$\vec{E} \perp d\vec{s}$$

Un esempio di superficie equipotenziale è una sfera posta attorno a una carica che genera un campo elettrico. In ogni punto la superficie della sfera è perpendicolare alle linee di campo.

In figura è mostrata una famiglia di superfici equipotenziali, con quattro percorsi possibili: (percorso I e II) il lavoro svolto è nullo, perché entrambi i percorsi hanno inizio e fine sulla stessa superficie equipotenziale $W_1 = W_2 = 0$ (percorso III e IV) il lavoro non è nullo, ma è uguale per entrambi i percorsi per i potenziali iniziali e finali sono gli stessi $W_3 = W_4 \neq 0$

10.10 Ricavare il Campo Elettrico dal Potenziale

Prendiamo una variazione infinitesima di potenziale

$$dV = V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z)$$

Questa sarà uguale ad un contributo infinitesimo di lavoro

$$dV = dW = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Dunque, il campo elettrico è uguale al gradiente del potenziale cambiato di segno

$$E = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

Le componenti x, y e z del campo sono

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

10.11 Esercizi

Esercizio 45:

Due sferette cariche identiche, ciascuna di massa $m = 3.00 \times 10^{-2} \text{ kg}$, sono sospese in equilibrio in modo simmetrico. La lunghezza di ciascun filo è 0.150 m e l'angolo è uguale a 5.00° . Si calcoli la carica su ciascuna sfera.

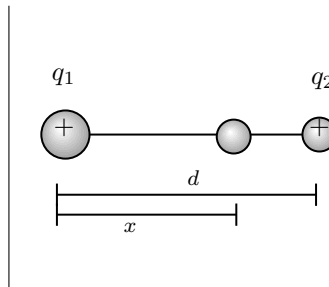
Soluzione 45:

$$\begin{aligned} x: \quad T \sin \theta &= F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2} \\ y: \quad T \cos \theta &= mg \\ F_e &= mg \tan \theta \\ q &= \sqrt{mg \tan \theta \cdot 4\pi\epsilon_0 (2r)^2} \approx 4.42 \times 10^{-8}, \text{ C} \end{aligned}$$

dove m è la massa delle sferette, g è l'accelerazione di gravità, T è la tensione del filo, θ è l'angolo formato dal filo e la verticale, q è la carica su ciascuna sfera e r è la lunghezza del filo.

Esercizio 46:

Due piccole perline, di carica positiva $q_1 = 3q$ e $q_2 = q$, sono fissate alle estremità di una sbarretta isolante orizzontale di lunghezza $d = 1.50 \text{ m}$. La perline con carica q_1 è nell'origine. Come mostrato in figura, una terza pallina carica è libera di muoversi sulla sbarretta. (a) In quale posizione la terza pallina si trova in equilibrio? (b) Si spieghi se l'equilibrio può essere stabile.



Soluzione 46:

(a) Per trovare la posizione di equilibrio della terza pallina, dobbiamo calcolare la forza elettrica totale sulle tre palline e poi imporre che la forza netta sulla terza pallina sia zero. Scegliamo l'asse x orizzontale che passa per q_2 come asse di riferimento. La forza elettrica su q_3 dovuta a q_1 è diretta verso sinistra, mentre la forza elettrica su q_3 dovuta a q_2 è diretta verso destra. Quindi la forza elettrica netta su q_3 è data da:

$$F_{net} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3qq_3}{d^2} - \frac{qq_3}{(d-x)^2} \right)$$

Imponendo $F_{net} = 0$ e risolvendo per x , otteniamo un'equazione di secondo grado in x :

$$\frac{qq_3}{(d-x)^2} = \frac{3qq_3}{d^2}$$

che può essere semplificata come segue:

$$2x^2 - 6dx + 3d^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, otteniamo le due soluzioni:

$$x_1 = \frac{3d - \sqrt{3}d}{4} = 0.95, \text{ m}$$

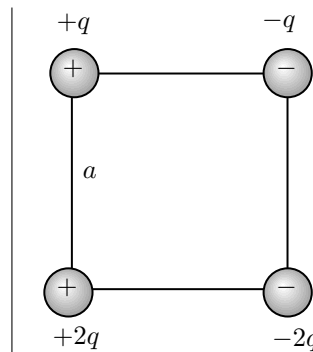
$$x_2 = \frac{3d + \sqrt{3}d}{4} = 2.55, \text{ m}$$

Poiché la sbarretta ha lunghezza $d = 1.50$ m, solo la soluzione $x_1 = 0.95$ m è accettabile.

(b) L'equilibrio non può essere stabile perché se la terza pallina si sposta di una quantità infinitesima a destra o a sinistra dalla posizione di equilibrio, la forza elettrica netta su di essa non sarà più zero e quindi la pallina continuerà a muoversi nella stessa direzione. In altre parole, la posizione di equilibrio è instabile e la terza pallina tenderà a muoversi lontano dalla posizione di equilibrio.

Esercizio 47:

In figura si trovino le componenti orizzontali e verticali della forza elettrostatica risultante, agente sulla carica in basso a sinistra del quadrato. Si assuma $q = 1.10 \times 10^C$ e $a = 5.0\text{cm}$.



Soluzione 47:

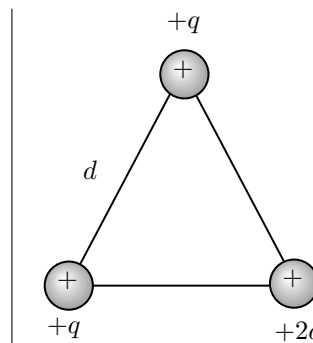
Per calcolare le componenti orizzontali e verticali della forza elettrostatica risultante sulla carica in basso a sinistra, dobbiamo calcolare la forza elettrostatica tra la carica in basso a sinistra e ogni altra carica e quindi sommarle vettorialmente. Scegliamo di numerare le cariche partendo da in alto a sinistra in senso orario.

$$F_x = F_2 \cos \theta + F_3 = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta + \frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \right)$$

$$F_y = F_2 \sin \theta - F_1 = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sin \theta - \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right)$$

Esercizio 48:

Tre cariche positive si trovano ai vertici di un triangolo equilatero. Si trovi un'espressione per il potenziale elettrico nel centro del triangolo.



Soluzione 48:

$$r = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^3 V_i = 4 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3}}{d}$$

$$r \cos 30^\circ = \frac{d}{2}$$

Esercizio 49:

Quattro cariche puntiformi identiche ($q = +10.0\mu\text{C}$) sono poste ai vertici di un rettangolo. Le dimensioni del rettangolo sono $b = 60\text{cm}$ e $h = 15\text{cm}$. Si calcoli la variazione dell'energia del potenziale elettrico quando la carica nell'angolo in basso a sinistra viene trasportata da distanza infinita fino ad occupare la sua posizione. Si assuma che le altre particelle cariche rimangano fisse nelle loro posizioni.

Soluzione 49:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{h} + \frac{q}{b} + \frac{q}{\sqrt{b^2 + h^2}} \right)$$

Esercizio 50:

Due cariche puntiformi, ciascuna di valore $+2.00\mu\text{C}$, sono disposte sull'asse x . Una si trova a $x = 1.00\text{m}$ e l'altra a $x = -1.00\text{m}$. (a) Si determini il potenziale elettrico nel punto dell'asse y di ordinata 0.5m . (b) Si calcoli la variazione di energia potenziale del sistema se una terza carica di $-3.00\mu\text{C}$ viene portata dall'infinito sull'asse y a $y = 0.5\text{m}$.

Soluzione 50:**(a)**

Il potenziale elettrico nel punto dell'asse y di ordinata 0.5 m è dato da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

dove $q_1 = q_2 = 2.00\mu\text{C}$, $r_1 = \sqrt{(1.00\text{ m})^2 + (0.5\text{ m})^2} = \sqrt{1.25}\text{ m}$ e $r_2 = \sqrt{(-1.00\text{ m})^2 + (0.5\text{ m})^2} = \sqrt{1.25}\text{ m}$. Quindi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2.00\mu\text{C}}{\sqrt{1.25}\text{ m}} + \frac{2.00\mu\text{C}}{\sqrt{1.25}\text{ m}} \right) \approx 32.1 \times 10^{-3}\text{ V}$$

(b)

La variazione di energia potenziale del sistema è data da:

$$\Delta U = q(V_f - V_i)$$

dove $q = -3.00\mu\text{C}$, $V_f \approx 31.1 \times 10^{-3}\text{ V}$ è il potenziale nel punto dell'asse y di ordinata 0.5 m e V_i è il potenziale all'infinito, che si può considerare come zero. Quindi:

$$\Delta U = (-3.00\mu\text{C}) \times (31.1 \times 10^{-3}\text{ V} - 0) \approx -96.4 \times 10^{-3}\text{ J}$$

Capitolo 11

La Legge di Gauss

11.1 Il Flusso del Campo Elettrico

Il *flusso del campo elettrico* è il prodotto scalare tra il vettore campo elettrico e il vettore superficie. In generale possiamo parlare di flusso in quattro tipi di superficie:

- Per una superficie *ortogonale alle linee di campo* il flusso vale

$$\phi_E = EA$$

dove A è l'area della superficie.

- Per una superficie *non perpendicolare al campo* il flusso, calcoliamo il flusso sulla proiezione ortogonale della superficie. Questo perché il numero di linee che attraversano l'area perpendicolare è uguale al numero di linee che attraversano la superficie

$$\phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta$$

- In una superficie *non regolare aperta* consideriamo infinitesimi di flussi, dati dal prodotto scalare tra il campo e la superficie orientata $d\vec{A}$

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot \hat{n} dA = E \cos \theta dA$$

Facendo l'integrale esteso alla superficie si ottiene il flusso totale

$$\phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\Sigma} E \cos \theta dA$$

- In una *superficie chiusa*, il flusso elettrico totale è dato dall'integrale di linea

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

dove il cerchietto sta a indicare che l'integrale viene calcolato lungo la superficie/percorso chiuso. Per ogni elemento di area il flusso può assumere un segno diverso in base a 3 casi:

1. *Linee di campo entranti*: il flusso elettrico è negativo, perché l'angolo che si forma è acuto.
2. *Linee di campo tangenti*: il flusso è nullo, in quanto il vettore di campo e il vettore area sono perpendicolari.
3. *Linee di campo uscenti*: il flusso elettrico è positivo, perché l'angolo che si forma è ottuso.

Il flusso totale attraverso la superficie chiusa è proporzionale alla differenza tra il numero di linee uscenti dalla superficie ed il numero di linee entranti nella superficie. Se le linee entranti sono pari a quelle uscenti, il flusso totale è nullo.

11.2 La Legge di Gauss

La *legge di Gauss* mette in relazione il flusso di un campo elettrico attraverso una *superficie Gaussiana* e la carica racchiusa al suo interno. Una superficie gaussiana è una superficie chiusa nello spazio tridimensionale attraverso la quale viene calcolato il flusso di un campo vettoriale (in questo caso il campo elettrico).

Prendiamo il caso di una carica posta al centro di una superficie gaussiana sferica. Il campo è normale alla superficie e in ogni elemento infinitesimo di area le linee di campo che lo attraversano sono parallele e dello stesso verso del vettore area. Pertanto il prodotto scalare è semplicemente il prodotto dei moduli.

Il flusso della superficie è dato da

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA \\ &= \oint_{\Sigma} E dA \\ &= E \oint_{\Sigma} dA \\ &= E 4\pi r^2\end{aligned}$$

Dalla definizione di campo si ottiene la legge di Gauss

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

In conclusione

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A prescindere dalla forma, le linee uscenti sono sempre le stesse. Il flusso è lo stesso attraverso tutte le superfici. Se la carica è esterna alla superficie il flusso totale è nullo. Infatti, si nota subito che il numero di linee entranti è uguale al numero di linee uscenti. Ai fini del calcolo del flusso, bisogna considerare solo la carica all'interno della superficie.

11.2.1 Flusso per un Sistema di Cariche Puntiformi

Per la superficie S il flusso è dato da

$$\phi_E(S) = -\frac{q_1}{\epsilon_0}$$

Per la superficie S' il flusso è dato da

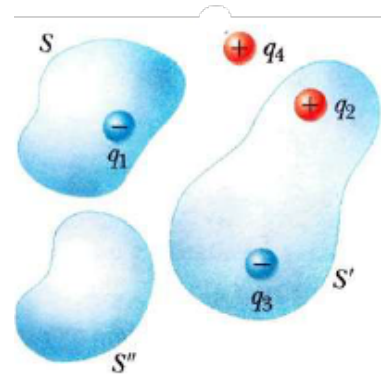
$$\phi_E(S') = \frac{q_2 - q_3}{\epsilon_0}$$

Infine, per la superficie S'' il flusso è dato da

$$\phi_E(S'') = 0$$

Notare che:

- Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie comunque esse siano distribuite.
- La superficie S'' ha flusso nullo in quanto non ci sono cariche al suo interno.
- Le cariche esterne alla superficie forniscono un contributo nullo al flusso.



11.2.2 Flusso di un Dipolo Elettrico

Vediamo il flusso elettrico in un dipolo elettrico. La superficie S_1 ha come unica carica interna la carica positiva del dipolo e il suo flusso è dato da

$$\phi_E(S_1) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La superficie S_2 ha invece carica negativa

$$\phi_E(S_2) = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

La superficie S_3 ha un flusso nullo

$$\phi_E(S_3) = 0$$

Infine il flusso è nullo anche per la superficie S_4 , perchè la sommatoria delle cariche interne è pari a zero

$$\phi_E(S_4) = -\sum_{i=1}^2 q_{int} = 0$$

11.3 Applicazioni della Legge di Gauss al Calcolo dei Campi Elettrici

La legge di Gauss diventa un potente strumento per il calcolo del campo elettrico nel caso di distribuzioni di carica che presentano un elevato grado di simmetria. Si devono trovare superfici chiuse per cui le linee di campo siano perpendicolari o paralleli alla superficie stessa, in modo che il contributo del prodotto scalare sia pari a EA o nullo. Inoltre, il campo deve essere costante nelle zone in cui il campo è parallelo alla superficie.

11.3.1 Superficie Sferica

In un qualsiasi punto esterno il campo è radiale. Questo perché è dovuto alla somma di contributi a due a due simmetrici, uguali in modulo, con componente tangenziale nulla. Pertanto la risultante del campo è sempre normale alla superficie del guscio.

Calcoliamo il flusso elettrico

$$\phi_E = \oint_{S_r} \vec{E} \cdot \hat{n} ds = E \oint_{S_r} dA = E4\pi r^2$$

Ricaviamo il campo usando la legge di Gauss

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = E4\pi r^2$$

Il campo elettrico all'esterno del guscio sferico è quindi dato da

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Il campo all'esterno di una superficie sferica uniformemente carica è uguale a quello di una carica puntiforme di valore uguale concentrata nel suo centro. Non ha senso calcolare il campo all'interno del guscio, perché i vettori si cancellano.

11.3.2 Sfera Omogenea Carica

Prendiamo una sfera uniformemente carica. Vogliamo calcolare il campo elettrico sia all'esterno che all'interno della sfera. Per il campo all'esterno della sfera ($r < R$) valgono le stesse considerazioni fatte per il guscio sferico vuoto. Disegniamo una superficie gaussiana concentrica alla sfera, calcoliamo il flusso integrando su questa superficie e infine applichiamo la legge di Gauss, trovano la stessa formula del campo, uguale al campo di una carica puntiforme

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ricaviamo il campo interno alla sfera ($r > R$). Disegniamo una superficie gaussiana sferica più piccola della sfera. Sapendo che la densità volumica di carica (costante) è $\rho = Q/\text{volume}$, per trovare la carica interna alla sfera basta fare

$$q_{\text{int}} = \rho \text{ vol} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Tramite questa calcoliamo il flusso elettrico

$$\phi_E = \oint_P \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E 4\pi r^2$$

Applichiamo la legge di Gauss

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \implies E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

Infine ricaviamo il campo

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Notare che il campo all'esterno della sfera (analogamente al guscio sferico), è equivalente al campo generato dalla stessa carica come se fosse concentrata nel centro della sfera.

Invece all'interno della sfera carica, il campo cresce linearmente dal valore zero al centro della sfera sino al valore del campo di una carica puntiforme alla superficie della sfera ($r = R$). Dopodiché inizia a decrescere man mano che ci sia allontana dalla sfera.

11.3.3 Carica Lineare

Consideriamo il campo elettrico generato da una carica lineare uniforme infinitamente lunga. L'equazione trovata approssima anche il campo creato da una carica lineare di lunghezza finita, fintanto che si considerano punti non troppo vicini alle estremità. Prendiamo un punto ad una certa distanza dal filo.

Inoltre, prendiamo due porzioni infinitesime di filo, alla stessa distanza orizzontale dal punto. Facendo la somma vettoriale otteniamo il campo risultante $d\vec{E}$ normale al filo. Allo stesso modo, si può fare la somma di tutti gli infinitesimi e ottenere il campo risultante, che è come se provenisse tutto da un carica puntiforme centrale.

Disegniamo una superficie gaussiana cilindrica attorno al filo. Denotando con λ la densità lineare di carica sul filo, calcoliamo il flusso

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \oint_{\Sigma} dA = E 2\pi r h$$

Applichiamo la legge di Gauss

$$\phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Da cui possiamo ricavare il campo

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Come si nota non vi è dipendenza dalla lunghezza del filo.

11.3.4 Piano Carico

Consideriamo una superficie piano uniformemente carica ed infinitamente estesa. Funziona anche per piano non infiniti, fintanto che si rimane abbastanza lontani dai bordi.

Disegniamo una superficie gaussiana cilindrica che interseca il piano perpendicolarmente, circondando una certa area di piano. Le linee di campo sono parallele alle basi del cilindro, mentre la superficie laterale del cilindro non è influente per il calcolo del flusso, in quanto è perpendicolare al campo.

Calcoliamo il flusso elettrico

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 2E \oint_{\Sigma} dA = 2EA$$

Denotiamo con $\sigma = q/\Sigma$ la densità volumica di carica. Applichiamo la legge di Gauss

$$\phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Calcoliamo il campo

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

11.4 Conduttori in Equilibrio Elettrostatico

Si definisce equilibrio elettrostatico l'assenza di moto ordinato delle cariche elettriche. Con la parola "ordinato" si intende il fatto che comunque gli elettroni si muovono in modo casuale a livello locale. La legge di Gauss consente di dimostrare che i conduttori in equilibrio elettrostatico godono delle proprietà che verranno descritte sotto.

11.4.1 Prima Proprietà

All'interno del conduttore non vi è campo elettrico ($\vec{E} = 0$).

In caso contrario gli elettroni di conduzione, liberi di muoversi all'interno del materiale, risentirebbero di una forza $\vec{F} = q\vec{E}$ venendo accelerati, e contraddicendo la condizione di equilibrio elettrostatico.

Analizziamo il comportamento di una lastra conduttrice immersa in un campo esterno. Prima dell'applicazione del campo, gli elettroni di conduzione sono uniformemente distribuiti all'interno del conduttore. L'applicazione del campo produce uno spostamento di elettroni che si accumulano sulla parte sinistra, producendo un eccesso di cariche positive sul lato destro. Gli elettroni si muovono fino a quando l'intensità del campo così prodotto eguaglia il campo elettrico esterno. Alla fine il campo totale interno al conduttore è nullo.

11.4.2 Seconda Proprietà

Un eccesso di carica in un conduttore può stare solo in superficie.

Dato che il campo è nullo all'interno del conduttore, è nullo anche il flusso del campo attraverso qualsiasi superficie chiusa all'interno del conduttore. Secondo la legge di Gauss, dunque, non vi è carica interna $q_{int} = 0$.

11.4.3 Terza Proprietà

Il campo elettrico esterno al conduttore è perpendicolare alla superficie e ha intensità pari a $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Dimostriamo la seconda affermazione.

Prendiamo una superficie gaussiana cilindrica perpendicolare al conduttore. La parte all'interno del conduttore è ininfluente nel calcolo del flusso, poichè $E = 0$, così come la superficie laterale della superficie gaussiana. Prendiamo in considerazione solo la base della superficie gaussiana di area Σ , e calcoliamo il flusso attraverso quell'area:

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = EA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Calcoliamo l'intensità del campo

$$E = \frac{q_{int}}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

poichè σ/A è la densità di carica volumica σ .

Dimostriamo la prima affermazione.

