APPUNTI DI ANALISI I

di Arlind Pecmarkaj

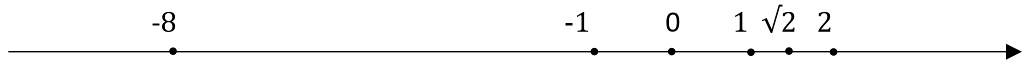
Università degli studi di Urbino

Anno accademico 2020/2021

Numeri Reali e la retta reale

I numeri reali sono i numeri che possono espressi come decimali, incluso i numeri irrazionali.
L'insieme $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato e dunque ogni suo elemento è direttamente confrontabile con un altro.
I numeri reali possono essere rappresentati geometricamente come punti di una retta che chiameremo retta reale.
Nella retta reale si fissano la direzione (seguendola i numeri sono maggiori di quelli precedenti), l'origine ovvero il punto dello 0 e un unità di misura.

Es.



Modulo o valore assoluto di un numero reale

Sia $a \in \mathbb{R}$ il suo modulo o valore assoluto è:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a > 0 \\ 0 \text{ se } a = 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Esempi:

- $|2| = 2$
- $|0| = 0$
- $|-3| = 3$

Il modulo rappresenta la distanza dall'origine (o la lunghezza del segmento nella retta).

Proprietà:

a) $|a| \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
b) Per ogni $a \geq 0$ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
c) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (diseguaglianza triangolare)
d) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (conseguenza del punto c)

Sottoinsiemi e intervalli di $\mathbb{R}$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$
Si dice che E è [1]superiormente/[2]inferiormente limitato se:

1) Esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in E$
2) Esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in E$

Se in E valgono entrambi i punti 1 e 2 si dice che esso è limitato.
E è chiamato intervallo se per alcuni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, coincide con uno di questi insiemi:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

a e b sono gli estremi dell'intervallo.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ possiamo definire gli intervalli illimitati inferiormente

$$(-\infty, a] = \{x : x \in X \wedge x \leq a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x : x \in X \wedge x < a\}$$

e illimitati superiormente

$$[a,\infty) = \{x : x \in X \wedge x \geq a\}$$
$$(a,\infty) = \{x : x \in X \wedge x > a\}.$$

Ne consegue che

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Massimi e minimi di un insieme, maggioranti e minoranti, estremi inferiori e superiori

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ è [1]massimo/[2]minimo per E se

1) $a \in E$, $x \leq a$ per ogni $x \in E$
2) $a \in E$, $a \leq x$ per ogni $x \in E$

[1]M/[2]m $\in \mathbb{R}$ è detto [1]maggiorante/[2]minorante per E se

1) $x \leq M$ per ogni $x \in E$
2) $m \leq x$ per ogni $x \in E$

Si definisce estremo [1]superiore/[2]inferiore il più [1]piccolo/[2]grande dei [1]maggioranti/[2]minoranti di E e si indica con [1]sup E/[2]inf E.

Nota:

a) $\inf E \leq \sup E$
b) Se E è illimitato [1]superiormente/[2]inferiormente si ha che [1]$\sup E = \infty$/[2]$\inf E = -\infty$

Assioma di Dedekind

Per ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ che è superiormente limitato esiste un estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Si dimostra che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma

Prendiamo $E \subseteq \mathbb{Q}$ tale che

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Si nota che il minimo e l'estremo inferiore sono 0 e che E non ammette massimo. L'estremo superiore è $\sqrt{2}$ che però non appartiene a $\mathbb{Q}$!

Sommatorie

Per scrivere somme composte da un numero relativamente alto di termini si usa per convenzione la lettera greca $\sum$ (sigma). Ciò permette di accorciare espressioni.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

La scrittura va a sostituire $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
In questo caso i è l'indice della sommatoria, a_i è il termine generale della sommatoria e 1 – n è la gamma di valori degli indici (1, 2, …, n con n naturale).
Esempi:

$$\sum_{n=1}^{5} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100$$

Grazie alla formula di Gauss sappiamo che:

$$\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Progressioni geometriche

$a_1, \ldots, a_n$ sono in progressione geometrica se

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q \in \mathbb{R}, per\ ogni\ i = 1, \ldots, i-1$$

Allora

$a_{i+1} = q \cdot a_i$
$i = 1 \quad a_2 = q \cdot a_1$
$i = 2 \quad a_3 = q \cdot q\, a_1 = q^2 \cdot a_1$
…
$i = n - 1 \quad a_n = q \cdot a_{n-1} = q^{n-1} \cdot a_1$

Dunque una progressione geometrica è del tipo:

$$a,\ q \cdot a,\ q^2 \cdot a,\ \ldots,\ q^n \cdot a$$

che può essere scritto anche come sommatoria

$$\sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = \begin{cases} a\,(n+1) & se\ q = 1 \\ a\,\dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} & se\ q \neq 1 \end{cases}$$

Coefficiente binomiale

Siano n, k ∈ ℕ con k ≤ n, si definisce coefficiente binomiale e si indica con $\binom{n}{k}$ il valore:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

dove

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Si pone $0! = 1$ e si ha che $n! = n \cdot (n-1)!$

Si può dimostrare che

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Dimostrazione:

1. Si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!}$$

2. Inoltre risulta:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.Sappiamo che:

$$(n-k+1)! = (n-k+1)(n-k)!$$
$$k! = k(k-1)!$$

4. Dall'equazione del punto 2 effettuiamo le opportune sostituzioni e calcoliamo:

$$\ldots = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} + \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{\cancel{k}+n-\cancel{k}+1}{k(n-k+1)} =$$
$$= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k)!k(n-k+1)}$$

5. Dal risultato del punto 4 sappiamo che al numeratore n! · (n+1) equivale a (n+1)! e che al denominatore (k -1)! · k equivale a k! e infine (n – k)! · (n – k + 1) equivale a (n – k + 1)! ; Possiamo riscrivere l'equazione e otteniamo:

$$\ldots = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

Abbiamo dimostrato che il predicato è vero.

Dimostrazioni per induzione

La dimostrazione per induzione è un modo per dimostrare predicati che si basa sul principio di induzione di Peano.

Se abbiamo un predicato P, dati $n_0 \in N$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $n_0 \leq n$, se $P(n_0)$ è vera e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ allora il predicato è vero.

La dimostrazione avviene in due passaggi:

1) BASE DELL'INDUZIONE

   Si prova $P(n_0)$;

2) IPOTESI INDUTTIVA

   Se $P(n_0)$ vale e si dimostra che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vale allora P vale

Esempio:

$P = 2^n \geq 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

BASE DELL'INDUZIONE

$n_0 = 1$

$2^1 = 2 \cdot 1$ vero e dunque $P(n_0)$ vale.

IPOTESI INDUTTIVA

Supponiamo che P(n) valga e dimostriamo che vale P(n + 1)

$$2^{n+1} \geq 2(n+1)$$

Consideriamo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n$$

Dunque da P(n) possiamo scrivere

$$2^n + 2^n \geq 2n + 2^n$$

E dunque

$$2^{n+1} \geq 2n + 2^n$$

Ma poiché per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ $2^n \geq 2$, possiamo scrivere

$$2^{n+1} \geq 2n + 2$$

Dunque P vale.

Studio di funzioni

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, si definisce una funzione f *reale* (da $\mathbb{R}$) di *variabile reale* una corrispondenza tra gli insiemi D e $\mathbb{R}$ tale che ad ogni elemento (es. x) dell'insieme D fa corrispondere uno ed un solo elemento di $\mathbb{R}$, cioè tale che per ogni $x \in D\ \exists!\ y \in \mathbb{R} : y = f(x)$ e si indica con:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x)$$

Dove:

- D è il dominio della funzione.
- $\mathbb{R}$ è l'insieme di arrivo.
- x è la variabile indipendente.
- y è la variabile dipendente.

$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in D\}$ rappresenta l'immagine di D mediante f o anche *codominio* di f.

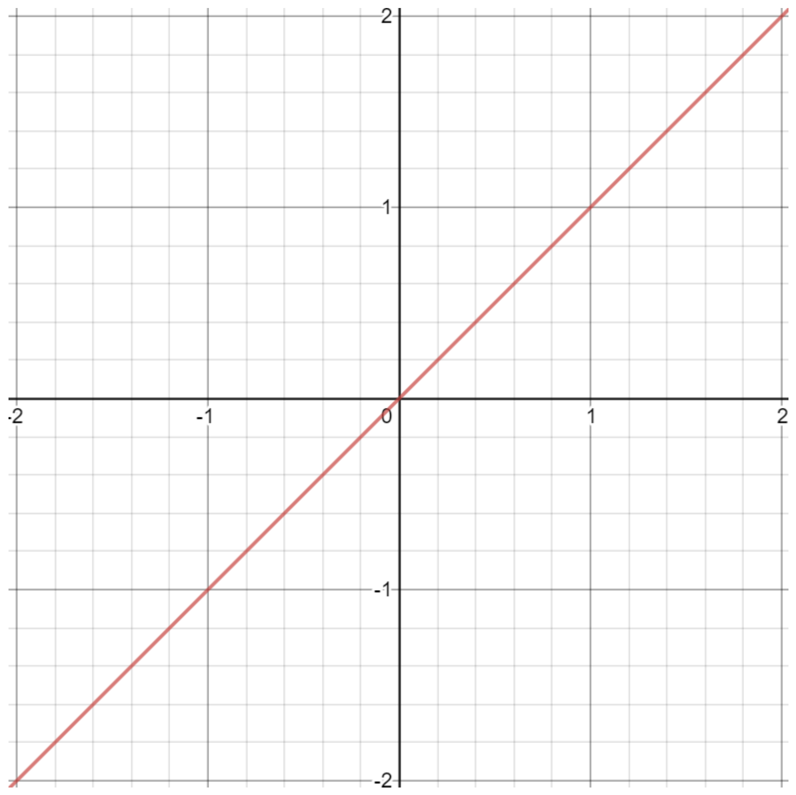
Si definisce grafico di f l'insieme $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Funzioni elementari e i loro grafici

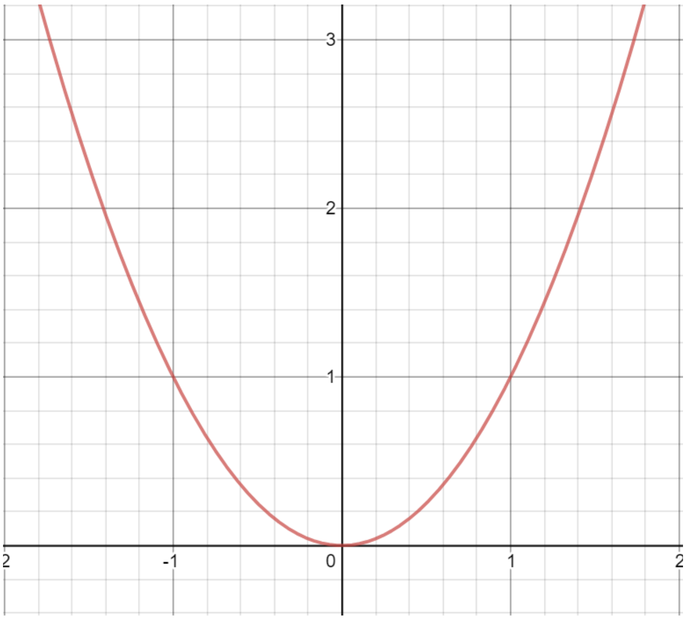
1)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x$$
$$G_f = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



2)

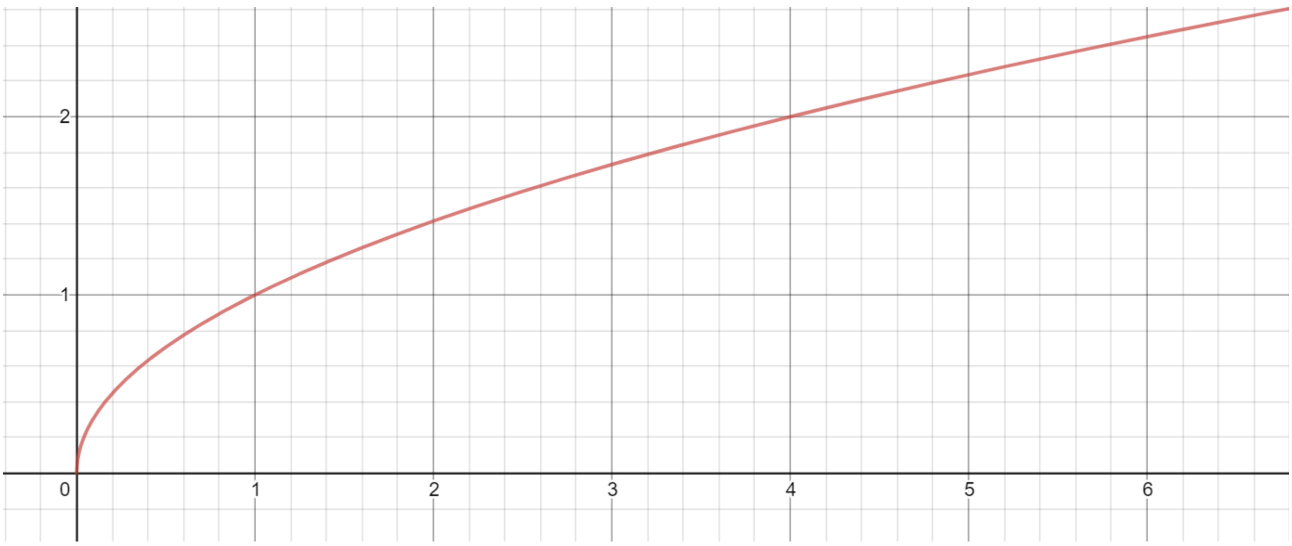
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$



Ciò che otteniamo è una parabola che sta sul primo e secondo quadrante poiché il quadrato di ogni numero è sempre positivo

3)

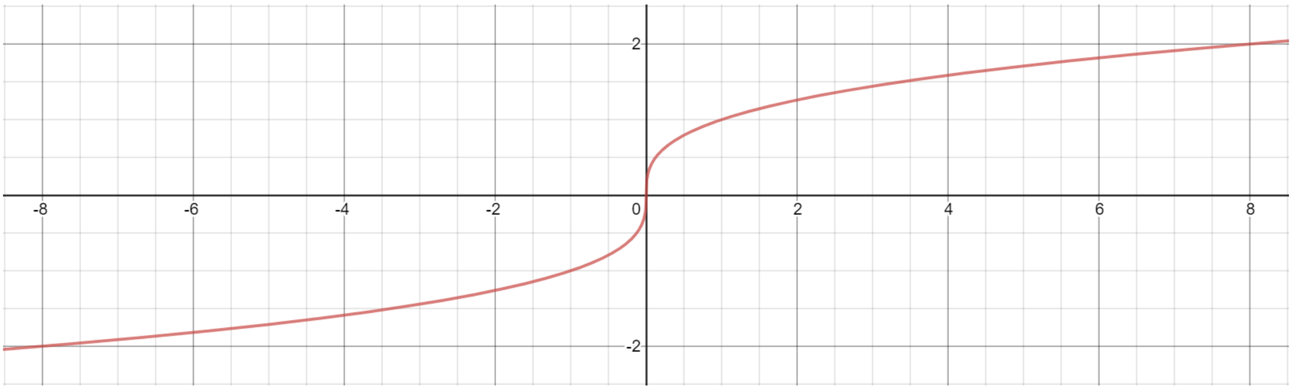
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$D = [0, +\infty)$$
$$G_f = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in D\}$$



Il grafico è soltanto nel primo quadrante poiché la radice quadrata di qualsiasi numero maggiore di 0 è sempre positiva.

