APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA II

Arlind Pecmarkaj – Anno Accademico 2021/22

Funzione reale di n variabili reali

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia

$$f: A \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

Si dice che f è una funzione reale di n variabili reale se

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in A\ \exists!\, z \in \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_n) = z$$

Distanza e spazio metrico

Sia

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to R_0^+$$

E

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

Si dice che d è una *distanza* se

1) $d(x, y) \geq 0\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (diseguaglianza triangolare)

Dato $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $P = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ possiamo usare come simbologia

$$d(P, P_0) = |x - x_0| = ||x - x_0||$$

$\mathbb{R}^n$ dotata della funzione d diventa uno spazio metrico.
In generale uno spazio metrico è la coppia (X, d) dove X è un insieme qualsiasi e

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_0^+$$

soddisfa le proprietà della distanza.

Intorni in $\mathbb{R}^n$

Sia $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0), p = (x_1, \dots, x_n)\ \ p_0, p \in \mathbb{R}^n$
Si definisce *intorno sferico centrato in* p_0 *di raggio* r l'insieme

$$I_{p_0, r} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p_0, p) < r\}$$

Dove

$$d(p, p_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$$

Punti e caratteristiche di un insieme

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice che

a) x_0 è un *punto interno* ad E se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in E, i.e.

$$\exists\, I_{x_0} \mid I_{x_0} \subset E$$

Denotiamo con $\dot{E}$ l'insieme dei punti interni di E. I punti interni appartengono sempre e comunque a E.

b) x_0 è un *punto esterno* ad E se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto nel complementare di E, ossia è punto interno di $E^C = \mathbb{R}^n \setminus E$.

c) x_0 è un *punto di frontiera* se in ogni intorno di x_0 cadono sia punti di E che punti del complementare E^C. Denotiamo con δE l'insieme dei punti di frontiera di E. Non è detto che un punto di frontiera appartenga ad E.

Inoltre si dice che

- E è aperto se ogni suo punto è interno ad E, i.e. $E = \dot{E}$
- E è chiuso se il suo complementare E^C è aperto.

Si definisce chiusura di E e si indica con $\bar{E}$ l'insieme $\bar{E} = E \cup \partial E$

Dunque

a) E chiuso $\Leftrightarrow E = \bar{E} \Leftrightarrow \partial E \subset E$
b) E aperto $\Leftrightarrow E \cap \partial E = \emptyset$

Proprietà degli insiemi

Consideriamo una famiglia di insiemi $(A_n)_n$ aperti e una famiglia di insiemi $(C_n)_n$ chiusi. Allora

1) $\bigcup_n A_n$ è aperto.
2) $\bigcap_{n=m}^{q} A_n$ è aperto.
3) $\bigcap_n C_n$ è chiuso.
4) $\bigcup_{n=m}^{q} C_n$ è chiuso.

Punti di accumulazione in $\mathbb{R}^n$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice che $x_0 \in \mathcal{D}(E)$ (x_0 è punto di accumulazione per E) se per ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di E.

Limiti per funzioni a più variabili (caso $\mathbb{R}^2$)

Sia $f: A \to \mathbb{R}^2$, $A \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A)$.
Definiamo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall\, I_L\ \exists\, I_{(x_0,y_0)} \mid \forall\, (x,y) \in I_{(x_0,y_0)} \cap A \setminus \{(x_0,y_0)\} \Rightarrow f(x,y) \in I_L$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall\, (x,y) \in A\ per\ cui\ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Metodi di risoluzione

Classico

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 y = 2$$

Teorema dei carabinieri

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si ha che

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Poiché per $(x,y) \to (0,0)$, $\sqrt{x^2+y^2}$ tende a 0 allora il limite originale tende a 0.

Metodo delle restrizioni

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Possiamo valutare la funzione per $y = 0$ ossia si vede come la funzione varia nell'asse x. Si ha che

$$\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{y=0} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1\ se\ x > 0 \\ -1\ se\ x < 0 \end{cases}$$

Avvicinandoci da due punti diversi otteniamo due valori diversi, dunque il limite non esiste.
Ogni funzione può essere valutata anche tramite l'uso di rette generiche. Per esempio:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

Possiamo valutarla per una generica retta $y = mx$ e si ha che

$$\left.\frac{2xy}{\sqrt{x^4+y^4}}\right|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{\sqrt{x^4+mx^4}} = \frac{2mx^2}{x^2\sqrt{1+m^4}} = \frac{2m}{\sqrt{1+m^4}}$$

Passando al limite, si nota come essa sia dipendente dalla retta scelta e dunque il limite della funzione originale non esiste.

Metodo delle coordinate polari

In $\mathbb{R}^2$ un generico punto $P = (x, y)$ può essere scritto come $P = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$ dove $\rho > 0$ è la distanza dall'origine del punto e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ è l'angolo compreso tra l'asse x e la semiretta che va dall'origine a P.
P e ϑ sono le coordinate polari.
Per esempio:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

Può esser scritto come

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to 0}(2\rho\cos^2\vartheta\sin\vartheta)$$

Poiché

$$0 \leq |\, 2\rho\cos^2\vartheta\sin\vartheta| \leq 2\rho$$

Non si ha dipendenza verso ϑ e dunque $\lim_{\rho\to 0}(2\rho\cos^2\vartheta\sin\vartheta) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$

È utile vedere anche

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

In questo caso conviene considerare la circonferenza in (2,1).

In generale $\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\vartheta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$ son coordinate polari con polo (x_0, y_0) perciò in questo limite consideriamo $\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\vartheta \\ y = 1 + \rho\sin\vartheta \end{cases}$ e lo riscriveremo come

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\sin^2\vartheta\sin(\pi(2+\rho\cos\vartheta))}{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta} = \lim_{\rho\to 0}\sin^2\vartheta\sin(\pi(2+\rho\cos\vartheta))$$

Si ha che

$$0 \leq |\sin^2\vartheta\sin(\pi(2+\rho\cos\vartheta))| \leq |\sin(2\pi+\pi\rho\cos\vartheta)| =$$
$$= |\sin(\pi\,\rho\cos\vartheta)| \leq |\pi\rho\cos\vartheta| \leq \pi\rho$$

Poiché per $\rho \to 0$ $\pi\rho$ tende a 0 il limite è 0.

Limiti all'infinito

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ illimitato
Definiamo

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M = M(\varepsilon) > 0 \mid \forall\,(x,y) \in A\ per\ cui\ \sqrt{x^2+y^2} > M \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Per esempio:

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} xy\, e^{x^2+y^2} = \lim_{|x,y|\to\infty} \rho^2\cos\vartheta\sin\theta\, e^{\rho^2} = \begin{cases} 0\ se\ \vartheta = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ +\infty\ altrimenti \end{cases}$$
$$\Rightarrow \nexists \lim.$$

Oppure

$$\lim_{|x,y|\to\infty} xy\, e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{\rho\to\infty} \rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta\, e^{-(\rho^2\cos\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta)} =$$

$$= \lim_{\rho \to \infty} \rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, e^{-\rho^2}$$

Consideriamo

$$0 \leq |\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, e^{-\rho^2}| \leq \rho^2 e^{-\rho^2} = \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \to 0 \; per \; \rho \to +\infty$$

Dunque il limite della funzione originale è 0.

Continuità di funzioni a più variabili

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in A$.
Si dice che f è continua in x_0 se

$$x_0 \in \mathcal{D}(A) \ e \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Oppure

$$x_0 \text{ è punto isolato di } A.$$

Esempio:
Definire se la seguente funzione è continua in $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \ se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la funzione è continua poiché composizione di polinomi. In $\{(0,0)\}$ si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

Dunque la funzione è continua in tutta $\mathbb{R}^2$.

Continuità separata

Sia $f: A \to \mathbb{R}^2, A \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in A$.
Si dice che f è continua separatamente rispetto ad x (ad y) in (x_0, y_0) se la funzione

$$x \longmapsto f(x, y_0)$$
$$(y \longmapsto f(x_0, y))$$

È continua in $x = x_0$ (in $y = y_0$).

Teorema. Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in A$. Sia inoltre f continua in (x_0, y_0). Allora f è continua separatamente rispetto a x e ad y in (x_0, y_0).
Il viceversa non vale. Infatti basta considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \ se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Che è continua separatamente rispetto a x in $(0,0)$ in quanto la funzione

$$x \longmapsto f(x,0) = 0$$

è continua in $\mathbb{R}$. Per simmetria la funzione è continua separatamente rispetto ad y in $(0,0)$.
Ma si può notare che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Teorema. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, allora

a) Gli insiemi
   - $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$
   - $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$
   - $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$

   sono aperti.

b) Gli insiemi
   - $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$

- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$

sono chiusi.

Nota: nel teorema la continuità è fondamentale. Infatti consideriamo la seguente funzione non continua in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \; se \; x^2 + y^2 \leq 1 \\ -1 \; se \; x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Consideriamo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

che è chiuso.

Definizioni. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si dice che E è:

i. Limitato se esiste una sfera S in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq S$ ossia $\exists\, r > 0 \mid |x| \leq r \;\forall x \in E$
ii. Compatto se E è chiuso e limitato.
iii. Connesso se per ogni $x, y \in E$ esista una curva continua contenuta in E di estremi x ed y.