Se il campo avesse una componente tangenziale parallela alla superficie, le cariche si muoverebbero lungo la superficie e il conduttore non sarebbe in equilibrio. Supponiamo che il campo abbia due componenti: una normale E_n e una tangenziale E_t , e prendiamo un cammino chiuso $ABCD$.

Poichè il campo elettrico è un insieme di forze conservative e si segue un percorso chiuso

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Integriamo lungo il cammino

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t \Delta l - E_n \Delta x' + E_n \Delta x$$

Il segmento $\Delta l'$ non contribuisce perchè all'interno del conduttore $E = 0$.

Se $\Delta x, \Delta x' \rightarrow 0$ allora i due termini $E_n \Delta x$ e $E_n \Delta x'$ e si eliminano. Pertanto si ottiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t \Delta l = 0 \implies E_t = 0$$

Cioè la componente tangenziale del campo è nulla, quindi può essere solo perpendicolare alla superficie.

11.4.4 Quarta Proprietà

La superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico è equipotenziale.

Il campo è perpendicolare alla superficie, e quindi lungo qualsiasi percorso da A a B sulla superficie. Perciò si ha che:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ovvero $V_B = V_A$.

Inoltre, dato che il campo è nullo all'interno del conduttore, il potenziale all'interno è costante e uguale al suo valore sulla superficie. Infatti

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il campo (in 1 dimensione) è allora dato da

$$E = -\frac{dV}{dx} = 0$$

ossia V è costante.

11.4.5 Quinta Proprietà

In un conduttore di forma irregolare la densità di carica superficiale non è uniforme

E' maggiore dove il raggio di curvatura è minore, mentre è minore dove il raggio di curvatura è maggiore. In altri termini, il campo elettrico raggiunge i valori massimi in prossimità delle punte.

Dimostriamo il perchè ciò avvenga usando l'esempio di due sfere uniformemente cariche collegate da un filo conduttore. Il filo fa sì che le due sfere siano allo stesso potenziale.

Si ha quindi che

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \implies \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

I campi generati dalle due sfere sono dati da:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \quad e \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2}$$

Calcolo E_1/E_2 :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Se poniamo $r_2 \rightarrow 0$ notiamo che E_2 deve tendere ad ∞ per soddisfare l'equazione, dimostrando che il campo è maggiore dove il raggio di curvatura è minore.

11.4.6 Carica all'Interno di un Conduttore Cavo Isolato

Dato che il conduttore è in equilibrio elettrostatico, il campo all'interno del guscio sferico deve essere nullo e di conseguenza anche il flusso del campo è nullo. Dalla legge di Gauss, la carica all'interno della superficie gaussiana (linea rossa) deve essere nulla anch'essa. Ciò vuol dire che sulla superficie interna della cavità deve apparire una carica positiva che annulla quella negativa. Dato che il conduttore è inizialmente neutro, lo spostamento delle cariche positive sulla superficie interna provoca la comparsa di

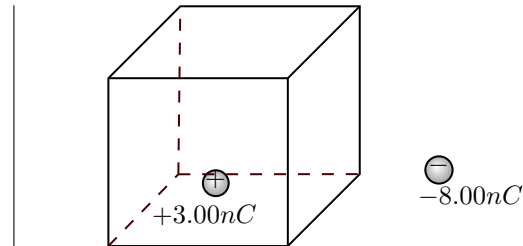
carica negativa sulla superficie esterna.

Il campo all'interno dipende dal valore di q e dalla sua posizione, ma il campo all'esterno dipende solo dalla forma del conduttore. In altre parole, l'interno e l'esterno del conduttore non sono comunicanti. Questo è il funzionamento delle gabbie di Faraday: dato che il campo interno deve essere nullo, il conduttore cavo fa da schermo elettrostatico dalle cariche esterne.

11.5 Esercizi

Esercizio 51:

(a) Si trovi il flusso totale attraverso la superficie cubica mostrata in figura. (b) Si può usare la legge di Gauss per determinare il campo elettrico sulla superficie del cubo? Si spieghi.



Soluzione 51:

(a)

La forma della superficie non fa differenza, la carica esterna non contribuisce al flusso.

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 339 Nm^2/C$$

(b)

No perché la simmetria dovrebbe essere sferica.

Esercizio 52:

Una distribuzione lineare infinita di carica con densità lineare uniforme λ si trova ad una distanza d dal punto O . Si determini il flusso totale del campo elettrico generato dalla distribuzione lineare di carica attraverso la superficie di una sfera di raggio R con centro in O . Si consideri sia (a) il caso con $R < d$ che (b) il caso con $R > d$.

Soluzione 52:

(a)

$$R < d \quad \Phi = 0$$

(b)

$$\Phi_E = \frac{2\sqrt{R^2 - d^2}\lambda}{\varepsilon_0}$$

Esercizio 53:

Due sfere conduttrici identiche, ciascuna di raggio $0.5cm$ sono connesse tramite un sottile filo conduttore di lunghezza $2.00m$. Si determini la tensione del filo se una carica di $60.0\mu C$ viene deposta su una delle sfere. Si ipotizzi che la distribuzione di carica su ciascuna sfera si uniforme.

Soluzione 53:

$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(L + 2R)^2}$$

Esercizio 54:

Un piatto metallico di forma quadrata ha il lato lungo 8.0cm e lo spessore trascurabile, con una carica totale di $6.0 \cdot 10^{-6}\text{C}$. (a) Si determini l'Intensità di E del campo elettrico al centro appena al di fuori del piatto (ad esempio, una distanza di 0.50mm) supponendo che la carica sia uniformemente distribuita sulle due facce del piatto. (b) Si determini E a una distanza di 30m (grande, rispetto alla dimensione del piatto), supponendo che il piatto sia una carica puntiforme.

Soluzione 54:

a)

Vale l'approssimazione del piano infinito di carica.

$$\sigma = \frac{q}{A} E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

b) Il piano si comporta come una carica puntiforme.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{d^2}$$

Esercizio 55:

Una piccola sfera avente massa m di 1.0mg e carica distribuita uniformemente $q = 2.0 \cdot 10^{-8}\text{C}$, è appesa a un filo isolante e forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con un grande piatto isolante carico uniformemente. Considerando il peso della sfera e assumendo che il piatto si estenda in tutte le direzioni, si determini la densità di carica superficiale σ sul piatto.

Soluzione 55:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ F_e &= qE = F_g \tan \theta = mg \tan \theta \\ mg \tan \theta &= q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ \sigma &= \frac{2\varepsilon_0 mg \tan \theta}{q} \end{aligned}$$

Esercizio 56:

Un lungo filo rettilineo è circondato da un cilindro metallico cavo il cui asse coincide con quello del filo. Il filo ha densità di carica lineare λ e il cilindro cavo ha densità di carica lineare 2λ . Da queste informazioni e usando la legge di Gauss, si ricavano (a) la densità di carica lineare sulla superficie interna del cilindro e (b) su quella esterna del cilindro e (c) il campo elettrico fuori dal cilindro ad una distanza r dall'asse.

Soluzione 56:a) $-\lambda$ b) $2\lambda + \lambda = 3\lambda$ c) $E = \frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ **Esercizio 57:**

Consideriamo due lunghi cilindri metallici concentrici di raggio a e b con $a < b$. Sui due cilindri è presente una carica per unità di lunghezza uguale e opposta λ . Utilizzando la legge di Gauss si dimostri che (a) $E = 0$ per $r < a$ e (b) nella zona compresa tra i cilindri, per $a < r < b$,

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Soluzione 57:

a) $\vec{E} = 0$ interno conduttore in equilibrio

b) $\phi_e = E 2\pi r l = 2 \frac{q}{\epsilon_0}$

Esercizio 58:

Una sfera solida isolante di raggio $a = 5.00$ cm ha una carica positiva $Q = 3.00\mu\text{C}$, uniformemente distribuita all'interno del volume. Un guscio sferico conduttore di raggio interno $b = 10.0$ cm e raggio esterno $c = 15.0\text{cm}$ è concentrico alla sfera ed ha una carica $q = -1.00\mu\text{C}$. Si tracci un grafico per il modulo del campo elettrico funzione di r , con $0 < r < 25.0\text{m}$.

Soluzione 58:

1)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

2) Nello spazio vuoto tra la sfera e il guscio il campo è equivalente alla carica di un punto $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$

3) All'interno del guscio, nel suo spessore $E = 0$

4) All'esterno dl guscio $q_{ext} = Q - q$

Capitolo 12

Capacità e Condensatori

12.1 Capacità

La *capacità* rappresenta l'attitudine di un conduttore ad accumulare carica elettrica. Più precisamente, è una misura di quanta carica debba possedere un condensatore per avere una certa differenza di potenziale. E' definita come

$$C = \frac{q}{V} \quad \text{o} \quad C = \frac{q}{\Delta V}$$

L'unità di misura della capacità nel SI è il *coulomb su volt*. A questa unità è stato dato il nome di *Farad* (F). Un Farad è una quantità molto elevata:

- Per una sfera di 10 cm di raggio la capacità vale

$$C = 11 \cdot 10^{-12} F = 11 pF$$

- Per una sfera del raggio della terra ($r = 6.7 \cdot 10^6$) vale $C \approx 0.74 mF$
- Per avere 1 Farad bisognerebbe avere una sfera con un raggio di $9 \cdot 10^9$ m (9 miliardi).

Il rapporto q/V non cambia al variare della carica sul conduttore. In una sfera conduttrice la capacità vale

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} = 4\pi\epsilon_0 r$$

Come si può notare essa dipende solo dal raggio. In generale, la capacità dipende solo dalla forma e dalla dimensione del conduttore e dal mezzo che lo circonda.

Il componente in grado di immagazzinare energia potenziale elettrostatica è detto *condensatore*. Generalmente, è costituito da due conduttori isolati di forma arbitraria, chiamati armature. Sono un componente fondamentale nei circuiti elettrici (es: filtri).

12.2 Condensatore Piano

Consistono in due piatti conduttori paralleli separati da una certa distanza. Sulle armature ci sono cariche uguali e opposte, portando la carica totale ad essere nulla. Tra le due armature si sviluppa una differenza di potenziale ΔV (indicata di solito solo con V). Tuttavia, tra le due piastre è presente solo il vuoto o un materiale isolante, dunque non c'è movimento di cariche da una piastra all'altra.

Prendiamo un circuito formato da un generatore di tensione continua, un interruttore e un condensatore. Alla chiusura del circuito la batteria crea un campo elettrico nei fili di connessione. Elettroni

vengono spostati dalla piastra h del condensatore al polo positivo della batteria. Un ugual numero di elettroni fluisce dal polo negativo della batteria al piastra l .

Man mano che le armature si caricano, aumenta la loro differenza di potenziale. Il processo di carica si arresta quando la differenza di potenziale del condensatore raggiunge il valore di differenza di potenziale della batteria.

Dato un condensatore ideale, disegniamo una superficie gaussiana a forma di rettangolo e calcoliamo il flusso attraverso di essa. Le piastre sono in equilibrio elettrostatico, perciò in flusso del campo è dato da

$$\phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = EA$$

Dato che vi sono le condizioni di simmetria, usiamo la legge di Gauss per ricavare la carica

$$EA = \frac{q}{\epsilon_0} \implies q = EA\epsilon_0$$

La differenza di potenziale invece è data da

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed$$

Il rapporto tra carica e differenza di potenziale ci dà la capacità del condensatore

$$C = \frac{EA\epsilon_0}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Si nota come questa non dipenda dalla carica, ma solo dalla forma e dalla distanza dei piatti del condensatore.

12.3 Condensatori in Serie e in Parallelo

12.3.1 Condensatori in Parallelo

La differenza di potenziale ai capi di ogni condensatore è la stessa. I condensatori hanno però carica diversa, data da

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad q_3 = C_3 V$$

Sommandole otteniamo

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) V$$

Dividendo per V , otteniamo che i 3 condensatori in parallelo sono equivalenti ad un singolo condensatore la sua capacità equivalente è data dalla somma delle capacità di ciascun condensatore

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Più in generale, nel caso di n condensatori si ha

$$C_{eq} = \sum_{j=1}^n C_j$$

12.3.2 Condensatori in Serie

La differenza di potenziale è diversa ai capi di ogni condensatore, mentre la carica rimane uguale su ogni condensatore:

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3}$$

Sommando le tensioni si ottiene la tensione del generatore

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

Dividendo per q tutti i termini si ottiene il reciproco della capacità equivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Il motivo per cui i condensatori in serie si ritrovano ad avere la stessa carica è dovuto agli spostamenti delle cariche. Quando si collega la batteria, la prima armatura collegata al polo negativo assume carica negativa. Questa carica respinge le cariche negative della seconda armature del condensatore, lasciandolo carico positivamente. Le cariche continuano a respingersi fino a raggiunge una situazione bilanciata, in cui ogni condensatore ha la stessa carica. Se osserviamo la zona tratteggiata notiamo che è isolata elettricamente dal resto del circuito. La sua carica netta è nulla e viene redistribuita quando si collega la batteria.

12.4 Energia immagazzinata in un condensatore carico

La separazione delle cariche durante il processo di carica avviene grazie all'energia fornita dalla batteria. Ciò comporta un accumulo di energia potenziale elettrostatica nel sistema. Il lavoro necessario a spostare la carica infinitesima attraverso la differenza di potenziale è

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

Integrando dal momento in cui il condensatore è scarico fino al momento di massima carica, si ottiene lavoro svolto dal generatore per caricare il condensatore

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2C} [q^2] = \frac{Q^2}{2C}$$

Perciò si ottiene

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

Sostituendo

$$Q = CV$$

si ottiene

$$U_{el} = \frac{1}{2} CV^2$$

12.5 Condensatore con Dielettrico

Introducendo una lastra di isolante tra le armature di un condensatore si osserva una riduzione della differenza di potenziale tra le stesse

$$V_d = \frac{V_0}{k}$$

dove k è la costante dielettrica del materiale isolante. Inoltre, la presenza del dielettrico aumenta la capacità

$$C = k \frac{A}{d} \epsilon_0 = k C_0$$

In un materiale isolante le molecole polari sono orientate in modo casuale in assenza di campo elettrico. Quando viene applicato un campo elettrico, le molecole si allineano parzialmente nella direzione del campo. Le cariche superficiali nel dielettrico possono essere schematizzate come una coppia di piani paralleli carichi che generano un campo indotto nel verso opposto al campo generato dal condensatore.

Il campo del condensatore senza dielettrico corrisponde a

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

La carica superficiale indotta dalla polarizzazione del dielettrico crea anch'essa un campo. Il campo totale del condensatore è dunque

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} = E_0 - E_{ind}$$

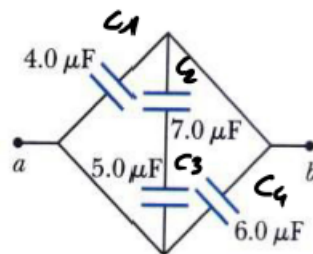
Questo campo totale è minore del campo senza dielettrico

$$E < E_0$$

12.6 Esercizi

Esercizio 59:

Si trovi la capacità equivalente tra i punti a e b nella rete di condensatori mostrata in Figura P26.25.



Soluzione 59:

1) Serie C_2 e C_3

$$\frac{1}{c_p} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \Rightarrow c_{23} = \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3} = \frac{7 * 5}{12} = \frac{35}{12} = 2.9 \mu\text{F}$$

Esercizio 60:

Fra le armature di un condensatore a facce piane parallele (v. figura, $L = 25$ cm e $d = 10$ cm) esiste una d.d.p. $\Delta V = 10$ V. Una carica $q = 310^{-5}$ C, di massa $m = 1$ g, entra nel condensatore ad una altezza pari a $d/2$, con velocità $c_0 = 600$ cm/s parallela alle armature. Calcolare:

- 1) la velocità \mathbf{v} (in modulo e direzione) della carica all'uscita dal condensatore: $\mathbf{v} = (6\hat{i} - 0.54\hat{j})$ m/s; $\theta = -5.1^\circ$; $v = 6$ m/s
- 2) la d.d.p. minima che si dovrebbe applicare per impedire l'uscita della carica dal condensatore. $\{156.3 \text{ V}\}$ bave

Soluzione 60:

La forza risultante applicata alla particella carica è:

$$\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E}$$

dove $E = \frac{\Delta V}{d}$

- 1) Dimensione x : moto rettilineo uniforme $V_x = 6$ m/s Direzione y : moto Uniformemente accelerato

$$V = at \Rightarrow V_y = \left(8 + \frac{qE}{m}\right)t$$

dove $t \rightarrow$ tempo di transito si ricoda da: $t = L/v_x = \frac{0.25}{6} = 0.0425$

$$V_y = \left(8 + \frac{310^{-5}100}{0.001}\right)0.042 = 0.54 \text{ m/s} \quad \vec{V} = (6\hat{i} - 0.54\hat{j})$$

- 2) Per evitare l'uscita dal condensatore nel tempo di transito la particella deve percorrere in direzione y uno spazio pari a $d/2$

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(g + \frac{q}{m}E_{MIN}\right)t^2 = \frac{d}{2}$$

dove $E_{min} = \frac{V_{MIN1}}{d} \Rightarrow$ Valore minimo del campo elettrico tra le armature che produce l'accelerazione verticale necessaria

$$\begin{aligned} \frac{d}{t^2} - g &= \frac{q}{m} \frac{V_{Min}}{d} \Rightarrow V_{min} = \left(\frac{d}{t^2} - g\right) \frac{m_0}{q} \\ V_{Min} &= \left(\frac{0.1}{(0.042)^2} - 9.8\right) \frac{0.001 \times 0.1}{3 \times 10^{-5}} = 156.3 \text{ V} \end{aligned}$$

Esercizio 61:

Tra le armature di un condensatore piano è applicata una d.d.p. $V_1 = 300$ V. All'interno del condensatore una particella carica $q = 3.210^{-19}$ C si muove nel vuoto con velocità costante. Si determini il lavoro fatto dalla forza peso nel passaggio della carica dall'armatura superiore a quella inferiore. Si riduce poi la d.d.p. applicata al valore $V_2 = 100$ V, si determini in questa nuova configurazione l'energia cinetica acquistata dalla particella nel passaggio tra le due armature.

Soluzione 61:

$$1) W_{PES0} = mgh = -W_e = qV_1 = 3.210^{-19} * 300 = 9.610^{-17} \text{ J}$$

- 2) L'Equazione del moto per il sistema è: $qE - mg = ma$

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_K = W_{pes0} + W'_e = W_{pes0} - \phi V_2 = \\ &= 9.610^{-17} - 3.210^{-19} * 100 = 6.410^{-17} \text{ J} \end{aligned}$$

Capitolo 13

Corrente Elettrica

I conduttori solidi sono costituiti da un reticolo spaziale composto dagli ioni positivi e al cui interno si muovono liberamente gli elettroni. Ad esempio nel rame c'è un elettrone libero per atomo e la densità di carica vale

$$n = 8.49 \cdot 10^{28} \frac{\text{elettroni}}{m^3}$$

Il moto degli elettroni liberi è completamente disordinato, per cui si ha una velocità media pari a zero. Tuttavia, se in una regione del conduttore viene applicato un campo elettrico, i portatori di carica liberi si muovono sotto l'azione della forza elettrica $\vec{F} = e\vec{E}$, dando origine ad un moto ordinato di cariche, ossia ad una corrente elettrica. In questo caso, i portatori di carica acquistano una velocità di deriva in verso opposto a quello del campo elettrico. La velocità di deriva è molto piccola rispetto alla velocità del moto termico degli elettroni, ma collettivamente si ottiene un effetto macroscopico significativo.