4)

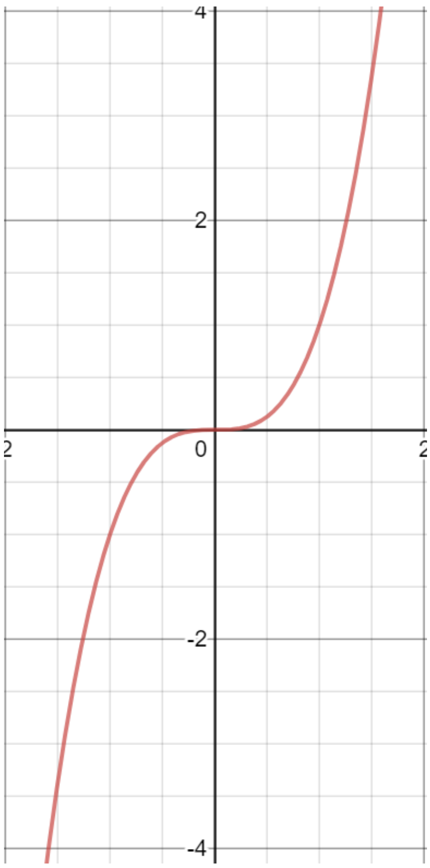
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$
$$G_f = \{(x, \sqrt[3]{x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



In questo caso il grafico è sia nel primo e nel terzo quadrante poiché la radice cubica di un numero negativo lo è a sua volta. Da ricordare che funzioni del tipo $f(x) = \sqrt[n]{x}$ quando n è pari hanno D = [0, +∞), mentre quando è dispari D = ℝ.

6)

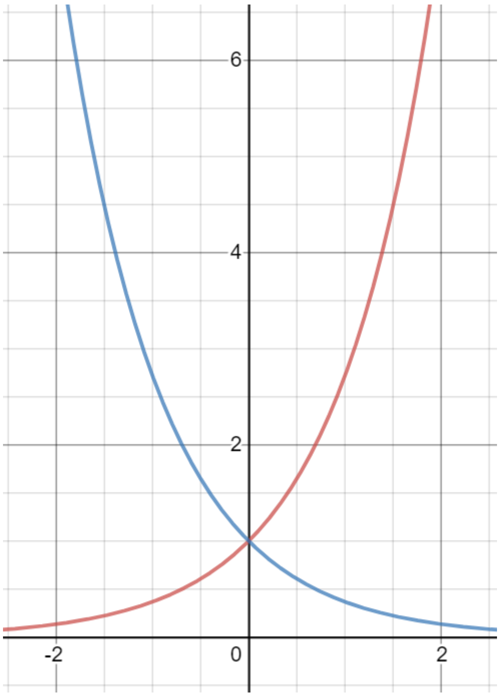
$$f(x) = x^3$$
$$D = \mathbb{R}$$
$$G_f = \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



Il grafico è una cubica.

7)

$$f(x) = a^x$$
$$con\ a > 0, a \neq 1, a \in \mathbb{R}$$
$$D = \mathbb{R}$$
$$G_f = \{(x, a^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

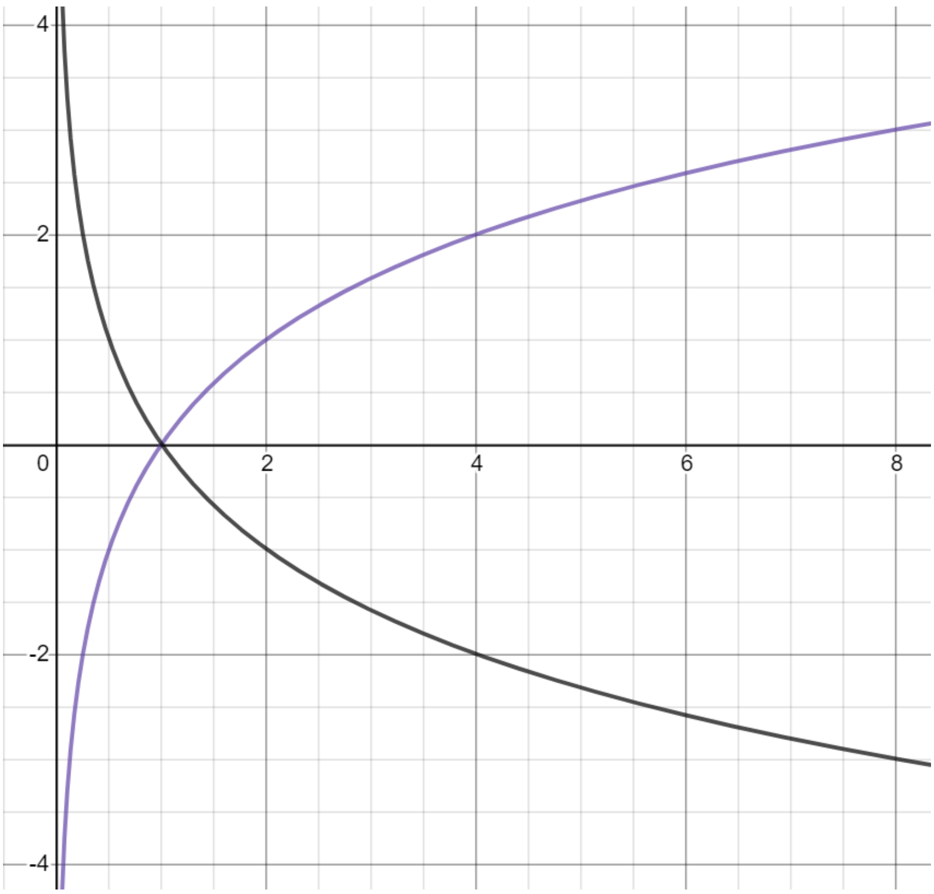


La linea rossa rappresenta il grafico della funzione con a > 1, la linea blu il grafico quando 0 < a < 1.

Il grafico è una esponenziale e passa per il punto (0, 1) poiché preso qualsiasi a, a^0 è sempre 1. L'andamento del grafico quando a è maggiore di 1 è simmetrico a quello di quando a è minore di 1 e maggiore di 0.

7)

$$y = \log_a x$$
$$con\ a > 0, a \neq 1, a \in \mathbb{R}$$
$$D = (0, +\infty)$$
$$G_f = \{(x, \log_a x) \mid x \in D\}$$



La linea blu indica il grafico della funzione con a > 1, la linea nera con 0 < a < 1.

Nel caso di a > 0 il grafico scende sotto 0 poiché per ottenere un 0 < x < 1 alla base dovremmo dare un esponente negativo. Viceversa quando 0 < a < 1

Note

Data una funzione $y = f(x)$, una funzione del tipo $y = f(x) + k, k \in \mathbb{R}$ avrà lo stesso grafico, ma traslato nell'asse delle ordinate di k unità, una funzione del tipo $y = f(x + k)\ k \in \mathbb{R}$ avrà lo stesso grafico, ma traslato di $-k$ unità nell'asse delle ascisse.

- Date due funzioni $y = x^n\ e\ y = x^m\ con\ n < m$, a $0 < x < 1$ $y = x^n$ si troverà sopra $y = x^m$. Il contrario accade con x > 1.
- Date due funzioni $y = \sqrt[n]{x}\ e\ y = \sqrt[m]{x}\ con\ n < m$, a 0 < x < 1 $y = \sqrt[m]{x}$ si troverà sopra $y = \sqrt[n]{x}$. Il contrario accade con x > 1.
- Date due funzioni $y = a^x\ e\ y = b^x\ con\ a < b$, a x < 0 $y = a^x$ si troverà sopra $y = b^x$. Il contrario accade con x > 1.
- Date due funzioni $y = \log_a x\ e\ y = \log_b x\ con\ a < b$, $a\ e\ b > 1$, a 0 < x < 1 $y = \log_b x$ si troverà sopra $y = \log_a x$. Il contrario accade con x >1. Stessa cosa quando a e b sono maggiori di 0 e minori di 1

Operazioni tra funzioni

Siano f e g due funzioni:

$$f : D_1 \to \mathbb{R}, D_1 \subseteq \mathbb{R}$$
$$g : D_2 \to \mathbb{R}, D_2 \subseteq \mathbb{R}$$

Le operazioni tra le due funzioni sono definite come segue:

- $f \pm g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}, x \longmapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $f \cdot g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}, x \longmapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dove $\mathcal{D} = \{x \in D_1 \cap D_2 \mid g(x) \neq 0\}$
- $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}, x \longmapsto g\big(f(x)\big) \Leftrightarrow f(D_1) \subseteq D_2$

Caratteristiche di una funzione

Sia f una funzione:

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$$

Monotonia.

Si dice che f è monotona [1]*crescente*/[2]*decrescente* se:

1. $\forall\, x_1, x_2 \in D\ con\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
2. $\forall\, x_1, x_2 \in D\ con\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Si dice che f è monotona strettamente [1]*crescente*/[2]*decrescente* se:

1. $\forall\, x_1, x_2 \in D\ con\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
2. $\forall\, x_1, x_2 \in D\ con\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

Limitatezza.

Si dice che f è limitata [1]*superiormente*/[2]*inferiormente* se:

1. $\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M\ per\ ogni\ x \in D$
2. $\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \geq M\ per\ ogni\ x \in D$

Se f soddisfa entrambi i punti si dice che è limitata.

Esempio.

y = cos(x) e y = sen(x) sono limitate. In entrambe le funzioni M è 1 mentre m è -1.

Periodicità.

Si dice che f è periodica di periodo T se esiste T > 0 tale che

$f(x + T) = f(x)$

Esempio.

y = sen(x) è periodica di periodo 2π.

Invertibilità.

Si dice che f è invertibile se e solo se f è biettiva(o biunivoca) ossia:

$$per\ ogni\ y \in R\ \exists!\, x \in D : f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

f^{-1} è la funzione inversa di f tale che:

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow D, y \longmapsto f^{-1}(y)$$

Si ha che:

- $f^{-1}\big(f(x)\big) = x\ per\ ogni\ x \in D$
- $f\big(f^{-1}(y)\big) = y\ per\ ogni\ y \in \mathbb{R}$
- $f^{-1} \circ f = id_D$

- $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$

Esempio.

$f(x) = x^3$ è $invertibile\ poiché$ è $biettiva, infatti\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Teorema. Se f è strettamente monotona in D $\Rightarrow f$ è invertibile in D allora f^{-1} è strettamente monotona.

Data una f invertibile, f^{-1} è simmetrica a f rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante poiché:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$
$$(x, y) \in Gr_f \Leftrightarrow (y, x) \in Gr_f^{-1}$$

Limiti di una funzione

Punti di accumulazione e intorni

Sia E $\subseteq \mathbb{R}$

Intorni.

Sia $x_o \in \mathbb{R}$, si definisce intorno di x_o un qualunque intervallo aperto in cui x_o è al suo interno. Invece si definisce intorno sferico di x_o con raggio r > 0 l'intervallo $I_{x_o} = (x_o - r, x_o + r)$.

Punti di accumulazione.

Si dice che x_o è un punto di accumulazione per l'insieme E se in ogni intorno di x_o cadono punti distinti da x_o cioè se

$$per\ ogni\ I_{x_o}, E \cap \left(I_{x_o} \setminus \{x_o\}\right) \neq \emptyset$$

L'insieme dei punti di accumulazione di E si chiama derivato di E e si indica con $\mathfrak{D}(E)$

Teorema. Se x_o è un punto di accumulazione per E, in ogni suo intorno cadono infiniti punti di E. Ne deriva dunque che se E ha cardinalità finita, $\mathfrak{D}(E)$ è vuoto.