Teorema di Weirstrass

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $f: E \to \mathbb{R}$ continua.

$$\Longrightarrow \exists \max e \min assoluti \; di \; f \; in \; E.$$

Teorema degli zeri

Sia $E \subseteq R^n$ connesso e $f: E \to \mathbb{R}$ continua. Se esistono $x1, x_2 \in E$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$ allora

$$\exists\, x_3 \in E : f(x_3) = 0$$

Teorema dei valori intermedi

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e connesso e $f: E \to \mathbb{R}$ continua.

$$\Longrightarrow f \; assume \; tutti \; i \; valori \; compresi \; il \min e \; il \max assoluto \; in \; E\,.$$

Derivabilità di funzioni a due variabili

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $(x, y) \longmapsto f(x, y)$.
Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a x in (x_0, y_0) se esiste finito in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

ossia la funzione $x \longmapsto f(x, y_0)$ è derivabile in x_0.
Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a y in (x_0, y_0) se esiste finito in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ossia la funzione $y \longmapsto f(x_0, y)$ è derivabile in x_0.
f è derivabile in (x_0, y_0) se è derivabile parzialmente rispetto a x e ad y in (x_0, y_0).
Se f è derivabile si può costruire il vettore gradiente

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

Differenziabilità

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $(x_0, y_0) \in A$.
Si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se

a) f è derivabile in (x_0, y_0)
b) $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Ovvero in (x_0, y_0) esiste un piano z tangente alla funzione tale che

$$z = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) >$$

Derivabilità e continuità

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subseteq R^2$ aperto e $(x_0, y_0) \in A$

Se f è derivabile in (x_0, y_0) ciò non implica che f è continua in (x_0, y_0).

Infatti basta considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}\ se\ (x, y) \neq 0 \\ 0\ se\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f non è continua in $(0, 0)$. Osserviamo la derivabilità rispetto ad x in $(0, 0)$

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\Longrightarrow \exists\ f_x(0, 0) = 0 \ \Longrightarrow (per\ simmetria)\ \exists\ \nabla f(0,0) = (0, 0)$$

Se f è continua in (x_0, y_0) ciò non implica che f è derivabile in (x_0, y_0).

Infatti basta considerare

$$f(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

f è continua in $(0, 0)$, ma se andiamo a osservare la derivabilità rispetto a x in $(0, 0)$

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} \begin{cases} per\ h \to 0^+\ tende\ a\ 1 \\ per\ h \to 0^-\ tende\ a - 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \nexists\ f_x(0, 0)$$

Differenziabilità, continuità e derivabilità

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq R^2$ aperto e $(x_0, y_0) \in A$

Se f è derivabile in (x_0, y_0) non implica che f è differenziabile in (x_0, y_0)

Infatti basta considerare

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

f è derivabile in $(0,0)$, ma non è differenziabile.

Vale la seguente proposizione

$$f\ differenziabile\ in\ (x_0, y_0) \Longrightarrow f\ continua\ in\ (x_0, y_0)$$

Ma il viceversa in generale non vale (basta considerare la funzione di prima).

Teorema del differenziale totale

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $(x_0, y_0) \in A$

Se f è derivabile in un intorno di (x_0, y_0) con derivate parziali continue allora f è differenziabile in (x_0, y_0)

Dimostrazione. Consideriamo

$$\left|\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right|$$

Riscriviamo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Notiamo che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)$$

Ci riconduce a una funzione

$$x \longmapsto f(x, y_0 + k)\ in\ [x_0, x_0 + h]$$

che è derivabile e continua dall'ipotesi. Dal teorema di Lagrange otteniamo che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = f_x(\bar{x}, y_0 + k) \cdot h\ con\ \bar{x} \in (x_0, x_0 + h)$$

Analogamente con lo stesso ragionamento

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, \bar{y}) \cdot k\ con\ \bar{y} \in (y_0, y_0 + k)$$

dunque possiamo riscrivere

$$\left|\frac{f_x(\bar{x}, y_0 + k) \cdot h + f_y(x_0, \bar{y}) \cdot k - f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|f_x(\bar{x}, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)| \cdot |h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{\left|f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)\right| \cdot |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq$$

$$\leq |f_x(\bar{x}, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)|$$

Si ha che per $(h, k) \to (0,0)$

$$|f_x(\bar{x}, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)| + \left|f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)\right| \to 0$$

che conclude la dimostrazione del teorema.

Insieme connesso

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Si dice che A è connesso se non esistono due aperti A_1 e A_2 tali che

$$A_1 \neq A_2 \neq \emptyset$$
$$A_1 \cup A_2 = A$$

e

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Teorema (funzioni con gradiente nullo in un connesso). Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso.
Se f è differenziabile in A e $\nabla f = (0_1, \dots, 0_n)$ in A, allora f è costante in A.
Nota: se A non è connesso, in generale il teorema non vale. Basta considerare $f: A \to \mathbb{R}$ dove

$$A = A_1 \cup A_2 \ (A_i \ aperti \ non \ vuoti \ e \ disgiunti)$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \in A_1 \\ 2 \ se \ x \in A_2 \end{cases}$$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Sia $g: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f(A) \subseteq I$.
Sia $h: A \to \mathbb{R}$ dove $x \longmapsto h(x) = g(f(x)$
Se f è differenziabile in $x_0 \in A$ e g è derivabile in $f(x_0)$

$$\Longrightarrow h(x) \text{ è } differenziabile \ in \ x_0$$

e

$$\nabla h(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot \nabla f(x_0) \quad i.e.$$
$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \ \forall \ i = 1, \dots, n$$

Applicazione: *gradiente di una funzione radiale.*
Si definisce funzione radiale una funzione $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che dipende solo dalla distanza dall'origine, i.e.

$$h(x) = g(|x|)$$

dove

$$g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

La funzione modulo è definita come

$$|\cdot|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Si ha che

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|} \ \forall \ x \neq \emptyset$$

Perciò $|\cdot|$ è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{(0_1, \dots, 0_n)\}$.
Se g è derivabile in $[0, +\infty)$ allora h è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{(0_1, \dots, 0_n)\}$ dal teorema e il gradiente di h è

$$\nabla h(x) = g'(|x|) \cdot \nabla(|x|) = g'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \ dove \ x = (x_1, \dots, x_n)$$

i.e.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = g'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} \quad i = 1, \dots, n$$

Si deduce che

$$|\nabla h(x)| = \left| g'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \right| = |g'(|x|)|$$

Direzione. Sia $v \in \mathbb{R}^n, v \neq (0_1, \dots, 0_n)$. Si definisce direzione in $\mathbb{R}^n$ il vettore

$$\frac{v}{|v|}$$

Che è un versore di modulo 1.

Derivata direzionale

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Si dice che f è derivabile nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot v) - f(x_0)}{h}$$

e si pone

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot v) - f(x_0)}{h} = D_v f$$

I versore degli assi in $\mathbb{R}^n$:

- Asse x_1: $v = (1_1, 0_2, \dots, 0_n)$
- Asse x_2: $v = (0_1, 1_2, \dots, 0_n)$
- …
- Asse x_i: $v = (0_1, \dots, 1_i, \dots, 0_n)$

In $\mathbb{R}^2$ se prendiamo i versori che rappresentano gli assi otteniamo

$$v = (1,0): \lim_{h \to 0} \frac{f\big((x_0, y_0) + h(1,0)\big) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$v = (0,1): \lim_{h \to 0} \frac{f\big((x_0, y_0) + h(0,1)\big) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Inoltre un versore v forma un angolo ϑ con l'asse x e in $\mathbb{R}^2$ essi vengono rappresentati come

$$v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi)$$

Il vettore è di modulo 1 in quanto

$$|v| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\theta} = 1$$

Esempio.

$$f(x, y) = x \cdot e^{xy}$$

f è derivabile nella direzione v in $(0,0)$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta)) - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h \cdot \cos\vartheta, h \cdot \sin\vartheta)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \cos\vartheta \cdot e^{h^2 \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\theta}}{h} = \cos\vartheta$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \cos\vartheta$$

In particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos 0 = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Teorema (formula del gradiente)
Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$
Se f è differenziabile in x_0 allora f è derivabile rispetto a ogni direzione v in x_0 e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Nota: il viceversa in genere non vale. Basta considerare

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}\ in\ (0,0)$$

Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h \cdot \cos \vartheta, h \cdot \sin \vartheta) - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta}}{h} = \sqrt[3]{\cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta}$$

In particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

Se la funzione fosse differenziabile allora $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ che è assurdo, in quanto si vede che la derivata direzionale dipende da ϑ.

Derivate seconde

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.
Se f è derivabile in A allora esistono $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in A.
Se $f_x: A \to \mathbb{R}$ è derivabile allora esistono

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

e

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

Se $f_y: A \to \mathbb{R}$ è derivabile allora esistono

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

e

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Si ha che f_{xx} e f_{yy} sono le derivate seconde pure (rispetto a x e y) e che f_{xy} e f_{yx} sono le derivate seconde miste.
Se f è derivabile due volte si può costruire la *matrice hessiana di f in A*.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

In generale se $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ e f è derivabile due volte, la matrice hessiana sarà

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Esempio.

$$f(x, y) = x \cdot \sin y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \left(f_x(x, y), f_y(x, y)\right) = (\sin y^2, 2xy \cdot \cos y^2)$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial(\sin y^2)}{\partial x} = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial(\sin y^2)}{\partial y} = 2y \cdot \cos y^2$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial(2xy \cdot \cos y^2)}{\partial x} = 2y \cdot \cos y^2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial(2xy \cdot \cos y^2)}{\partial y} = 2x(\cos y^2 - 2y^2 \cdot \sin y^2)$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 2y \cdot \cos y^2 \\ 2y \cdot \cos y^2 & 2x(\cos y^2 - 2y^2 \sin y^2) \end{pmatrix}$$

Si nota come $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema di Schwarz

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $(x_0, y_0) \in A$.

$$Se\ f \in C^2\left(I_{(x_0,y_0)}\right) \Longrightarrow f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $x_0 \in A$.

