UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 15 SETTEMBRE 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \frac{2x-4}{e^{x^2+2x+1}}\,.$$

determinare il dominio di f

Svolgimento:

Poiché f è definita da un rapporto il cui denominatore non si annulla mai (essendo un esponenziale), il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

studiare i limiti di f agli estremi del dominio e determinare i suoi eventuali asintoti

Svolgimento:

Poiché f è data dal rapporto di un polinomio di grado 1 e un esponenziale (il cui argomento, x^2+2x+1, va a $+\infty$ sia per x che tende a $+\infty$ che per x che tende a $-\infty$), si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,,$$

da cui deduciamo che f presenta un asintoto orizzontale dato dalla retta di equazione $y=0$ sia per x che tende a $+\infty$ che per x che tende a $-\infty$.
Essendo presente l'asintoto orizzontale, non ci possono essere asintoti obliqui.
Inoltre, essendo continua su tutto $\mathbb{R}$ (in quanto rapporto di funzioni continue, il cui denominatore non si annulla mai), non ha asintoti verticali.

studiare la derivabilità di f, la sua monotonia e i suoi eventuali massimi e minimi

Svolgimento:

f è rapporto (con denominatore sempre diverso da 0) di due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$ e quindi è anch'essa derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
La derivata di f è:

$$f'(x) = 2\frac{e^{x^2+2x+1} - (x-2)(2x+2)e^{x^2+2x+1}}{e^{2(x^2+2x+1)}} = 2\frac{-2x^2+2x+5}{e^{x^2+2x+1}}\,.$$

Per trovare i punti stazionari di f, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$-2x^2+2x+5=0\,,$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{11}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{11}}{2}\,.$$

Poiché f' è definita da un rapporto il cui denominatore è sempre positivo, per studiare il segno di f', bisogna studiare il segno della quantità:

$$-2x^2+2x+5\,,$$

che è positiva per $x \in (x_1, x_2)$ e negativa per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.
Quindi f è decrescente tra $-\infty$ e x_1, crescente tra x_1 e x_2 e decrescente tra x_2 e $+\infty$.
Pertanto x_1 è un punto di minimo e x_2 è un punto di massimo.

$$f(x) = \frac{2x-4}{e^{x^2+2x+1}}.$$

DOMINIO: TUTTO $\mathbb{R}$ $\left(e^{x^2+2x+1} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\right)$

SEGNO: $2x-4 \geq 0 \qquad x \geq 2$

$y = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{e} \approx -2$

LIMITI:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-4}{e^{x^2+2x+1}} = 0$$

e^x È INFINITO DI ORDINE MAGGIORE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-4}{e^{x^2+2x-1}} = 0$$

$\Downarrow$

ASINTOTO ORIZZONTALE IN $y=0$

DERIV. MONOTONIA, MAX, MIN

DERIV. IN $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \qquad \frac{2\cdot\left(\cancel{e^{x^2+2x-1}}\right) - (2x-4)\cdot(2x+2)\left(\cancel{e^{x^2+2x-1}}\right)}{\left(e^{x^2+2x-1}\right)^{\cancel{2}}}$$

$1-(x-2)(2x+2) \qquad\qquad 1-\left(2x^2+2x-4x-4\right)$

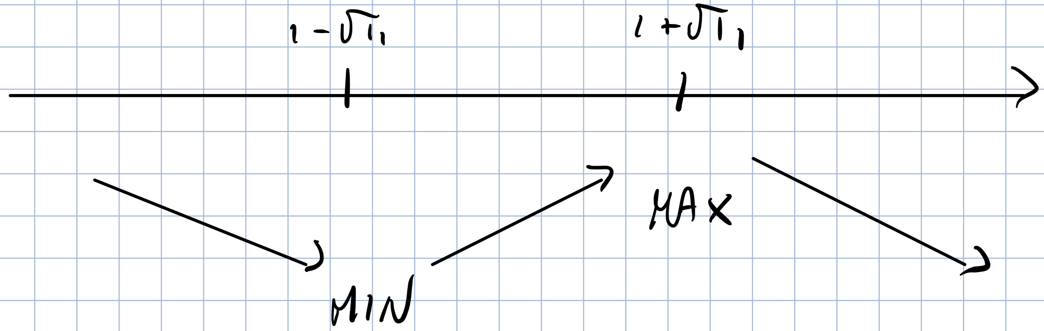
$$2\,\frac{\qquad}{\left(e^{x^2+2x-1}\right)} \qquad -\,2\,\frac{\qquad}{\left(e^{x^2+2x-1}\right)}$$