Limiti

Sia f una funzione

$$f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R},\ x_o \in \mathfrak{D}(D)$$

Si dice che

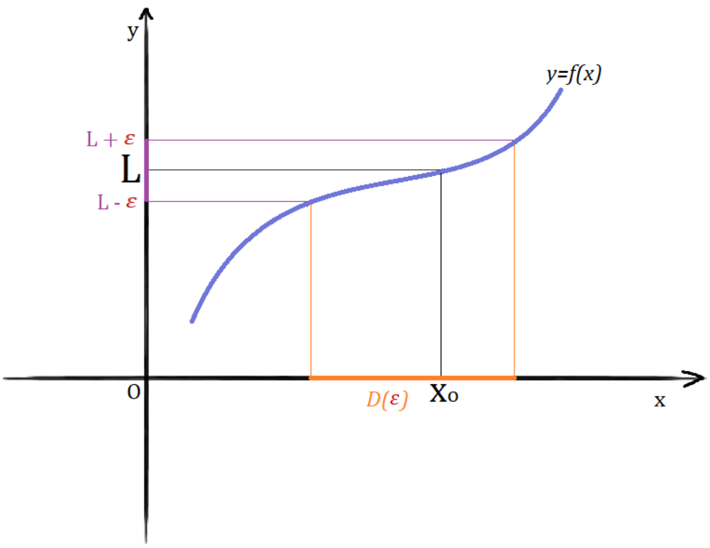
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\ \in \mathbb{R}$$

Se possiamo rendere |f(x) – L| piccolo quanto vogliamo pur di scegliere |x – x_0| sufficientemente piccolo, cioè se e solo se per definizione:

$$per\ ogni\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta =\ \delta(\varepsilon) > 0\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ 0 < |x - x_o| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$per\ ogni\ I_L\ \exists\ I_{x_o}\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D \cap (I_{x_o} \setminus \{x_o\}) \Rightarrow f(x) \in I_L$$



Ciò si può visualizzare con il grafico qui sopra. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ vuol dire che preso un numero qualsiasi ε maggiore di 0 che definisce un intorno di L e presa un qualsiasi δ che dipende da ε

che crea un intorno di x_0 con intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ maggiore di 0, per ogni x nel dominio in cui $|x - x_0|$ è maggiore di 0 (ovvero i punti vicini a x_0 nel suo intorno) e minore di δ (i punti lontani da x_0) si ha che $|f(x) - L|$ è minore di ε ovvero f(x) appartiene all'intorno di L.

Teorema.
Supponiamo che:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$
$$\lim_{x \to x_o} g(x) = M$$

Con L, M $\in \mathbb{R}$
Allora:

1) $\lim_{x \to x_o} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
2) $\lim_{x \to x_o} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
3) $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ *se e solo se* $M \neq 0$

Teorema di unicità del limite
Se esiste $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$, allora tale limite è unico. Ciò si può dimostrare per assurdo.
Supponiamo che $\lim_{x \to x_o} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_o} f(x) = L_2$
Dalla definizione abbiamo che:

$per\ ogni\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ 0 < |x - x_o| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$
$per\ ogni\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ 0 < |x - x_o| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ abbiamo che per ogni x $\in$ D, dove $0 < |x - x_o| < \delta$, $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon$
Allora

$$\begin{aligned} 0 < |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Perciò

$$0 < |L_1 - L_2| < 2\varepsilon$$

Però visto che $\varepsilon > 0$, $L_1 = L_2$. Assurdo!

Teorema della permanenza del segno.
Supponiamo che:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

Allora si ha $per\ ogni\ \varepsilon > 0$

a) Se $L > 0, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2}$
b) Se $L < 0, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2}$

Da a) segue che f è positiva in un intorno di x_o, da b) segue che f è negativa in intorno di x_o.
Se L = 0, non possiamo dire nulla sul segno. Infatti basta considerare funzioni come $y = x^3$.

Teorema. Siano f e g due funzioni reali a variabile reale con x_0 punto di accumulazione per il dominio D delle due funzioni.

$$Se\ \exists\ I_{x_0}\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ \cap (I_{x_0} \setminus \{x_o\}\ f(x) \leq g(x)$$
$$e\ se \lim_{x\to x_0} f(x) = L\ e \lim_{x\to x_0} g(x) = M, allora\ L \leq M.$$

Corollario. Se $\exists\ I_{x_0}\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D \cap \left(I_{x_0} \setminus \{x_0\}\right) f(x) \leq 0\ se \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ allora

$$L \leq 0$$

Ovvero f è definitivamente negativa per $x \to x_0$.

Teorema dei due carabinieri. Siano f, g, h tre funzioni reali a variabile reale con x_0 punto di accumulazione per il dominio D delle tre funzioni.
Supponiamo che

$$\exists\ I_{x_0}\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D \cap \left(I_{x_0} \setminus \{x_0\}\right) \Longrightarrow\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

E che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

Proposizione.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$$

Corollario del teorema dei carabinieri. Siano f e g due funzioni reali a variabile reale con x_0 punto di accumulazione nel loro dominio D. Se:

a) g è limitata in D
b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\ ovvero\ f$ è $infinitesima\ per\ x \to x_0$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0$$

Limiti notevoli

Grazie al teorema dei carabinieri esistono particolari funzioni la cui risoluzione è immediata.
Essi sono:

i) $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$
ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$
iii) $\lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$
iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1$

Questi valgono se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$

Limiti infiniti

Un altro limite notevole è

- $\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

Se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ che è un limite infinito ovvero che la funzione a un certo valore di x_0 assume valori nell'intorno di più infinito o meno infinito. Segue la definizione formale:

Sia

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R},\ x_o \in \mathfrak{D}(D)$$

Si dice che

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$$

Se

$$per\ ogni\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(M)\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ per\ cui\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Si dice che

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty$$

Se

$$per\ ogni\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(M)\ tale\ che\ per\ ogni\ x \in D\ per\ cui\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

Se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$$

Si dice che f è un infinito per $x \longrightarrow x_0$ e che f ha un asintoto verticale di equazione $x = x_0$.

Algebra dei limiti

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$
L	M	L + M
L	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forma indeterminata
		$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]$
$L>0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$L<0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	∞	Forma indeterminata
		$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
L	$M\neq 0$	$\frac{L}{M}$
L	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$M>0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$M<0$	$\mp\infty$
$L>0$	0	$\begin{cases} +\infty \text{ se } g(x)>0 * \\ -\infty \text{ se } g(x)<0 * \\ \nexists \text{ altrimenti} \end{cases}$
$L<0$	0	$\begin{cases} -\infty \text{ se } g(x)>0 * \\ +\infty \text{ se } g(x)<0 * \\ \nexists \text{ altrimenti} \end{cases}$
$+\infty$	0	$\begin{cases} +\infty \text{ se } g(x)>0 * \\ -\infty \text{ se } g(x)<0 * \end{cases}$
$-\infty$	0	$\begin{cases} -\infty \text{ se } g(x)>0 * \\ +\infty \text{ se } g(x)<0 * \end{cases}$
0	0	Forma indeterminata
∞	∞	Forma indeterminata

$* \text{ in } I_{x_0} \setminus \{x_0\}$

Nelle potenze ritroviamo altre forme indeterminate quali $0^0, 1^\infty, \infty^0$.

Limiti all'infinito

Sia f una funzione definita come $f: D \to R \; con \; D \subseteq R$

Se D è illimitato superiormente si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se

$$per\ ogni\ \varepsilon > 0\ \exists\ k = k(\varepsilon) > 0 \mid per\ ogni\ x \in D\ per\ cui\ x > k$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ (-\infty)$$

se

$$per\ ogni\ M > 0\ \exists\ k = k(M) \mid per\ ogni\ x \in D\ per\ cui\ x > k$$
$$\Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < -M)$$

Se D è illimitato inferiormente si dice che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se

$$per\ ogni\ \varepsilon > 0\ \exists\ k = k(\varepsilon) > 0 \mid per\ ogni\ x \in D\ per\ cui\ x < -k$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Si dice che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\ (-\infty)$$

se

$$per\ ogni\ M > 0\ \exists\ k = k(M) \mid per\ ogni\ x \in D\ per\ cui\ x < -k$$
$$\Rightarrow f(x) > M\ (f(x) < -M)$$

Asintoti

Sia f una funzione definita come $f: D \to R \; con \; D \subseteq R,\ x_o \in \mathfrak{D}(D)$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ allora si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale.

Se D è illimitato e se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ allora si dice che la retta di equazione $y = L$ è un asintoto orizzontale per f per $x \longrightarrow x_0$

Se $\lim_{x \to +\infty(-\infty)} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ si dice che f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty(-\infty)$ di equazione $y = mx + q\ se$:

$$\lim_{x \to +\infty(-\infty)} [f(x) - (mx + q)] = 0\ dove\ m, q \in \mathbb{R}$$

Proposizione. f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty(-\infty) \Leftrightarrow$

a) $\exists\ in\ \mathbb{R} \lim_{x \to +\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$
b) $\exists\ in\ \mathbb{R} \lim_{x \to +\infty(-\infty)} (f(x) - mx) = q$

In tal caso l'equazione dell'asintoto obliquo è dato da $y = mx + q$.

Limite del rapporto tra due polinomi per x⟶±∞

Siano P(x) e Q(x) due polinomi del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 n + a_0 \; con \; a_n \neq 0$$
$$Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \; con \; b_m \neq 0$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty \; se \; n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} \; se \; n = m \\ 0 \; se \; n < m \end{cases}$$

Ordine degli infiniti

Siano $f, g : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathfrak{D}(D) \; tali \; che \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$

Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \;\Rightarrow f \text{ è } un \; infinito \; di \; ordine \; inferiore \; a \; g \; per \; x \to x_0 \\ L \neq 0 \Rightarrow \; f \; e \; g \; sono \; infiniti \; dello \; stesso \; ordine \; per \; x \to x_0 \\ \pm\infty \Rightarrow f \text{ è } un \; infinito \; di \; ordine \; superiore \; a \; g \; per \; x \to x_0 \\ \nexists \Rightarrow f \; e \; g \; non \; sono \; confrontabili \end{cases}$

Teorema della gerarchia degli infiniti. Siano $\alpha > 0 \; e \; a > 1 \; allora \; si \; ha$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

Cioè per x⟶±∞, $\log_a x$ ha una crescita più lenta di x^α, che a sua volta ha una crescita più lenta di a^x.

Limite destro e sinistro

Prendiamo per esempio la seguente funzione segno:

$$f(x) = sgn \; x = \begin{cases} 1 \; se \; x > 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \\ -1 \; se \; x < 0 \end{cases}$$

Provando a fare $\lim_{x\to 0} sgn \; x$ notiamo che esso non esiste. Dunque introduciamo il concetto di limite destro (ovvero come si comporta la funzione a destra di x_0) e limite sinistro (ovvero come si comporta la funzione a sinistra di x_0).

Prendendo la funzione abbiamo che con 0 il limite destro è

$$\lim_{x\to 0^+} sgn \; x = 1$$

Mentre il limite sinistro è

$$\lim_{x\to 0^-} sgn \; x = -1$$

Dunque per una funzione reale a variabile reale con x_0 punto di accumulazione per il suo dominio si dice che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

$$\text{Se } per \; ogni \; \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) \mid per \; ogni \; x \in D \; per \; cui \; 0 < x - x_0 < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

$$\text{Se } per\ ogni\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) \mid per\ ogni\ x \in D\ per\ cui - \delta < x - x_0 < 0$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Alla luce di ciò possiamo dire che

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Se e solo se

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \wedge \exists \lim_{x \to x_0 -} f(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Successioni numeriche

Una successione numerica è una funzione definita in questo modo:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a(n) = a_n$$

La successione si indica con $(a_n)_n$ ($oppure$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$) e il termine a_n ("a con n") si chiama termine generale della funzione.

Esempio.

Con $n \mapsto n^2, a_n = n^2 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ *abbiamo che la successione* è $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

Una successione $(a_n)_n$ si dice:
- Inferiormente limitata se $\exists \, h \in \mathbb{R} : h \leq a_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$
- Superiormente limitata se $\exists \, k \in \mathbb{R} : a_n \leq k \; \forall \, n \in \mathbb{N}$
- Limitata se è sia superiormente limitata che inferiormente.

Si dice inoltre che la successione è:
- Monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ (se $a_n < a_{n+1}$ è strettamente crescente)
- Monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ (se $a_n > a_{n+1}$ è strettamente decrescente)

Limite di una successione

Calcolare il limite di una successione ha senso solo per valore di n tendenti all'infinito poiché esso è l'unico punto di accumulazione dei numeri naturali.

Dunque sia $(a_n)_n$ una successione si dice che

a) $\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ se $\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, n' = n'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall \, n \in \mathbb{N} \; n > n' \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ e si dice che la successione converge a L

b) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$ se $\forall \, M > 0 \; \exists \, n' = n'(M) \in \mathbb{N} : \forall \, n \in \mathbb{N} \; n > n' \Rightarrow a_n > M \; (a_n < -M)$ e si dice che la successione diverge a $+\infty$ $(-\infty)$

La successione si dice regolare se è convergente o divergente. In caso contrario di dice che è indeterminata o irregolare.

Se il limite di una successione esiste allora ogni sua sottosuccessione converge verso quel valore.

Proposizione. Se $(a_n)_n$ è una successione convergente allora è limitata. Il viceversa della proposizione non vale.

Teorema. Se $(a_n)_n$ è una successione monotona allora $\exists \lim_{n \to \infty} (a_n)_n$. Segue che :

a) Se $(a_n)_n$ è *monotona crescente allora* $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup a_n$

b) $(a_n)_n$ è *monotona decrescente allora* $\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf a_n$

In entrambi i casi se la successione è limitata allora il limite è finito.