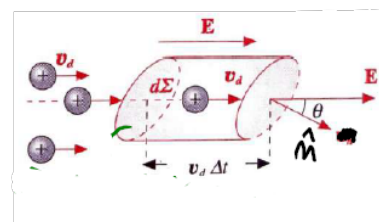
Definiamo l'intensità di corrente come

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

ossia come la carica che passa attraverso una sezione del conduttore in un intervallo di tempo. Nel SI l'unità di misura dell'intensità di corrente è l'Ampere (A), che equivale ad un Coulomb su secondo (1C/s)

13.1 Relazione tra Corrente e Moto dei Portatori di Carica

Consideriamo una superficie infinitesima di conduttore in cui passa corrente elettrica e la cui normale forma un angolo con il campo elettrico. In un intervallo di tempo le cariche percorrono una distanza $v_d t$. La carica che passa attraverso la superficie è quella contenuta nel volume infinitesimo ($d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta$) e è data da



$$\Delta q = n e d\tau = n e v_d \Delta t \cos \theta d\Sigma$$

dove n è la densità di carica. Da questa troviamo il contributo infinitesimo di corrente

$$di = \frac{\Delta q}{\Delta t} = n e v_d \cos \theta d\Sigma$$

Definiamo il vettore densità di corrente

$$\vec{j} = n e \vec{v}_d$$

Riscriviamo di come

$$di = \vec{j} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Integrando si ottiene l'intensità di corrente attraverso l'intera superficie

$$i = \int_{\Sigma} \hat{j} \cdot \hat{n} d\Sigma = \phi_E(\vec{j})$$

L'intensità di corrente è quindi uguale al flusso del vettore densità di corrente attraverso la superficie.

La relazione si semplifica se:

1. La superficie è perpendicolare al vettore densità di corrente.
2. La densità di corrente è uniforme.

In questo caso la relazione diventa semplicemente

$$i = j\Sigma$$

Inoltre, bisogna fare una considerazione sul verso della corrente. Nei conduttori metallici i portatori di carica sono negativi. La loro velocità di deriva è diretta in verso opposto al campo, mentre la densità di corrente è parallela e concorde al campo, come nel caso dei portatori di carica positivi. Per convenzione si sceglie come verso della corrente, quello delle cariche positive.

13.2 Resistenza e legge di Ohm

Gli elettroni, muovendosi nel reticolo, subiscono continue interazioni con gli ioni. L'elettrone scontrandosi subisce una sorta di "attrito" e viene rilasciata energia durante gli urti. Questa energia provoca un aumento della vibrazione degli ioni, e quindi un aumento della temperatura. Il grado con cui avviene questo attrito è chiamato resistenza. Per molti metalli, la densità di corrente è proporzionale al campo secondo questa relazione

$$j = \sigma E$$

dove σ è la conducibilità del metallo.

Consideriamo un segmento di filo conduttore con una certa sezione e lunghezza e applichiamo una differenza di potenziale ai suoi capi. Questa genera un campo elettrico, che produce una corrente elettrica proporzionale alla differenza di potenziale. Avremo che

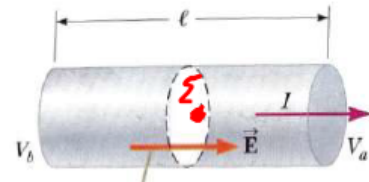
$$V = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = El$$

Da cui

$$E = \frac{V}{l}$$

La densità di corrente allora vale

$$J = \sigma \frac{V}{l} \Rightarrow V = \frac{Jl}{\sigma} = i \frac{l}{\Sigma\sigma}$$



La quantità $\frac{l}{\Sigma\sigma}$ è proprio la resistenza. Questa si chiama legge di Ohm:

$$V = Ri$$

La resistenza può anche essere definita in termini di resistività, che non è altro che il reciproco della conducibilità ($1/\sigma$).

$$R = \frac{l}{\Sigma\sigma} = \rho \frac{l}{\Sigma}$$

Nel SI la resistenza ha come unità di misura l'Ohm (Ω) che equivale un volt su Ampere ($1V/A$). La resistività è un valore che dipende dal materiale e dalla temperatura (in modo quasi lineare)

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

Se la resistività di un materiale è piccola, significa che è un buon conduttore. Se è alta, ciò lo rende un buon isolante.

Il componente elettrico, usato nei circuiti, che fornisce un determinato valore di resistenza è chiamato resistore. Possono essere usati per:

1. Controllare l'intensità di corrente.
2. Convertire energia elettrica in energia termica (legge di Joule).

La resistenza dei fili nei circuiti è trascurabile.

13.2.1 Legge di Joule

L'energia fornita ai portatori di carica dal generatore viene dissipata nella resistenza, producendo un aumento della temperatura. Ricordando che $\Delta V = \Delta U/q$, l'energia dissipata è data da

$$dU = dqV = idtV$$

Dunque la potenza dissipata vale

$$P = \frac{dU}{dt} = iV$$

Dalla legge di Ohm, dunque, si ricava

$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Capitolo 14

Circuiti Elettrici in Corrente Continua

14.1 Forza Elettromotrice

La forza elettromotrice di un generatore non è una forza. E' la massima differenza di potenziale che si crea ai suoi capi quando sconnesso dal circuito. I generatori ideali non hanno una resistenza interna, quelli reali invece sì, pertanto quando nel circuito scorre corrente la d.d.p. ai suoi capi è

$$\Delta V = \varepsilon - iR$$

14.2 Resistori in Serie e Parallelo

14.2.1 Resistori in Serie

Nei resistori in serie circola la stessa corrente. La differenza di potenziale ai capi di ogni resistore è

$$V_1 = R_1 i, \quad V_2 = R_2 i, \quad V_3 = R_3 i$$

La differenza di potenziale ai capi della catena è data dalla loro somma

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= R_1 i + R_2 i + R_3 i \\ &= i (R_1 + R_2 + R_3) \end{aligned}$$

Dividendo per i si trova la resistenza equivalente, che è la somma delle resistenze

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

In generale,

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^n R_j$$

14.2.2 Resistori in Parallelo

I resistori in parallelo hanno la medesima differenza di potenziale. La corrente che passa nelle resistenze è data da

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, \quad i_3 = \frac{V}{R_3}$$

Applicando la legge dei nodi sommiamo tutte le correnti

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right)$$

La resistenza equivalente è data da

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$$

Per il caso generale di n resistori abbiamo

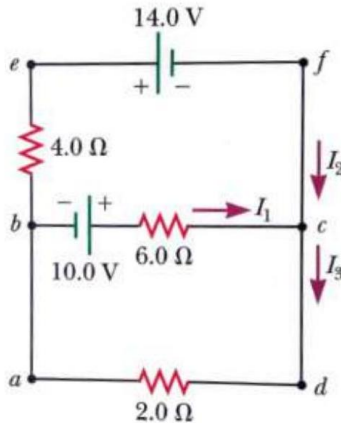
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$$

Nel caso di sole due resistenze vale

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

14.3 Leggi di Kirchoff

14.3.1 Definizioni Circuitali



Diamo alcune definizioni:

- **Nodo:** punto della rete in cui convergono almeno 3 conduttori (e.g., b e c).
- **Ramo:** insieme di elementi compresi tra due nodi successivi (e.g., bc).
- **Maglia:** percorso chiuso tra due nodi (e.g., $abcd$, $aefd$, $befc$).

14.3.2 Prima Legge di Kirchoff: Legge dei Nodi

La prima legge di Kirchoff afferma che:

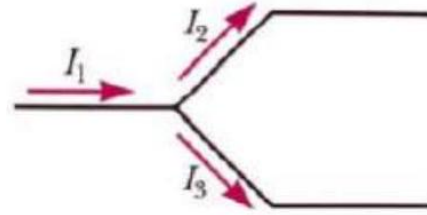
La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti. o in altri termini

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Ciò significa che la somma algebrica di tutte le correnti che convergono in un nodo è pari a zero:

$$\sum_{k=1}^N i_k = 0$$

Ciò deriva dalla conservazione della carica. Tutta la carica che entra in un punto del circuito deve lasciare quel punto senza accumularsi.



14.3.3 Seconda Legge di Kirchhoff: Legge delle Maglie

La seconda legge di Kirchhoff afferma che: *La somma algebrica delle differenze di potenziale che si trovano percorrendo una maglia è uguale a zero.*

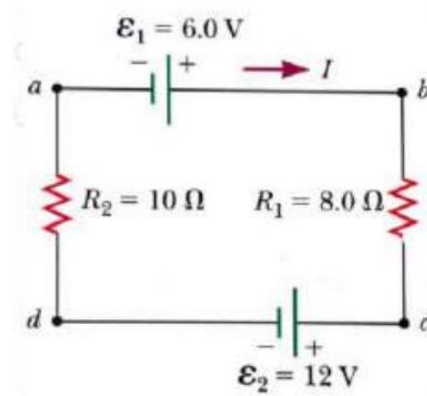
Ossia

$$\sum_{k=1}^N \Delta V_k = 0$$

Poniamo in modo arbitrario il verso della corrente in senso orario. Attraversiamo tutti i componenti in modo ordinato:

1. ε_1 : aumento di differenza di potenziale
2. R_1 : calo di differenza di potenziale
3. ε_2 : calo di differenza di potenziale, in quanto la corrente si sposta verso il polo negativo del generatore
4. R_2 : altra caduta di differenza di potenziale

In definitiva



$$\varepsilon_1 - iR_1 - \varepsilon_2 - iR_2 = 0$$

$$i(R_1 + R_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

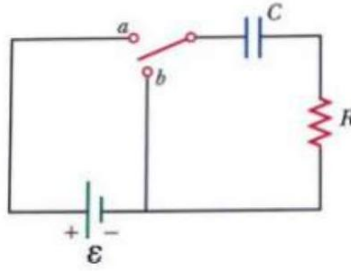
$$i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = -0.33 \text{ A}$$

Il segno negativo del risultato indica che la corrente circola in verso opposto a quello scelto. Infatti ε_2 fornisce una tensione maggiore di ε_1 , e quindi impone un circolo della corrente antiorario (verso della carica positiva).

14.4 Circuiti RC

14.4.1 Introduzione ai Circuiti RC

Sono circuiti composti da resistori e condensatori. Il caso più semplice è quello di un resistore e di un condensatore in serie. Quando si chiude l'interruttore nel punto a il condensatore inizia a caricarsi grazie alla differenza di potenziale generata dal generatore.

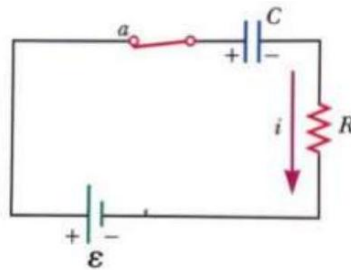


All'istante iniziale $t = 0^+$ dopo la chiusura dell'interruttore il condensatore si comporta come un cortocircuito, ossia lascia passare la corrente massima

$$i = \varepsilon/R$$

All'istante di carica massima $t = \infty$ il condensatore rende il circuito aperto e blocca il flusso di corrente.

14.4.2 Processo di Carica



Durante il processo di carica, è il generatore che detta il verso della corrente. Appliciamo al circuito la seconda legge di Kirchhoff, per trovare la carica in funzione del tempo

$$\varepsilon - \Delta V_C - iR = 0$$

Sostituiamo

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0$$

Mettiamo in evidenza la carica

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{C\varepsilon - q}{RC} = -\frac{q - C\varepsilon}{RC} \\ \frac{dq}{q - C\varepsilon} &= -\frac{1}{RC}dt \end{aligned}$$

Risolviamo l'equazione differenziale

$$\begin{aligned}
 \int_0^q \frac{dq}{q - C\varepsilon} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\
 \ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) &= -\frac{t}{RC} \\
 \frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} &= e^{-t/RC} \\
 q &= C\varepsilon - C\varepsilon e^{-t/RC} \\
 q &= C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right) \\
 q(t) &= Q \left(1 - e^{-t/RC}\right)
 \end{aligned}$$

Derivando otteniamo la corrente elettrica

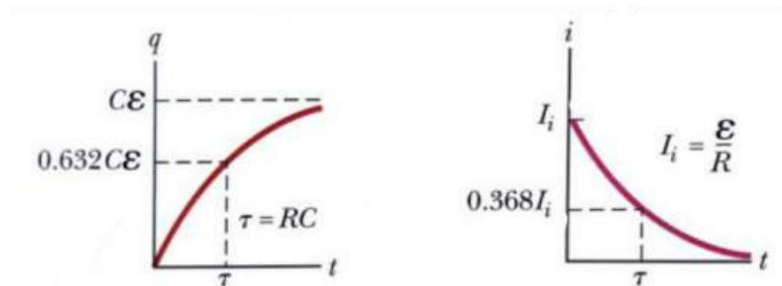
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -Q \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Indichiamo con τ la quantità

$$\tau = RC$$

che è una costante di tempo in quanto

$$RC = \frac{[V]}{[A]} \frac{[Q]}{[V]} = [T]$$

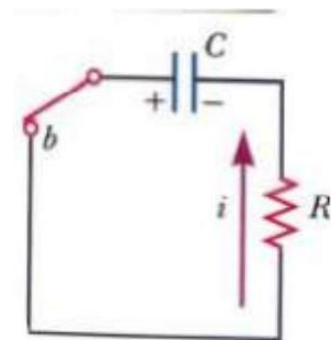


La carica tende al suo valore massimo $C\varepsilon$ per t che tende ad infinito. Dopo un intervallo di tempo uguale ad una costante di tempo τ , la carica raggiunge il 63.2

14.4.3 Processo di scarica

Anche qui, applichiamo la seconda legge di Kirchhoff per trovare la carica del condensatore in funzione del tempo:

$$\begin{aligned}
 -\frac{q}{C} - iR &= 0 \\
 -R \frac{dq}{dt} &= \frac{q}{C} \\
 \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC} dt \\
 \int_0^q \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\
 \ln(q) &= -\frac{t}{RC} \\
 q(t) &= Q e^{-t/RC} \\
 i(t) = \frac{dq}{dt} &= -\frac{Q}{RC} e^{-t/RC}
 \end{aligned}$$

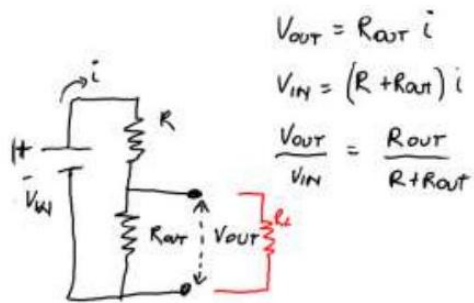


Si nota che la corrente ha lo stesso andamento del processo di carica, ma con verso opposto. Ossia la carica parte dal valore massimo e arriva a zero, mentre la corrente parte dal zero e arriva al valore massimo.

14.5 Applicazioni Circuiti Elettrici in CC

14.5.1 Attenuatore

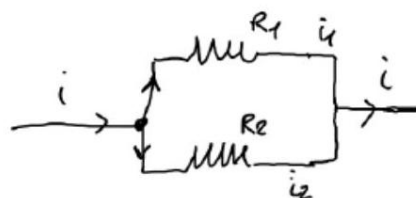
Un attenuatore è un circuito elettrico che diminuisce la tensione di uscita. Inizialmente il circuito è aperto. Quando si chiude il circuito si inserisce una resistenza in parallelo, che ripartisce la tensione e rende V_{out} minore di V_{in} . Minore è la resistenza equivalente R_{out} e maggiore sarà la tensione di uscita.



14.5.2 Partitore di Corrente

Nel partitore di corrente la corrente si distribuisce nei due rami del partitore in modo inversamente proporzionale alla resistenza.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}$$



Quindi il partitore di corrente è la seguente formula:

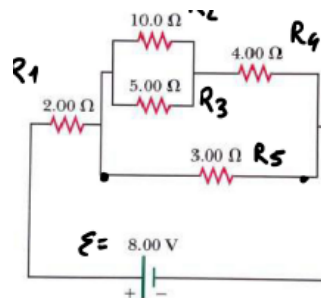
$$i_1 R_1 = i_2 R_2$$

14.6 Esercizi

Esercizio 62:

Si consideri il circuito mostrato in figura.

- Si ricavi la tensione ai capi del resistore da 3.00Ω .
- Si ricavi la corrente che passa attraverso il resistore da 3.00Ω .



Soluzione 62:

- 1) Parallelo $R_2 // R_3$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} \Omega$$

- 2) Serie $R_{23} R_4$

$$R_{234} = R_{23} + R_4 = \frac{10}{3} + 4 = \frac{22}{3} \Omega$$

$$3) R_{234} // R_5$$

$$R_{2345} = \frac{R_{234} * R_5}{R_{234} + R_5} = \frac{22/3 * 3}{22/3 + 3} = \frac{66}{31} \Omega$$

$$4) R_{ep} = R_1 + R_{2345} = 2 + \frac{66}{31} \pi = \frac{128}{31} r$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{8 * 31}{128} = 1.94 \text{ A}$$

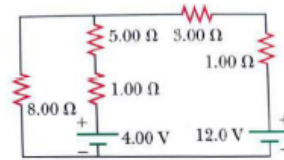
$$V_1) \quad R_1 = V_1 = 1.94 * 2 = 3,88 \text{ V}$$

$$V_5) \quad V_s = \varepsilon - V_1 = 4.12 \text{ V}$$

$$i_5) \quad i_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{4.12}{3} = 1.38 \text{ A}$$

Esercizio 63:

Il circuito mostrato in figura è collegato per 2.00 minuti. (a) Si determini il valore della corrente che circola in ciascuna maglia del circuito. (b) Si ricavi l'energia erogata da ciascuna batteria. (c) Si ricavi l'energia fornita a ciascun resistore. (d) Si trovi come si trasforma l'energia durante il funzionamento del circuito. (e) Si calcoli la quantità di energia totale che viene dissipata nei resistori.



Soluzione 63:

a)

$$i_2 - i_1 - i_3 = 0 \Rightarrow i_3 = i_2 - i_1$$

$$R_1 = 8r$$

$$R_2 = 5 + 1 = 6r$$

$$R_3 = 3 + 1 = 4r$$

$$\varepsilon_1 - i_2 R_2 - i_1 R_1 = 0$$

$$\varepsilon_1 - i_2 R_2 - i_3 R_3 - \varepsilon_2 = 0$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2}{R_1} \\ \varepsilon_1 - i_2 R_2 - (i_2 - i_1) R_3 - \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 - i_2 R_2 - i_2 R_3 + \frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2}{R_1} R_3 - \varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 R_1 - i_2 R_2 R_1 - i_2 R_3 R_1 + \varepsilon_1 R_3 - i_2 R_2 R_3 - \varepsilon_2 R_1 = 0$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2 R_1}{R_2 R_1 + R_3 R_1 + R_2 R_3} = \frac{4 * 8 + 4 * 4 - 12 * 8}{6 * 8 + 4 * 8 + 6 * 4} = \frac{-48}{104} = -0.462 \text{ A}$$

Il segno negativo indica che la corrente circola in senso opposto a quello ipotizzato

Calcolo i_2

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2}{R_1} = \frac{4 - (-0.462)6}{8} = 0.846 \text{ A}$$

Calcolo i_3

$$i_3 = i_2 - i_1 = -0.462 - 0.846 = -1.310$$

b) Calcolo dell'energia erogata da ciascuna batteria

Legge di Joule $\Rightarrow P = \frac{du}{dt} = iv \, dv = Pdt = ivdt$

integrando sull'intervallo di 2 minuti :

$$U = \int_0^t ivdt = iv \int_0^t dt = iVt$$

$$(\varepsilon_1) \, U_{\varepsilon_1} = i_2 \varepsilon_1 t = -0.462 * 4 * 120 = -221.8 \, \text{J}$$

La batteria da $\varepsilon_1 = 4 \, \text{V}$ è in carica a spese di ε_2

$$(\varepsilon_2) \, U_{\varepsilon_2} = i_3 \varepsilon_2 t = 1.31 * 12 * 120 = -1886.4 \, \text{J}$$

e) La potenza dissipata in ciascun resistore è data da $P = i^2 R$, l'energia dissipata si ottiene moltiplicando per il tempo, dato che P è costante.

$$R_1 \quad U_1 = i_1^2 R_1 t = (0.846)^2 * 8 * 120 = 687.1 \, \text{J}$$

$$R_2 \quad U_2 = i_2^2 R_2 t = (0.462)^2 * 6 * 120 = 153.7 \, \text{J}$$

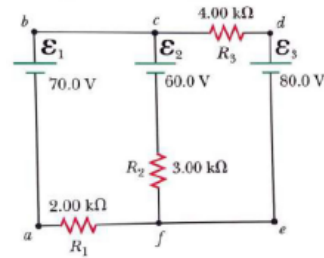
$$R_3 \quad U_3 = i_3^2 R_3 t = (1.31)^2 * 4 * 120 = 823.7 \, \text{J}$$

$$\Rightarrow 1664.5 \, \text{J}$$

Notare come la somma delle energie dissipate nei 3 resistori e della energia assorbita da ε_1 eguagliano l'energia fornita da ε_2

Esercizio 64:

Con l'aiuto delle leggi di Kirchhoff, si trovino
(a) la corrente nei resistori e (b) la differenza di potenziale tra i punti c e f mostrati in figura.