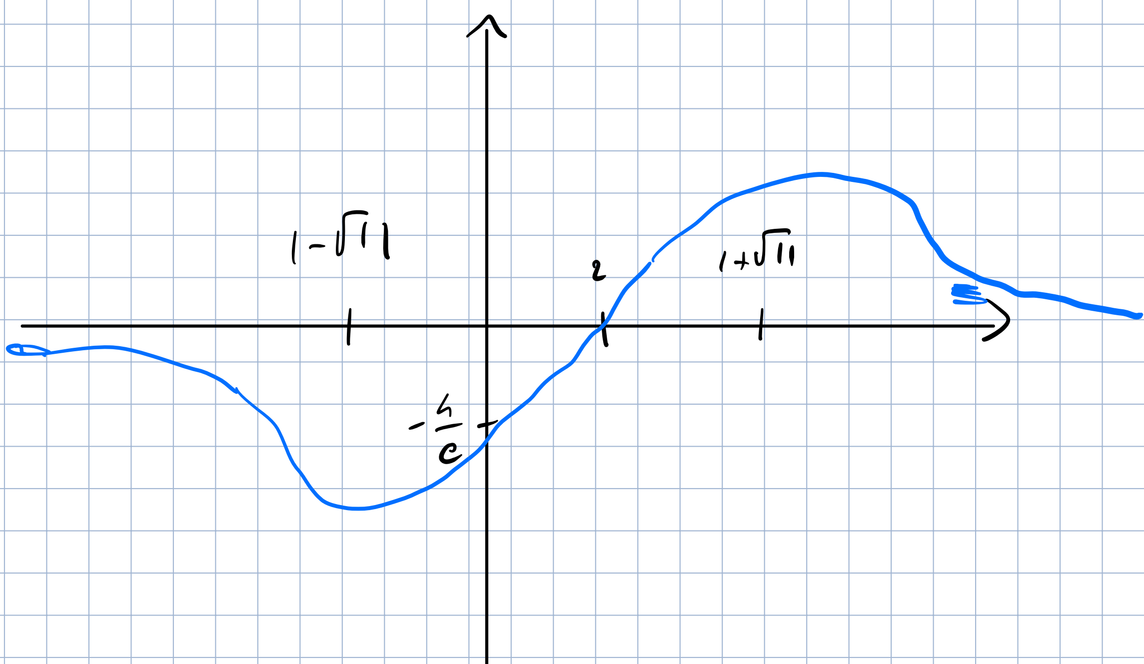
$$= -2\,\frac{2x^2-2x-5}{\left(e^{x^2+2x-1}\right)}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+40}}{2} \left\langle \begin{matrix} 1+\sqrt{11} \\ 1-\sqrt{11} \end{matrix} \right.$$

$$f'(x) \geq 0 \iff 2x^2-2x-5 \leq 0$$

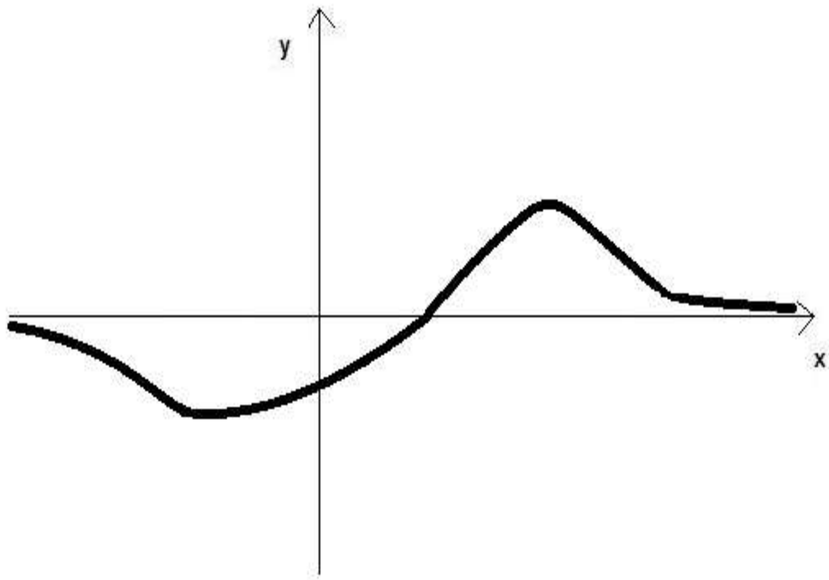
$$1-\sqrt{11} < x < 1+\sqrt{11}$$





disegnare il grafico di f

Svolgimento:



stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo e minimo assoluto nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarli

Svolgimento:

Innanzitutto osserviamo che la funzione è limitata perché non ci sono asintoti verticali e il limite di f, sia a $+\infty$ che a $-\infty$, esiste ed è finito. Inoltre, poiché $f(x_1)$ è strettamente negativo e $f(x_2)$ è strettamente positivo e poichè il limite a $+\infty$ e a $-\infty$ è uguale a 0, concludiamo che x_1 è punto di minimo assoluto e che x_2 è punto di massimo assoluto.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2\log(x)}{x^3} dx \,.$$

Svolgimento:

Troviamo prima una primitva della funzione $\frac{2\log(x)}{x^3}$. Usando la formula di integrazione per parti, si ottiene:

$$\int \frac{2\log(x)}{x^3} dx = 2\int \frac{\log(x)}{x^3} dx = 2\left[-\frac{\log x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3} dx\right] = -\frac{\log x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + c\,, \;\; c \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{2\log(x)}{x^3} dx &= \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{2\log(x)}{x^3} dx \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left[-\frac{\log x}{x^2} - \frac{1}{2x^2}\right]_1^k \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left(-\frac{\log k}{2k^2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2\log(x)}{x^3}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^3}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \log(x)\cdot x^{-3}\,dx$$

$$= 2\left[\log(x)\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{-2x^2}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + c$$

$$\lim_{a\to+\infty} -\frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^a = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right)(1-\cos(n)).$$

Svolgimento:

Osserviamo che $0 \leq 1-\cos(n) \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right)(1-\cos(n)) \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right).$$

Facciamo vedere che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right)$ converge, da cui, usando il criterio del confronto, deduciamo che la serie data converge.
Poiché $\frac{2}{n} > 0$, si ha $\sin\left(\frac{2}{n}\right) < \frac{2}{n}$ e quindi abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right) < 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

e, poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, applicando il criterio del confronto, concludiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right)$ converge.

Per mostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right)$ converge, si poteva anche usare il criterio del confronto asintotico dopo aver osservato che, quando n tende a $+\infty$, la successione $\sin^3\left(\frac{2}{n}\right)$ è asintoticamente equivalente alla successione $\frac{8}{n^3}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right)\left(1-\cos(n)\right) \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2}{n}\right) \leq 16\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

$\Rightarrow$ CONVERGE

$$0 \leq 1-\cos(n) \leq 2$$

$\sin^3\left(\frac{2}{n}\right) < \left(\frac{2}{n}\right)^3$ DATO CHE $\frac{2}{n} > 0$

A

Esercizio 4. Data la funzione

$$\frac{2xy - x^2y^2}{2(x+y)},$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 2, x, y > 0\}$$

e, in caso affermativo, determinarlo

Svolgimento: La funzione f è definita in A e risulta

$$0 < f(x,y) = \frac{2xy - x^2y^2}{2(x+y)} < \frac{2xy}{2(x+y)} < \frac{4}{2(x+y)}.$$

Allora, se $x \to +\infty$ (oppure $y \to +\infty$), f tende a zero. Come conseguenza di ciò e del fatto che $f > 0$ in A, la funzione f ha massimo in qualche punto di A.

Per determinare questo massimo osserviamo che la funzione f è derivabile in A e si ha

$$f_x(x,y) = \frac{2(2y - 2xy^2)(x+y) - 2(2xy - x^2y^2)}{4(x+y)^2} = \frac{y^2(2 - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2}$$

e

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(2 - y^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} \qquad \text{per simmetria}.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

e tenendo conto che $x, y > 0$ per ipotesi, si ottiene

$$\begin{cases} 2 - x^2 - 2xy = 0 \\ 2 - y^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} y = -x \\ 2 - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x \\ 2 - x^2 - 2xy = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema non va preso in considerazione, poiché $x, y > 0$ per ipotesi. Risolvendo il secondo sistema sistema si ottiene l'unica soluzione $y = x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Allora l'unico punto critico di f è dato da $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Per quanto detto in precedenza tale punto è il massimo assoluto di f cercato. Quindi, il massimo assoluto di f in A è $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T (xy - 2y)\, dx\, dy \,,$$

dove

$$T = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}(x-2)\,,\, (x-2)^2 + y^2 \le 1 \Big\} \,.$$