Funzioni continue

Sia f una funzione reale a variabile reale con x_0 appartenente al dominio. La funzione è continua in x_0 se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : \forall\, x \in D \text{ } per\ cui\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$$

O equivalentemente se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ e\ x_0 \text{ è } punto\ di\ accumulazione\ oppure\ punto\ isolato\ di\ D$$

f è continua in D se lo è in ogni punto del suo dominio.
Per dimostrare che una funzione è continua nel suo dominio basta dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

A proposito tutte le funzioni elementari sono continue.

Teorema dell'algebra delle funzioni continue.
Siano f e g due funzioni reali a variabile reale, entrambe continue in x_0.
Allora

1) $c \cdot f$ è $continua\ in\ x_0, \forall\, c \in \mathbb{R}$
2) $f \pm g$ è $continua\ in\ x_0$
3) $f \cdot g$ è $continua\ in\ x_0$
4) $se\ g(x_0) \neq 0\ allora \frac{f}{g}$ è $continua\ in\ x_0$

Dal teorema segue che

a) Se P(x) è un polinomio allora P è una funzione continua in $\mathbb{R}$.
b) Se P(x) e Q(x) sono polinomi allora $\frac{P}{Q}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$.
c) $y = tg\ x\ e\ y = ctg\ x$ sono continue nel loro dominio.

Teorema della composizione di funzioni continue.
Siano f e g due funzioni definite in questo modo

$$f : D_1 \to \mathbb{R}, g : D_2 \to \mathbb{R}, D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$$

Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è continua in x_0

Dimostrazione.
Sia $h = g \circ f$.
Per definizione si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{y\to f(x_0)} g(y) = g\big(f(x_0)\big)\ e\ \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big)$.
Nell'ultimo limite possiamo far un cambio di variabile e dire che $f(x) = y$.
Otteniamo $\lim_{y\to f(x_0)} g(y) = g\big(f(x_0)\big) = h$ che perciò è continua in x_0.

Corollario. Siano f e g due funzioni continue nel loro dominio con f(x) > 0 nel suo dominio. Allora la funzione

$$x \mapsto f(x)^{g(x)}$$

È continua nel suo dominio.

Dimostrazione.
Sia ha che $f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ che è continua per il teorema dell'algebra delle funzioni continue.

Teorema di continuità della funzione inversa.
Sia f una funzione definita in questo modo
$$f : I \to \mathbb{R}, con\ I\ intervallo\ di\ \mathbb{R}.$$
Allora se f è continua ed è invertibile in I allora f^{-1} è continua nel suo dominio.

Nota. Il teorema non vale se f non è definito in un intervallo. Infatti basta considerare la seguente funzione
$$f : [0,1) \cup [2,3]\ con\ f(x) = \begin{cases} x\ se\ x \in [0,1) \\ x-1\ se\ x \in [2,3] \end{cases}$$
È facilmente dimostrabile che f^{-1} non è continua nel suo dominio.

Punti di discontinuità

Se una funzione f non è continua in x_0 allora si dice che f è discontinua in x_0 e si chiama punto di discontinuità per f. Come sono fatti questi punti?

1) $f(x) = \begin{cases} 1\ se\ x \neq 0 \\ 0\ se\ x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x = 0$, infatti $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \neq f(0)$.

   Il punto x = 0 è un punto di discontinuità eliminabile. Infatti se modifichiamo f in questo modo $\tilde{f}(x) = 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ otteniamo una funzione continua.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2\ se\ x \in [0,1] \\ x+1\ se\ x \in (1,2] \end{cases}$ non è continua in $x = 1$ poichè $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x} 1 + x = 2$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ e dunque $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
   In questo caso il punto x = 1 è un punto di discontinuità chiamato punto di salto (o di discontinuità di 1° specie) ovvero esistono
   $$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\ e\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$
   Ed entrambi sono finiti. Il salto è dato da $f^+(x_0) - f^-(x_0)$.

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x\ se\ x \in [0,1] \\ \frac{1}{x-1}\ \ se\ x \in (1,+\infty) \end{cases}$ $non\ è\ continua\ in\ x = 1$
   poichè $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\ e\ dunque\ \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Il punto x = 1 è un punto di discontinuità di 2° specie.

Se un punto di discontinuità non rientra tre queste tre casistiche non assume un nome specifico.

Teorema della permanenza del segno per funzioni continue.
Sia f una funzione reale a variabile reale continua nel suo dominio con il punto x_0 elemento del dominio.
Se $f(x_0) > 0\ (< 0)$ allora
$$\exists\ I_{x_0} : f(x) > 0\ (< 0)\ \forall\ x \in I_{x_0} \cap D$$
Dimostrazione. Poiché f è continua in D, lo è in x_0 e quindi per ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0 (< 0)$
Allora è sufficiente seguire il teorema di permanenza del segno dei limiti.

Note.

1) Se f non è continua il teorema in generale non vale. Infatti basta considerare
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \; se \; x \geq 0 \\ x \; se \; x < 0 \end{cases}$$
Prendendo f(0) otteniamo 1 che è un valore positivo. Ma in ogni intorno di 0 cadono punti del dominio la cui f è negativa.

2) Sia $c \in \mathbb{R}$ e supponiamo che $f(x_0) > c$ $(< c)$ allora $\exists \; I_{x_0}$ tale che
$$f(x) > c \; (< c) \; \forall \; x \in D \cap I_{x_0}$$
A prova di ciò basta applicare il teorema alla funzione g(x) tale che
$$g(x) = f(x) - c$$
Che è continua in D per il teorema dell'algebra dei limiti e tale che
$$g(x_0) = f(x_0) - c > 0 \; (< 0)$$

Funzioni continue definite su un intervallo.

Teorema degli zeri.

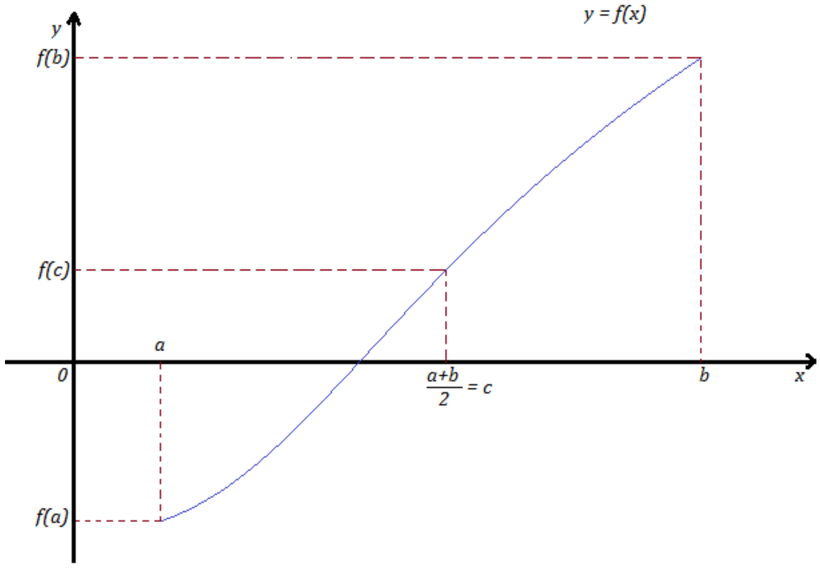
Sia f una funzione definita in questo modo
$$f: [a, b] \to \mathbb{R}, [a, b] \in \mathbb{R}$$
Tale che

i) La funzione è continua in [a, b]

ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$

Allora esiste $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Dimostrazione. Supponiamo che f(a) < 0 e f(b) >0. Allora la funzione sarà del tipo



Se $f(c) = 0 \Rightarrow tesi \; del \; teorema!$

Se $f(c) \neq 0$ dividiamo l'intervallo in due e prendiamo la metà in cui il prodotto della funzione degli estremi è negativo (segno opposto) (in questo caso [a, c]) e riapplichiamo lo stesso procedimento all'intervallo che otteniamo.

Procedendo in questo modo abbiamo costruito una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che:

1) $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n > b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
3) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Da 1) sappiamo che esistono (*) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Inoltre $[a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ quindi $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono limitate(**).
Da (*) e (**) si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.
Da 2) si ha che $b_n - a_n$ converge a B – A e $\frac{b-a}{2^n}$ converge a 0, dunque B = A.
Sia l = A = B da 3) si ha che $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow \big(f(l)\big)^2 = \lim\limits_{n}\big(f(a_n) \cdot f(b_n)\big) \leq 0 \Rightarrow \big(f(l)\big)^2 \leq 0$
Ma qualsiasi quadrato di un valore è minore o uguale se e solo se esso è 0. Dunque $f(l) = 0$.
Per la tesi si prende l.

Il teorema degli zeri fornisce condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di uno zero di f.

Note.

1) Al passo n i valori a_n e b_n rappresentano un'approssimazione per difetto o per eccesso del valore di x_0. L'errore non è mai superiore a $\frac{b_n - a_n}{2}$.
2) Se f è strettamente monotona in [a, b] allora x_0 è unico.

Teorema di Weirstrass

Sia f una funzione reale a variabile reale definita su un intervallo [a, b] allora f ammette massimo e minimo assoluti in [a, b] cioè

$$\exists\, x_m, x_M \in [a, b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\ \forall\, x \in [a, b]$$

Note:

1) Se f è continua in un intervallo (a, b) limitato, ma non chiuso il teorema non vale. Basta considerare $f(x) = x \Rightarrow 0 < f(x) < 1\ \forall\, x \in (0, 1), f$ non ammette ne massimo ne minimo.
2) Se f è continua in un intervallo [a, b] non limitato il teorema in generale non vale. Basta considerare f(x) = x
3) Se f non è continua in [a, b] il teorema non vale. Basta considerare

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \begin{cases} x \ se\ x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2}\ se\ x = 0\ o\ x = 1 \end{cases}$$

Teorema dei valori intermedi

Sia f un una funzione reale a variabile reale continua definita su un intervallo [a, b]. Allora

$$\exists\, \lambda \in [\min_{x\,\in\,[a,b]} f(x), \max_{x\,\in[a,b]} f(x)]\ \exists\, \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \lambda$$

Dimostrazione. Poiché f è continua in [a, b], dal teorema di Weirstrass si ha che

$$\exists\, x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) = \min f(x)\ e\ f(x_M) = \max f(x)$$

Sia $\lambda \in (m, M)$ e consideriamo la funzione

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = f(x) - \lambda$$

Allora

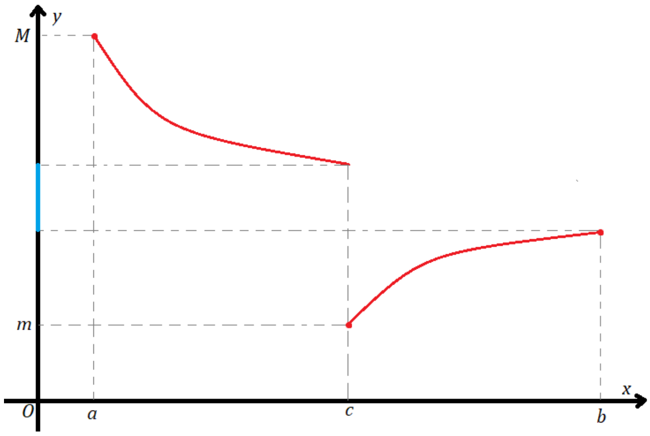
a) g è continua in $[a,b]$
b) $g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$
c) $g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$

Dal teorema degli zeri si ha che $\exists\, \tilde{x} \in [x_m, x_M] \subset [a,b] : g(\tilde{x}) = 0$
Però $g(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - \lambda = 0$ e dunque $f(\tilde{x}) = \lambda$.

Come conseguenza si ha che se f è continua in un intervallo allora l'immagine è un intervallo di estremi $\inf f(x)$ e $\sup f(x)$.

Note.

1) Se la funzione non è continua il teorema non vale. Basta considerare



La funzione è definita su [a, b], ma non ammette valori nella linea blu sulle ordinate

2) Se il dominio non è un intervallo il teorema non vale. Basta considerare.

$$f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1\ se\ x \in [0,1] \\ 2\ se\ x \in [2,3] \end{cases}$$

Abbiamo che f(x) o è 1 o e 2 che sono rispettivamente minimo e massimo della funzione e dunque non esiste nessun x per cui $f(x) \in (\min f(x), \max f(x))$.

Applicazione del teorema. Si ha che un polinomio di grado dispari a coefficienti reali ammette sempre uno zero reale.
Dimostrazione. Sia P(x) un polinomio di grado dispari a coefficienti reali tale che

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ con\ a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n-1\ e\ n \in \mathbb{N}\ dispari$$

Si h che P è continua e il limite del polinomio per x tendente a $\pm\infty$ è $\pm\infty$. Dunque l'immagine è tutto l'insieme dei reali. Dal teorema dei valori intermedi esisterà perciò un $\bar{x}$ per cui $P(\bar{x}) = 0$.

Derivate

Funzioni derivabili.

Sia f una funzione reale a variabile reale definita su un intervallo aperto (a, b) con x_0 punto del dominio. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste ed è finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fx_0+h)-f(x_0)}{h}$$

E in tal caso si pone

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(fx_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Da un punto di vista geometrico dire che f è derivabile in x_0 significa che esiste la retta tangente al grafico della funzione in x_0.

L'espressione di tale retta sarà

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

La derivata prima è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Una funzione è derivabile se è derivabile in ogni x appartenente a (a, b).

Se la funzione è definita in un intervallo chiuso [a, b], essa è derivabile se è derivabile in ogni x appartenente ad (a, b) e se esistono finiti

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_+(a)\ (derivata\ destra)$$

E

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=f'_-(b)\ (derivata\ sinistra)$$

Derivate di funzioni elementari.