Soluzione 64:

$$\text{Eq nodo } c \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\longrightarrow i_3 = i_1 - i_2$$

$$(1) -\varepsilon_2 - i_2 R_2 - i_1 R_1 + \varepsilon_1 = 0$$

$$(2) -i_3 R_3 - \varepsilon_3 + i_2 R_2 + \varepsilon_2 = 0$$

Sostituendo i_3 nella eq. (2):

$$-(i_1 - i_2) R_3 - \varepsilon_3 + i_2 R_2 + \varepsilon_2 = 0$$

$$-i_1 R_3 + i_2 R_3 - \varepsilon_3 + i_2 R_2 + \varepsilon_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{i_2 (R_3 + R_2) - \varepsilon_3 + \varepsilon_2}{R_3}$$

$$-\varepsilon_2 - i_2 R_2 - \frac{i_2 (R_3 + R_2) - \varepsilon_3 + \varepsilon_2}{R_3} R_1 + \varepsilon_1 = 0$$

$$-\varepsilon_2 R_3 - i_2 R_2 R_3 - i_2 R_3 R_1 - i_2 R_2 R_1 + \varepsilon_3 R_1 - \varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_1 R_3 = 0$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_3 R_1 - \varepsilon_2 (R_1 + R_3)}{R_2 R_3 + R_1 (R_2 + R_3)}$$

$$i_2 = \frac{(70 \times 4 + 80 \times 2 - 60 \times 6) \times 10^3}{(3 \times 4 + 2 \times 7) \times 10^6} = \frac{80}{26 \times 10^3} = 3.08 \, \text{mA}$$

$$i_1 = \frac{i_2 (R_3 + R_2) - \varepsilon_3 + \varepsilon_2}{R_3} = \frac{3.08 \times 10^{-3} \times 7 \times 10^3 - 80 + 60}{4 \times 10^3} = 0.385 \, \text{mA}$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 0.385 - 3.08 = -2.695 \, \text{mA}$$

Esercizio 65:

Un condensatore scarico e un resistore sono collegati in serie ad una sorgente di f.e.m. Se $\varepsilon = 9.00 \text{ V}$, $C = 20.0 \mu\text{F}$ e $R = 100 \Omega$, si trovino (a) la costante di tempo del circuito, (b) la carica massima nel condensatore e (c) la carica che si accumula nel condensatore quando sia trascorso, dopo il collegamento alla batteria del circuito, un tempo pari alla costante di tempo.

Soluzione 65:

$$\text{a) } \tau = RC = 100 * 20 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

b)

$$Q_{\max} = C\varepsilon = 20 \cdot 10^{-6} = 18010^{-6} \text{ C} = 180 \mu\text{C}$$

c)

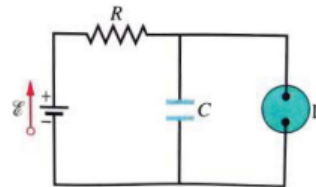
$$q(t = \tau) = Q_{\max} (1 - e^{-t/RC})$$

$$t = 1\tau = RC \Rightarrow Q_{\max} (1 - e^{-1}) = Q_{\max} 0.632$$

$$q(t = \tau) = 113.8 \mu\text{C}$$

Esercizio 66:

La figura mostra un circuito di una luce a intermittenza come quelle collocate sulle transe e nei cantieri stradali. La lampada fluorescente L (di capacità trascurabile) è collegata in parallelo a un condensatore C di un circuito RC. La corrente passa attraverso la lampada solamente quando la differenza di potenziale ai suoi estremi raggiunge la tensione di scarica V_L : in questo istante il condensatore si scarica attraverso la lampadina e questa si illumina per breve tempo. Si supponga che occorrono due lampi al secondo. Per una lampada a tensione di scarica pari a $V_L = 72.0 \text{ V}$, con una batteria ideale di 95.0 V e un condensatore di $0.150 \mu\text{F}$, quale dovrà essere la resistenza R?

**Soluzione 66:**

$$\nu = 2 \text{ Hz} \Rightarrow T = 0.5 \text{ s}$$

$$V_c(t) = \varepsilon (1 - e^{-t/Rc})$$

$$V_c = \varepsilon - \varepsilon e^{-t/Rc}$$

$$\varepsilon - U_c = \varepsilon e^{-t/Rc}$$

$$\varepsilon - V_c = \varepsilon e^{-t/Rc}$$

$$\ln(\varepsilon - V_c) = \ln \varepsilon - t/Rc$$

$$\ln \varepsilon - \ln(\varepsilon - V_c) = t/Rc \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 0.55 \\ V_c = 72 \text{ V} \\ \varepsilon = 95 \text{ V} \end{array} \right\}$$

$$R = \frac{t}{[\ln \varepsilon - \ln(\varepsilon - V_c)] c} = \frac{0.5}{(\ln 95 - \ln 23) 0.1510^{-6}}$$

$$R = 2.3510^6 \Omega$$

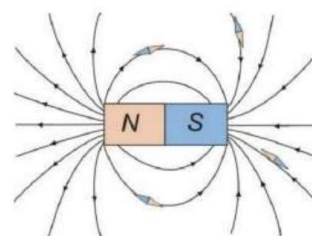
Capitolo 15

Il Campo Magnetico

15.0.1 Campo Magnetico

Il campo magnetico \vec{B} è un campo vettoriale generato dal movimento di una carica elettrica o da un campo elettrico variabile nel tempo. Assieme al campo elettrico, il campo magnetico forma il cosiddetto campo elettromagnetico.

E' un campo associato ad un dipolo nord-sud. Le linee del campo magnetico sono uscenti dal polo nord ed entrano nel polo sud. Come due cariche opposte si attraggono, allo stesso modo due poli magnetici opposti si attraggono e due uguali si respingono.



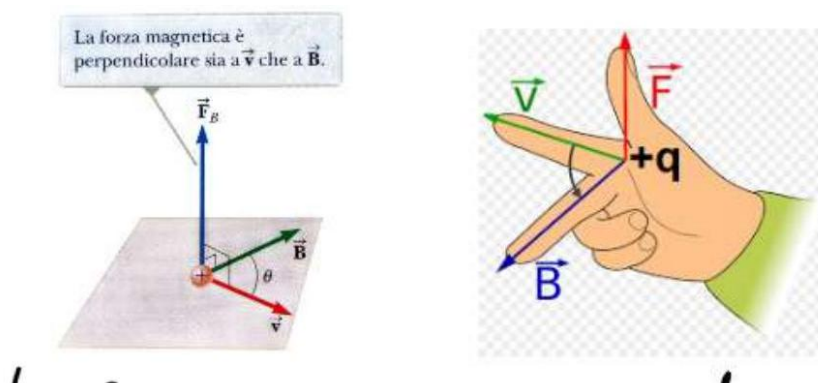
Non è possibile separare i due poli tra di loro. Ogni divisione di un dipolo crea un altro dipolo. L'unità di misura nel SI del campo magnetico è il Tesla, che corrisponde a

$$1T = 1 \frac{N}{Am}$$

Per convenzione:

- le linee ortogonali al piano uscenti sono rappresentate da pallini;
- le linee ortogonali al piano entranti sono rappresentate da crocette.

15.0.2 Forza di Lorentz



Su una particella carica in moto con una certa velocità in un campo magnetico agisce una forza dal parte del campo, chiamata forza di Lorentz:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La forza di Lorentz ha verso e direzione dato dalla regola della mano destra, cioè essa è perpendicolare a velocità e campo magnetico. Il modulo della forza è dato da:

$$F_L = qvb \sin \theta$$

Essendo perpendicolare alla velocità, la forza è perpendicolare anche allo spostamento. Ciò significa che essa non compie lavoro

$$\Delta E_K = W = \int_a^b \vec{F}_L \cdot d\vec{s} = 0$$

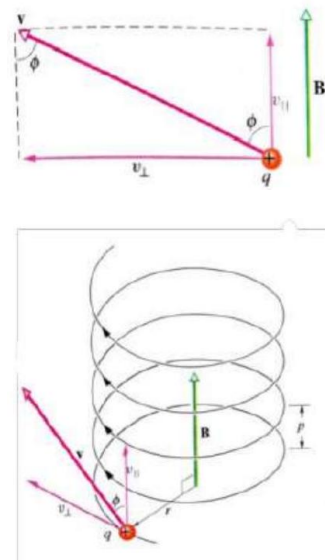
Per qualsiasi spostamento nella regione dove è presente il campo magnetico, l'energia cinetica della particella resta costante. Tuttavia, la forza di Lorentz produce un'accelerazione centripeta, che cambia la direzione della velocità ma non il modulo.

15.0.3 Moto in Campo Uniforme (θ generico)

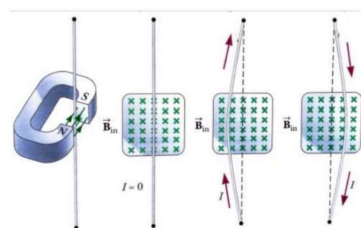
In questo caso, la velocità ha due componenti: una parallela al campo magnetico e una perpendicolare. La forza di Lorentz che agisce sulla particella è data da:

$$F_L = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}$$

in quanto $\vec{V}_{//} \times \vec{B} = 0$. La forza produce nel piano xy un moto circolare uniforme. Questo si combina al moto rettilineo uniforme sull'asse z , dato dalla componente parallela della velocità ($v_{//}$). Di conseguenza, la particella si muove di un moto elicoidale uniforme nella direzione del campo magnetico.



15.0.4 Forza Magnetica su un Conduttore Percorso da Corrente



La corrente elettrica è dovuta al moto degli elettroni prodotto dal campo elettrico applicato al conduttore. Quando un conduttore percorso da corrente elettrica è immerso in un campo magnetico, su ciascun elettrone in moto è applicata la forza di Lorentz. Questa viene trasmessa alla massa del filo conduttore tramite gli urti tra gli elettroni e gli ioni del reticolo cristallino.

15.0.4.1 Conduttore rettilineo

Vediamo il caso della forza applicata ad un filo conduttore dritto. La forza di Lorentz che agisce su ogni portatore di carica è

$$\vec{F}_L = q\vec{v}_d \times \vec{B}$$

dove viene usata la velocità di deriva v_d . Il numero di cariche nel conduttore è dato da nAL :

- n : numero di cariche per unità di volume
- AL : volume del conduttore

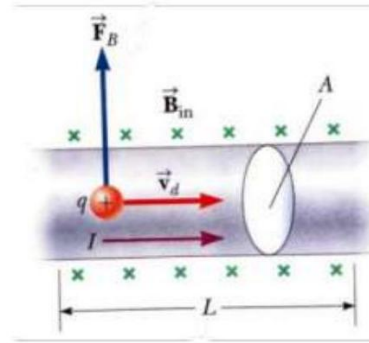
Allora la forza totale esercitata sul filo conduttore è

$$\vec{F} = (q\vec{v}_d \times \vec{B}) nAL$$

Dato che $i = jA = nqV_dA$ riscriviamo la forza come

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

dove \vec{L} ha il verso della corrente e modulo pari alla lunghezza del filo.



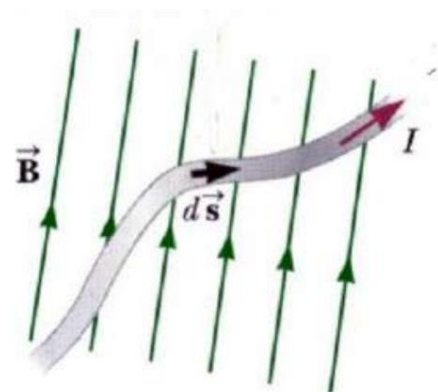
15.0.4.2 Conduttore di Forma Arbitraria

Consideriamo un conduttore non rettilineo. Suddividiamo il filo in pezzi infinitesimali dritti. La forza dovuta ad ogni elemento vettoriale infinitesimo $d\vec{s}$ è data da

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

Integrando su tutta la lunghezza si ottiene la forza totale agente sul filo

$$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{s} \times \vec{B}$$



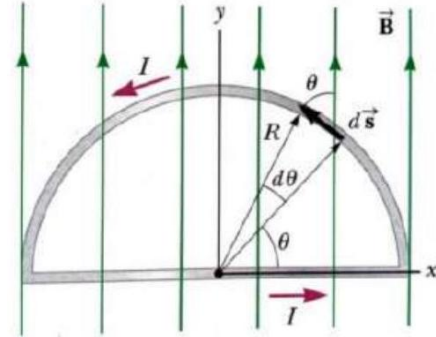
15.0.4.3 Spira Semicircolare

Vediamo il caso della spira semicircolare. Per il calcolo della forza sulla parte lineare del circuito uso direttamente la formula della forza di Lorentz su un conduttore rettilineo, sapendo che la lunghezza del filo è $2R$.

$$\vec{F}_1 = i2RB\hat{k}$$

dove \hat{k} è il versore dell'asse z . Dalla regola della mano destra la forza sarà parallela all'asse z e uscente dal piano xy .

Per il calcolo della forza agente sulla parte circolare utilizzo la formula della forza di Lorentz per un conduttore di forma arbitraria. La corrente in questo caso va in verso opposto, dunque la forza è entrante nel piano xy . L'infinitesimo di forza è dato da:



$$d\vec{F}_2 = id\vec{s} \times \vec{B} = -iB \sin \theta ds \hat{k}$$

Integro con un cambio di variabili ($ds = R d\theta$), grazie alle regole della trigonometria:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= - \int_0^\pi iRB \sin \theta d\theta \hat{k} \\ &= -iRB\hat{k} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= -iRB\hat{k} [-\cos \theta]_0^\pi \\ &= iRB\hat{k} (-1 - 1) \\ &= -2iRB\hat{k} \end{aligned}$$

La forza agente sulla parte curva ha la stessa intensità della parte rettilinea, ma verso opposto, pertanto la somma delle due forze si annulla.

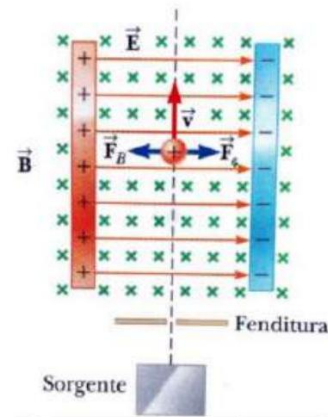
15.0.5 Applicazioni Pratiche della Forza di Lorentz

15.0.5.1 Selettore di Velocità

Il selettore di velocità è uno strumento che sfrutta la presenza combinata di un campo magnetico e di un campo elettrico opportunamente direzionati per selezionare fasci di particelle cariche con una ben precisa velocità (e quindi energia cinetica).

Una particella carica positivamente attraversa la regione soggetta ai due campi. Su di essa è applicata una forza risultante data da

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$



La particella che passa deve avere una velocità tale per cui la forza di Lorentz è in equilibrio con la forza elettrica, ossia

$$F_e - F_B = 0$$

$$qE = qvB$$

Tale velocità è quindi data da

$$v = \frac{E}{B}$$

15.0.5.2 Spettrometro di Massa

Lo spettrometro di massa è uno strumento che separa gli ioni che hanno rapporti massa-carica diversi (i.g. isotopi).

1. Lo ione passa attraverso un selettore di velocità, con velocità data da

$$V = \frac{E}{B_{\text{in}}}$$

2. Successivamente la particella si muove di moto circolare uniforme in presenza del solo campo magnetico. Il raggio di curvatura sarà dato da

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Scriviamo il rapporto massa-carica e sostituiamo la velocità ottenuta dal selettore di velocità

$$\frac{m}{q} = \frac{rB}{v} = \frac{rBB_{\text{in}}}{E}$$

15.0.5.3 Ciclotrone

Un ciclotrone è una macchina usata per accelerare fasci di particelle elettricamente cariche utilizzando una corrente alternata.

Esso è formato da due elettrodi semicircolari cavi a forma di D, distanziati tra di loro. Applicando un'opportuna differenza di potenziale alterna ad alta frequenza tra i due elettrodi, le particelle subiscono un'accelerazione ogni volta che passano nello spazio tra essi. Il raggio cresce al crescere dell'energia della particella, fino a quando il fascio di particelle fuoriesce tangenzialmente dal bordo del dispositivo.

Il raggio di curvatura è dato da

$$r = \frac{mv}{qB}$$

da cui ricaviamo il periodo di rotazione

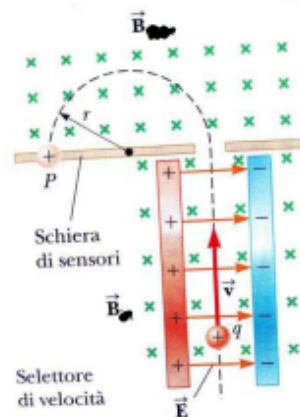
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

il quale notiamo non dipende dalla velocità delle particelle.

15.1 Esercizi

Esercizio 67:

Si consideri lo spettrometro di massa schematizzato in Figura 29.14. L'intensità del campo elettrico presente tra i due piatti del selettore di velocità è 2.50×10^5 V/m e il campo magnetico presente sia nel selettore di velocità che nella camera di deflessione vale 0.0350 T. Si calcoli il raggio della traiettoria per uno ione monovalente avente una massa $m = 2.18 \times 10^{-26}$ kg.



Soluzione 67:

$$E = 2.5 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

$$B = 0.035 \text{ T}$$

$$m = 2.18 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$V = \frac{E}{B} = \frac{2.5 \cdot 10^3}{35 \cdot 10^{-3}} = 0.0714 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$F_B = eVB = m \frac{V^2}{R}$$

$$R = \frac{mV}{eB} = \frac{2.18 \cdot 10^{-26} \cdot 0.0714 \cdot 10^6}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.035} = 0.278 \text{ m}$$

Esercizio 68:

Un selettore di velocità consiste in un campo magnetico $\vec{B} = B\hat{j}$, con $B = 15.0$ mT, ed un campo elettrico $\vec{E} = E\hat{k}$. Si trovi il valore di E per cui un elettrone da 750 eV, in moto lungo la direzione negativa dell'asse x , non viene deflesso.

Soluzione 68:

$$\vec{B} = (15\hat{j}) \text{ mT}$$

$$\vec{E} = E\hat{k}$$

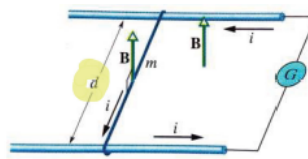
$$qV = 750 \text{ eV} = 750 \text{ eV} \times 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = \frac{1}{2} mV^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 750 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}}} = 16.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$E = VB = 16.2 \cdot 10^6 \cdot 0.015 = 243.6 \text{ kV}$$

Esercizio 69:

Un cavo metallico di massa m può scorrere senza attrito lungo due rotaie orizzontali separate da una distanza d , come illustrato nella figura 29-43. L'insieme giace in un campo magnetico uniforme B . Una corrente costante i fluisce dal generatore G lungo una rotaia, passa attraverso il cavo e poi lungo la seconda rotaia. Si trovi la velocità (modulo e verso) del cavo in funzione del tempo, assumendo che sia fermo per $t = 0$.



Soluzione 69:

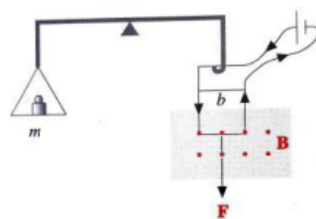
$$F_{\text{filo}} = idB \Rightarrow \text{Forza costante} \Rightarrow \text{Moto}$$

$$Q = \frac{F_{\text{filo}}}{m} = \frac{idB}{m} \text{ Uniformemente accelerato}$$

$$V = v_{v_0} + at \Rightarrow V = at = \frac{iBd}{m}t$$

Esercizio 70:

Al giogo di una bilancia è sospesa una spira rigida larga $b = 5$ cm. La parte inferiore è immersa in un campo magnetico uniforme \mathbf{B} ortogonale al piano della spira. Se nella spira circola una corrente di intensità $i = 1$ A con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre mettere una massa $m = 0.5$ g sul piatto. Calcolare il valore del modulo di \mathbf{B} .