Svolgimento: Per calcolare l'integrale su T passiamo a coordinate polari con polo $(2, 0)$:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1]\,,\ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{3}]\,.$$

Con questo cambio di variabili lo jacobiano è pari a ρ.
Utilizzando la formula di riduzione sui rettangoli si ha:

$$\begin{aligned} \iint_T (xy - 2y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \rho\, d\theta \Big)\, d\rho \\ &= \int_0^1 \rho^3\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{32}\,. \end{aligned}$$

A

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$4y''' + 2y'' + 16y' + 8y = 0\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se ammette soluzioni periodiche non banali e, in caso affermativo, determinarle

Svolgimento: L'equazione data è lineare, omogenea e a coefficienti costanti. Quindi, per determinarne l'integrale generale, basta cercare soluzioni del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$.

Il suo polinomio caratteristico è $P(\lambda) = 4\lambda^3+2\lambda^2+16\lambda+8$, i cui zeri si ottengono risolvendo l'equazione algebrica

$$2\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0\,.$$

Mettendo in evidenza a fattor parziale si ottiene

$$\lambda^2(2\lambda + 1) + 4(2\lambda + 1) = 0$$

da cui si ha

$$(2\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = 0\,,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = -\frac{1}{2}\,, \quad \lambda = 2i \quad \text{e} \quad \lambda = -2i\,.$$

Poiché il polinomio caratteristico ammette le radici immaginarie $\pm 2i$, allora l'equazione differenziale data ammette soluzioni periodiche non banali date da

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,, (c_1, c_2) \neq (0, 0)\,.$$

determinarne, se esiste, una soluzione $y = y(x)$ tale che $y(0) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$

Svolgimento: Dai passaggi precedenti si ha che l'integrale generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$ non esiste a meno che $c_1 = c_2 = 0$ e tenendo conto che $\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$, allora, affinché valga la condizione $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$, basta imporre che $c_1 = c_2 = 0$ e che $c_3 > 0$. Quindi si ottiene

$$y(x) = c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\,, \qquad c_3 > 0\,.$$

Infine, affinché valga la condizione $y(0) = 1$, deve essere $c_3 = 1$. Allora la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\,.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 5 SETTEMBRE 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}.$$

Si chiede di

determinare il dominio di f

Svolgimento: Per determinare il dominio D della funzione f, si impone che il radicando sia non negativo. Si ha

$$\frac{x^3-1}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty).$$

studiare il segno di f e le sue intersezioni con gli assi

Svolgimento: Risulta $f(x) \leq 0$, $\forall x \in D$. In particolare, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. La funzione non presenta intersezioni con l'asse y.

studiare i limiti di f agli estremi del dominio

Svolgimento: Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to 0^-} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -\infty.$$

determinare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui)

Svolgimento: Dal calcolo dei precedenti limiti si deduce che non sono presenti asintoti orizzontali e che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per f.

Verifichiamo se f ha degli asintoti obliqui. Si ha:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-2\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3}}\right) = -2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3}} = 2 \end{cases}$$

e

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - mx\right) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + 2x\right) = 0 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(-2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - 2x\right) = 0\,, \end{cases}$$

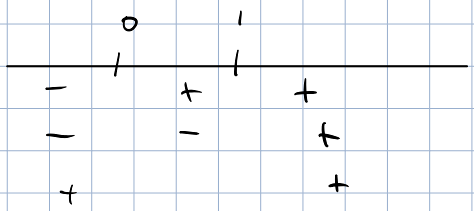
poiché

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x} \quad \text{(razionalizzando)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, analogamente, a $-\infty$.