1) $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$f'(x)=0.$

2) $f(x)=x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$f'(x)=1.$

3) $f(x)=x^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

$f'(x)=2x.$

4) $f(x)=\sin x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{sin\,x\,cos\,h+cos\,x\,sin\,h-sin\,x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\cos \mathrm{x}\frac{\sin h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h^2}\cdot h+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}=\cos x$$

$f'(x)=\cos x$

5) $f(x)=\cos x$, con risoluzione simile a quella del seno di ha che $f'(x)=-\sin x$.

6) $f(x) = e^x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$f'(x) = e^x$

Teorema.
Sia f una funzione reale a variabile reale definita su un intervallo aperto con x_0 punto del dominio, se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
Dimostrazione.
Dobbiamo provare che

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0} \ [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

Si ha che

$$f(x_o + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \to^{h\to 0} \ 0$$

Quindi f è continua in x_0.
Nota. Il viceversa del teorema non vale ovvero f continua in x_0 non implica che f è derivabile. Basta considerare $f(x) = |x|$ che è continua in 0, ma non è derivabile in quel punto.

Regole di derivazione

$f, g : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, f \ e \ g \ derivabili.$

1) $(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$
2) $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3) $Se \ g \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)' (x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Dunque

a) Da 2) si ha che
   $g(x) = k \cdot f(x), k \in \mathbb{R}$ è derivabile e $g'(x) = \big(k \cdot f(x)\big)' = k \cdot f'(x)$
b) Da 3) si ha che la funzione $\frac{1}{g}$ è derivabile e $\left(\frac{1}{g}\right)' (x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
c) Sia $h(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, da 2) si ha che è derivabile $\forall \ x \in \mathbb{R}$ e $h'(x) = n \cdot x^{n-1}$
d) Se $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \ e \ x > 0$, f è derivabile $\forall \ x > 0$ e si ha che $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
e) $f(x) = tg \ x, f(x) = ctg \ x$ sono derivabili

Teorema di derivazione della funzione composta

Siano A e B due intervalli aperti e

- $f: A \to \mathbb{R}, derivabile \ in \ x_0 \in A \ con \ f(A) \subseteq B$
- $g: B \to \mathbb{R} \ derivabile \ in \ f(x_0)$
- $r: A \to \mathbb{R}, x \ \mapsto r(x) = g\big(f(x)\big)$

Allora r è derivabile in x_0 e risulta che

$$r'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \ (regola \ della \ catena)$$

Esempio.

$$r = (sinx)^3$$

$$x \mapsto^f \ \sin x \ \ \mapsto^g \ (sinx)^3 \Longrightarrow r \ derivabile$$

$$r'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 3(sinx)^2 \cdot \cos x$$

Derivabilità della funzione inversa.

Sia f una funzione reale a variabile reale definita su un intervallo aperto (a, b) con inversa f^{-1}.
Se $\exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e risulta

$$(f^{-1})\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione.
Sia $h \in \mathbb{R}$ e $x_0 + h$ vicino ad x_0.
Poniamo $f(x_0 + h) = \eta, f(x_0) = y_0$.
Il rapporto incrementale di f^{-1} in $f(x_0)$ è dato da

$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_0)}{\eta - y_0} = \frac{x_0 + h - x_0}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$$

Allora

$$\lim_{\eta \to y_0} \frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_0)}{\eta - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R}\; poich\grave{e}\; f'(x) \neq 0$$

f^{-1} è continua per il teorema di continuità della funzione inversa.
La formula di derivazione della funzione inversa si può scrivere nella forma

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Esempi.

1) $f^{-1}(y) = \log y,\ inversa\ di\ f(x) = e^x$
   f è derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x \neq 0$ dunque $\forall\, x \in \mathbb{R}$
   $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{e^x | x = \log y} = \frac{1}{y}$$
2) $f^{-1}(y) = \arcsin x, inversa\ di\ f(x) = \sin x$
   È derivabile in (1, 1) con $\cos x \neq 0$.
   $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{\cos x | x = \arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}\,| x = \arcsin y} =$$
   $$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\ \forall\, y \in (-1,1)$$
   In modo analogo si ha che
   $(\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ \forall\, y \in (-1,1)$
   $(arctg\ y)' = \frac{1}{1+y^2}\ \forall\, y \in \mathbb{R}$
   $(arccotg\ y)' = -\frac{1}{1+y^2}\ \forall\, y \in \mathbb{R}$

Punti di non derivabilità.

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b), f\ continua\ in\ x_0$

a) Se $\exists\ f_+(x_0)\ e\ f_-(x_0)$ e son finiti e diversi tra loro allora x_0 è un punto angoloso per f.
   Esempio: $x_0 = 0\ in\ f(x) = |x|$
b) Se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty\ (-\infty)$ allora x_0 è un punto di flesso a tangente verticale
   Esempio: $x_0 = 0\ in\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) Se
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty\ (-\infty)$$
E
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty\ (+\infty)$$
Allora x_0 è una cuspide.

Esempio: $x_0 = 0\ in\ f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

d) Se
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L\in\mathbb{R}$$
E
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty$$
Allora x_0 è una cuspide.

Esempio: $x_0 = 0\ in\ f(x) = \begin{cases}-x\ se\ x<0\\ \sqrt{x}\ se\ x\geq 0\end{cases}$

Studio di funzioni

Massimi e minimi per una funzione.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x_0 \in [a, b]$
Si dice che x_0 è un punto di [1]massimo/[2]minimo globale o assoluto se

1- $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in [a, b]$
2- $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in [a, b]$

Si dice che x_0 è un punto di [1]massimo/[2]minimo locale o relativo se

1- $\exists\, \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0)\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$
2- $\exists\, \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0)\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$

Teorema di Fermat

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ derivabile in (a, b)
Se $x_0 \in (a, b)$ è un massimo o minimo locale per f allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione.
Consideriamo $h \in \mathbb{R}$ e $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Supponiamo che x_0 sia massimo locale per f quindi:

$$\exists\, \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$$

Sia $|h| < \delta$, abbiamo che

- $f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$
- $f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

Ma f è derivabile in x_0 dunque $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e perciò $f'(x_0) = 0$.

Da Fermat si ha che i massimi e i minimi di una funzione vanno cercati in

i) $\{x \in (a, b) \mid f \text{ derivabile in } x_0 \text{ e } f'(x) = 0$
ii) $\{x \in (a, b) \mid f \text{ non è derivabile in } x\}$
iii) $\{a, b\}$

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è

a) Continua in $[a, b]$
b) È derivabile in (a, b)
c) $f(a) = f(b)$

Allora esiste $x_0 \in (a, b) : f'(x) = 0$

Dimostrazione.
Dal teorema di Weirstrass e a) si ha che

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a, b] \mid f(x_1) = \max f\ \text{ e } f(x_2) = \min f$$

Se $x_1 \in (a, b)$ (o $x_2 \in (a, b)$) allora da Fermat si ha che $f'(x_1) = 0$ (o $f'(x_2) = 0$).
Dunque $x_0 = x_1$ (o $x_0 = x_2$).
Se $x_1 = a$ e $x_2 = b$ allora si ha che $\max f = f(a) = f(b) = \min f$ e dunque f è costante e $f'(x) = 0\ \ \forall\, x \in (a, b)$

Teorema di Lagrange o del valore medio

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

a) f è continua in $[a, b]$
b) f è derivabile in (a, b)

Allora esiste $x_0 \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

Dimostrazione.
Sia $F(x) = f(x) - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
Da a) e b) si ha che F è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Inoltre $F(a) = F(b)$ se $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Allora F soddisfa tutte le condizioni del teorema di Rolle e quindi $\exists\ x_0 \in (a, b) : F'(x_0) = 0$.
Si ha che $F'(x_0) = f'(x_0) - \lambda = 0$ e perciò $f'(x_0) = \lambda$.

Applicazioni del teorema di Lagrange.

1) Caratterizzazioni delle funzioni a derivata nulla in un intervallo.
   $f: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo
   Se f è derivabile in $\dot{I}$ con $f'(x) = 0\ \forall\ x \in \dot{I}$, allora $f(x)$ è costante.

   $f, g: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo
   Se f e g sono continue in I e derivabili in $\dot{I}$ con $f'(x) = g'(x)\ \ \forall\ x \in \dot{I}$
   Allora $\exists\ c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c\ \forall\ x \in I$.
   Se $\exists\ f(x_0) = g(x_0), x_0 \in I$ allora $f(x) = g(x)\ \forall\ x \in I$.
2) Test di monotonia.
   $f: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.
   f derivabile in $\dot{I}$
   Allora f è crescente in I $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0\ \forall\ x \in I$,
   f è decrescente in I $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0\ \forall\ x \in I$.

Funzioni concave e convesse.

$f: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.
Si dice che f è [1]concava/[2]convessa in I se $\forall\ x, y \in I$ il segmento di estremi $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ non ha punti [1]sopra/[2]sotto il grafico di f o in alternativa $\forall\ t \in [0, 1]$ si ha che

1) $f\big((1-t)x + ty\big) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$
2) $f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$

Teorema. $f: (a, b) \to \mathbb{R}$
Se f è derivabile due volte in (a, b) allora

- f è convessa in $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0\ \forall\ x \in (a, b)$
- f è concava in $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0\ \forall\ x \in (a, b)$

Se $x_0 \in (a, b)$ è un flesso per f allora $f''(x_0) = 0$ (Il viceversa non vale)

Teorema. Sia f derivabile fino all'ordine n in $x_0 \in D$.
Supponiamo che
- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x) = 0$
- $f^n(x_0) \neq 0$

Allora si ha
a) n pari e $f^n(x_0) > 0 \;\Rightarrow x_0$ minimo locale per f.
e $f^n(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ massimo locale per f.
b) n dispari $\Rightarrow x_0$ non è né massimo né minimo locale per f.

Teorema di De L'Hopital

Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ tali che
1) $\lim_{x\to z} f(x) = \lim_{x\to z} g(x) = 0 \; oppure = \infty \; dove \; z = a^+ o \; b^- o \; c \in (a,b)$.
2) f e g derivabili in (a,b) con $g'(x) \neq 0 \; \forall \; x \in (a,b)$
3) $\exists \lim_{x\to z} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora $\exists \lim_{x\to z} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Passaggi per lo studio di una funzione

1) Determinare il dominio.
2) Verificare simmetria e periodicità.
3) Determinare il segno della funzione.
4) Determinare l'eventuale intersezione con gli assi
5) Calcolare il limiti ai bordi della funzione ed eventuali asintoti
6) Determinare se la funzione è continua e derivabile.
7) Determinare la monotonia della funzione e i suoi massimi e i minimi
8) Determinare le concavità/convessità e i suoi eventuali flessi.

Calcolo integrale

Primitive di una funzione

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Si dice che $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in $[a, b]$ se F è derivabile in $[a, b]$ e

$$F'(x) = f(x) \ \forall \ x \in [a, b].$$

Caratterizzazione delle primitive.

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano F e G due primitive di f in $[a, b]$.

Allora $\exists \ c \in \mathbb{R} \mid F(x) = G(x) + c$ e dunque $F'(x) = f(x) = G'(x)$

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $\exists \ F$ primitiva di f in $[a, b]$.

L'insieme delle primitive di f si indica con il simbolo

$$\int f(x) \, dx$$

Che si legge "integrale indefinito di f" e che dalla caratterizzazione si ha che

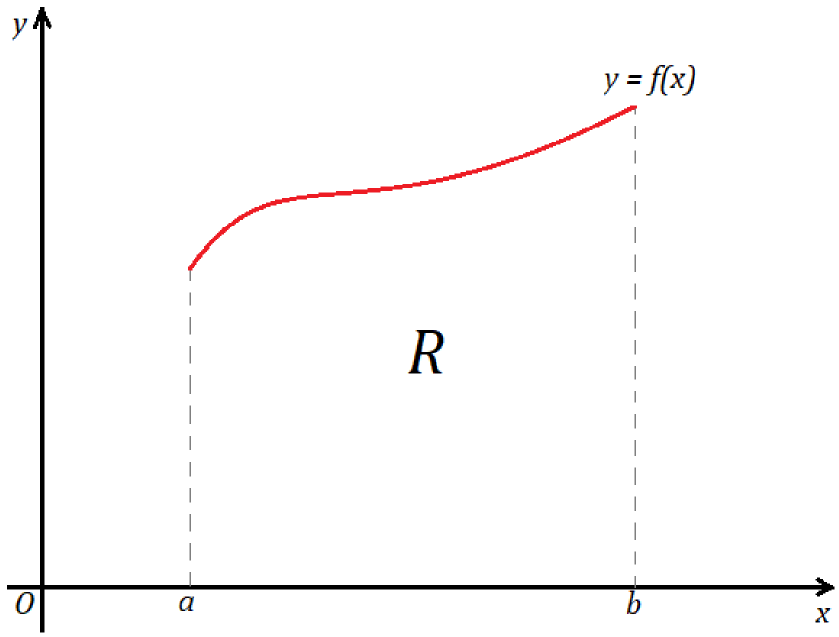
$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Integrali indefiniti di funzioni elementari.