Soluzione 70:

$$b = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

$$i = 1 \text{ A}$$

$$m = 0.5 \text{ g} = 0.0005 \text{ kg}$$

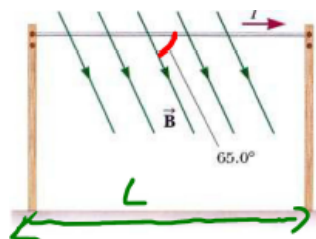
$$\vec{F}_b = i\vec{L} \times \vec{B}$$

$$mg = ibB$$

$$B = \frac{mg}{ib} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 9.8}{1 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Esercizio 71:

Un cavo per il trasporto di energia elettrica di lunghezza 58.0 m è percorso da una corrente di 2.20 kA verso Nord, come mostrato in Figura P29.41. Il campo magnetico terrestre localmente vale 5.00×10^{-5} T, è diretto verso Nord e forma un angolo di 65.0° , verso il basso, con il cavo conduttore. Si trovino (a) il modulo e (b) la direzione della forza magnetica agente sul cavo.

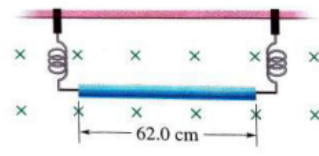


Soluzione 71:

$$F_B = 2200 * 58 * 5 \cdot 10^{-5} * \sin 65^\circ = 5.78 \text{ N}$$

Esercizio 72:

Un cavo di lunghezza pari a 62.0 cm e di massa pari a 13.0 g è sospeso con un paio di elettrodi elastici in un campo magnetico di 0.440 T. Si determini il valore e il verso della corrente nel cavo richiesta per annullare la tensione meccanica degli elettrodi determinata dal peso del cavo.

**Soluzione 72:**

$$L = 62 \text{ cm} = 0.62 \text{ m}$$

$$m = 13 \text{ g} = 0.013 \text{ kg}$$

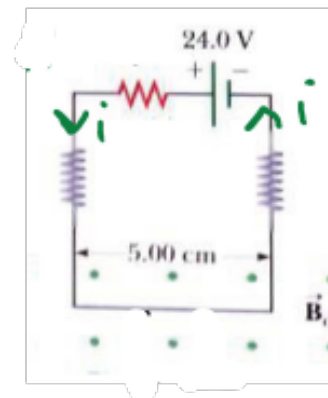
$$B = 0.440 \text{ T}$$

$$iLB = mg$$

$$F_B - F_g = 0 \Rightarrow i = \frac{mg}{LB} = \frac{0.013 * 9.8}{0.62 * 0.44} = 4.67 \text{ A}$$

Esercizio 73:

Problema di riepilogo. Il circuito di Figura consiste in fili orizzontali che sono collegati alle estremità di due molle verticali identiche. La parte superiore del circuito è fissa ed il filo rettilineo inferiore ha una massa di 10.0 g ed una lunghezza di 5.00 cm. Le molle si allungano di 0.500 cm sotto il peso del filo ed il circuito ha una resistenza totale di 12.0Ω . Quando viene acceso un campo magnetico uscente dal foglio, si osserva un ulteriore allungamento di 0.300 cm. Solamente il cavo orizzontale sul fondo del circuito è immerso nel campo magnetico. Qual è il valore del campo magnetico?

**Soluzione 73:**

$$m = 10 \text{ g} = 0.010 \text{ kg}$$

$$L = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

$$x_1 = 0.5 \text{ m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$R = 12 \Omega$$

$$x_2 = 0.3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$K = \frac{mg}{x_1} = \frac{0.010 * 9.8}{5 \cdot 10^{-3}} = 19.6$$

$$F_B = Kx_2 = 19.6 * 3 \cdot 10^{-3} = 0.0588 \text{ N}$$

$$F_B = iLB \Rightarrow B = \frac{F_B}{iL} = \frac{0.0588}{2 \times 0.05} = 0.588 \text{ T}$$

Esercizio 74:

Un ciclotrone costruito per accelerare protoni ha un raggio esterno pari a 0.350 m. I protoni vengono emessi, quasi a riposo, da una sorgente che si trova al centro e vengono accelerati da una tensione di 600 V ogni volta che attraversano l'intercapedine tra le due "di". Le "di" si trovano fra i poli di un elettromagnete che produce un campo di 0.800 T. (a) Si trovi per i protoni la frequenza di ciclotrone. Si trovino (b) il modulo della velocità di uscita dei protoni dal ciclotrone e (c) la loro energia cinetica massima. (d) Quanti giri percorre un protone nel ciclotrone? (e) Qual è l'intervallo di tempo necessario per accelerare un protone?

Soluzione 74:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{eB}{\text{rad/s} \cdot \text{m}} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.8}{1.67 \times 10^{-27}} = 0.766 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$V = \frac{eBR}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.8 \times 0.35}{1.67 \times 10^{-27}} = 2.68 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1.67 \times 10^{-27} \times (2.68 \times 10^7)^2 = 5.99 \times 10^{13} \text{ J} = 0.751 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_K = n \times 2e\Delta V \Rightarrow n \frac{\Delta E_k}{2e\Delta V} = \frac{5.99 \times 10^{13}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 600} = 3.1 \times 10^3$$

$$\Delta t = nT = 2.56 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.766 \times 10^8} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Capitolo 16

Sorgenti di Campo Magnetico

16.1 Legge di Gauss per il Campo Magnetico

Consideriamo una generica superficie chiusa immersa in un campo magnetico. L'infinitesimo di flusso del campo sarà

$$d\phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Il flusso totale è dunque dato da

$$\phi_B = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

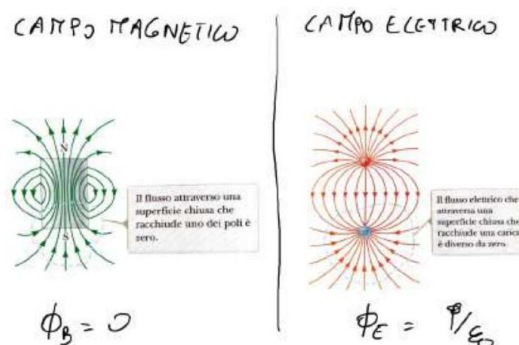
Per via della conformazione del campo magnetico e della sua struttura dipolare, in ogni superficie chiusa si hanno tante linee entranti quanto linee uscenti. Ne deriva che

$$\phi_B = 0$$

che è anche la seconda equazione di Maxwell.

Le differenze tra campo magnetico e campo elettrico sono:

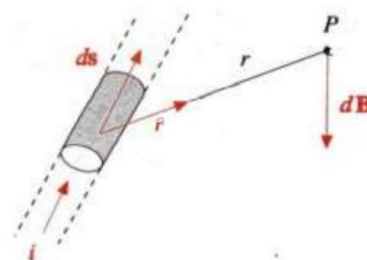
- Le sorgenti del campo magnetico sono le correnti elettriche, mentre quelle del campo elettrico sono le cariche.
- Il flusso attraverso una superficie chiusa che racchiude il campo elettrico è uguale a zero, mentre il flusso attraverso una superficie chiusa che racchiude una carica è diverso da zero.



16.2 Legge di Biot-Savart

Per il calcolo del campo magnetico prodotto dalla corrente che scorre all'interno del circuito bisogna sommare vettorialmente gli infiniti contributi di campo, dovuti agli elementi $d\vec{s}$ in cui viene suddiviso il circuito. Il campo magnetico generato a distanza r da un conduttore in cui passa corrente è quindi dato da:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$



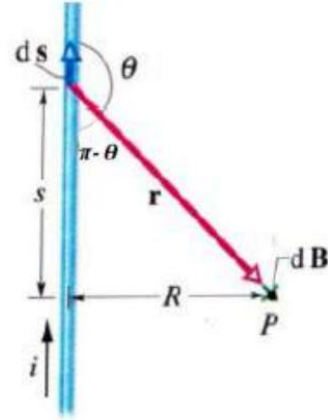
16.2.1 Campo Magnetico Prodotto da un Filo di Lunghezza Infinita

Consideriamo un filo di lunghezza infinita. Dalla legge di Biot-Savart abbiamo che l'infinitesimo di campo magnetico è dato da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

Il modulo del campo sarà quindi dato da

$$\vec{B} = 2 \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta}{r^2} ds$$



Sostituiamo:

- $r = \sqrt{S^2 + R^2}$
- $\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{S^2 + R^2}}$

Continuiamo con l'integrazione

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R}{(S^2 + R^2)^{3/2}} ds$$

Questo è un integrale notevole

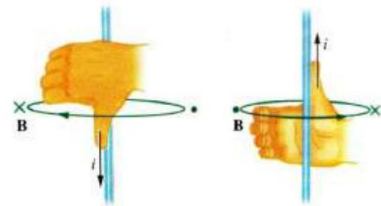
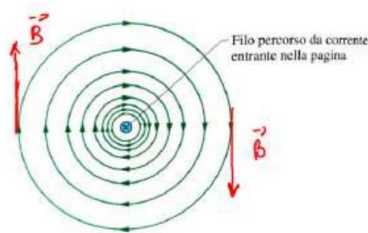
$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Per cui diventa

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left[\frac{S}{(S^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^\infty$$

E infine

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



Il campo generato dal filo è radiale. Il verso di rotazione è determinato prendendo la mano destra e puntando il pollice nel verso della corrente. Il verso di rotazione è dato dalla direzione delle dita.

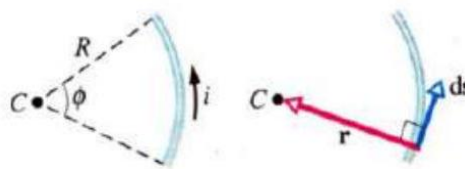
16.2.2 Campo Magnetico Prodotto da un Filo Piegato ad Arco

Consideriamo il caso di un filo piegato ad arco. Prendiamo un infinitesimo ds in modo che sia rettilineo e che il vettore posizione r sia perpendicolare. In questo modo si ottiene che $ds \sin \theta = ds$. L'infinitesimo di campo è dunque dato da

$$dB = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi R^2}$$

Integrando si trova il campo totale

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} S$$



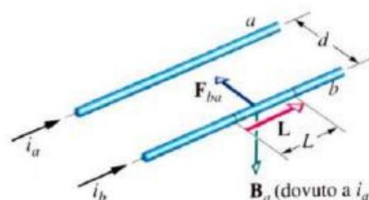
Sappiamo che l'arco S è dato da $S = R\phi$ perciò possiamo scrivere infine

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \phi$$

16.2.3 Forza Magnetica tra Conduttori Paralleli

Vediamo il caso di due conduttori paralleli percorsi da corrente. Entrambi generano un campo magnetico che produce una forza sull'altro filo. Il campo magnetico del conduttore a è dato da

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$



La forza magnetica generata su b è dovuta al campo magnetico prodotto dalla corrente del conduttore a ed è dato da

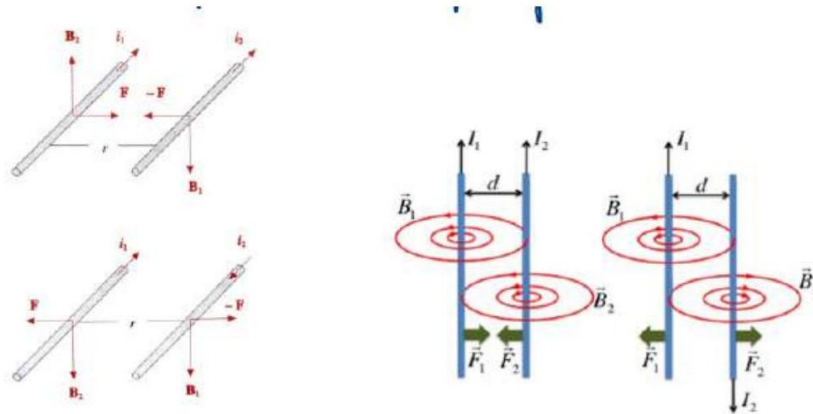
$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$$

con modulo dato da

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90 = i_b L \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

In conclusione:

$$F_{ba} = \frac{\mu_0 L}{2\pi d} i_a i_b$$

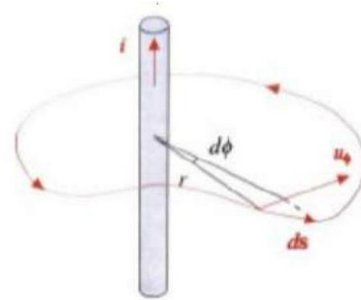


Conduttori paralleli in cui scorrono correnti nello stesso verso si attraggono. Conduttori paralleli in cui scorrono correnti in verso opposto si respingono.

16.3 Legge di Ampere

Analogamente al caso elettrostatico dove, in condizioni di simmetria, si può utilizzare la legge di Gauss per il calcolo del campo, per il campo magnetico, in condizioni di simmetria delle correnti, si può usare la legge di Ampere per il calcolo del campo magnetico.

Calcoliamo la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa che "concatena" (gira attorno) un filo percorso da corrente. Facciamo l'integrale del campo magnetico sul percorso



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto scalare tra il campo e l'infinitesimo di percorso è

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds \cos \phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ds \cos \phi$$

dove $ds \cos \theta$ è la proiezione nella direzione tangenziale alla circonferenza che rappresenta la linea di campo \vec{B} e perciò

$$ds \cos \phi = r d\phi$$

La circuitazione diventa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi$$

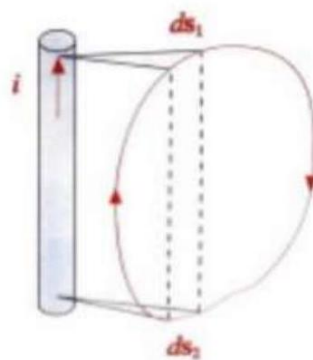
In conclusione

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

La linea chiusa concatena la corrente.

Prendiamo il caso di un percorso che non concatena la corrente. Per ogni infinitesimo di percorso con $d\vec{s}_1$ con proiezione lungo \vec{B} pari a $r d\phi$ c'è un analogo infinitesimo $d\vec{s}_2$ con proiezione lungo \vec{B} pari a $-r d\phi$, per cui l'integrale è nullo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

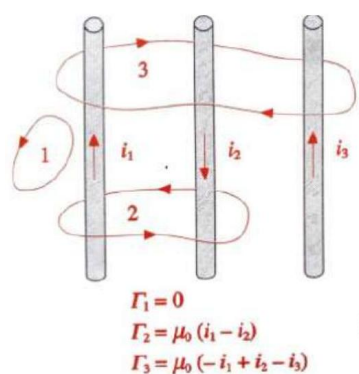


La corrente che compare nella legge di Ampere ha un segno che dipende dall'orientamento della linea chiusa in relazione al verso della corrente nel filo.

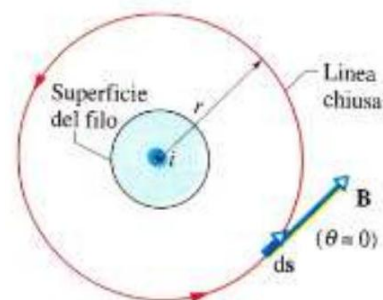
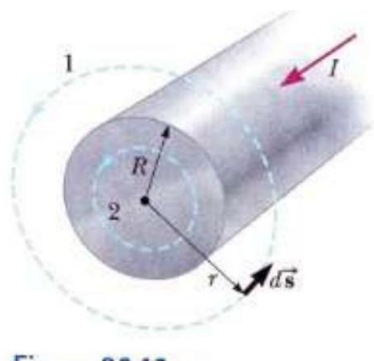
Se la linea chiusa concatena più fili rettilinei percorsi da corrente si ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

dove $I = \sum_k i_k$. Il campo magnetico che compare nell'integrale di linea è quello formato da tutte le correnti presenti, ma la sua circuitazione dipende solo dalle correnti concatenate.



16.3.1 Campo Magnetico in un Filo Rettilineo



Calcoliamo il campo magnetico prodotto da un filo infinito di raggio R a distanza r dall'asse del filo. Alto grado di simmetria. Problema risolvibile con la legge di Ampere.

Partiamo dal caso $r \gg R$. Come percorso per il calcolo della circuitazione usiamo una circonferenza (percorso 1)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

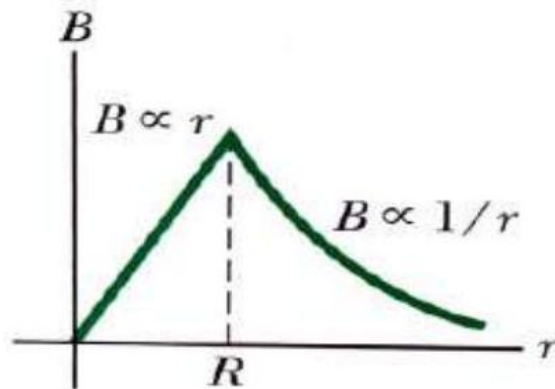
Ora vediamo il caso $r < R$. Si usa ora il percorso 2 interno alla circonferenza del filo. Dato che la corrente è distribuita uniformemente nel filo, la corrente che scorre nella parte di filo delimitata dal percorso è data da

$$i' = i \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = i \frac{r^2}{R^2}$$

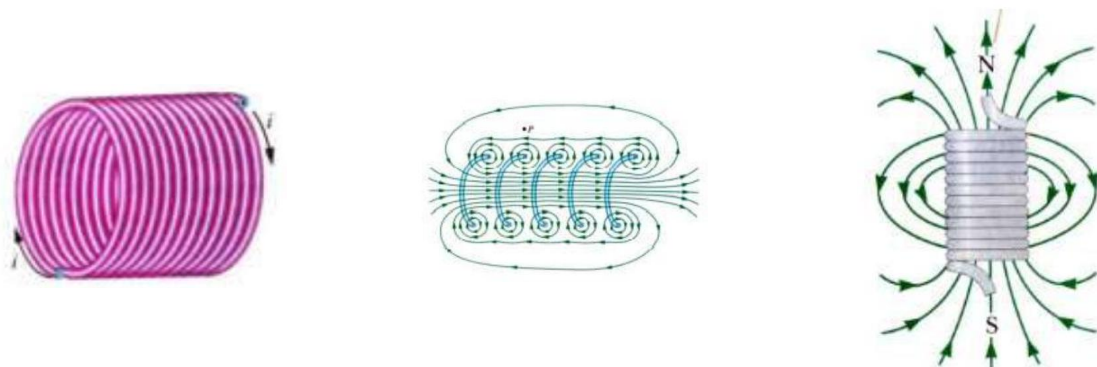
Da cui, applicando la legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B 2\pi r = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2}$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} \right) r$$



16.3.2 Campo Magnetico nel Solenoide



Un solenoide è un lungo filo avvolto a forma di elica. Quando un solenoide è percorso da corrente dalla legge di Biot-Savart si crea un campo magnetico. Le linee di campo assomigliano a quelle di una sbarretta magnetizzata; ciò vuol dire che il solenoide ha un polo nord e un polo sud.

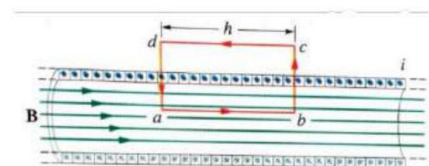
16.4 Solenoide Ideale

Per il calcolo del campo magnetico ci affidiamo ad un solenoide ideale in cui:

- il campo magnetico è uniforme e parallelo all'asse
- il campo all'esterno è nullo

Applichiamo la legge di Ampere integrando lungo il percorso

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



Notiamo che:

- I percorsi $b - c$ e $d - a$ sono ortogonali al campo magnetico e dunque non danno contributo nella circuitazione (prodotto scalare nullo).
- Il percorso cd non dà contributo in quanto il campo magnetico all'esterno è nullo, essendo un solenoide ideale.

Allora la circuitazione sarà data da

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh$$

Applichiamo la legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = Bh$$

dove I è la corrente totale concatenata al percorso $abcd$, che vale

$$I = inh$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza. Allora

$$Bh = \mu_0 inh$$

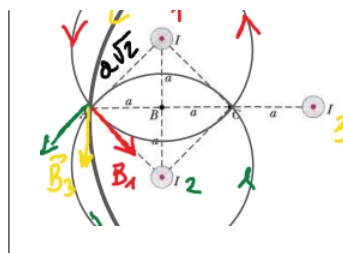
e in conclusione

$$B = \mu_0 in$$

16.5 Esercizi

Esercizio 75:

Tre lunghi fili conduttori paralleli conducono corrente $I = 2.00A$. La figura è una vista in sezione con le correnti che escono dal foglio. Se $a = 1.99cm$, si determini il campo magnetico nei punti (a) A , (b) B e (c) C .