$$Se\ \exists\ f_{x_i x_j}\ e\ f_{x_j x_i}\ con\ i, j = 1, \dots, n\ e\ sono\ continue\ in\ I_{x_0} \Longrightarrow f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$$

Dimostrazione (in $\mathbb{R}^2$*).* Sia $(x, y) \in A$ vicino a (x_0, y_0).
Siano

$$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$$
$$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$$

Dall'ipotesi F è continua in $[x_0, x]$ e derivabile in (x_0, x)

$$\Longrightarrow (t.\,di\ Lagrange)\ \exists\ \bar{x} \in (x_0, x) : F(x) - F(x_0) = F'(\bar{x})(x - x_0)$$

$F'(\bar{x}) = f_x(\bar{x}, y) - f_x(\bar{x}, y_0)$ ricorda $t \longmapsto f_x(\bar{x}, t)$ con $t \in [y, y_0]$

$$\Longrightarrow (t.\,di\ Lagrange)\ \exists\ \bar{y} \in (y, y_0) : f_x(\bar{x}, y) - f_x(\bar{x}, y_0) = f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)$$

In definitiva si ha che

$$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)(x - x_0)^{(1)}$$

Analogamente

$$\exists\ \tilde{x} \in (x_0, x), \tilde{y} \in (y_0, y) : G(y) - G(y_0) = f_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})(x - x_0)(y - y_0)^{(2)}$$

Si prova facilmente che $F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$ infatti

$$F(x) - F(x_0) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$$
$$G(y) - G(y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

Dunque da (1) e (2) segue che

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)(x - x_0) = f_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})(x - x_0)(y - y_0)$$
$$\Longrightarrow f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})$$
$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y}) =$$
$$= f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)\ (dalle\ ipotesi\ di\ continuità)$$

Formula di Taylor

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A, f \in C^2(A), h \in \mathbb{R}^n$.
Le due forme vengono viste al secondo ordine.

Con il resto di Lagrange

$\exists\ \delta \in (0,1)$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_0 + \delta h) \cdot h_i h_j$$

i.e.

$$f(x_o + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} < D^2 f(x_0 + \delta h) \cdot h, h >$$

Con il resto di Peano

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_0) h_i h_j + o(|h|^2) \ \ per\ h \to 0$$

i.e.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} < D^2 f(x_0) \cdot h, h > + o(|h|^2) \ \ per\ h \to 0$$

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$.
Si ha che f è differenziabile in x_0 se

a) $\exists\ \nabla f(x_0)$
b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{|h|} = 0 \ \ con\ h = (h_1, \dots, h_n)$

Riscrivendo il punto b otteniamo

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + < \nabla f(x_0), h > + o(|h|) \ \ per\ h \to 0$$

Che è la formula di Taylor al primo ordine.

Funzioni a valori vettoriali

Una funzione a valori vettoriali è una funzione del tipo

$$f: A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n \; con \; n, m \in \mathbb{N}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Limite di una funzione a valori vettoriali

Si dice che per $x_0 \in D(A)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^m$$

Se e solo se per definizione

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0$$

dove

$$|f(x) - l| = \sqrt{(f_1(x) - l_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - l_m)^2}$$

i.e. se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i \; \forall \, i = 1, \dots, m$$

Continuità di una funzione a valori vettoriali

f è continua in $x_0 \in A$ se

- x_0 è punto isolato di A.

Oppure

- $x_0 \in \mathcal{D}(A) \; e \; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

i.e.

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = f_i(x_0) \;\; \forall \, i = 1, \dots, m$$

Cioè f è continua in x_0 in ogni sua componente.

Derivabilità di una funzione a valori vettoriali

f è derivabile in $x_0 \in A$ se f_i è derivabile in $x_0 \; \forall \, i = 1, \dots, m$

$$\Longrightarrow \exists \, \nabla f_i(x_0) \; \forall \, i = 1, \dots m$$

Possiamo costruire la *matrice jacobiana di f in* x_0:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \to \nabla f_m(x_0) \end{matrix}$$

Teorema: Siano $f, g: I \to \mathbb{R}^m, I \subseteq \mathbb{R}$ aperto. Se f e g son derivabili in I allora

1) $f \pm g$ è derivabile in I e $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
2) $c \cdot f, c \in \mathbb{R}$, è derivabile in I e $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;
3) Se $\varphi: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I allora $\varphi \cdot f$ è derivabile in I e $(\varphi \cdot f)' = \varphi' \cdot f + \varphi \cdot f'$;
4) $< f, g >$ è derivabile e $(< f, g >)' =< f', g > + < f, g' >$;
5) Se $m = 3$, $f \times g$ (prodotto vettoriale) è derivabile in I e $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$;

Teorema di derivazione delle funzioni vettoriali composte

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con $x_0 \in A$.
Sia $g: B \to \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}$ con $g(B) \subseteq A$.

$$Se\ g \text{ è } derivabile\ in\ x_0\ e\ f\ differenziabile\ in\ g(x_0)$$

$$\Rightarrow h = f\big(g(x_0)\big) \text{ è } derivabile\ in\ x_0\ e\ h'(x_0) =< \nabla f(x_0), g'(x_0) >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(g(x_0)\big) \cdot g_i'(x_0)$$

Differenziabilità delle funzioni vettoriali

Sia

$$f: A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq R^n\ con\ n, m \in \mathbb{N}.$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

f è differenziabile in $x_0 \in A$ se $\forall\ i = 1, \dots, m\ f_i$ è differenziabile in x_0.
i.e.
$\forall\ i = 1, \dots, m\ f_i$ è derivabile in x_0 e

$$\forall\ i = 1, \dots, m\ f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + < \nabla f_i(x_0), h > +o(|h|)\ per\ h \to 0$$

i.e.

$$\exists\ Df(x_0)\ e\ f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h$$

Dove $Df(x_0) \cdot h$ è un prodotto tra matrici.

Teorema. Sia $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

$$Se\ f \in C^1(A) \Rightarrow f \text{ è } differenziabile\ in\ A.$$

Teorema di differenziazione delle funzione vettoriali composte

Sia $f: A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq R^n$ aperto con $f(A) \subseteq B$.
Sia $g: B \to \mathbb{R}^k, B \subseteq R^m$ aperto.
Sia $h(x) = g\big(f(x)\big)$.

$$Se\ f \text{ è } differenziabile\ in\ x_0, g\ differenziabile\ in\ f(x_0)$$
$$\Rightarrow h \text{ è } differenziabile\ in\ x_0\ e\ Dh(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \cdot D(f(x_0))$$

Curve in $\mathbb{R}^n$

Si definisce curva in $\mathbb{R}^n$ una funzione

$$\varphi: I \to \mathbb{R}^n, I \subseteq \mathbb{R}\ intervallo$$
$$t \longmapsto \varphi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

tale che $\varphi \in C(I)$.

Le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \quad \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

si chiamano equazioni parametriche della curva φ e t si chiama parametro.

$\varphi(I)$ si chiama sostegno della curva ed è l'insieme dei punti che stanno nella curva.

Diremo che φ è

- Semplice se $\forall\ t_1, t_2 \in \dot{I}, t_1 \neq t_2 \Longrightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$;
- Chiusa se $I = [a, b]$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$;

I grafici delle funzioni reali a variabile reale continue e definite su un intervallo sono tutte curve in $\mathbb{R}^2$ (ma non il viceversa). Infatti dato $f(x)$ possiamo trovare l'equazione parametrica

$$\varphi = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

Data una parametrizzazione φ questa produce sulla curva un verso di percorrenza (o orientazione) dato da

$$p_1 = \varphi(t_1)\ precede\ \varphi(t_2)$$
$$(nel\ verso\ del\ parametro\ crescente)$$

se

$$t_1 < t_2$$

Curve regolari

Sia $\varphi: I \to \mathbb{R}^n, I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $\varphi \in C(I)$.

Si dice che φ è una curva regolare se

$$\varphi \in C^1(I)$$

e

$$\varphi'(t) \neq 0\ \forall\ t \in \dot{I}$$

Dove 0 è il vettore nullo.

Il versore tangente è dato da

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

e le equazioni parametriche delle rette tangenti alla curva φ in $\varphi(t_0)$ son date da

$$x_i(t) = x_i(t_0) + x_i'(t_0)(t - t_0)\ \ i = 1, \dots, n$$

Curve regolari a tratti. Sia

$$\varphi = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} t \in [-1,1]$$

Si ha che $\varphi' \in C([-1,1])$ e

$$\varphi'(t) = (2t, 3t^2) = (0,0) \Leftrightarrow t = 0$$

Dunque φ non è regolare.

Però se consideriamo

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \; t \in [-1,0]$$

E

$$\varphi^* = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \; t \in [0,1]$$

Possiamo vedere φ come $\varphi = \bar{\varphi} \cup \varphi^*$ ossia un'unione finita di curve regolari. In questo caso si dirà che φ è una curva regolare a tratti.