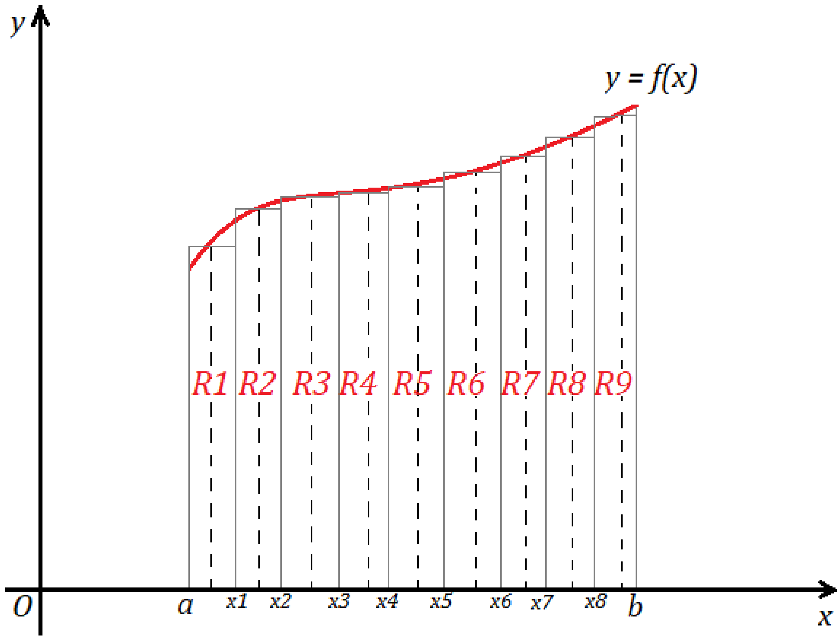
1) $\int 1 \, dx = x + c, c \in \mathbb{R}$
2) $\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R} \ se \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \log|x| + c, c \in \mathbb{R} \ se \ \alpha = -1 \end{cases}$
3) $\int e^x \, dx = e^x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$
4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
5) $\int \cos x \, dx = \sin x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$
6) $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) dx$ (linearità dell'integrale indefinito)

Integrale definito di una funzione

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa



Problema: calcolare l'area della parte di piano R compresa tra l'asse x e il grafico di f e delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$.



Possiamo creare una partizione P di $[a, b]$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$
Creiamo dei rettangoli di base $(x_i - x_{i-1})$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ e di altezza $f(\xi_i)$ dove ξ_i è un punto compreso tra x_i e x_{i-1}.
L'area di un determinato R_i è data da $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_i - 1)$ dunque l'area del piano R è data da

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = S_n$$

Che è la somma di Cauchy-Riemann.
Passando al limite per $n \to +\infty$ in modo tale che $\max\limits_{i=1,..,n} (x_i - x_{i-1})$ tende a 0 si ha che S_n ammette limite finito e indipendente dalla scelta dei punti ξ_i.
Si definisce area della regione R il valore del limite

$$A(R) = \lim_{n\to+\infty} \overset{S_n}{\max_{i=1,..,n} (x_i - x_i - 1) \to 0} = \int_a^b f(x)\, dx$$

Se f è continua e limitata si dice che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \overset{S_n}{\max_{i=1,..,n} (x_i - x_i - 1) \to 0}$$

E si legge integrale definito di f in $[a, b]$.
$f(x)$ è la funzione integranda, la x in dx è la variabile di integrazione mentre a e b sono gli estremi di integrazione.
L'integrale definito non è un'area.
Non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann. Infatti basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \in \mathbb{Q} \\ 0 \; se \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se $\xi_i \in \mathbb{Q}, S_n = 1,$ se $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, S_n = 0.$

Osservazioni
f è continua in $[a, b]$

a) $f \geq 0$ in $[a, b] \Rightarrow A(R) = \int_a^b f(x)\, dx$
b) $f \leq 0$ in $[a, b] \Rightarrow A(R) = -\int_a^b f(x)\, dx$
c) f cambia segno in $[a, b] \Rightarrow A(R) = \int_a^b |f(x)|\, dx \neq \int_a^b f(x)\, dx$

Proprietà dell'integrale definito.
Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora

1) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
2) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
3) $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \ \ \forall\, c \in [a, b]$
4) $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Siano $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora

1) $\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
2) $c \cdot f$ integrabile in $[a, b]$
   $\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx \ \forall\, c \in \mathbb{R}$
3) Se $f(x) \leq g(x) \ \ \forall\, x \in [a, b]$
   $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

Teoremi.

1) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$
   Allora f è integrabile in $[a, b]$
2) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, monotona e limitata in $[a, b]$
   Allora f è integrabile in $[a, b]$
3) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata e f è continua in $[a, b]$ tranne che in un numero finito di punti
   Allora f è integrabile in [a, b] e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_n}^b f(x)\, dx$$

Teorema della media.
Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora $\exists\, x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0) \cdot (b-a)$$

Dimostrazione.
Dal teorema di Weirstrass f ammette massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ e si ha che

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \max_{x \in [a,b]} f(x) = M$$

Dalla monotonia dell'integrale definito si ha che

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx$$

Si ha dunque che

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

Dividendo per $b-a>0$ si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi si ha che $\exists\ x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Moltiplicando entrambi i termini per $(b-a)$ si ha

$$f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Che è la tesi del teorema.

Funzione integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, limitata e integrabile in $[a,b]$ e perciò integrabile in $[a,x]\ \forall\ x \in [a,b]$
Allora esiste $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
F si chiama funzione integrale di f in $[a,b]$.
Teorema.
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile allora la funzione integrale F è continua in $[a,b]$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e sia $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale allora
- F è derivabile in $[a,b]$
- $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$

Dimostrazione.
Sia $x \in (a,b)$ e consideriamo

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] =$$
$$= \frac{1}{h} \cdot \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Dal teorema della media si ha che con $x(h) \in [x, x+h]$ il risultato è uguale a

$$\frac{1}{h} \cdot f\big(x(h)\big) \cdot h = f(x(h))$$

Per $h \to 0$ poiché la funzione è continua $f\big(x(h)\big)$ tende a $f(x)$.
Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-f(x)}{h} = f(x)$$

E perciò F è erivabile in x e

$$F'(x) = f(x)$$

La dimostrazione procede allo stesso modo per $x=a$ o $x=b$. In questo caso h tenderà rispettivamente a 0^+ e a 0^-.

Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e sia G primitiva di f in $[a,b]$.
Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Dimostrazione.
Poiché f è continua in $[a,b]$ la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

È una primitiva di f in $[a,b]$.
Dalla caratterizzazione delle primitive si ha che $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c, \forall\, x \in [a,b]$$

Allora

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Ma ciò è uguale a

$$\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Formula di integrazione per sostituzione

Sia f continua e g derivabile con g' continua.
Sia $x = g(t)$
Allora

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt$$

Esempi

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}$
   $x = t^2 \to g(t)$
   $\sqrt{x} = t$
   $dx = 2tdt$ dove $2t = g'(t)$
   $\int \frac{1}{t-3} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t}{t-3} dt = 2\int \frac{t-3+3}{t-3} dt = 2\int 1\,dt + 6\int \frac{1}{t-3}\,dt = 2t + 6\log|t-3| + c =$
   $= 2\sqrt{x} + 6\log\left|\sqrt{x} - 3\right| + c, c \in \mathbb{R}$
2) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$
   $e^x = t$
   $x = \log t$
   $dx = \frac{1}{t}\,dt$
   $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c =$
   $= \arctan e^x + c, c \in \mathbb{R}$

Negli integrali definiti con $x = g(t), a = g(c), b = g(d)$ la formula della sostituzione è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt$$

Formula di integrazione per parti

Siano f e g derivabili con derivata continua allora

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Dove $f(x)$ è il fattore finito e $g'(x)$ è il fattore differenziale.
Se la derivata è continua in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Dimostrazione.
Segue da

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempi

1) $\int x\cos x\,dx$
   $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = 1\ e\ g(x) = \sin x$
   $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c, c \in \mathbb{R}$
2) $\int \log x\ dx$
   $f(x) = \log x\ \ e\ g'(x) = x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\ e\ g(x) = x$
   $\int \log x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\log x - x + c, c \in \mathbb{R}$
3) $\int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x = e^x \sin x - [e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx]$
   $2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$
   $\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$ (integrale per parti ricorsivo)
4) $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\cos x\,dx = \sin x\cos x - \int -\sin x\sin x\,dx = \sin x\cos x +$
   $\int \sin^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx$
   $2\int \cos^2 x\ dx = \sin x\cos x + x + c$
   $\int \cos^2 x\,dx = \frac{\sin x\cos x + x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

Integrazioni delle funzioni razionali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Dove P e Q sono polinomi

1° CASO $\rightarrow \delta P > \delta Q$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$$

In questo caso si fa la divisione tra i due polinomi e si ha che

$$x^3+1=(x^2+1)\cdot x - x + 1$$

Dunque risolveremo

$$\int x+\frac{1-x}{x^2+1}\ dx = \int x\ dx + \int \frac{1}{x^2+1}\ dx - \int \frac{x}{x^2+1}\ dx = \frac{x^2}{2} + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

2° CASO $\rightarrow \delta P = \delta Q$

$$\int \frac{x}{2x+1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x+1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int 1\ dx - \frac{1}{4}\int \frac{2}{2x+1}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log|2x+1| + c$$

3° CASO $\rightarrow \delta P < \delta Q$

1) $\int \frac{1}{x+3}dx = \log|x+3| + c, c \in \mathbb{R}$
2) $\int \frac{2}{x^2+1}dx = 2\arctan x + c, c \in \mathbb{R}$
3) $\int \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+3) + c, c \in \mathbb{R}$

4° CASO $\rightarrow \int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\ dx$ con $\delta P < 2$ e $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

a) $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx$

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

$A(x+1)+B(x-2) = x+7 \rightarrow Ax + A + Bx - 2B = x + 7$

$\begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=7 \end{cases} \begin{cases} A=1-B \\ 1-3B=7 \end{cases} \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$

$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx = 3\int \frac{1}{x-2}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx = 3\log|x-2| - 2\log|x+1| + c, c \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{x}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$

$A(x+1)+B=x$

$Ax+A+B=x$

$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c, c \in \mathbb{R}$

Integrali impropri

Sia $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

Se $\exists \lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$, si dice che f è integrabile in $[a, +\infty)$ e si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

Sia $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continua

Se $\exists \lim\limits_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$ si dice che f è integrabile in $(-\infty, b]$ e si pone

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

Sia $f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ continua

Se $\exists \lim\limits_{R,T\to+\infty} \int_{-T}^R f(x)\,dx$ si dice che f è integrabile in $(-\infty, +\infty)$ e si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R,T\to+\infty} \int_{-T}^R f(x)\,dx$$

In tutti e tre i casi se il valore L del limite è finito, si dirà che l'integrale improprio di f è convergente, mentre se il valore L è infinito si dirà che l'integrale improprio di f è divergente.

Esempi

1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{c\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^c = \lim\limits_{c\to+\infty} \left(2\sqrt{c} - 2\right) = +\infty$ DIVERGENTE
2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{c\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^c = \lim\limits_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) = 1$ CONVERGENTE
3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty \ se\ \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} \ se\ \alpha > 1 \end{cases}$
4) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty \ se\ \alpha \leq 1 \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \ se\ \alpha > 1 \end{cases}$

Criterio del confronto per integrali impropri I

Siano $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a, +\infty)$$

Allora

a) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge
b) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

Dimostrazione.

f e g sono intergabili in $[a, c]$ e si ha che

$$0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx \ \ \forall\, c \in [a, +\infty)$$

Dalla monotonia dell'integrale definito.

Passando al limite per $c \to +\infty$ si ha che

$$0 \leq \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx \leq \lim_{c\to+\infty} \int_a^c g(x)\,dx$$

a) Se $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c g(x)\,dx$ è finito, lo è pure $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$
b) Se $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ è infinito, lo è pure $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c g(x)\,dx$

Esempi

1) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

   $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$

   $\lim_{c\to+\infty} \int_1^c e^{-x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} [-e^{-c} + e^{-1}] = \frac{1}{e}$

   Dunque $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente.

2) $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x(\cos^2\sqrt{x}+2)} dx$

   $-1 \le \cos\sqrt{x} \le 1$

   $0 \le \cos^2\sqrt{x} \le 1$

   $2 \le \cos^2\sqrt{x} + 3 \le 3$

   $0 < 2x \le x\left(\cos^2\sqrt{x} + 2\right) \le 3x$ in $[\pi, +\infty)$

   $0 < \frac{1}{3x} \le \frac{1}{x(\cos^2\sqrt{x}+2)} \le \frac{1}{2x}$

   $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{3x}\, dx$ è divergente dunque $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x(\cos^2\sqrt{x}+2)} dx$ è divergente.

Criterio del confronto asintotico I

Siano $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\forall\, x \in [a, +\infty)$

$$0 \le f(x), g(x) > 0$$

E

$$\lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ diverge (converge)} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ diverge (converge)}$$

Dimostrazione.

Dalla definizione di limite si ha che con $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0, \exists\, M > 0 : \forall\, x > M$

$$\frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \frac{l}{2} = \frac{3}{2} l$$

Poiché $g(x) > 0$ in $[a, +\infty)$ si ha che $\forall\, x > M$

$$0 < \frac{l}{2} g(x) < f(x) < \frac{3l}{2} g(x)$$

La tesi segue applicando il teorema del confronto.

1) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2}\, dx$

   $\frac{x^2+1}{x^4+2} \cong \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$

   Verifica: $\lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2+1}{x^4+2} \cdot x^2) = 1$

   $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ è convergente perciò lo è anche $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2}\, dx$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cong \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$
Verifica: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ è divergente, dunque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ è divergente.

Nota.
Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.
Segue da $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\, dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$

Osservazione.
Sia $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e non negativa e che $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall\, M > 0\ \exists\, N = N(M) > 0 : f(x) > M\ \ \forall\, x > N$$
$$\Rightarrow \int_N^{+\infty} f(x)\, dx > \int_N^{+\infty} M\, dx$$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Per $\varepsilon = \frac{L}{2}\ \exists\, N > 0 : \frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}\ \forall\, x > N$

$$f(x) > \frac{L}{2} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx > \int_a^{+\infty} \frac{L}{2} dx$$

Ne deriva che se $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ed è un valore diverso da 0 allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è divergente.