Soluzione 75:

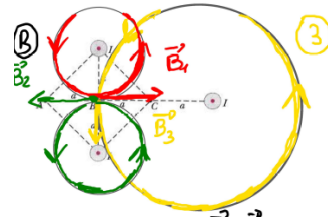
a)

$$\begin{aligned} B(A) &= 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi a \sqrt{2}} \cos 45^\circ + \frac{\mu_0 i}{2\pi a} = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \right) = 0.54 \cdot 10^{-4} \text{ T} \\ \vec{B}_A &= (-0.5410^{-4} \hat{j}) \text{ T} \end{aligned}$$

b)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi 2a} = -0.20 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

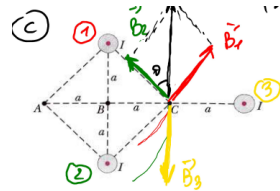
$$\vec{B}(B) = (-0.20 \cdot 10^{-4} \hat{j}) \text{ T}$$



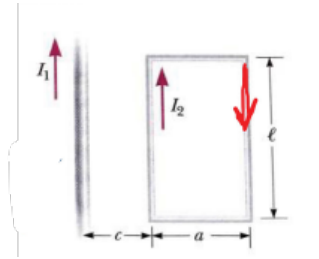
c)

$$B = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi a \sqrt{2}} \cos 45^\circ - \frac{\mu_0 i}{2\pi 0} =$$

$$= \frac{2\mu_0 i}{2\pi a \sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\mu_0 i}{2\pi a} = 0$$

**Esercizio 76:**

Nella figura il lungo filo rettilineo è percorso da una corrente $I_1 = 5.00 \text{ A}$ e si trova nello stesso piano della spira rettangolare percorsa da una corrente $I_2 = 10.0 \text{ A}$. Le lunghezze in figura sono $c = 0.100 \text{ m}$, $a = 0.150 \text{ m}$ e $\ell = 0.450 \text{ m}$. Si calcolino intensità e direzione della forza risultante che viene esercitata sulla spira rettangolare dal filo rettilineo.

**Soluzione 76:**

$$F = -F_1 + F_2 = -i_2 l \frac{\mu_0 i_1}{2\pi c} + i_2 l \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(a+c)} =$$

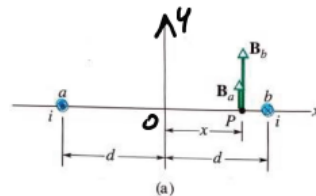
$$= \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{c} \right) = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \text{ A}^2 \times 100.45}{6.28} \left(\frac{1}{0.25} - \frac{1}{0.1} \right)$$

$$F = -27.110^{-6} \text{ N}$$

$$\vec{F} = (-27.1 \cdot 10^{-6} \hat{i}) \text{ N}$$

Esercizio 77:

Si considerino due fili lunghi e paralleli, distanti $2d$ l'uno dall'altro e nei due fili scorra una corrente i in versi opposti, come mostrato in figura 30-10a. Si ricavi un'espressione per il campo magnetico $B(x)$, intensità del campo magnetico risultante nei punti P sulla congiungente i due fili, a una distanza x dal punto medio.

**Soluzione 77:**

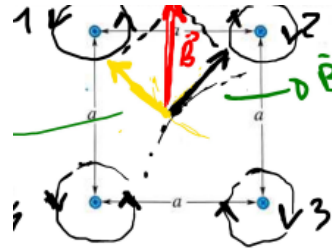
$$B(x) = B_a(x) + B_b(x) =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi(d+x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)} =$$

$$= \frac{\mu_0 i d}{\pi(d^2 - x^2)}$$

Esercizio 78:

Si considerino quattro fili di rame paralleli fra loro, collocati in modo che in una sezione trasversale formino i quattro angoli di un quadrato di 20 cm di lato. Ogni filo sia percorso da una corrente di 20 A nelle direzioni mostrate nella figura 30-48. Qual è l'intensità e la direzione di B nel centro del quadrato?

**Soluzione 78:**

$$B = 2B_1\sqrt{2} = \frac{2\mu_0 i}{2\pi\sqrt{2}/2}\sqrt{2} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

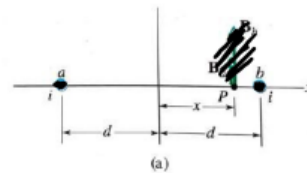
$$\vec{B} = (8 \cdot 10^{-5} \hat{j}) \text{ T}$$

Esercizio 79:

31P. Nella figura 30 – 10a si assuma che entrambe le correnti scorrano nello stesso verso, uscenti dal piano della pagina. Si dimostri che il campo magnetico nel piano determinato dai fili è

$$B(x) = \frac{\mu_0 i x}{\pi(x^2 - d^2)}.$$

Si ponga $i = 10 \text{ A}$ e $d = 2.0 \text{ cm}$ nella figura 30–10a, e si tracci il grafico di $B(x)$ per l'intervallo $-2 \text{ cm} < x < 2 \text{ cm}$. Assumiamo inoltre che i diametri dei fili siano trascurabili.

**Soluzione 79:**

$$\begin{aligned} \vec{B}'(x) &= \vec{B}_a(x) - \vec{B}_b(x) = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi(x+d)} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)} = \\ &= \frac{\mu_0 i(d-x-d-x)}{2\pi(d^2-x^2)} = \frac{-2x\mu_0 i}{2\pi(d^2-x^2)} = \frac{\mu_0 i x}{\pi(x^2-d^2)} = \\ B(x) &= \frac{410^{-6}x}{(x^2-410^{-4})} \text{ T} \end{aligned}$$

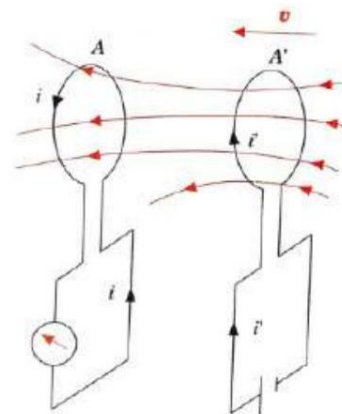
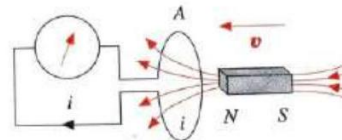
Capitolo 17

Campi Elettrici e Magnetici Variabili nel Tempo

17.1 Induzione Elettromagnetica

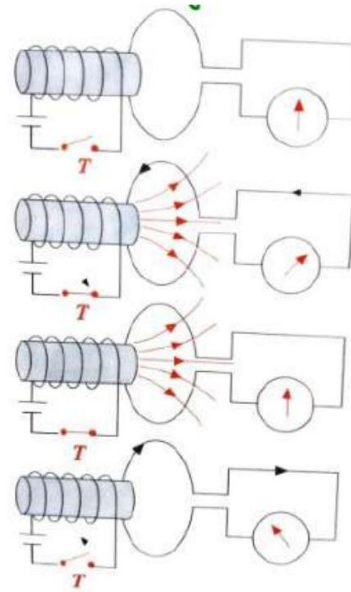
Consideriamo una spira di filo conduttore connessa ad un amperometro. Se avviciniamo un magnete si ha un passaggio di corrente nella spira. Se allontaniamo il magnete la corrente scorre in verso opposto. Gli effetti sono uguali se si tiene il magnete fermo e si avvicina o allontana la spira.

Ora consideriamo due spire, una in cui passa la corrente è l'altra no. Il campo magnetico è prodotto dalla corrente che scorre nel secondo circuito. Muovendo la spira 1 rispetto alla spira 2 o viceversa si ottiene lo stesso risultato del precedente esperimento. In entrambi i casi il campo è costante nel tempo, ma non uniforme.

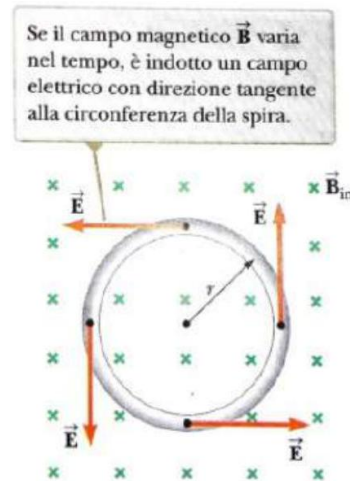


Consideriamo ora un solenoide collegato ad un generatore vicino ad una spira, entrambi fermi. Vediamo la serie di passi:

1. No corrente.
2. Si chiude il circuito. Vi è una corrente variabile nel solenoide, che genera un campo magnetico variabile nel tempo. Vi è corrente nella spira.
3. Corrente costante, genera un campo magnetico costante.
4. Si apre il circuito. Si ha una corrente variabile nel solenoide, che genera un campo variabile, e si ha una spira in verso opposto al precedente.



In questo esperimento il campo magnetico è uniforme e costante nel tempo. Viene variata l'area della spira attraversata dalle linee di campo, deformandola o facendola ruotare. In entrambi i casi si registra un passaggio di corrente nel circuito.



Tutti questi esperimenti possono essere spiegati mediante la legge di Faraday. Ricapitolando, la variazione del flusso magnetico può essere dovuta a:

- Moto relativo circuito-sorgente, con campo non uniforme.
- Variazione nel tempo del campo a causa di una variazione nell'intensità della corrente che lo genera. Il campo può essere uniforme o no.
- Variazione nella geometria del circuito, quindi la sua area.
- Variazione nell'angolo tra il campo ed il circuito.

In generale, qualsiasi sovrapposizione dei 4 effetti.

17.2 Legge di Faraday

Ogni volta che il flusso del campo magnetico concatenato con un circuito varia nel tempo, si ha nel circuito una f.e.m indotta data da

$$\epsilon = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

Nel circuito pertanto scorrerà una corrente data da $i = \epsilon/R$, dove R è la resistenza del circuito. La variazione del flusso magnetico concatenato ad un circuito da origina ad un campo elettrico indotto

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Poichè la circuitazione è diversa da 0, il campo elettrico indotto non è conservativo.

Dimostrazione Il lavoro svolto su una particella in un percorso chiuso è dato da

$$L = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Sappiamo che il lavoro è uguale a ϵq , dove ϵ è la f.e.m. indotta. Dunque sostituendo si ottiene

$$\epsilon q = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

semplifichiamo q e otteniamo

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Applichiamo la prima equazione della legge di Faraday e otteniamo proprio

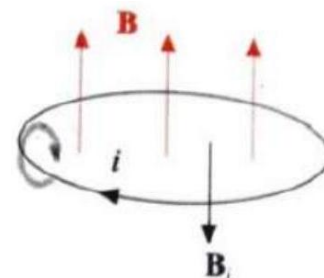
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

17.3 Legge di Lenz

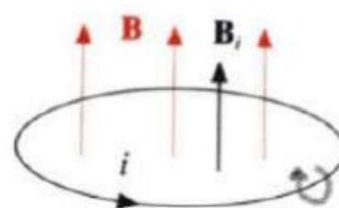
Il segno meno nella legge di Faraday viene enunciato come legge di Lenz. E' una conseguenza della legge di conservazione dell'energia e determina la direzione della forza elettromotrice risultante dall'induzione elettromagnetica in un circuito elettrico. Essa enuncia che:

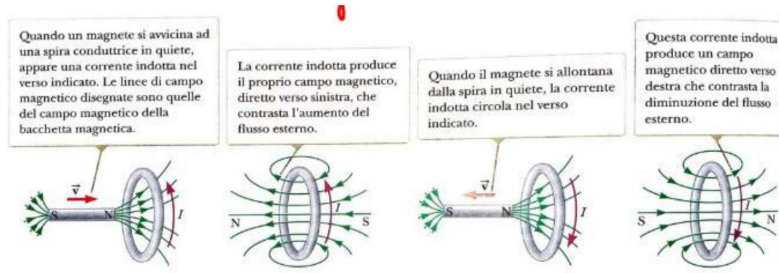
L'effetto della f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno.

Quando un magnete si avvicina o allontana ad una spira conduttrice in quiete appare una corrente indotta che circola nella spira, che a sua volta produce un proprio campo magnetico. Se il magnete si avvicina, cioè il flusso magnetico aumenta, la f.e.m. indotta è negativa e la corrente che si viene a creare genera un campo magnetico diretto in direzione opposta.



Viceversa, se il magnete si allontana e si ha quindi una diminuzione di flusso, la f.e.m. indotta è positiva e si ha un verso della corrente opposto al caso precedente, che fa sì che il campo magnetico generato vada nella stessa direzione del flusso, opponendosi alla sua diminuzione.

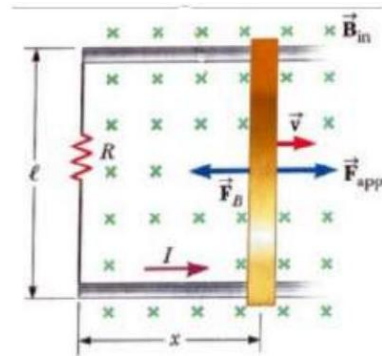




17.4 Forza Elettromotrice nei Circuiti in Moto

Studiamo il caso di una bacchetta conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, che scorre su delle guide fisse e parallele, muovendosi a velocità costante sotto l'azione della forza applicata. Nella spira viene indotta una corrente antioraria. La forza magnetica agente sulla bacchetta percorsa da tale corrente si oppone al moto. Vi è una variazione del flusso magnetico dovuta alla variazione della superficie del circuito

$$\phi_B = Blx$$



Dunque dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz nel circuito viene indotta una f.e.m.

$$\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

Usando la legge di Ohm ricaviamo la velocità

$$i = \frac{\epsilon}{R} = \frac{Blv}{R} \Rightarrow v = \frac{Ri}{Bl}$$

La forza magnetica che si esercita sulla sbarretta è

$$\vec{F}_B = i\vec{l} \times \vec{B} = ilB$$

dato che la lunghezza è perpendicolare al campo. Allora l'equazione del moto della sbarretta è data da

$$F_{app} - F_B = 0 \Rightarrow F_{app} = F_B = ilB$$

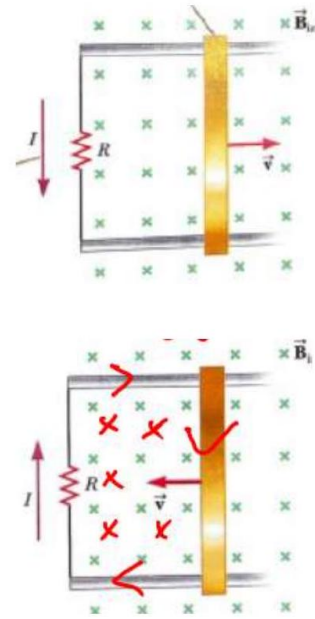
Per la conservazione dell'energia, la potenza meccanica impiegata a far muovere la sbarretta appare come potenza dissipata nella resistenza, infatti

$$P = F_{app}v = ilB\frac{Ri}{Bl} = i^2R$$

che è la legge di Joule.

Quando la bacchetta conduttrice scivola verso destra, il flusso magnetico attraverso l'area della spira, prodotto dal campo magnetico esterno che entra nel foglio, cresce nel tempo. Viceversa se la barretta si muove verso sinistra, il flusso diminuisce nel tempo e la corrente indotta scorre in verso orario.

Per la legge di Lenz la corrente indotta deve essere antioraria, in modo da produrre un flusso magnetico contrastante che esce dal foglio. Se il verso non fosse quello previsto dalla legge di Lenz, imprimendo una piccola spinta verso destra, la forza magnetica sarebbe diretta verso destra e tenderebbe ad accelerare la bacchetta. Questa è una violazione del principio di conservazione dell'energia. La legge di Lenz esprime la conservazione dell'energia nei campi elettromagnetici indotti.



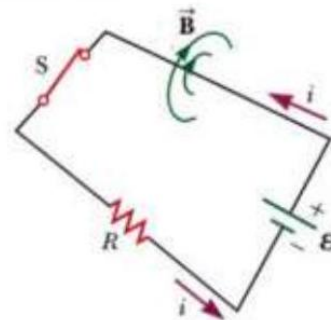
17.5 Autoinduzione e Induttanza

Un circuito percorso da corrente produce un campo magnetico secondo la legge di Biot-Savart. Il flusso concatenato con il circuito stesso si chiama autoflusso ed è proporzionale alla corrente

$$\phi = Li$$

dove L è l'induttanza del circuito, che ha come unità SI l'henry (H).

Dopo che l'interruttore viene chiuso la corrente produce un flusso magnetico attraverso l'area racchiusa dal circuito. Mentre la corrente aumenta fino al suo valore di regime, il flusso magnetico, cambiando nel tempo, induce una f.e.m. nel circuito.



Quando la corrente non è costante nel tempo, il flusso concatenato varia e nel circuito compare una f.e.m. indotta detta di autoinduzione data da

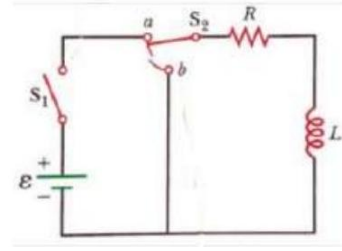
$$\epsilon_L = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

L'induttanza si può pensare come concentrata in un tratto particolare del circuito, creando dei componenti chiamati induttori.

17.6 Circuiti RL

La presenza di un induttore nel circuito impedisce alla corrente di aumentare o diminuire istantaneamente. Quando l'interruttore nel circuito viene chiuso, la corrente aumenta e una f.e.m. che si oppone all'aumento della corrente viene indotta nell'induttore

$$\epsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$



Usiamo la legge delle maglie e percorriamo il circuito in senso orario. Poi separiamo le variabili e integriamo:

$$\begin{aligned}\epsilon - iR &= L \frac{di}{dt} \\ \frac{\epsilon - iR}{di} &= \frac{L}{dt} \\ \int \frac{di}{\epsilon - iR} &= \int \frac{dt}{L} \\ -\frac{1}{R} \ln(\epsilon - iR) &= \frac{t}{L} + \text{cost} \\ \ln(\epsilon - iR) &= -\frac{R}{L}t + \text{cost} \\ \epsilon - iR &= Ae^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

dove A è una costante di integrazione che dipende dalle condizioni iniziali.

Nell'istante $t = 0$, quando viene chiuso l'interruttore S_1 , l'induttore si comporta come un interruttore aperto e non fa passare corrente. Invece, all'istante $t = \infty$ l'induttore si comporta come un cortocircuito.

Vediamo si comporta la corrente durante il periodo transitorio:

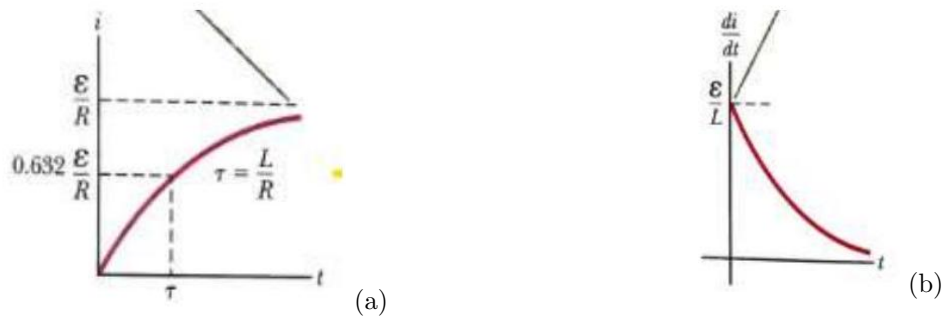
$$\epsilon - Ri = \epsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

dove sostituiamo ad A la condizione iniziale uguale alle f.e.m. del generatore. Ricaviamo la corrente

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(\epsilon - \epsilon e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{\epsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Notiamo che $L/R = \tau$ è una costante di tempo del circuito, quindi in definitiva la corrente è data da

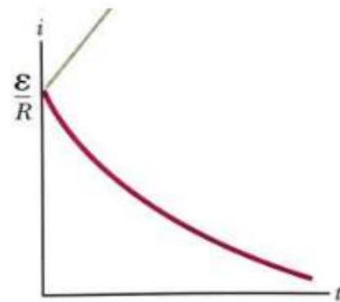
$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



a) La corrente dall'istante di chiusura aumenta fino al valore di regime ϵ/R . All'istante τ la corrente è pari al 63.2 per cento del valore massimo. b) La rapidità con cui varia la corrente è massima all'istante iniziale di chiusura di S_1 .