Ortogonalità del gradiente di funzioni differenziabili alle curve di livello

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile. Abbiamo che la curva di livello a quota c è definita come

$$f(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$$

Supponiamo che tale curva di livello sia regolare e che sia

$$\varphi: I \to \mathbb{R}^2, I \subseteq \mathbb{R} \; intervallo$$
$$t \longmapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$$
$$\varphi'(t) \neq 0 \;\; \forall \, t \in \dot{I}$$

Sia inoltre

$$g: I \to \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto g(t) = f(\varphi(t))$$

g è derivabile in I e

$$g'(t) = \nabla f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)^{(A)}$$

D'altra parte si ha che

$$g(t) = f\big(\varphi(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big) = c \;\; \forall \, t \in I$$
$$\Longrightarrow g'(t) = 0 \; \forall \, t \in I^{(B)}$$

Da (A) e (B)

$$\nabla f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = 0$$
$$\Longrightarrow \nabla f\big(\varphi(t)\big) \perp \varphi'(t)$$

Massimi e minimi per funzioni di più variabili

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in A$.
Si dice che x_0 è un punto di massimo (minimo) globale o assoluto per f in A se

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x)\ \forall\, x \in A$$

Si dice che x_0 è un punto di massimo (minimo) locale o relativo per f se

$$\exists\, I_{x_0} \mid f(x_0) \geq (\leq) f(x)\ \forall\, x \in A \cap I_{x_0}$$

Teorema (condizione necessaria per massimi e minimi)

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Se

a) $x_0 \in \dot{A}$ massimo (o minimo) locale per f.
b) f derivabile nella direzione $v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Per chiarezza siamo nel caso del massimo locale. Consideriamo la funzione

$$g(t) = f(x_0 + tv), t \in \mathbb{R}$$

Da b) esiste finito in $\mathbb{R}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Poiché da a) abbiamo che x_0 è massimo locale allora per t sufficientemente piccolo

$$f(x_0) \geq f(x_0 + tv)$$

Ossia

$$g(0) \geq g(t)$$

$$\Longrightarrow 0 \text{ è } massimo\ locale\ per\ g \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$$

Nota. In particolare se f è derivabile in x_0 si ha che $\nabla f(x_0) = 0$ (vettore nullo).

Il viceversa del teorema non vale. Basta considerare

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

f è derivabile e

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0,0)$$

Se consideriamo

$$f(x, 0) = x^2 \geq 0$$
$$f(0, y) = -y^2 \leq 0$$

si nota come $(0, 0)$ non è né massimo né minimo locale.

Il teorema ci fornisce per una funzione f a più variabili diversi insiemi in cui cercare i massimi e i minimi:

1) $\{x_0 \in \dot{A} : f \text{ è } derivabile\ in\ x_0\ e\ \nabla f(x_0) = 0\}$
2) $\{x_0 \in \dot{A} : f\ non \text{ è } derivabile\ in\ x_0\}$
3) $\{x_0 \in \partial A \cap A\}$

I punti x_0 tali che $\nabla f(x_0) = 0$ si chiamano punti critici o stazionari per f.

Definizioni. Sia A una matrice $n \times n$. Si dice che A è:

- Definita positiva se $< A \cdot v, v >> 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- Definita negativa se $< A \cdot v, v >< 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- Semidefinita positiva se $< A \cdot v, v >\geq 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- Semidefinita negativa se $< A \cdot v, v >\leq 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- Indefinita se non soddisfa nessuna delle precedenti condizioni.

Teorema (condizione necessaria del secondo ordine)

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in \dot{A}$.
Se x_0 è massimo (minimo) locale per f e f è derivabile due volte in x_0
$\Longrightarrow$

a) $\nabla f(x_0) = 0$;
b) $D^2 f(x_0)$ è semidefinita negativa (positiva).

Teorema (condizione sufficiente del secondo ordine)

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sia f derivabile due volte con derivate continue in A e sia $x_0 \in \dot{A}$ con $\nabla f(x_0) = 0$.
Allora:

a) $D^2 f(x_0)\ definita\ positiva\ (negativa) \Longrightarrow x_0\ massimo\ (minimo) locale$
b) $D^2 f(x_0)\ indefinita \Longrightarrow x_0\ punto\ di\ sella.$

Teorema (condizione sufficiente del secondo ordine per funzioni a due variabili).
Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sia f derivabile due volte in A con derivate continue e sia $(x_0, y_0) \in \dot{A}$ con $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.
Allora:

a) $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0\ e\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)\ minimo\ locale.$
b) $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0\ e\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)\ massimo\ locale.$
c) $\det D^2 f(x_0, y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)\ punto\ di\ sella.$

Si ha che $\det D^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$.

Esempi.

1) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 1$
Si ha che f è derivabile e
$$\nabla f(x, y) = (2x, 6y) = (0,0) \Leftrightarrow (x, y) = (0,0)$$
Inoltre
$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$
Perciò
$$\det D^2 f(0,0) = 12$$
E poiché
$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$
$$\Longrightarrow (0,0)\ \text{è}\ un\ punto\ di\ minimo\ locale.$$
2) $f(x, y) = x^4 + y^4$
Si ha che f è derivabile e
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, 4y^3) = (0,0) \Leftrightarrow (x, y) = (0,0)$$

Inoltre
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^4 \end{pmatrix}$$
In particolare
$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Il determinante della matrice è 0 e dunque il teorema non può dirci niente.
Però si nota che
$$f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 \ \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Dunque $(0,0)$ è minimo assoluto per f.

Esercizi sui minimi e massimi per funzioni a più variabili.

1° esercizio

Sia
$$f(x,y) = y^2 + xy - 2x^2$$
e sia
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], 0 \leq y \leq -x+1\}$$
Stabilire se f ammette massimi e minimi assoluti in E e in caso affermativo determinarli.

Risoluzione.

Si può notare che E è limitato in quanto è possibile creare un cerchio di raggio r che lo contiene e si può notare che è chiuso in quanto intersezione finita di insiemi chiusi. Dunque dal teorema di Weirstrass esistono massimo e minimo assoluti di f in E.
f è derivabile e
$$\nabla f(x,y) = (y - 4x, 2y + x) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 4x \\ 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$
Ma $(0,0) \notin \dot{E}$ (rimane un candidato) dunque andiamo a studiare il bordo dell'insieme ∂E che è formato dai lati del triangolo ABC.
Parametrizziamo le curve che rappresentano i vari lati
$$AB = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} t \in [0,1]$$
Si ha che
$$f_{|AB}(x,y) = -2t^2 = h(t)$$
$h(t)$ è derivabile e $h'(t) = -4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \notin (0,1)$.
Poi
$$BC = \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \end{cases} t \in [0,1]$$
In questo caso si ha che
$$f_{|BC}(x,y) = (-t+1)^2 + t(-t+1) - 2t^2 = -2t^2 - t + 1 = h(t)$$
$h(t)$ è derivabile e $h'(t) = -4t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \notin (0,1)$.
Infine
$$AC = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} t \in [0,1]$$
Qui
$$f_{|AC}(x,y) = t^2 = h(t)$$
$h(t)$ è derivabile e $h'(t) = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \notin (0,1)$.

Gli unici punti rimasti da considerare sono i vertici del triangolo

$$f(A) = f(0{,}0) = 0$$
$$f(B) = f(1{,}0) = -2 \Rightarrow minimo\ assoluto$$
$$f(C) = f(0{,}1) = 1 \Rightarrow massimo\ assoluto$$

2° esercizio.

Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *si chiede di*

a. *Trovare i massimi e i minimi nel dominio*
b. *Trovare i massimi e i minimi assoluti di f in E dove* $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{9} + y \leq 1\right\}$

Risoluzione a.

Abbiamo che f è definita in $\mathbb{R}^2$ e derivabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0{,}0)\}$ e

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$
$$= (0{,}0) \Leftrightarrow (x,y) = (0{,}0)$$

Perciò non esistono punti critici in f.

Consideriamo (0,0) che è un punto di non derivabilità. Si ha che

$$f(0{,}0) = 0$$

Ma poiché

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Allora (0,0) è un punto di minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione b.

Si ha che E è un insieme compatto e dunque dal teorema di Weirstrass esistono massimo e minimo assoluti di f in E.

Studiamo il bordo di E e lo parametrizziamo

$$\partial E = \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \ t \in [0{,}2\pi]$$

Abbiamo

$$f_{|\partial E} = \sqrt{9\cos^2 t + \sin t} = h(t)$$

$h(t)$ è derivabile in $(0{,}2\pi)$ e

$$h'(t) = \frac{-18\cos t \sin t + 2\sin t \cos t}{2\sqrt{9\cos^2 t + \sin^2 t}} = \frac{-8\sin t \cdot \cos t}{\sqrt{9\cos^2 t + \sin^2 t}} =$$
$$= 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \sin t = 0 \\ \cos t = 0 \end{matrix} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

(Abbiamo pure $t = 0, 2\pi$ che però non sono punti dell'intervallo)

I candidati a massimo e minimo sono

$$\begin{cases} t = 0 : (3{,}0) \\ t = \frac{\pi}{2} : (0{,}1) \\ t = \pi : (-3{,}0) \\ t = \frac{3}{2}\pi : (0,-1) \end{cases}$$

Valutando ogni punto otteniamo che i punti (3,0) e (−3,0) sono di massimo assoluto e (0,0) di minimo assoluto per f in E.