$f(x) = -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}.$

D = $\quad x \neq 0 \qquad \frac{x^3-1}{x} \geq 0 \qquad x < 0, \; x \geq 1$



SEGNO E INTERSEZIONI

$f(x) < 0 \quad \forall x \in D$

$y = 0 \qquad x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 0$ NO POICHÉ $x \notin D$

LIMITI

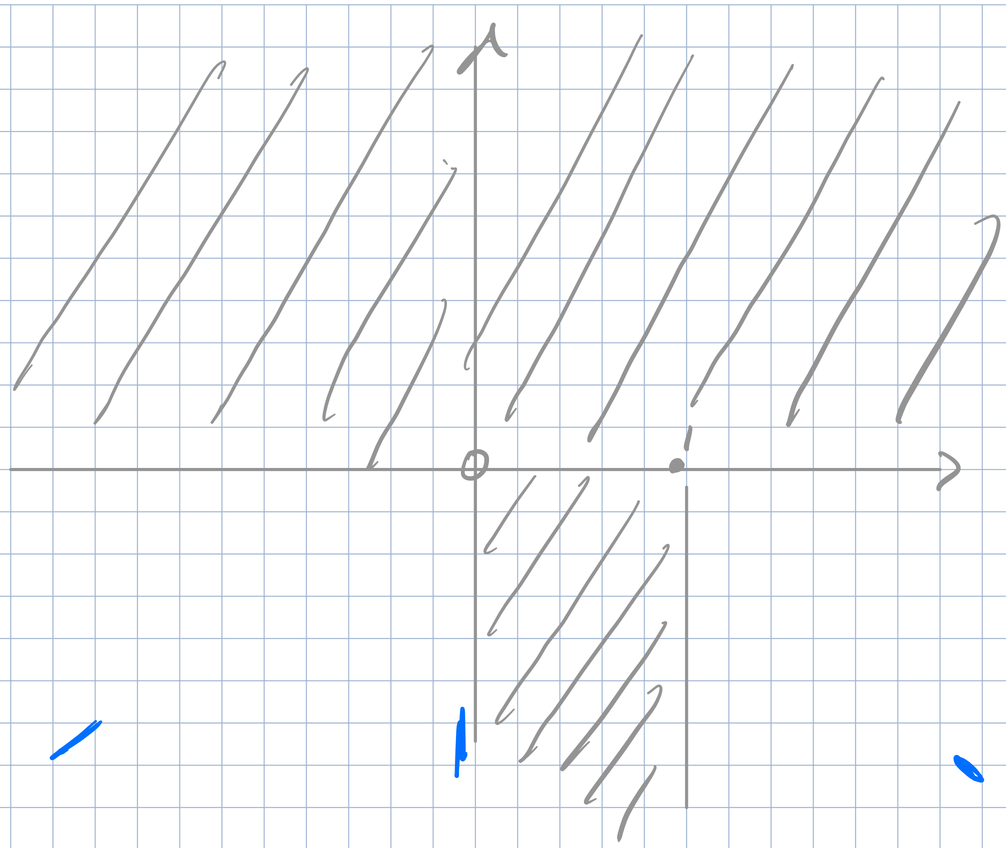
$$\lim_{x \to -\infty} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -2\sqrt{\frac{x^{\cancel{3}}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x}}} = -2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -\infty$$

ASINTOTI OB.: $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3}} = -2$

$$\lim_{x \to \pm\infty} -2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + 2x =$$


0

Quindi le rette

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = -2x$$

sono asintoti obliqui per f, rispettivamente per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

studiare la derivabilità di f, la sua monotonia e i suoi eventuali massimi e minimi
Svolgimento: Dal teorema di derivazione della funzione composta risulta che f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ e si ha

$$f'(x) = -2\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 - 1)}{x^2} = -\sqrt{\frac{x}{x^3-1}} \cdot \frac{2x^3+1}{x^2}.$$