Adesso commutiamo l'interruttore S_2 in b , escludendo il generatore. La f.e.m. viene adesso fornita dall'induttore. La corrente è massima all'istante $t = 0$ ed è nulla all'istante $t = \infty$. La corrente viene quindi descritta da

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



All'istante $t = 0$ la corrente ha valore massimo ϵ/R .

17.7 Energia Potenziale Magnetica

La potenza erogata dal generatore è data da

$$\epsilon i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

Moltiplicando per dt si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\epsilon i dt = Ri^2 dt + Lidi$$

dove:

- $\epsilon i dt$: è il lavoro del generatore
- $Ri^2 dt$: è il lavoro per far circolare le cariche nel circuito e trasformarle in calore
- $Lidi$: è il lavoro contro la f.e.m. di autoinduzione

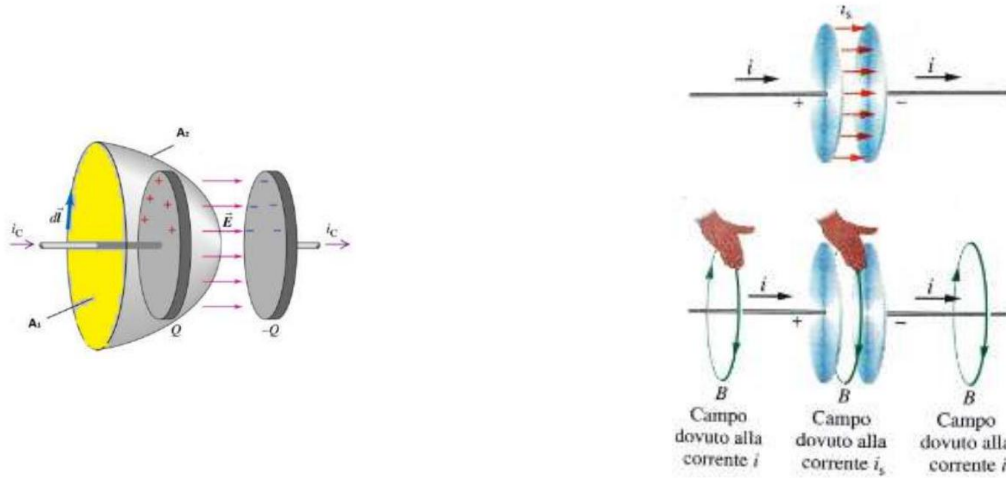
Risolvendo l'equazione otteniamo l'energia potenziale dell'induttore

$$U_L = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2} Li^2$$

Che è l'energia magnetica, ossia il lavoro svolto contro la f.e.m. nel tempo in cui la corrente passa da 0 al valore i :

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2$$

17.8 Legge di Ampere-Maxwell



A_1 e A_2 sono delimitate dallo stesso percorso chiuso, ma solo A_1 è attraversato dalla corrente concatenata. Ciò è dovuto al fatto che non vi è passaggio di cariche tra le armature del condensatore. Vi è una discontinuità della corrente. Inoltre nello spazio circostante al condensatore è presente un campo magnetico. Cosa lo produce?

A causa del processo di carica del condensatore la carica si accumula sulle sue armature, producendo una variazione del flusso del campo elettrico:

$$\phi_E = EA = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A = \frac{q}{A \epsilon_0} A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La variazione del flusso elettrico tra le armature del condensatore ha le dimensioni di una corrente e produce il campo magnetico nella regione del condensatore. La corrente elettrica e la variazione del flusso di campo elettrico sono quindi le sorgenti del campo magnetico. La corrente è chiamata corrente di spostamento (termine storico) ed è definita da:

$$i_S = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{dq}{dt} \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{dq}{dt}$$

La corrente di spostamento non è una vera e propria corrente, nel senso che non corrisponde ad un moto ordinato di cariche elettriche.

Usando la corrente di spostamento all'interno della legge di Ampere, otteniamo la legge di Ampere-Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_s) = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

17.9 Le Quattro Equazioni di Maxwell

Le quattro equazioni di Maxwell rappresentano le proprietà dei campi elettrici e magnetici. Governano e descrivono l'interazione elettromagnetica. Sono uno dei risultati più importanti della fisica classica, perchè hanno permesso di unificare concettualmente fenomeni elettrici e magnetici. Questi fenomeni non esistono separatamente ma sono dovuti ad un'unica interazione fondamentale.

- Legge di Gauss per i campi elettrici

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Legge di Gauss per i campi magnetici

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$$

- Legge di Faraday

$$\oint_{\tau} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

- Legge di Ampère-Maxwell

$$\oint_{\tau} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Caratteristiche:

- Le equazioni sono simmetriche nei due campi.
- Ammettono soluzioni che comportano la propagazione del campo elettromagnetico nello spazio e nel tempo sotto forma di onde.
- Solo relativisticamente invarianti.

Qui le equazioni sono in forma integrale, in realtà sono sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali.

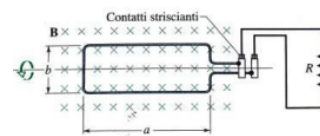
17.10 Esercizi

Esercizio 80:

Si consideri una bobina rettangolare formata da N spire di lunghezza a e di larghezza b , che viene fatta ruotare a frequenza ν in un campo magnetico uniforme B , come nella figura. (a) Si dimostri che nella spira viene indotta una f.e.m. data da

$$\phi = 2\pi\nu NabB \sin(2\pi\nu t) = \phi_0 \sin(2\pi\nu t).$$

È su questo principio che funzionano i generatori di corrente alternata in commercio. (b) Progettare una bobina che produca una f.e.m. $\phi_0 = 150$ V ruotando con una frequenza di 60.0 giri al secondo in un campo magnetico uniforme di 0.500 T.



Soluzione 80:

$$\begin{aligned} \phi_B &= \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{M} d\varepsilon = B \cos \vartheta \Sigma \\ &= B \cos \vartheta ab = B \cos(\omega t) Nab \end{aligned}$$

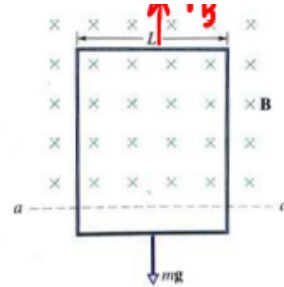
$$\begin{aligned} v\varepsilon_i &= \frac{-d\phi_B}{dt} = B\omega ab \sin \omega t \stackrel{N_{spire}}{\Rightarrow} BN\omega ab \sin \omega t \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Si devono determinare i parametri legati alla geometria del circuito in modo da soddisfare i requisiti richiesti

$$150 = 0,5T376.8\text{rad/sabN} \Rightarrow abN = 0.8 \text{ m}^2$$

Esercizio 81:

Nella figura è mostrata una lunga spira rettangolare, di larghezza L , resistenza R e massa m , immersa in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme e orizzontale, il cui verso è entrante nella pagina, che esiste solo al di sopra della linea aa . La spira viene lasciata cadere; durante la caduta essa accelera fino a raggiungere una data velocità v . Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli v_t .



Soluzione 81:

$$\phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BLX$$

$$\frac{d\phi_B}{dt} = BL \frac{dx}{dt} = BLV$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = -BLV$$

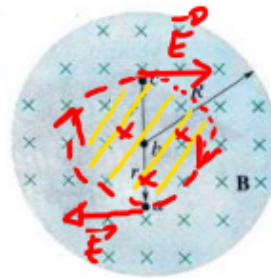
$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow F_B = iLB$$

$$i = \varepsilon_i / R \quad F_B = \frac{BLV}{R} LB = \frac{B^2 L^2 V}{R}$$

$$F_B - mg = 0 \quad \frac{B^2 L^2}{R} v - mg = 0 \quad v = mg \frac{R}{B^2 L^2}$$

Esercizio 82:

Nella figura è rappresentato un campo magnetico uniforme \mathbf{B} confinato in un volume cilindrico di raggio R . L'intensità di \mathbf{B} decresce nel tempo al ritmo costante di 10.7 mT/s . A che accelerazione istantanea (modulo e direzione) è sottoposto un elettrone che si trovi in a, b o c ? Si assuma $r = 5.0 \text{ cm}$



Soluzione 82:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \frac{d\phi_B}{dt}$$

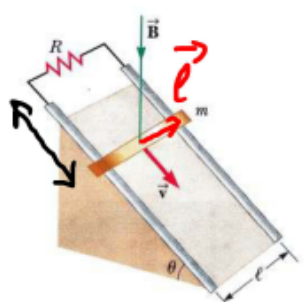
$$E_i - 2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{d\phi_B}{m_e}$$

Gli elettroni si muovono in senso contrario al campo \vec{E}_i

Esercizio 83:

La figura mostra una bacchetta di massa $m = 0.200$ kg che scivola senza attrito su una coppia di rotaie distanti $\ell = 1.20$ m, appoggiate su un piano inclinato di $\theta = 25.0^\circ$ rispetto all'orizzontale. La resistenza del resistore è $R = 1.00\Omega$. Il sistema è immerso in un campo magnetico verticale rivolto verso il basso di intensità $B = 0.500$ T. A quale velocità costante v la bacchetta scivola sulle rotaie?



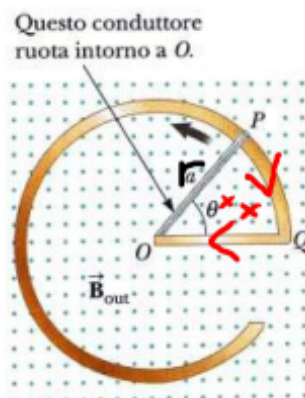
Soluzione 83:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{-d\phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(Bl \times \cos \theta) = Blv \cos \theta \\ i &= \frac{\varepsilon_i}{R} \\ \vec{F}_B &= i\vec{l} \times \vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m g \sin \theta - F \cos \theta &= 0 \\ F = m g \tan \theta &= 0.2 * 9.9 * \tan 25^\circ = 0.914 \text{ N} \\ F = i l B &= 0.314 \\ i = \frac{F}{l B} &= \frac{0.914}{1.2 * 0.5} = 1.52 \text{ A} \\ \varepsilon_1 = i R &= 1.52 * 1 = 1.52 \text{ V} \\ V = \frac{\varepsilon_i}{Bl \cos \theta} &= \frac{1.52}{0.5 * 1.2 * \cos 25^\circ} = 2.8 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Esercizio 84:

La figura mostra un filo conduttore a forma di "e" posto in un campo magnetico costante ed uniforme ed uscente dal foglio e d'intensità 0.500 T. Il raggio della parte circolare del filo è $a = 50.0$ cm. Un conduttore rettilineo con lunghezza 50.0 cm è incernierato nel punto O e ruota con una velocità angolare costante di 2.00rad/s . (a) Si calcoli la f.e.m. indotta nel circuito POQ , la cui area è $\theta a^2/2$. (b) Sapendo che tutti i conduttori hanno una resistenza specifica di $5.00\Omega/\text{m}$, si calcoli la corrente indotta nel circuito POQ dopo 0.250 s dall'istante in cui P si sovrappone a Q .



Soluzione 84:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(B \frac{\nu r^2}{2} \right) = \\
 &= \frac{Br^2}{2} \frac{d\nu}{dt} = \frac{Br^2}{2} \omega = \\
 &= 0.5 \frac{(0.5)^2}{2} 2 = 0.125 \text{ V} \\
 OQ &= r = 0.5 \\
 OP &= r = 0.5 \\
 PQ &=?
 \end{aligned}$$

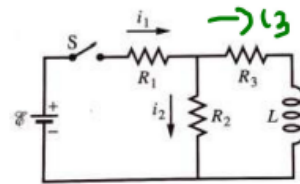
$$V = \omega r$$

$$S = vt = \omega r t = 2 * 0.5 * 0.25 = 0.25 \text{ m} \Rightarrow PQ$$

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{0.125}{(0.5 + 0.5 + 0.25)5} = \frac{0.125}{6.25} = 0.02 \text{ A}$$

Esercizio 85:

Nella figura siano $E = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10.0 \Omega$, $R_2 = 20.0 \Omega$, $R_3 = 30.0 \Omega$ ed $L = 2.00 \text{ H}$. Determinare il valore di i_1 e i_2 (a) immediatamente dopo la chiusura del circuito; (b) molto tempo dopo; (c) immediatamente dopo l'apertura del circuito; (d) molto tempo più tardi.

**Soluzione 85:**

a)

$$i_1 = i_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{100}{10 + 20} = 3.3 \text{ A}$$

b)

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 10 + \frac{600}{50} = 22 \Omega$$

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{100}{22} = 4.55 \text{ A}$$

$$V_2 = i R_{23} = 4.55 \times 12 = 54.6 \text{ V} \Rightarrow i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{54.6}{20} = 2.73$$

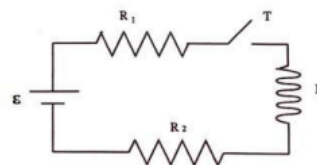
c)

Subito dopo l'apertura dell'interruttore nella maglia a destra nel circuito, la corrente rimane costante con valore pari a quello che aveva prima dell'apertura.

$$i_3 = i_1 - i_2 = 4.55 - 2.73 = 1.82 \text{ A}$$

d) $i_1 = i_2 = i_3 = 0$ Il transitorio è terminato.**Esercizio 86:**

Con riferimento al circuito in figura, determinare e rappresentare graficamente l'andamento della tensione ai capi dell'induttanza L in funzione del tempo durante il transitorio dovuto alla chiusura dell'interruttore T . I valori delle resistenze sono: $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 2000 \Omega$, quello della induttanza: $L = 0.25 \text{ H}$ e quello della f.e.m. del generatore $\varepsilon = 100 \text{ V}$



Soluzione 86:

Dato che la corrente è continua nell'istante $i(0^-) = i(0^+) = 0$. Al termine del transitorio ($t = \infty$):

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 3000r$$

$$i_{\max} = \frac{v}{R_{eq}} = \frac{100}{3000} = 0.03 \text{ A}$$

Durante il transitorio si ha:

$$i(t) = i_{\max} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \text{ con } \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.25}{3000} = 8.3 \times 10^{-5} \text{ s}$$

La tensione ai capi dell'induttore vale:

$$V_L = \frac{L di}{dt} = L \frac{i_{\max}}{2} e^{-t/\tau} = L \frac{i_{\max}}{L} R_{eq} e^{-t/\tau} = \varepsilon e^{-t/\tau}$$

Ovvero:

$$U_L = 100 e^{-t/8.3 \cdot 10^{-5}} \quad (\text{espresso in volt})$$

Esercizio 87:**Problema 2**

Una spira circolare conduttrice, di raggio $r = 10 \text{ cm}$ e resistenza $R = 3 \text{ m}\Omega$, è posta coassialmente ad un solenoide rettilineo indefinito di raggio $b = r/2$ e dotato di $n = 10^3 \text{ spire/m}$. Nel caso in cui nel solenoide scorra la corrente continua (con verso indicato in figura) $i = 0.5 \text{ A}$, si calcoli il campo B sull'asse del solenoide, a distanza $r/4$ dall'asse e a distanza $6/5r$ dall'asse. $[B(0) = B(r/4) = 0.63 \text{ mT}; B(6/5r) = 0]$ Si supponga ora che nel solenoide scorra la corrente variabile nel tempo: $i(t) = 0.5 + 0.35t$, con i in ampere e t in secondi; 1) si determini il valore della f.e.m. e della corrente indotte nella spira e il verso della corrente; $[\epsilon_i = 3 \cdot 10^{-6} \text{ V}, i_i = 1 \text{ mA}, \text{ verso orario}]$ 2) si calcoli l'energia dissipata per effetto Joule nella spira in 2 secondi. $[U = 6 \cdot 10^{-9} \text{ J}]$

Soluzione 87:

Campo magnetico B nel solenoide: Il campo magnetico B all'interno di un solenoide ideale è dato da:

$$B = \mu_0 n i$$

dove: - μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto ($4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$). - n è il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide. - i è la corrente che scorre nel solenoide. Tuttavia, il campo magnetico varia con la distanza dall'asse del solenoide. Per un solenoide di raggio b , il campo magnetico B a una distanza r dall'asse (con $r \leq b$) è dato da:

$$B(r) = \mu_0 n i \left(\frac{r^2}{2b^2} \right)$$

Se $r > b$, allora $B(r) = 0$.

1) **Sull'asse del solenoide $r = 0$:**

$$B(0) = \mu_0 n i$$

Dove:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

$$n = 10^3 \text{ spire/m}$$

$$i = 0.5 \text{ A}$$

$$B(0) = 4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 0.5 = 0.628 \text{ mT}$$

2) **A un quarto del raggio dal centro $r = r/4$:**

$$B(r/4) = \mu_0 n i \left(\frac{(r/4)^2}{2b^2} \right)$$

Dove:

$$b = r/2 = 0.05 \text{ m}$$

$$r = 0.1 \text{ m}$$

$$B(r/4) = 4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 0.5 \times \left(\frac{0.025^2}{2 \times 0.05^2} \right) = 0.628 \text{ mT}$$

3) **A una distanza maggiore del raggio dal centro $r = 6r/5$:**

$$B(6r/5) = 0 \text{ mT}$$

Corrente variabile nel solenoide: $i(t) = 0.5 + 0.35t$

1) **f.e.m. e corrente indotte nella spira:**

La f.e.m. indotta ϵ_i nella spira è:

$$\epsilon_i = -A \cdot n \cdot \frac{di}{dt}$$

Dove:

$$A = \pi r^2 = \pi (0.1)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$\frac{di}{dt} = 0.35 \text{ A/s}$$

$$\epsilon_i = -0.0314 \times 10^3 \times 0.35 = -10.99 \text{ mV}$$

La corrente indotta i_i nella spira è:

$$i_i = \frac{\epsilon_i}{R} = \frac{-10.99 \text{ mV}}{3 \text{ m}\Omega} = -3.663 \text{ mA}$$

2) **Energia dissipata per effetto Joule nella spira in 2 secondi:**

$$U = R \times (-3.663 \times 10^{-3})^2 \times 2 = 8.05053 \times 10^{-8} \text{ J}$$

Capitolo 18

Onde Elettromagnetiche

18.1 Equazioni di Maxwell in Forma Differenziale

Le equazioni sopra sono rappresentate in forma integrale. Passiamo ora alla forma differenziale. Essa è valida in forma locale esprimendo il legame tra le derivate dei campi elettrici e magnetici in un determinato punto (x, y, z) alla densità di carica e alle correnti. E' necessario utilizzare due teoremi del calcolo vettoriale:

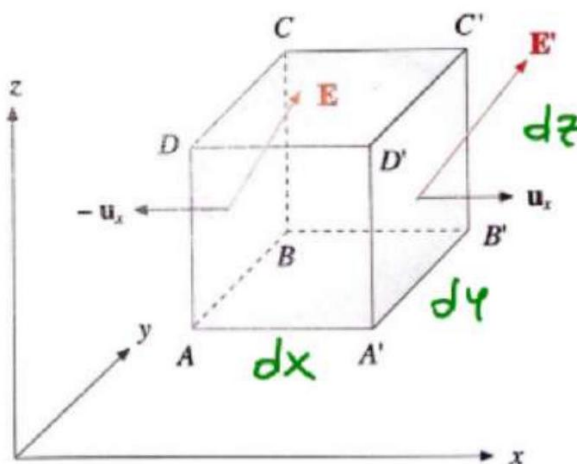
- *Teorema della divergenza*: generalizzazione ai domini n-dimensional del teorema fondamentale del calcolo integrale.
- *Teorema di Stokes*: enunciato riguardante l'integrazione delle forme differenziali che generalizza diversi teoremi di calcolo vettoriale, come il teorema della divergenza.

18.2 Legge di Gauss in Forma Differenziale

Il teorema della Divergenza è definito in questo modo:

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

Ossia, il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa coincide con l'integrale della divergenza del campo svolto nel volume di cui la superficie è frontiera. Si consideri un parallelepipedo infinitesimo che contiene nel suo volume $\tau = dxdydz$ una carica infinitesima $dq = \rho(x, y, z)d\tau$



In direzione x il flusso attraverso la superficie di destra ($dydz$) vale

$$\vec{E} \cdot \hat{i} dydz = E_x dydz$$

Analogamente per quello di sinistra si ha

$$\vec{E} \cdot \hat{n} dydz = -E_x dydz$$

Il flusso totale in direzione x sarà allora:

$$(E'_x - E_x) dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

dove E'_x è espresso con uno sviluppo in serie arrestato al primo termine, dato che x è molto piccolo.