Massimi e minimi vincolanti

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $g: B \to \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}^2$.
Chiamiamo vincolo l'insieme

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

Si dice che $(x_0, y_0) \in A \cap V$ è un massimo (minimo) assoluto vincolato per f rispetto al vincolo V se

$$f(x_0, y_0) \geq (\leq)\, f(x, y) \;\; \forall\, (x, y) \in A \cap V$$

Si dice che $(x_0, y_0) \in A \cap V$ è un massimo (minimo) locale o relativo vincolate per f rispetto al vincolo V se esiste un intorno $I_{(x_0,y_0)}$ tale che

$$f(x_0, y_0) \geq (\leq)\, f(x, y) \;\; \forall\, (x, y) \in A \cap V \cap I_{(x_0,y_0)}$$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2, f \in C^1(A)$.
Sia $g: A \to \mathbb{R}, g \in C^1(A)$.
Sia $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$

$$Se\ (x_0, y_0) \in V \cap \dot{A}\ \text{è}\ un\ massimo\ (o\ minimo)\ locale\ vincolato\ per\ f\ rispetto\ a\ V$$
$$\Longrightarrow \exists\, \lambda \,\in \mathbb{R} \mid \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Dove λ è il moltiplicatore di Lagrange.
Inoltre se

$$\mathcal{L}_\lambda = f - \lambda g$$

Allora

$$\nabla \mathcal{L}_\lambda(x_0, y_0) = (0,0)$$

$\mathcal{L}_\lambda$ viene chiamata lagrangiana.
Il teorema fornisce i seguenti insiemi per ricercare i massimi o minimi vincolati:

i. $\left\{(x, y) \in \dot{A} \cap V \,\middle|\, f, g \in C^1(A), \nabla g \neq 0\ e\ \exists\, \lambda \in \in \mathbb{R} : \nabla f = \lambda \nabla g\right\}$
ii. $\left\{(x, y) \in \dot{A} \cap V \,\middle|\, f, g \in C^1(A), \nabla g = 0\right\}$
iii. $\left\{(x, y) \in \dot{A} \cap V \,\middle|\, f \notin C^1\ o\ g \notin C^1\right\}$
iv. $\partial A \cap V$

Esempio. *Sia $f(x, y) = x + y$. Trovare i massimi o minimi vincolati rispetto al vincolo*

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 2, x > 0, y > 0\}$$

Abbiamo che $f(x, y)$ e $g(x, y) = xy - 2$ sono entrambi appartenenti a $C^1(\mathbb{R}^2)$
Si ha che

$$\nabla f(x, y) = (1,1)$$

e

$$\nabla g(x, y) = (y, x)$$

Che vale $(0,0)$ solo per $(x, y) = (0,0)$ che però non appartiene a V.
Mettendo a sistema otteniamo

$$\begin{cases} \nabla f - \lambda \nabla g = 0 \\ (x, y) \in V \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ xy = 2, x > 0, y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda y = 0 \\ 1 - \lambda x = 0 \\ xy = 2, x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \cdot (1 - \lambda y) = 0 \\ y \cdot (1 - \lambda x) = 0 \\ xy = 2, x > 0, y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \lambda xy = 0 \\ y - \lambda xy = 0 \\ xy = 2, x > 0, y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda x = 0 \\ x - y = 0 \\ xy = 2, x > 0, y > 0 \end{cases}$$

Ciò implica che

$$\begin{cases} \lambda x = 1 \\ x = y \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

E dunque $x = \begin{cases} +\sqrt{2} \\ \cancel{-\sqrt{2}} \notin V \end{cases}$

Perciò $y = \sqrt{2}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e si ha che $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è un candidato a essere un massimo o minimo vincolato. Verifichiamo ciò con il seguente sistema sapendo che $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} f(x, y) \geq 2\sqrt{2} \\ xy = 2, x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{2} \\ y = \frac{2}{x}, x > 0 \end{cases}$$

Dunque

$$x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2 + 2}{x} \geq 2\sqrt{2}$$

Poiché in V si ha che $x > 0$ allora

$$x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x \geq 0$$

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 \geq 0 \ \forall \, x \in \mathbb{R}$$

Abbiamo verificato che $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è un punto di minimo vincolato assoluto per f rispetto a V.

Calcolo integrale per funzioni di due variabili

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $D = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : D \to \mathbb{R}^2$.
Problema: come calcolare il volume del solido S compreso tra il piano e $z = f(x, y)$?
È possibile creare una partizione $\mathcal{P}$ di D dove

$$\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_n\}$$

Dove ogni R_i è un rettangolo che soddisfa le seguenti proprietà

$$\bigcup_{i=1}^{n} R_n = D$$

$$\dot{R_\iota} \neq \dot{R_J} \;\; \forall\, i \neq j \quad i, j = 1, \dots, n$$

Per ogni rettangolo R_i possiamo prendere $\xi \in R_i$ e creare un parallelepipedo P_i che ha volume

$$Vol(P_i) = A(R_i) \cdot f(\xi_i)$$

Allora il volume del solido può essere "approssimato" come segue tramite la somma di Cauchy-Riemann

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \cdot f(\xi_i)$$

Diremo che

$$Vol(S) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max\limits_{i=1,\dots,n} A(R_i) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \cdot f(\xi_i)$$

se il limite esiste in $\mathbb{R}$ ed è indipendente dalla scelta di ξ_i.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $D = [a, b] \times [c, d]$.
Sia $f : D \to \mathbb{R}$, f limitata in D.
Si dice che f è *integrabile in* D e si pone

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max\limits_{i=1,\dots,n} A(R_i) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \cdot f(\xi_i)$$

se il limite esiste in $\mathbb{R}$ ed è indipendente dalla scelta di ξ_i.

Teorema. Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$

$$Se\ f\ \text{è}\ continua\ in\ [a, b] \times [c, d] \Longrightarrow f\ \text{è}\ integrabile\ in\ [a, b] \times [c, d]$$

Teorema (formula di riproduzione sui rettangoli).
Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Esempio.

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} xe^{xy}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\ dy \right) dx = \int_0^1 [e^{xy}]_0^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 (e^{2x} - 1)\, dx = \left[\frac{1}{2}\, e^{2x} - x \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 3}{2}$$

Integrabilità su domini diversi dai rettangoli

Sia $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq rettangolo\ R \subseteq \mathbb{R}^2$, f limitata in D.
Definiamo

$$\widetilde{f_R} = \begin{cases} f\ in D \\ 0\ in\ R \setminus D \end{cases}$$

Si dice che f è integrabile in D se $\tilde{f}$ è integrabile in R e si pone

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

Misurabilità secondo Peano-Jordan

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato.
Si dice che D è *misurabile secondo Peano-Jordan* se la funzione

$$f \equiv 1$$

è integrabile in D e in tal caso si chiama *misura di* D e si indica con $A(D) o$ $|D|$ la quantità

$$A(D) = |D| = \iint_D 1\,dxdy$$

Gli insiemi misurabili sono generalmente

1) Rettangolo $R = [a,b] \times [c,d], A(R) = \iint_R 1\,dxdy = (b-a)(c-d)$;
2) Poligoni di $\mathbb{R}^2$;

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che D è misurabile e di misura nulla se

$$\iint_D 1\,dxdy = 0$$

Gli insiemi di misura nulla sono generalmente

1) Insieme costituito da un numero finito di punti;
2) Un segmento in $\mathbb{R}^2$;
3) Un sottoinsieme di un insieme di misura nulla;
4) L'unione finita di insiemi di misura nulla;
5) Bordo di un poligono di n lati.

Caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato.

$$D\ misurabile\ secondo\ P - J \Longleftrightarrow \partial D\ \text{è}\ misurabile\ ed\ \text{è}\ di\ misura\ nulla$$

Teorema. Sia $f: R \to \mathbb{R}$, R rettangolo in $\mathbb{R}^2$.

$$Se\ f\ \text{è}\ limtata\ in\ R\ tale\ che\ l'insiemedei\ suoi\ punti\ di\ discontinuit\text{à}\ abbia\ misura\ nulla \\ \Longrightarrow f\ \text{è}\ integrabile\ in\ R$$

Teorema. Sia $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2, D$ misurabile e limitato.

a) Se D è chiuso e f è continua in D allora f è integrabile in D.
b) Se D è aperto e f è continua e limitata in D allora f è integrabile in D.

Proprietà integrale doppio

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, $f, g: D \to \mathbb{R}$ limitate e integrabili in D.
Valgono le seguenti proprietà.

1) $\iint_D f(x,y)\, dxdy \ \in \mathbb{R}$;
2) Se D è misurabile, $A(D) = |D| = \iint_D 1\, dxdy$;
3) $\alpha f + \beta g$ integrabile in D e $\iint_D (\alpha f + \beta g)\, dxdy = \alpha \iint_D f\, dxdy + \beta \iint_D g\, dxdy\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
4) $f \le g \Longrightarrow \iint_D f\, dxdy \le \iint_D g\, dxdy$ (monotonia);
5) $\left|\iint_D f\, dxdy\right| \le \iint_D |f|\, dxdy$;
6) *Monotonia rispetto al dominio di integrazione*: se $D' \subseteq D$ è misurabile, allora f è integrabile in D'. Inoltre se $f \ge 0$ allora $\iint_{D'} f\, dxdy \le \iint_D f\, dxdy$;
7) *Additività rispetto al dominio di integrazione*: siano D_1 e D_2 limitati e misurabili con $|D_1 \cap D_2| = 0$. Se f è integrabile in $D_1 \cup D_2$ allora f è integrabile in D_1 e in D_2 e $\iint_{D_1 \cup D_2} f\, dxdy = \iint_{D_1} f\, dxdy\ + \iint_{D_2} f\, dxdy$;
8) *Annullamento*: se D è misurabile e $A(D) = 0$ allora $\iint_D f\, dxdy = 0$. In particolare se D è aperto, limitato e misurabile con misura positiva e f è continua e limitata in D con $f \ge 0$ in D e $\iint_D f\, dxdy = 0$ allora $f \equiv 0$ in D;

Nello specifico nel punto 8, la continuità è richiesta poiché possiamo considerare la seguente funzione che soddisfa tutte le condizioni della proprietà (eccetto la continuità) ma non è identicamente equivalente a 0

$$f(x) = \begin{cases} 0\ se\ x \in \dot{Q} \\ 1\ se\ x \in \partial Q \end{cases}$$

dove $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Domini semplici o normali

Siano $\alpha, \beta: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue con $\alpha(x) \le \beta(x)\ \ \forall\, x \in [a,b]$.
Un dominio D viene chiamato *semplice* rispetto all'asse x se

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [a,b], \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

Se

$$\alpha, \beta \in C^1([a,b])$$

allora D si chiama dominio regolare rispetto all'asse x.