Integrali impropri di funzioni non limitate in un intervallo

Sia $f: (a, b] \to \mathbb{R}$, illimitata per $x \to a^+$, continua in $(a, b]$
Se $\exists \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ si dice che f è integrabile in $(a, b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

Sia $f: [a, b) \to \mathbb{R}$, illimitata per $x \to b^-$, continua in $[a, b)$
Se $\exists \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$ si dice che f è integrabile in $[a, b)$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

Esempi

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \lim_{c\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2$
2) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_c^1 = \lim_{c} \left(-1 + \frac{1}{c}\right) = +\infty$

Si ha che

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} se\ \alpha < 1\ convergente \\ se\ \alpha \ge 1\ divergente \end{cases}$
b) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} se\ \alpha < 1\ convergente \\ se\ \alpha \ge 1\ divergente \end{cases}$

Criterio del confronto II

Siano $f, g: (a, b] \to \mathbb{R}$, illimitate per $x \to a^+$ e continue e tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Allora

1) $\int_a^b g(x)\, dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ converge
2) $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx$ diverge

Criterio del confronto asintotico II

Siano $f, g: (a, b] \to \mathbb{R}$, continue e tali che $\forall\, x \in (a, b]$

$$0 \leq f(x), g(x)$$

Se

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ converge (diverge)} \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\, dx \text{ converge (diverge)}$$

Esempi.

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx$

   $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2 x \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

   $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ converge perciò $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx$ è convergente.
2) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$

   $0 < \frac{1}{x^2} \leq \frac{x^2+1}{x^2}$

   $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge dunque$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$ è divergente.

Numeri complessi

Un numero complesso è un numero z della forma

$$z = a + ib$$

Dove $a, b \in \mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria definita dalla proprietà

$$i^2 = -1$$

Si ha che

- $a = Re(z)$ è la parte reale di z.
- $b = Im(z)$ è la parte immaginaria di z
- $Re(z), Im(z) \in \mathbb{R}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è definito come

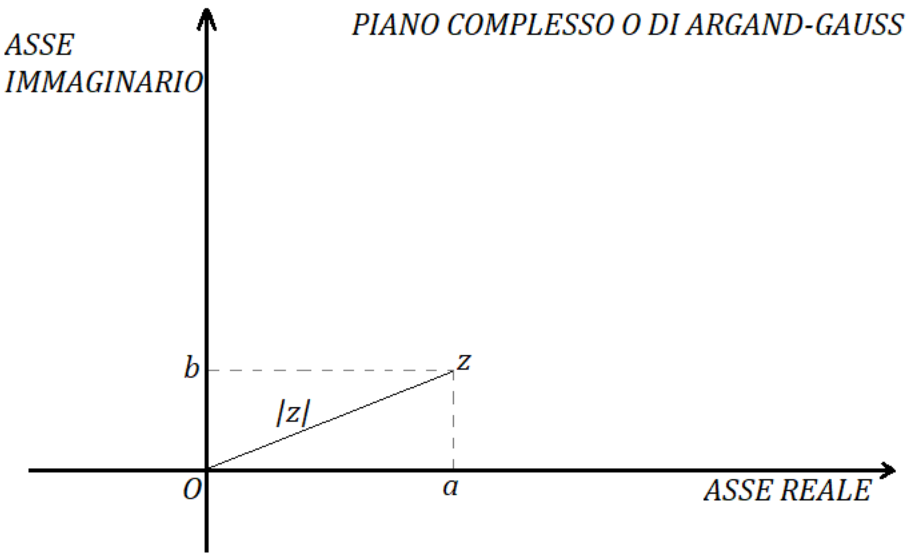
$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ poiché ogni numero $a \in \mathbb{R}$ equivale a $a + 0 \cdot i$ $(b = 0)$.

Rappresentazione dei numeri complessi.

La notazione $z = a + ib$ è la forma algebrica di un numero complesso.

Però z può essere rappresentato come $z = (a, b)$ che è la forma in termini di coppia di numeri reali. Questa rappresentazione ci fornisce delle coordinate di un piano. Più precisamente il piano complesso o di Argand-Gauss che ha come asse delle ascisse l'asse reale, mentre come asse delle ordinate l'asse immaginario.



Si ha che se $a = 0 : z = ib, b \in \mathbb{R}$ allora z è un numero immaginario puro.

Modulo di z

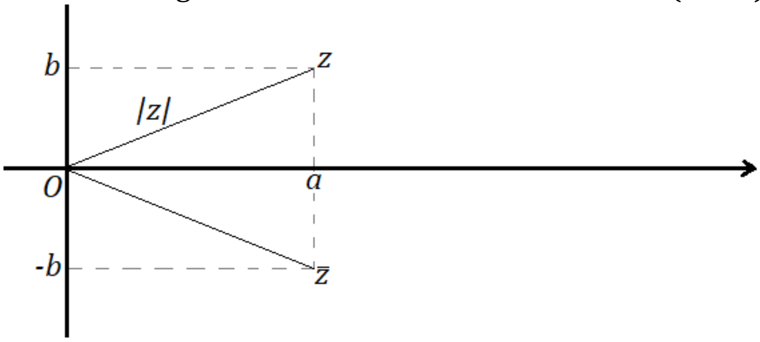
Sia $z \in \mathbb{C}$ allora

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ovvero il modulo di un numero complesso è la sua distanza dall'origine del piano di Argand-Gauss.

Se $z \in \mathbb{R}$ allora $z = a$ dunque $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$.

Coniugato di un numero complesso
Sia $z = a + ib$ si definisce coniugato di z il numero $\bar{z} = a - ib$ o $\bar{z} = (a, -b)$



Note.

1. $|z| \in \mathbb{R}, \forall\, z \in \mathbb{C}$
2. $|z| \geq 0, \forall\, z \in \mathbb{C}$
3. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
4. $|z| = |\bar{z}|, \forall\, z \in \mathbb{C}$
5. $z = \bar{z} \;\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z = -\bar{z} \;\Leftrightarrow z$ è un immaginario puro.

Operazioni tra numeri complessi

Siano $z, w \in \mathbb{C}$.
$z = a + ib$
$w = c + id$
Con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Somma e sottrazione.

Somma e sottrazione sono definiti in questo modo

$$z \oplus w = (a + c) + i(b + d)$$
$$z \ominus w = (a - c) + i(b - d)$$

Se $z, w \in \mathbb{R}$ allora $z = a$ e $w = c$ quindi $z \oplus w = a + c$. Vale lo stesso per $\ominus$. Si ha che $\oplus$ e $\ominus$ estendono + e – di $\mathbb{R}$ dunque è possibile non usare il tondino.

Proprietà.

1. $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z) = 2 \cdot Re(\bar{z})$
2. $z - \bar{z} = 2 \cdot iIm(z) = 2 \cdot iIm(\bar{z})$
3. $\overline{z \pm w} = \bar{z} + \bar{w}$

Prodotto

$$\begin{aligned} z \boxdot w &= (a + ib) \boxdot (c + id) \\ &= ac + iad + ibc - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

$\boxdot$ è un estensione di $\cdot$ in $\mathbb{R}$.

Proprietà.

1. $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \;\; \forall\, z, w \in \mathbb{C}$
   In particolare se $z = \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\overline{\alpha \cdot w} = \alpha \cdot \bar{w}$

Divisione

Sia $w \neq 0$.
Si ha che

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c+id} = \frac{1}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$$

Dunque

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Proprietà.

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{|w|^2} \cdot z\overline{w}\right)} = \frac{1}{|w|^2} \cdot \bar{z}\, w = \frac{\bar{z}}{\overline{w}}$

Forma trigonometrica

Un numero complesso z può essere scritto nella forma trigonometrica

$$z = \rho(cos\theta + isin\theta)$$

Dove

- $\rho = |z|$
- $\theta = \arg(z)$ o argomento di 0 ovvero l'angolo creato dal segmento $|z|$ e l'asse reale.

Poiché seno e coseno sono funzioni periodiche possiamo avere più valori $di\ \theta$ per un unico numero complesso z.

Si ha che per $z = (a, b) \in \mathbb{C}$

- $a = \rho \cos\theta$
- $b = \rho \sin\theta$
- $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

Inoltre l'angolo θ deve essere tale che

- $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Forma esponenziale complessa

Dalle formule di Eulero si ha che

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Dunque un numero complesso z può essere scritto nella forma esponenziale complessa

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Esempi

1) $z = 2$
   $\begin{matrix}\rho = 2 \\ \theta = 0\end{matrix} \rightarrow z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$
   $z = -2$
   $\begin{matrix}\rho = 2 \\ \theta = \pi\end{matrix} \rightarrow z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$
2) $z = 1 + i$
   $a = b = 1$
   $\begin{matrix}\rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4}\end{matrix} \rightarrow z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

3) $z = i$
   $\rho = 1$
   $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
4) $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$ e $Arg(z) = \frac{3}{4}\pi$
   Da $Arg(z)$ si ha che $a < 0$ e $b > 0$
   $\begin{cases} a = -b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2a^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
   $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Formule di De Moivre

Formula di De Moivre per il prodotto e il rapporto.

Siano
- $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
- $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Si ha che

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 cos\theta_2 \\ + i\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ + i\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ - \sin\theta_1\sin\theta_2) = \\ = \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \end{aligned}$$

Dunque

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Se $z_2 \neq 0$ analogamente si ha che

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Esempio
$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
$z_2 = 7(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$
$z_1 \cdot z_2 = 21[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})] = 21(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi)$

Formula di De Moivre per le potenze

Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)], n \in \mathbb{N}$$

Esempio
$w = (1 + i)^7$
$z = 1 + i \rightarrow z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
$w = z^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 - 8i$

Radici n-sime di un numero complesso

Siano $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.
Si definisce radice n-sima di w il numero complesso z tale che

$$z^n = w$$

Teorema.
Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e sia $n \in \mathbb{N}$.
Allora esistono n radici n-sime di w date da

$$z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$

Con

$$\rho_k = \rho^{\frac{1}{n}}$$

E

$$\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \; con\; k = 0, 1, \dots, n-1$$

Dimostrazione.
Basta provare che $z_k^n = w \; \forall\, k$.
È conseguenza della formula di De Moivre per le potenze.

Esempi

1) $\sqrt[6]{i}$

   $n = 6$

   $w = 1 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

   $\rho_k = \sqrt[6]{1} = 1$ e $\theta_k = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\; con\; k = 0, 1, \dots, 5$

   Si ha dunque che

$$\sqrt[6]{i} = \begin{cases} z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} \\ z_1 = \cos\frac{5}{12}\pi + \sin\frac{5}{12}\pi \\ z_2 = \cos\frac{3}{4}\pi + \sin\frac{3}{4}\pi \\ z_3 = \cos\frac{13}{12}\pi + \sin\frac{13}{12}\pi \\ z_4 = \cos\frac{17}{12}\pi + \sin\frac{17}{12}\pi \\ z_5 = \cos\frac{7}{4}\pi + \sin\frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

2) $\sqrt[3]{-1}$

   Sappiamo che in $\sqrt[3]{-1} = -1$ in $\mathbb{R}$

   Dato che $\rho = 1$ le altre due soluzioni stanno nella circonferenza unitaria con origine 0 e che tutte le soluzioni sono equidistanti tra di loro.

   Perciò le soluzioni distano tra di loro nella circonferenza per $\frac{2}{3}\pi$. Poiché -1 ha $\theta = \pi$ si ha che le altre due soluzione hanno $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = \frac{5}{3}\pi$.

   Dunque le soluzioni sono

   $z_0 = -1$

   $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$
Allora l'equazione algebrica

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0^{(1)}$$

Ammette n soluzioni in $\mathbb{C}$ contati con le loro molteciplità.
Se $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ allora vale il seguente risultato

$$z \text{ } soluzione \text{ } di \text{ } (1) \Leftrightarrow \bar{z} \text{ } soluzione \text{ } di \text{ } (1)$$

Come conseguenza si ha che un equazione algebrica a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado dispari ammette sempre una soluzione reale.

Serie numeriche

Sia $(a_n)_n$ una successione numerica ($a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$) si definisce serie numerica di termine generale a_n e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

La somma di tutti i termini della successione $(a_n)_n$ i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Diremo che

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

…

$S_n = a_1 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n$

$(S_n)_n$ è la successione delle somme parziali o delle ridotte della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Se $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ si dice che

a) Se $S \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ad S.

b) Se $S = \pm\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $\pm\infty$

Se $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è indeterminata.

Se una serie converge o diverge si dice che è regolare.

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (serie di Mengoli-Cauchy)

   $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

   Si ha che

   $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

   $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (serie a segni alterati)

   $S_1 = -1$

   $S_2 = -1 + 1 = 0$

   $S_3 = S_2 - 1 = -1$

   $S_4 = S_3 + 1 = 0$

   $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = -1\ \forall\, n$

   $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ indeterminata

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Convergente. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione.

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si ha che $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

Allora

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

E dunque

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Poiché per $n \to +\infty$ S_n e S_{n+1} tendono a $S \in \mathbb{R}$, a_n tende a 0.

Il viceversa non vale, basta considerare la serie armonica.

Teorema di regolarità di una serie

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0 \ (\leq 0) \ \ \forall\, n \ \in \mathbb{N}$$

Allora tale serie è regolare.

Dimostrazione.

Abbiamo che

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

Poiché $a_n \geq 0$ allora $S_n \geq S_n$ e dunque $(S_n)_n$ è monotona crescente e perciò $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Divergenza della serie armonica

Consideriamo la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Si ha che

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big|_1^{n+1} = \log\,(n+1)$$

E dunque

$$\Rightarrow S_n \geq \log(n+1) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Serie armonica generalizzata.
Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si ha che
- Se $\alpha \leq 1$, allora la serie diverge.
- Se $\alpha \geq 1$, allora la serie converge.