Si hanno espressioni simili con le altre coppie di superfici. Il flusso totale attraverso il parallelepipedo infinitesimo può essere espresso come:

$$d\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \vec{\Delta} \cdot \vec{E} d\tau$$

dove il prodotto scalare $\vec{\Delta} \cdot \vec{E}$ rappresenta la divergenza del campo. Dato che secondo la legge di Gauss:

$$d\phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{\rho(x, y, z) d\tau}{\epsilon_0}$$

si ottiene

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Nello spazio vuoto, in assenza di cariche elettriche, la relazione si scrive come:

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{E} = 0$$

Similmente si ottiene l'analogia espressione per il campo magnetico:

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{B} = 0$$

18.3 Legge di Faraday e Legge di Ampere-Maxwell in Forma Differenziale

Il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. La definizione del teorema di Stokes è:

$$\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\Delta} \times \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z$$

Formalmente il rotore è il prodotto vettoriale dell'operatore gradiente $\vec{\Delta}$ per il campo.

Applichiamo il teorema di Stokes alla legge di Faraday:

$$\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\Delta} \times \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

L'uguaglianza dei due integrali di superficie è vera per qualsiasi superficie Σ che si "appoggia" sulla linea τ lungo la quale si conduce la circuitazione. Deve pertanto valere la seguente relazione, che è l'espressione locale della legge integrale di Faraday. Essa esprime il legame tra la variazione nel tempo del campo magnetico e il campo elettrico indotto.

$$\vec{\Delta} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Analogamente si arriva alla forma differenziale della legge di Ampere-Maxwell:

$$\vec{\Delta} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

dove \vec{j} è la densità di corrente.

18.4 Onde Elettromagnetiche

La soluzione delle equazioni di Maxwell contiene in modo naturale fenomeni ondulatori. Le onde elettromagnetiche:

- Si propagano nel vuoto.
- Sono trasversali.
- Possono essere rilevate a grandi distanze, sfruttando l'interazione elettromagnetica con le cariche libere presenti in un conduttore.

Con *onda* in fisica si indica una perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nel tempo e nello spazio, trasportando energia o quantità di moto senza comportare un associato spostamento della materia. Dal punto di vista matematico un'onda è una soluzione dell'equazione delle onde, la cui espressione varia a seconda del tipo di perturbazione. Un'onda può propagarsi sia attraverso la materia, sia nel vuoto.

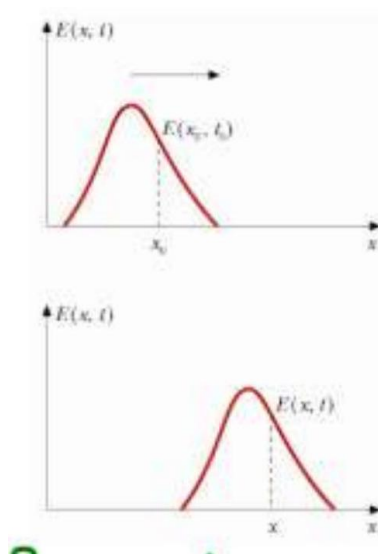
18.4.1 Onde Piane

Lo studio delle onde elettromagnetiche viene semplificato dal punto di vista matematico se ci limitiamo a considerare le onde piane. Le onde piane:

1. Sono descritte da funzioni del tipo $\vec{E}(x, t)$ o $\vec{B}(x, t)$, cioè i campi dipendono da una sola coordinata spaziale e dal tempo, ossia sono costanti in ciascun punto del piano yz .
2. Soddisfano l'equazione di D'Alembert

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

dove v è la velocità di propagazione dell'onda.



Le soluzioni sono del tipo $\rho(x - vt)$, $\rho(x + vt)$. Si tratta di una traslazione rigida della funzione.

18.4.2 Onda Piana Armonica

Un'onda piana armonica ha la seguente forma:

$$\rho(x, t) = \rho_0 \cos(kx - \omega t)$$

dove:

- ρ_0 : massimo della funzione
- k : numero d'onda pari a $k = 2\pi/\lambda$
- λ : lunghezza d'onda
- ω : pulsazione
- T : periodo
- ν : frequenza

$$V = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

18.4.3 Equazioni di Maxwell come Onde

Consideriamo per semplicità la propagazione nel vuoto. In assenza di cariche libere e correnti, le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ (\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ (\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ (\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ (\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ (\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (1)$$

Esplicitiamo le componenti delle equazioni (colonna sinistra) e mettiamo in relazione con la rispettiva soluzione di onda piana (colonna destra):

$$(1) \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \quad (2) \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}$$

Deriviamo le componenti lungo z di \vec{E} rispetto al tempo e rispetto a x

Le due derivate di B_y sono uguali e pertanto si ha

$$\frac{\sigma^2 E_z}{\sigma x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\sigma^2 E_z}{\sigma t^2}$$

Allo stesso modo derivando le altre relazioni si osserva che le componenti di \vec{E} e \vec{B} soddisfano l'equazione di D'Alambert:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

dove $\rho = E_y, E_z, B_y, B_z$ Pertanto, le equazioni di Maxwell prevedono come soluzione particolare campi elettrici e magnetici che si propagano con le caratteristiche di onde piane trasversali con velocità v data da

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

Il valore che si ottiene è quello della luce nel vuoto, da cui si deduce che la luce è un'onda elettromagnetica.

Le soluzioni dell'equazione d'onda sono:

$$E = E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -k E_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

Dato che

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

possiamo eguagliare le due equazioni:

$$-k E_{\max} \sin(kx - \omega t) = -\omega B_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

da cui, semplificando, otteniamo che:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{E}{B}$$

Ossia, in ogni istante in un onda elettromagnetica il rapporto tra i moduli del campo elettrico e magnetico è costante e pari a c .

18.4.4 Vettore di Poynting

Il vettore di Poynting rappresenta la quantità di energia trasferita da un'onda elettromagnetica. E' l'energia che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie di area unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

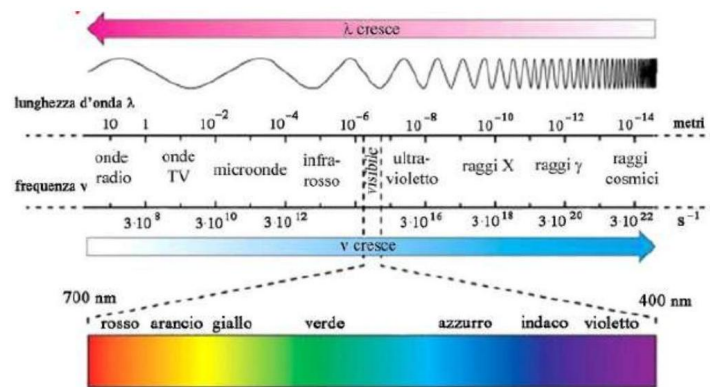
La sua unità SI è il lavoro su metro quadro (W/m^2).

18.4.5 Spettro Elettromagnetico

Vi sono diversi tipi di onde elettromagnetiche, le cui proprietà fisiche sono determinate dalla loro frequenza/lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

nel vuoto.



Capitolo 19

Formulario

19.1 Meccanica

19.1.1 Moto rettilineo

Velocità media

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Velocità istantanea

$$V = \frac{dx(t)}{dt}$$

Velocità media scalare

$$\bar{v} = \frac{d}{\Delta t}$$

Accelerazione media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Accelerazione istantanea

$$a = \frac{dv(t)}{dt}$$

Legge oraria moto rettilineo uniforme

$$x(t) = x_0 + vt$$

Velocità moto uniformemente accelerato

$$v(t) = v_0 + at$$

Legge oraria moto uniformemente accelerato

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

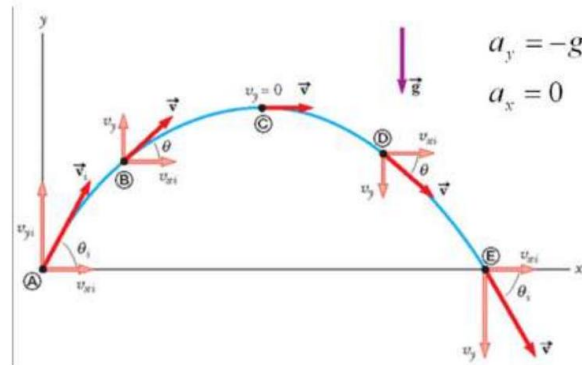
Corpo in caduta da fermo

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$t = \sqrt{2h/g}$$

Per convertire m/s in km/h basta moltiplicare la velocità espressa in metri al secondo per 3,6. Per convertire invece da km/h a m/s bisogna dividere la velocità espressa in chilometri orari per 3,6.

19.1.2 Moto Parabolico



$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

dove

- $v_{0x} = v_0 \cos \theta$
- $v_{0y} = v_0 \sin \theta$

Traiettoria

$$y = x \tan \vartheta - \frac{g}{2(v_0 \cos \vartheta)^2} x^2$$

Gittata

$$x_R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

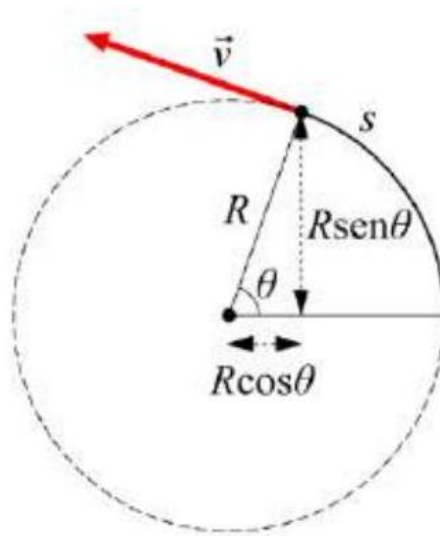
Quota massima

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Distanza orizzontale dal punto di quota massima

$$x_{\max} = \frac{x_R}{2} = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

19.1.3 Moto Circolare



Accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Velocità angolare

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$$

Velocità tangenziale

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Accelerazione tangenziale

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}$$

Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{a_T}{r}$$

Forza centripeta

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r$$

Conversione giri al minuto

$$1 \text{ rpm} = \frac{2\pi r}{60} \text{ m/s}$$

19.1.4 Moto Armonico

Equazione del moto armonico

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Legge oraria

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Velocità e accelerazione

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$
$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Molla

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Pendolo

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

19.1.5 Forza Elastica

Legge di Hooke

$$F = -kx$$

Costante elastica (massa sospesa con molla)

$$k = \frac{mg}{x}$$

Molle in parallelo

$$x = \frac{mg}{k_1 + k_2} = \frac{mg}{k_{eff}}$$

Molle in serie

$$x = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = mg k_{eff}$$

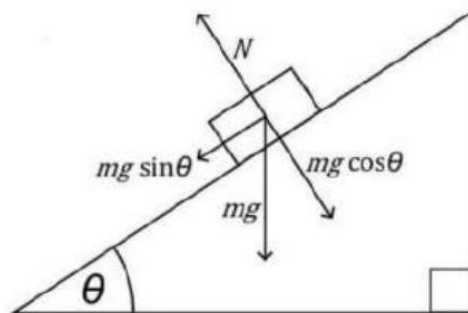
Pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

19.1.6 Piano Inclinato



Forze direzione orizzontale

$$mg \sin \vartheta = ma$$

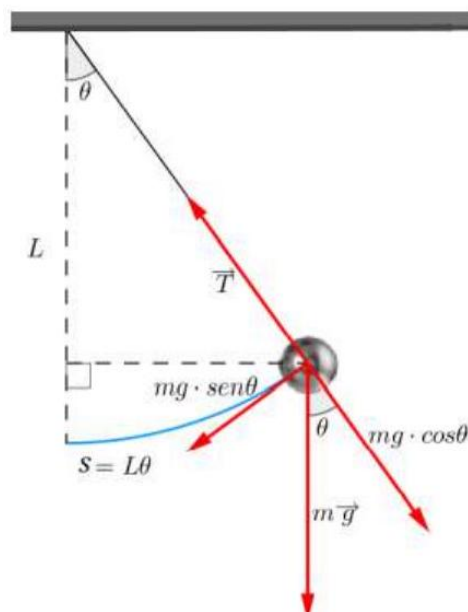
$$g \sin \vartheta = a$$

Forze direzione verticale

$$N - mg \cos \vartheta = 0$$

$$N = mg \cos \vartheta$$

19.1.7 Pendolo



Periodo pendolo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Energia potenziale

$$U = mgh$$

19.1.8 Attrito

Forza attrito statico

$$\rho_s \leq \rho_{\text{smax}} = \mu_s N$$

Forza attrito dinamico

$$\rho_k = \mu_k N$$

Coefficiente di attrito

$$\mu_k = \tan \theta_k \quad e \quad \mu_s = \tan \theta_s$$

19.1.9 Lavoro ed Energia

Lavoro forza costante

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \theta$$

Lavoro forza variabile

$$L = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia potenziale

$$W = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

Teorema energia cinetica

$$W = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$$

Lavoro forza peso

$$W = -mg(y_B - y_A) = -\Delta(mgy) = -mgh$$

Lavoro forza d'attrito

$$W = -\mu_k N \int_A^B ds$$

Lavoro forza elastica

$$W = \int_A^B -kx dx = -\frac{1}{2}k [x^2]_A^B$$

Lavoro forza gravità

$$L = Gm_1m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Lavoro forza elettrostatica

$$L = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right)$$

Potenza media

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

Potenza istantanea

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = FV \cos \theta$$

Principio di conservazione dell'energia

$$E_M = E_k + U$$

Energia potenziale elastica

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia potenziale gravitazionale

$$U(r) = -G \frac{mM_T}{r}$$

Energia potenziale sistema di masse

$$U_{tot} = -U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

19.2 Gravitazione

19.2.1 Leggi e Costanti

Legge di gravitazione universale

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Costante gravitazionale

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Massa terrestre

$$M_T = 5.98 \cdot 10^{24} m$$

Massa sole

$$M_s = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Raggio terrestre

$$r_T = 6373 \text{ km}$$

Accelerazione di gravità

$$g = G \frac{M}{(r_t + h)^2}$$

Terza legge di Keplero

$$T^2 = ka^3 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

Momento di una forza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Campo gravitazionale

$$\vec{g}_1 = \frac{-Gm_1}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Forza su m2 nel campo generato da m1

$$\vec{F}_{12} = \vec{g}_1 m_2$$

19.2.2 Moto satelliti

Forza centripeta satellite

$$F_g = m_s \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

Relazione satellite

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3$$

Altezza satellite geostazionario

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

$$(R_T + h) = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

Energia meccanica satellite in orbita

$$E_m = -\frac{GmM_T}{2r}$$

Velocità di fuga

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_t}{r_t}}$$

19.3 Elettrostatica

19.3.1 Costanti

- Costante dielettrica nel vuoto: $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- Permeabilità magnetica nel vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
- Velocità della luce nel vuoto: $c = 299,792,458 \text{ m/s}$
- Carica elementare: $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Costante di Coulomb: $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
- Massa dell'elettrone: $m_e = 9.10938356 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Massa del protone: $m_p = 1.672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Carica del neutrone: $q_n = 0 \text{ C}$
- Carica del protone: $q_p = e$

19.3.2 Carica e Campo

Legge di Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Campo elettrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Campo elettrico dipolo

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{y^3}$$

Energia potenziale elettrica

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Energia potenziale sistema di cariche

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Differenza di potenziale

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{W}{q}$$

Potenziale elettrico

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{U(r)}{q_0}$$

Potenziale sistema di cariche

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

19.3.3 Legge di Gauss

Legge di Gauss

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Flusso superficie perpendicolare

$$\phi_E = EA$$

Flusso superficie non perpendicolare

$$\phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta$$

Campo elettrico esterno guscio sferico

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Campo elettrico esterno sfera

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Campo elettrico interno sfera

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Campo elettrico carica lineare

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Campo elettrico piano carico

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

19.3.4 Capacità

Capacità elettrica

$$C = \frac{q}{V} \quad \text{o} \quad C = \frac{q}{\Delta V}$$

Capacità condensatore

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Condensatori in parallelo

$$C_{eq} = \sum_{j=1}^n C_j$$

Condensatori in serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Energia potenziale condensatore

$$U_{el} = \frac{1}{2} CV^2$$

Condensatore con dielettrico

$$C = k \frac{A}{d} \epsilon_0 = k C_0$$

Campo elettrico condensatore

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

19.4 Processo di scarica

Carica condensatore in funzione del tempo

$$q(t) = Q_{\max} \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

Tensione condensatore in funzione del tempo

$$V(t) = \epsilon \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

Corrente condensatore in funzione del tempo

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Costante di tempo circuito RC

$$\tau = RC$$

Carica massima condensatore

$$Q_{\max} = C\epsilon$$

19.5 Processo di carica

Corrente condensatore in funzione del tempo

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC} e^{-t/RC}$$

19.5.1 Corrente

Intensità di corrente

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Densità di corrente

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d$$

Intensità di corrente

$$i = \phi_E \vec{j}$$

Legge di Ohm

$$V = Ri$$

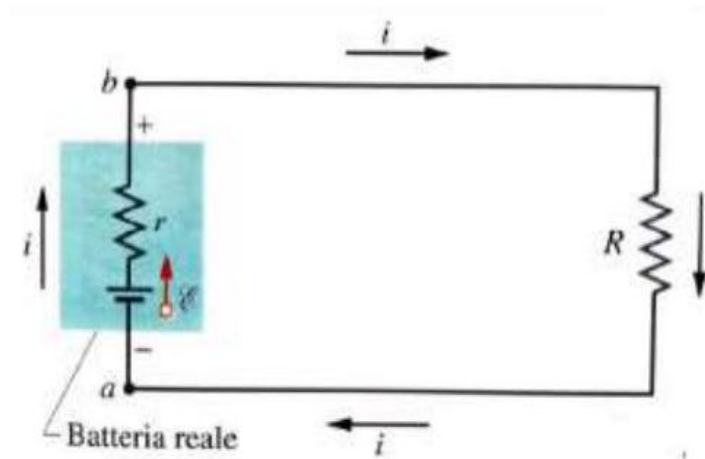
Resistenza in termini di resistività

$$R = \frac{l}{\Sigma \sigma} = \rho \frac{l}{\Sigma}$$

Legge di Joule

$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R}$$

19.5.2 Circuiti Elettrici



$$\Delta V = \epsilon - ir$$

Energia erogata generatore/batteria

$$U = \int_0^t iV dt = iV \int_0^t dt = i\epsilon t$$

partendo dalla legge di Joule

$$P = \frac{dU}{dt} = iV$$

e integrando.

Energia fornita ad un resistore

$$U = i^2 R t$$

moltiplicando la potenza dissipata in ciascun resistore ($P = i^2 R$) per il tempo.

Resistenze in serie

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^n R_j$$

Resistori in parallelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$$

19.6 Magnetismo

Forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

o nel caso di correnti

$$\vec{F}_L = i\vec{v} \times \vec{B}$$

Forza magnetica conduttore rettilineo

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Forza magnetica conduttore forma arbitraria

$$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{s} \times \vec{B}$$

Forza magnetica spira semicircolare (parte lineare)

$$\vec{F}_1 = i2RB\hat{k}$$

Forza magnetica spira semicircolare (parte circolare)

$$\vec{F}_2 = -2iRB\hat{k}$$

Legge di Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Campo magnetico filo rettilineo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Campo magnetico filo ad arco

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \phi$$

Forza magnetica conduttori paralleli

$$F_{ba} = \frac{\mu_0 L}{2\pi d} i_a i_b$$

Campo magnetico solenoide ideale

$$B = \mu_0 i n$$

Legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

Legge di Faraday

$$\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Legge di Ampere-Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_s) = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Autoflusso

$$\phi = Li$$

f.e.m. indotta

$$\epsilon_L = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Energia potenziale magnetica

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2$$

19.7 Matematica

19.7.1 Derivate

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (a \cdot x) = a f'(a \cdot x)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

19.7.2 Integrali

$$\int f(x)dx = I(x)$$

$$\int f(x-a)dx = I(x-a)$$

$$\int f(a \cdot x)dx = \frac{I(a \cdot x)}{a}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}, n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = I(x_1) - I(x_0)$$