Siano $\gamma, \delta: [c,d] \to \mathbb{R}$ continue con $\gamma(y) \le \delta(y)\ \forall\, y \in [c,d]$.
Un dominio D viene chiamate *semplice* rispetto all'asse y se

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \in [c,d], \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

Se

$$\gamma, \delta \in C^1([c,d])$$

allora D si chiama dominio regolare rispetto all'asse y.

Teorema. Sia $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ semplice rispetto ad x (o y).

$$Se\ f\ \text{è}\ continua\ in\ D \Longrightarrow f\ \text{è}\ integrabile\ in\ D$$

Formule di riduzione sui domini semplici

Sia $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, f continua in D.

1) Se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \in [a,b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ con $\alpha, \beta \in C([a,b])$ allora
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$
2) Se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \in [c,d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ con $\gamma, \delta \in C([a,b])$ allora
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Esempio.

1) $\iint_D xy\,dxdy \ \ dove \ D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

   Si ha che il dominio è semplice rispetto a x dunque
$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{x^2} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 = \frac{1}{2} \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$
2) $\iint_D (x-y)\,dxdy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$

   Anche qui il dominio è semplice rispetto ad x perciò
$$\iint_D (x-y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^x (x-y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^x =$$
$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Teorema della media

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, misurabile, compatto e connesso.
Sia $f: D \to \mathbb{R}$.
$$Se\ f \text{ è } continua\ in\ D \implies \exists\ (x_0, y_0) \in D \ | \iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0) \cdot A(D)$$

Dimostrazione.
Se $A(D) = 0$: ovvio.
Se $A(D) > 0$:
Da Weirstrass esistono $M = \max f$ e $m = \min f$ assoluti in D perciò
$$m \leq f(x,y) \leq M \ \forall\ (x,y) \in D$$
Dalla monotonia dell'integrale abbiamo che
$$\iint_D m\,dxdy \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D M\,dxdy$$
Poiché m e M son costanti allora
$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq M \cdot A(D)$$

Dividendo per $A(D)$ otteniamo

$$m \leq \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dxdy \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi esiste $(x_0, y_0) \in D$ per cui

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

Moltiplicando per $A(D)$ entrambi i membri, la tesi viene dimostrata.

Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^2$

Un cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^2$ è una funzione

$$\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \psi(x,y) = (u,v)$$

che è invertibile, in cui

$$\psi(x,y) = (\psi_1(x,y), \psi_2(x,y))$$

dove

$$\psi_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, i = 1, 2$$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, l'immagine di D mediante ψ è l'insieme

$$\psi(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = \psi_1(x,y), v = \psi_2(x,y), (x,y) \in D\}$$

Si dice che ψ è di classe $C^n(\mathbb{R}^2), n \in \mathbb{N}$ se $\forall\, i = 1, 2\ \psi_i \in C^n(\mathbb{R}^2)$.
Sia $\psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, è possibile costruire la sua matrice jacobiana che sarà

$$D\psi = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Essendo una matrice 2×2 il determinante sarà

$$\det D\psi = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Se $\det D\psi \neq 0$ in D allora ψ è invertibile. In tal caso esiste

$$\psi^{-1}: \psi(D) \to D$$
$$(u,v) \longmapsto \psi^{-1}(u,v) = (x,y)$$

Si dimostra che

$$\psi \in C^{-1}(D) \Longrightarrow \psi^{-1} \in C^1(\psi(D))$$

e che

$$D\psi^{-1}(u,v) = [D\psi(x,y)]^{-1}_{(x,y)=\psi^{-1}(u,v)}$$

Il determinante della funzione inversa sarà

$$\det D\psi^{-1}(u,v) = \frac{1}{\det D\psi(x,y)|_{(x,y)=\psi^{-1}(u,v)}}$$

Poiché ψ per essere invertibile deve avere $\det D\psi \neq 0$ la frazione ha senso.

Esempio
Sia
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -y \leq x \leq 2 - y, x - 2 \leq y \leq x\}$$
Possiamo effettuare un cambio di variabile (per esempio per calcolare un integrale).
In questo caso in
$$-y \leq x \leq 2 - y$$
possiamo sommare y ad ogni termine e otteniamo
$$0 \leq x + y \leq 2$$
E in
$$x - 2 \leq y \leq x$$
sottrare x a ogni termine e ottenere
$$-2 \leq y - x \leq 0$$
Il cambio di variabile sarà
$$\psi = \begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$$
e la matrice jacobiana sarà
$$D\psi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Poiché $\det D\psi(x, y) = 1 - (-1) = 2 \neq 0$ allora esiste ψ^{-1} che avrà $\det D\psi^{-1} = \frac{1}{2}$.
Per trovare ψ^{-1} sappiamo che
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases} = \begin{cases} u + v = 2y \\ u - v = 2x \end{cases} \Longrightarrow \psi^{-1} = \begin{cases} y = \dfrac{u + v}{2} \\ x = \dfrac{u - v}{2} \end{cases}$$
L'immagine di D mediante ψ sarà
$$\psi(D) = \{(u, v) \mid u \in [0, 2], v \in [-2, 0]\}$$

Cambio di variabile tramite coordinate polari

Un generico punto $P = (x, y)$ può essere anche scritto come $(\rho \cdot \cos\theta, \rho \cdot \sin\theta)$ dove ρ è $|P|$ e θ è l'angolo che forma il segmento che dall'origine va a P e l'asse x.
Il nostro cambio di variabile sarà dunque la funzione
$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (\rho, \theta)$$
Mentre
$$\psi^{-1} = \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$
Si ha che
$$|D\psi^{-1}(\rho, \theta)| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cdot \cos\theta \end{pmatrix}\right| = \rho \cdot \cos^2\theta + \rho \cdot \sin^2\theta = \rho$$

Formula del cambio di variabili per gli integrali doppi

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile.
Sia $f: D \to \mathbb{R}$ continua e limitata in D.
Sia $\psi : D \to \mathbb{R}^2$ un cambio di variabili allora

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\psi(D)} f\left(\psi^{-1}(u,v)\right) |\det D\psi^{-1}(u,v)|\, dudv$$

Esempio.
Calcolare

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 4 \le x^2+y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge 0\}$$

Risoluzione:
Abbiamo che

$$\psi^{-1} = \begin{cases} \rho \cdot \cos\theta \\ \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \rho \in [2,3], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Il nostro integrale diventa dunque

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{[2,3]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \frac{\rho\cos\theta\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} \cdot \rho\, d\rho d\theta =$$

$$\iint_{[2,3]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\, d\rho d\theta = \int_2^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta\right) d\rho =$$

$$= \int_2^3 \rho^2\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 \cdot \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(9 - \frac{8}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{9}$$

Nota. In generale se per il dominio ci riferiamo un elisse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ centrato in un punto (x_0, y_0) abbiamo che

$$\psi^{-1} = \begin{cases} x = a\rho\cos\theta + x_0 \\ y = b\rho\sin\theta + y_0 \end{cases}$$

Il determinante sarà $ab\rho$.

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale *ordinaria* di *ordine* n è un'espressione del tipo

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

dove

$$F: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^{n+2}\ aperto, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Se è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo dall'espressione, ossia scriverla nella forma

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

con

$$f: B \to \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\ aperto$$

allora si dice che l'equazione differenziale è in *forma normale*.
Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le funzioni

$$\bar{y}: \tilde{A} \to \mathbb{R}, \tilde{A} \subseteq aperto$$

tali che

a) $\bar{y}$ è derivabile fino all'ordine n in $\tilde{A}$;
b) $F\left(x, \bar{y}(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x)\right) = 0\ \forall\ x \in \tilde{A}$;

L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale si chiama *integrale generale.*
Una soluzione specifica derivata dall'integrale generale si chiama *integrale particolare*.
Definizioni.
Un equazione differenziale si dice

- A coefficienti costanti se tutti i coefficienti delle y e derivate sono numeri. A coefficienti variabili, invece, se i coefficienti sono incognite.
- Omogenea se non presenta termini noti, non omogenea altrimenti.
- Lineare se y e derivate sono lineari, non lineari altrimenti.

Esempi

1) $y'' + 3y' + y = 0$ è un'equazione del II ordine a coefficienti costanti, lineare e omogenea.
2) $y'' + 3xy' + 2 = 0$ è un'equazione del II ordine a coefficienti variabili, lineare e non omogenea.
3) $2y''' + (y')^2 = 0$ è un'equazione del III ordine a coefficienti costanti, non lineare e omogenea
4) $xy''' + x^2 y = 3$ è un'equazione del II ordine a coefficienti variabili lineare e non omogenea

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale

Sono equazioni del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

dove $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2\ aperto$.
L'integrale generale dipende da una costante arbitraria.

A variabili separabili

Particolare equazioni del primo ordine in forma normale del tipo

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)\ ^{*}$$

Dove f e g sono funzioni continue. L'equazione può esser scritta come

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)\ ^{**}$$

Supponiamo che esiste y_0 tale che $g(y_0) = 0$ allora

$$y(x) = y_0$$

è un *integrale singolare* di $*$.
Sia $g(y) \neq 0$. Da $**$ si ha che

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$
$$\Longrightarrow \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Ne deriva che l'integrale generale di $*$ è

$$G(y) = F(x) + c$$

Dove

- $G(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$;
- $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$;

Esempi.