Serie geometrica

Siano $a, q \in \mathbb{R}$, si definisce serie geometrica di ragione q la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$$

Dove $aq^n = (a_n)_n$, $a, q \neq 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{aq^{n+1}}{aq^n} = q \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
Si ha che

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ se\ q \neq 1 \\ a(n+1)\ se\ q = 1 \end{cases}$$

E dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} (sgn\ a)\infty\ se\ q \geq 1 \\ \nexists\ se\ q \leq 1 \\ \dfrac{a}{1-q}\ se\ |q| < 1 \end{cases}$$

Criterio del confronto per serie a termini non negativi

Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Tali che $a_n \leq b_n, a_n \geq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
Allora
1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione.
Si ha che

$$0 \leq A_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = B_n$$
$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$$

Segue la tesi
Esempio

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$
Si ha che $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge

Criterio del confronto asintotico

Siano

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Con $a_n \geq 0, b_n \geq 0 \ \forall \ n \ \in \mathbb{N}$
Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.

Criterio del rapporto

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0 \ \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Supponiamo che $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$
Si ha che

a) Se $L < 1$ allora la serie converge.
b) Se $L > 1$ allora la serie diverge.

Esempi.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ è convergente poiché

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$ è divergente poiché

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{e^n} \xrightarrow{n\to+\infty} e > 1$$

Criterio della radice

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0 \ \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Supponiamo che $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$
Si ha che

a) Se $L < 1$ la serie converge.
b) *Se* $L > 1$ la serie diverge.

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}$ è divergente poiché

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ è convergente poiché

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Convergenza assoluta di una serie

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si dice che la serie converge assolutamente se la sua serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

È convergente.
Esempio
Si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n^2 \cdot \log n}$$

La serie dei suoi moduli è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\log n)|}{n^2 \cdot \log n}$$

Poiché $|\sin x| \leq |x|$ si ha che

$$\frac{|\sin(\log n)|}{n^2 \cdot \log n} \leq \frac{|\log n|}{n^2 \cdot \log n} = \frac{1}{n^2}$$

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

È convergente allora

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n^2}$$

È assolutamente convergente.

Teorema.
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente allora è convergente.
Il viceversa non vale. Basta considerare
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che è convergente, ma la sua serie dei moduli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Serie a segni alternati

Una serie a segni alternati è una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Oppure

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$$

Con $a_n \geq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Criterio di Leibnitz

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n, a_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Se

a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
b) $(a_n)_n$ è decrescente.

Allora la serie data è convergente. Inoltre se S indica la somma della serie si ha che

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Si ha che $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Inoltre si ha che $n < n+1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1} \Rightarrow (a_n)_n$ è decrescente.

Dunque la serie converge per il criterio di Leibnitz.

Esercizi riepilogativi.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

   Si ha che $a_n = \frac{1}{n!} \to 0$ per $n \to +\infty$

   Inoltre $(n+1)! = (n+1)\cdot n! > n! \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} = a_n \Rightarrow (a_n)_n$ è decrescente.

   Dunque la serie converge per il criterio di Leibnitz.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 7$ diverge

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3}$

   Si ha che $(a_n)_n$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{3} = +\infty \neq 0$ dunque la serie diverge.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n}$

   Si ha che la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}$ è divergente.

   Possiamo dire solo che $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n}$ non è assolutamente convergente.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \log(n+1)}, t > 0$

Si ha che

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}\log(n+2)} \cdot \frac{2^n \log(n+1)}{t^n} = \frac{t \log(n+1)}{2\log(n+2)} \to \frac{t}{2}$ per $n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} > 1 \; la\ serie\ diverge \\ \frac{t}{2} < 1 \; la\ serie\ converge \end{cases}$

Con $t = 2$ la serie diventa

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

$\log(n+1) < n + 1$ dunque $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ diverge.

Ricapitolando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \log(n+1)} = \begin{cases} converge\ se\ 0 < t < 2 \\ diverge\ se\ t \geq 2 \end{cases}$$

Funzioni asintotiche

Siano $f, g: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathfrak{D}(D)$
f e g sono asintotiche per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$$

Oppure

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

E si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$.
La relazione asintotico è una relazione di equivalenza, infatti essa è

- Riflessiva: $f \sim f$ per $x \to x_0$
- Simmetrica: $f \sim g$ per $x \to x_0 \Rightarrow g \sim f$ per $x \to x_0$
- Transitiva: $f \sim g$ e $g \sim h$ per $x \to x_0 \Rightarrow f \sim h$ per $x \to x_0$

Proposizione. Siano $f, g: D \to \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathfrak{D}(D)$

a) Se $f \sim g$ per $x \to x_0$ allora f e g hanno lo stesso limite finito per $x \to x_0$ oppure f e g hanno lo stesso limite infinito per $x \to x_0$ oppure f e g non ammettono limite per $x \to x_0$
b) Se $f \sim g$ e $h \sim r$ per $x \to x_0$ allora
$f \cdot h \sim g \cdot r$ e $\frac{f}{h} \sim \frac{g}{r}$ per $x \to x_0$

Dimostrazione.

a) Poiché $f \sim g$ per $x \to x_0$ si ha che $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Supponiamo che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Si ha che $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \cdot f(x) \right) = L$
Supponiamo che $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
Supponiamo per assurdo che $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Si ha che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = L$, assurdo poiché $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
b) Si ha che
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x) \cdot r(x)} = 1 \Rightarrow f \cdot h \sim g \cdot r$ per $x \to x_0$

In generale

$$f + h \sim g + r \text{ per } x \to x_0$$

Non vale.

o-piccolo

Siano $f, g: D \to \mathbb{R}, D \subseteq R, x_0 \in \mathfrak{D}(D)$
Si dice che f è un o-piccolo di g per $x \to x_0$ e si scrive

$$f = o(g) \text{ per } x \to x_0$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Nota: f è infinitesima per $x \to x_0$ se $f = o(1)$ per $x \to x_0$.

Teorema di relazione tra ~ e o-piccolo.
Si ha che

$$f \sim g \text{ per } \mathrm{x} \to \mathrm{x}_0 \Leftrightarrow f = g + o(g) \text{ per } \mathrm{x} \to \mathrm{x}_0$$

Dimostrazione.

$$f \sim g \text{ per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow f = g + o(g) \text{ per } x \to x_0$$

Limiti notevoli.
Si ha che

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \sin x \sim x \text{ per } x \to 0, \sin x = x + o(x) \text{ per } x \to 0.$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ per } x \to 0 \Rightarrow \cos x \sim 1 - \frac{1}{x^2} \text{ per } x \to 0$
  $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, e^x - 1 \sim x \text{ per } x \to 0 \Rightarrow e^x \sim 1 + x \text{ per } x \to 0$
  $e^x - 1 = x + o(x) \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x) \text{ per } x \to 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \log(1+x) \sim x \text{ per } x \to 0, \log(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0$

Proprietà di o-piccolo.

1. $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
2. $c \cdot o(x^n) = o(x^n), c \in \mathbb{R}$
3. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m}) \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$
4. $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}) \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$
5. $\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m}) \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}\ n \geq m$

Linearizzazione di una funzione

Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$
Problema: è possibile linearizzare f vicino ad x_0? In altre parole, possiamo costruire un polinomio di I° grado che approssima f vicino a x_0?
Se f è derivabile in x_0 allora sì.
Si ha che

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x \to 0$$
$$f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x \to 0$$
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_o) \text{ per } x \to 0$$
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to 0$$

Inoltra si ha che se denotiamo con dx la distanza di un punto da x_0

- $f(x_0 + dx)$ è il valore vero di f in $x_0 + dx$
- $f(x_0) + f'(x_0)dx$ è il valore approssimato con quello sulla tangente dove $f'(x_0)dx$ è il differenziale di f in x_0 ed è rappresentato come $df(x_0)$.

L'errore è dato da $f(x_0 + dx) - [f(x_0) + f'(x_0)dx] = f(x_0 + dx) - f(x_0) - f'(x_0)dx$
Dove $f(x_0 + dx) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ è l'incremento di f in x_0.
Dunque l'errore è dato da $\Delta f(x_0) - df(x_0)$.

Formula di Taylor con il resto di Peano

Sia $f \in C^n\ (a, b), x_0 \in (a, b), n \in \mathbb{N}$, allora per $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Con $f(0) = f(x)$, $0! = 1$ e dove

- $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$ è il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0 o $P_{n,f}$.
- $o((x - x_0)^n)$ è il resto di Peano.

Il resto di Peano è l'errore di approssimazione

$$E_n = o((x - x_0)^n)$$

Quindi

$$\lim_{x - x_0} \frac{E_n}{(x - x_0)^n} = 0$$

Il polinomio se ha un grado maggiore ha anche un errore migliore.
Si ha che per $n = 1$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

La formula estesa di $P_n(x)$ è

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Dimostrazione.
Si procede per induzione.
Base dell'induzione, $n = 1$:

$$f \in C^1(a,b) \Rightarrow f \text{ è derivabile in } x_0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$
$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \text{ per } x \to x_0$$

Che è il polinomio per $n = 1$.

Ipotesi induttiva: supponiamo che $f \in C^{n-1}(a,b)$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n-1})$$

Dobbiamo provare che

$$\frac{f(x)-P_{n,f}(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \; per \; x \to x_0$$

Consideriamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{n,f}(x)}{(x-x_0)^n} =^H$$
$$=^H \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P'_{n,f}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Si ha che

$$P'_{n,f}(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x-x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}n(x-x_0)^{n-1} =$$
$$= f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

E dunque

$$P'_{n,f}(x) = P_{n-1,f'}(x)$$

Inoltre se $f \in C^n(a,b) \Rightarrow f' \in C^{n-1}(a,b)$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P'_{n,f}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

Poiché $f' \in C^{n-1}(a,b)$ e vale l'ipotesi induttiva.

Formula di Taylor applicata

1. $f(x) = e^x, x_0 = 0$
   $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f(0) = 1$
   $f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x|_{x=0} = 1$
   $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!}$
   $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ per $x \to 0$
2. $f(x) = \log(1 + x)\,, x_0 = 0$
   $f \in C^\infty(-1, +\infty), f(0) = 0$
   $f'(x) = \frac{1}{1+x}|_{x=0} = 1 = 0!$
   $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}|_{x=0} = -1 = -1!$
   $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}|_{x=0} = 2 = 2!$
   $f^{IV}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}|_{x=0} = -6 = -3!$
   $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$
   $\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} \cdot x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k + o(x^n)$ per $x \to 0$
3. $f(x) = \sin x\,, x_0 = 0$
   $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f(0) = 0$
   $f'(x) = \cos x|_{x=0} = 1$
   $f''(x) = -\sin x|_{x=0} = 0$
   $f'''(x) = -\cos x\,|_{x=0} = -1$
   $f^{IV}(x) = \sin x\,|_{x=0} = 0$
   $f^{(2k+1)} = (-1)^k$
   $P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$
   In questo caso si ha che $P_{2n+1}(x) = P_{2n+2}(x)$
   $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$
   Con $n = 0$ si ha che per $x \to 0$
   $\sin x = x + o(x)$ o $\sin x = x + o(x^2)$
   Con un procedimento simile si ha che
   $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$

Formula di Taylor con il resto di Lagrange

Sia $f \in C^{n+1}(a,b)$ con $x, x_0 \in (a,b)$

Allora $\exists\, \bar{x} \in (x, x_0)$ (oppure $\bar{x} \in (x_0, x)$) tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dove

$\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ è il resto di Lagrange.

Nota.

Con $n = 0$ si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x - x_0)$$
$$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0)$$

Che è il teorema di Lagrange.

Formula di Taylor con il resto integrale

Sia $f \in C^{n}(a,b)$ con $x, x_0 \in (a,b)$ allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x}^{x_0} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Nota.

Con $n = 0$ si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x}^{x_0} f'(t)\, dt$$

Che è la formula fondamentale del calcolo integrale.

Esercizi

1) *Approssimare il valore di e.*

   Si ha che $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ per $x \to 0$

   Dunque $P_n(1)$ approssima e.

   $P_0(x) = 1|_{x=1} = 1$

   $P_1(x) = 1 + x|_{x=0} = 2$

   $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}|_{x=1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

   $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}|_{x=1} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2{,}\bar{6}$

2) *Approssimare il valore di $\sqrt{e}$ con $P_3(x)$ e stimare l'errore.*

   $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{79}{48}$

   $\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =_{n=3} \frac{e^{\bar{x}}}{4!2^4} < \frac{\sqrt{e}}{4!2^4}$ poiché $\bar{x} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

   $\frac{\sqrt{e}}{4!2^4} < \frac{\sqrt{3}}{4!2^4} \simeq 0{,}0045 \to$ l'errore è più piccolo di questa quantità.

3) *Approssimare* $\sqrt{e}$ *in modo tale che l'errore di approssimazione sia inferiore a* 10^2

$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} < \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} < \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!} < \frac{\sqrt{3}}{(n+1)!} < 10^{-2}$

$\Rightarrow (n+1)! > \sqrt{3}\cdot 100 = 178 \Rightarrow n \geq 5$

Serie di Taylor

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b), f \in C^\infty(a,b)$.

Si definisce serie di Taylor di f centrata in x_0 la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 se $\exists\, r > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Nota.

$f \in C^\infty(a,b)$ non implica che f è sviluppabile in serie di Taylor. Basta considerare

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\ se\ x \neq 0 \\ 0\ se\ x = 0 \end{cases}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$

Si dimostra che

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\ \forall\, x \in (-1,1] \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$