1) $y' = xy^3$
   $y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Longrightarrow y(x) = 0$ è l'integrale singolare dell'equazione.
   Sia $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^3} = x\,dx \Longrightarrow \int \frac{1}{y^3}dy = \int x\,dx \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

   Abbiamo trovato l'integrale generale, possiamo esplicitarlo

$$y^2 = -\frac{1}{x^2 + c} \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{-x^2 - c}$$

   Poiché y^2 è positivo allora $-x^2 - c > 0 \Longrightarrow x^2 < c \Longrightarrow c > 0$, perciò

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{c - x^2}}$$

   Con $-\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$.

2) $y' = \frac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$
   $y = 0$: integrale singolare.
   $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}dx$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}dx$$

   L'integrale generale è dunque

$$\log|y(x)| = \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

   Che esplicitato diventa ($\log k = c$ in quanto il logaritmo è iniettivo in $\mathbb{R}$)

$$\log|y(x)| = log\sqrt{1 + e^{2x}} + \log k, k > 0$$
$$\log|y(x)| = \log\left(k\sqrt{1 + e^{2x}}\right)$$

$$|y(x)| = k\sqrt{1+e^{2x}}$$
$$y(x) = \pm k\sqrt{1+e^{2x}}$$
$$y(x) = c\sqrt{1+e^{2x}}$$

Poiché con $c = 0$ otteniamo $y(x) = 0$ allora esso non è più un integrale singolare, ma particolare

3) È possibile fare un'analisi qualitativa di una equazione differenziale senza risolverla. Prendiamo per esempio
$$y' = 3e^y$$
Poiché $3e^y > 0$ allora y è strettamente monotona crescente.
Inoltre
$$3e^y \text{ è } derivabile \Rightarrow y' \text{è } derivabile \Rightarrow \exists\, y'' = 3e^y \cdot y'(x) = (3e^y)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'' > 0$$
Abbiamo visto che y è convessa.

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Un equazione differenziale lineare di ordine n è un'equazione del tipo
$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$
dove
$$a_i, g[a,b] \to \mathbb{R}$$
son continue con $i = 0, \dots, n$ e $a_n \neq 0$.
L'equazione differenziale è lineare poiché l'applicazione
$$L: C^n([a,b]) \to C([a,b])$$
$$u \longmapsto L(u) = a_n(x)u^{(n)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u$$
è lineare i.e. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, u, v \in C^n([a,b])$
$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta(v)$$
L'equazione originale, dunque, può essere scritta come $L(y) = g(x)$ (1) e l'equazione omogenea associata come $L(y) = 0$ (2).

Nota 1. Siano αu e βv soluzioni di (2), allora
$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha u + \beta v \text{ é } soluzione\ di\ (2)$$
Ciò prende il nome di principio di sovrapposizione.

Nota 2. Siano u e v soluzione di (1) i.e. $L(u) = g(x) = L(v)$ allora
$$L(u+v) = L(u) + L(v) = g(x) + g(x) = 2g(x)$$
Dunque $u + v$ non è soluzione di (1). Però se αu è soluzione di (2) e v soluzione di (1) allora
$$L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v) = \alpha 0 + g(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow \alpha u + v\ soluzione\ di\ (1)$$

Definizione, Consideriamo
$$f_1, \dots, f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$$
continue.
Si dice che $f_1, \dots, f_n$ sono

a) Linearmente dipendenti in $[a,b]$ se $\forall\, x \in [a,b]$
$$\exists (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0) : c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$
b) Linearmente indipendenti in $[a,b]$ se $\forall\, x \in [a,b]$
$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$$

Determinante Wronskiano. Sia

$$L(y) = 0$$

un'equazione differenziale lineare di ordine n omogenea.
Siano

$$y_1, \dots, y_n$$

n integrali particolari dell'equazione.
Si definisce wronskiano o determinante wronskiano di $y_1, \dots, y_n$ la quantità

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1{}'(x) & & y_n{}'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Teorema del Wronskiano

Siano $y_1, \dots y_n$ integrali particolari di $L(y) = 0$ in $[a, b]$, allora

a) $y_1, \dots, y_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\exists\, x_0 \in [a, b] \mid W(x_0) = 0$.
b) $y_1, \dots, y_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\exists\, x_1 \in [a, b] \mid W(x_1) \neq 0$

Equazioni differenziali di ordine n omogenee

Sono equazioni differenziali del tipo

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad (L(y) = 0)$$

Teorema. Data l'equazione differenziale ordinaria di ordine n omogenea, allora

1) $\exists\, y_1, \dots, y_n$ integrali particolari dell'equazione linearmente indipendenti.
2) L'integrale generale è dato da

$$y(x, c_1, \dots, c_n) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

Equazioni differenziali di ordine n non omogenee

Sono equazioni del tipo

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad \big(L(y) = g(x)\big)$$

Teorema. Data l'equazione differenziale ordinaria di ordine n non omogenea allora l'integrale generale è dato da

$$y(x, c_1, \dots, c_n) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_0(x) \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

dove

$$y_1, \dots, y_n$$

sono n integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(y) = 0$ e y_0 è un integrale particolare di $L(y) = g(x)$.

Equazioni differenziali del primo ordine

Sono equazioni del tipo

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

dove

$$a, b : I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}\ intervallo, a, b\ \in C(I)$$

L'integrale generale è dato da

$$y(x, c) = e^{\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + c\right]$$

Dimostrazione. Possiamo moltiplicare entrambi i termini dell'equazione per $e^{-\int a(x)dx}$:

$$y'(x)e^{-\int a(x)dx} - a(x)y(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Si ha che

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{-\int a(x)dx}\right) = y'(x)e^{-\int a(x)dx} + y(x)e^{-\int a(x)dx}\left(-a(x)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x)e^{-\int a(x)dx}\right) = b(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$$y(x)e^{-\int a(x)dx} = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + c$$

Per ottenere la formula basta moltiplicare entrambi i termini per $e^{\int a(x)dx}$.

Esempio.
Calcoliamo l'integrale generale di

$$y' = 2y + 3e^{4x}$$

Notiamo che $a(x) = 2$ e $b(x) = 3e^{4x}$ perciò applicando la formula si ottiene

$$y(x,c) = e^{\int 2dx} \cdot \left[\int 3e^{4x}\, e^{\int 2dx}dx + c\right] =$$
$$= e^{2x} \cdot \left[\int 3e^{4x} \cdot e^{-2x}dx + c\right] =$$
$$= e^{2x} \cdot \left[\frac{3e^{2x}}{2} + c\right] =$$
$$= \frac{3}{2}e^{4x} + ce^{2x}, c \in \mathbb{R}$$

Equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti

Son equazioni del tipo

$$a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad ^{(1)}$$

dove

$$a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, a_n \neq 0$$

Per la risoluzione si cercano soluzioni del tipo

$$y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Derivando si ha

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$
$$\dots$$
$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Sostituendo a (1) si ottiene

$$a_n\lambda^n e^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}(a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0) = 0$$
$$a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Dove

$$a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

è il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ e

$$P(\lambda) = 0$$

l'equazione caratteristica.

Proposizione. Data l'equazione differenziale (1) si ha

$$y(x) = e^{\lambda x}\ soluzione\ di\ (1) \Leftrightarrow \lambda \text{ è } radice\ di\ P(\lambda)\ (i.e. P(\lambda) = 0)$$

Teorema. Sia $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale (1)

i) Se $P(\lambda) = 0$ ha n soluzioni distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora le funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

sono n integrali particolari di (1) linearmente indipendenti.

ii) Se $P(\lambda) = 0$ ha $p < n$ soluzioni distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ con molteplicità $r_1, \dots, r_p$ tali che

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n$$

allora le funzioni

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} & \dots & x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_p x} & xe^{\lambda_p x} & \dots & x^{r_p - 1} e^{\lambda_p x} \end{matrix}$$

sono n integrali particolari di (1) linearmente indipendenti.

Nota. Dalle formule di Eulero si ha che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$$

Sia $\lambda^* = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ soluzione di (1) allora $\overline{\lambda^*} = \alpha - i\beta$ è soluzione di (1).
Grazie alle formule di Eulero scriveremo

$$P(\lambda^*) = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$
$$P(\overline{\lambda^*}) = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti non omogenee

Per la risoluzione di questo tipo di equazioni si fa uso al metodo di somiglianza e si può vedere con i seguenti esempi.

Esempio 1 (polinomio come termine noto).

$$y'' - 3y' + 2y = x$$

L'omogenea associata è

$$y'' - 3' + 2y = 0$$

Che ha integrale generale

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{2x},\ \ c_{1,} c_2 \in \mathbb{R}$$

Adesso tocca trovare l'integrale particolare dell'equazione non omogenea. Troviamo la soluzione più semplice possibile che è simile al termine noto

$$y_0(x) = Ax + B$$
$$y_0'(x) = A$$
$$y_0''(x) = 0$$

Sostituendo all'equazione originale si ottiene

$$-3A + 2Ax + 2B = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$$

Risulta che l'integrale generale è

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esempio 2 (caso particolare del polinomio come termine noto).

$$y'' + y' = 3x - 1$$

Risolvendo l'omogenea associata si ha che

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$
$$y(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

In questo caso poiché $\lambda = 0$ è soluzione dell'omogenea con molteplicità m (1 in questo caso), l'integrale particolare della non omogenea sarà

$$y_0(x) = (Ax + B) \cdot x^m = Ax^2 + Bx$$
$$y_0'(x) = 2Ax + B$$
$$y_0''(x) = 2A$$

Sostituendo all'equazione si ottiene

$$2A + 2Ax + B = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 3 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \begin{cases} A = \dfrac{3}{2} \\ B = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$$

L'integrale generale dell'equazione è dunque

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 4x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esempio 3 (esponenziale come termine noto).

$$y'' + y = e^{2x}$$

Risolvendo l'omogenea associata si ha che

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda = \pm i$$
$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

In questo caso per l'integrale particolare scegliamo un esponenziale con lo stesso coefficiente

$$y_0(x) = Ae^{2x}$$
$$y_0'(x) = 2Ae^{2x}$$
$$y_0''(x) = 4Ae^{2x}$$

Sostituendo all'equazione originale

$$4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

L'integrale generale è dato da

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{5}e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esempio 4 (caso particolare dell'esponenziale come termine noto).

$$y'' - y = e^x$$

Calcolando l'omogenea associata otteniamo

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$
$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

In questo caso poichè $\lambda = 1$ è una soluzione della omogenea con molteplicità m, l'integrale particolare della non omogenea è dato da

$$y_0(x) = Ae^x \cdot x^m = Axe^x$$
$$y_0'(x) = Axe^x + Ae^x$$
$$y_0''(x) = Axe^x + 2Ae^x$$

Sostituendo all'equazione otteniamo

$$Axe^x + 2Ae^x - Axe^x = e^x$$
$$2Ae^x = e^x$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

L'integrale generale è

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} xe^x, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esempio 5 (seno o coseno come termine noto).

$$y'' - y = 2\sin(3x)$$

L'integrale generale della omogenea è già stato calcolato nell'esempio precedente.
Per l'integrale particolare prendiamo la somma di seno e coseno che hanno lo stesso argomento del termine noto.

$$y_0(x) = Asin(3x) + Bcos(3x)$$
$$y_0'(x) = 3Acos(3x) - 3Bsin(3x)$$
$$y_0''(x) = -9Asin(3x) - 9Bcos(3x)$$

Sostituendo si ottiene

$$-9A\sin(3x) - 9B\cos(3x) - A\sin(3x) - B\cos(3x) = 2\sin(3x)$$
$$-10A\sin(3x) - 10B\cos(3x) = 2\sin(3x)$$
$$\Rightarrow A = -\frac{1}{5}, B = 0$$

L'integrale generale è

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(3x) \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esempio 6 (caso particolare del seno o coseno come termine noto).

$$y'' + y = 2\sin x$$

Calcolando la omogenea associata si ha che

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda = \pm i$$
$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

In questo caso abbiamo $\lambda = \alpha i$ (soluzione immaginaria pura) con m molteplicità e dunque l'integrale particolare sarà

$$y_0(x) = (A\sin x + B\cos x)x^m = Ax\sin x + Bx\cos x$$
$$y_0'(x) = (A\cos x - B\sin x)x + (A\sin x + B\cos x)$$
$$y_0''(x) = (-A\sin x - B\cos x)x + 2(A\cos x - B\sin x)$$

Sostituendo all'originale

$$(-A\sin x - B\cos x)x + 2(A\cos x - B\sin x) + (A\sin x + B\cos x)x = 2\sin x$$
$$2A\cos x - 2B\sin x = 2\sin x \Rightarrow A = 0, B = -1$$

L'integrale generale è

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos^2(x) - x\cos(x), \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Equazione differenziale di Eulero

Equazione differenziale della forma
$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$
Per la risoluzione si pone
$$x = e^s \Rightarrow \log x = s$$
$$z(s) = y(e^s) \Rightarrow z(\log x) = y(x)$$
Esempio.
$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 0 \;\; con\; x > 0$$
Poniamo
$$x = e^s \Rightarrow s = \log x$$
$$z(s) = y(e^s) \Rightarrow y(x) = z(\log x)$$
Dunque
$$y'(x) = z'(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{z'(s)}{x}$$
$$y''(x) = z''(\log x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + z'(\log x) \cdot -\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}[z''(s) - z'(s)]$$
Sostituendo otteniamo
$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2}[z''(s) - z'(s)] + 2x \cdot \frac{1}{x} \cdot z'(s) - 6 \cdot z(s) = 0$$
$$z''(s) + z'(s) - 6z(s) = 0$$
Cerchiamo delle soluzioni del tipo
$$z(s) = e^{\lambda s}$$
$$z'(s) = \lambda e^{\lambda s}$$
$$z''(s) = \lambda^2 e^{\lambda s}$$
Sostituiamo
$$\lambda^2 e^{\lambda s} + \lambda e^{\lambda s} + 6e^{\lambda s} = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$$
$$\Rightarrow z(s, c_1, c_2) = c_1 e^{-3s} + c_2 e^{2s} \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
Ricordandoci che $s = \log x$
$$\Rightarrow y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{-3\log x} + c_2 e^{2\log x} = c_1 x^{-3} + c_2 x^2 \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Equazione differenziale di Bernoulli

Equazione delle forma
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x)$$
con $a, b: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}\; intervallo, a, b \in C(I), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
Richiediamo $\alpha \neq 0{,}1$ poiché per $\alpha = 0$ l'equazione diventa
$$y' = a(x)y + b(x)$$
che è un'equazione lineare del I ordine, mentre per $\alpha = 0$ l'equazione diventa
$$y' = a(x)y + b(x)y = c(x)y(x)$$
che è un'equazione differenziale a variabili separabili.
Per la risoluzione si pone
$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$$
In modo tale da ottenere un'equazione lineare del I ordine.

Esempio.

$$xy' = -2y - y^2 \log x^{(2)}, x > 0$$

Scritta così non è un'equazione di Bernoulli in quanto è presente il coefficiente x in y'.
Dividendo entrambi i membri per x, ossia scrivere l'equazione in forma normale, otteniamo però un equazione di Bernoulli

$$y' = -\frac{2}{x}y - \frac{\log x}{x}y \quad (A)$$

In questo caso $a(x) = -\frac{2}{x}, b(x) = \frac{\log x}{x}$ e $\alpha = 2$.
Si ha che $y(x) = 0$ è un integrale singolare di (2).
Per $y(x) \neq 0$ poniamo

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow y = \frac{1}{z(x)}$$

$$y'(x) = \frac{1}{z^2(x)} \cdot z'(x) = -\frac{z'}{z^2}$$

Sostituendo in (A) si ha

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - \frac{\log x}{x} \cdot \frac{1}{z^2}$$

$$z' = -\frac{2}{x}z + \frac{\log x}{x}$$

$$z(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \frac{\log x}{x} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + c\right] = e^{2\log x}\left[\int \frac{\log x}{x} e^{2\log x} dx + c\right] =$$

$$= x^2 \left[\int \frac{\log x}{x^3} dx + c\right] = x^2 \left[-\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c\right] = -\frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} + cx^2$$

Problema di Cauchy

Un problema di Cauchy del I ordine di punto iniziale x_0 è un sistema

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Una soluzione *locale* di (P) è una funzione

$$y: I_{x_0} \to \mathbb{R}$$

tale che

1) y è derivabile in I_{x_0};
2) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \ \forall\, x \in I_{x_0}$;
3) $y(x_0) = y_0$;

Teorema di esistenza locale (di Peano).
Se f è continua in un intorno di (x_0, y_0) allora (P) ammette soluzione locale.
Teorema di esistenza e unicità locale (di Cauchy).
Se f è continua e derivabile rispetto a y in un intorno di (x_0, y_0) con f_y limitata, allora esiste un'unica soluzione locale di (P).

Esempio.

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo che $f(x, y(x)) = \lambda y$ che è continua e derivabile rispetto a y in tutto il suo dominio e dunque dal teorema di Cauchy il problema ammette un' unica soluzione locale.
Provando a risolvere

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

Si ha che

$$\frac{dy}{y} = \lambda$$

Ma dobbiamo mettere come condizione che $y \neq 0$, cosa che non si può fare visto che non sappiamo come si comporta $y(x)$ nell'intorno di 0.
Se $y(x) = 0$ abbiamo che

$$y'(x) = 0 = \lambda \cdot 0$$

e

$$y(1) = 0$$

Dunque $y(x) = 0$ è soluzione di (P).
Esempio 2.

$$(P) = \begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Valgono le considerazioni dell'esempio precedente, ma in questo caso possiamo risolvere l'equazione differenziale in quanto $y(x)$ è positiva nell'intorno di 1.
Procedendo con la risoluzione si ha che

$$\frac{dy}{y} = \lambda dx$$

$$\log y = \lambda x + c$$

$$y(x) = e^{\lambda x + c} = e^{\lambda x} e^{c}$$

Possiamo considerare e^c come una costante e dunque

$$y(x) = ke^{\lambda x}$$

Valutiamo $y(1)$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = ke^{\lambda} \Rightarrow k = 2e^{-\lambda}$$

Sostituendo k in $y(x)$ otteniamo la soluzione al problema

$$y(x) = 2e^{-\lambda} e^{\lambda x}$$

Problema di Cauchy di ordine n.

Un problema di Cauchy di ordine n di punto iniziale x_0 è un sistema

$$(P) \begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y\_(n-1) \end{cases}$$

Esempio.
Il seguente è un problema di Cauchy del secondo ordine

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'') \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

Nota (differenza tra problema di Cauchy e problema ai limiti).
x_0 non può cambiare nel sistema. Infatti se consideriamo

$$\begin{cases} \cdots \\ y(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

Poiché compare il 2, il sistema non può essere chiamato problema di Cauchy. Oppure

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'') \\ y'(1) = 7 \\ y''(1) = -2 \end{cases}$$

non è neanch'esso un problema di Cauchy in quanto y'' compare nelle condizioni (ultima riga). Questi vengono chiamati problemi ai limiti. Un altro esempio di problema ai limiti può essere

$$\begin{cases} y'' + y' + 7y = x \\ y(a) = y'(b) \qquad x \in [a, b] \\ y'(a) = y(b) \end{cases}$$