Inoltre,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

e

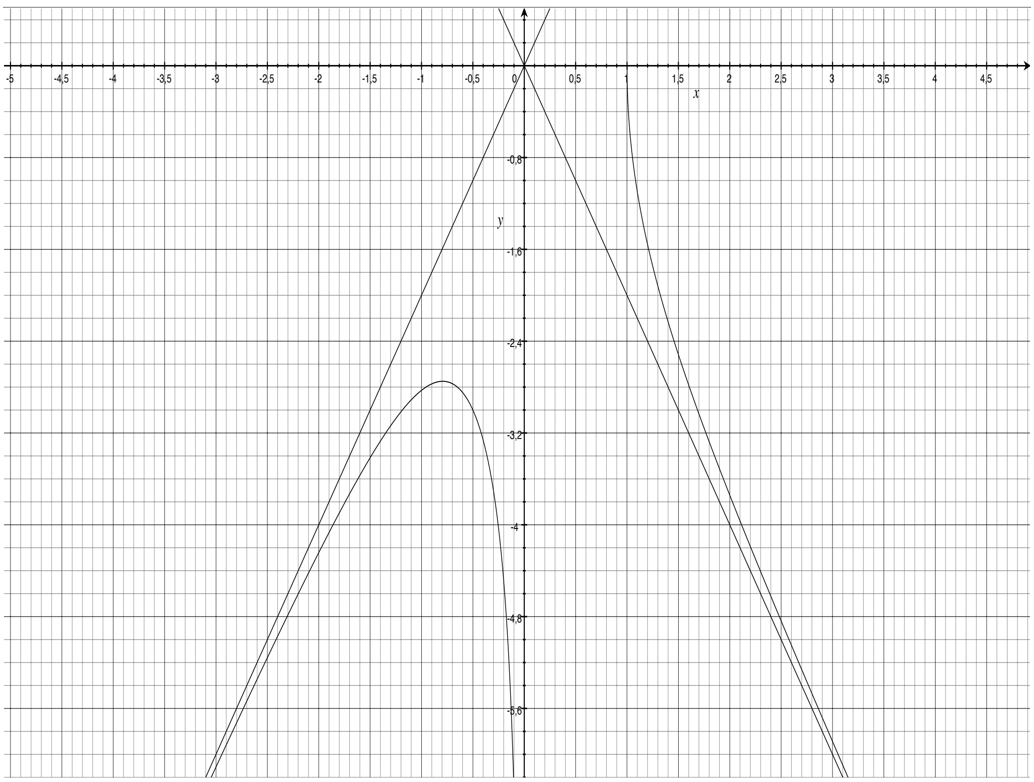
$$f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.$$

Quindi, il punto $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ è un punto di massimo relativo per f. Non ci sono minimi assoluti. L'unico punto del dominio in cui resta da studiare la derivabilità di f è $x = 1$. Poiché si ha che

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty\,,$$

f non è derivabile in $x = 1$. Inoltre, $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale per f ed è anche un suo punto di massimo assoluto (essendo $f \leq 0$ nel suo dominio).

disegnare il grafico di f
Svolgimento:



Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{e^{x+2}\log(1+e^{x+2})}{1+e^{x+2}}\,dx\,.$$

Svolgimento: L'integrale si può risolvere per sostituzione. Infatti, ponendo

$$t = 1 + e^{x+2}$$

si ha

$$dt = e^{x+2}\,dx$$

e quindi l'integrale dato diventa

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x+2}\log(1+e^{x+2})}{1+e^{x+2}}\,dx &= \int \frac{\log t}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log^2 t + c \\ &= \frac{1}{2}\log^2(1+e^{x+2}) + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+3x)-3\sin x}{2x^3-7x^4+5x^5}$$

utilizzando opportuni sviluppi di Taylor.

Svolgimento: Utilizzando lo sviluppo di Taylor al terzo ordine per la funzione $f(t)=\log(1+t)$ con $t=3x$, risulta

$$\begin{aligned}\log(1+3x) &= 3x-\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3}+o(x^3)\\ &= 3x-\frac{9}{2}\,x^2+9x^3+o(x^3) \qquad \text{per} \qquad x\to 0\,,\end{aligned}$$

mentre, utilizzando lo sviluppo di Taylor al terzo ordine per la funzione $g(t)=\sin t$ con $t=x$, risulta

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \qquad \text{per} \qquad x\to 0\,.$$

Allora, sostituendo nel limite dato, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+3x)-3\sin x}{2x^3-7x^4+5x^5} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{3x-\frac{9}{2}\,x^2+9x^3+o(x^3)-3(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{2x^3-7x^4+5x^5}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{9}{2}x^2+9x^3+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3(2-7x+5x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{9}{2}x^2+\frac{19}{2}x^3+o(x^3)}{x^3(2-7x+5x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3(-\frac{9}{2x}+\frac{19}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3})}{x^3(2-7x+5x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{9}{2x}+\frac{19}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{2-7x+5x^2} = +\infty\,,\end{aligned}$$

poiché

$$-\frac{9}{2x} \to +\infty \quad \text{se} \quad x\to 0^-$$
$$o(x^3)/x^3 \to 0 \quad \text{se} \quad x\to 0$$

e

$$2-7x+5x^2 \to 2 \quad \text{se} \quad x\to 0\,.$$

A

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 \log(1+y) + x^2y^2\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimi e minimi locali nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarli

Svolgimento: La funzione f è definita nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1+y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}\,.$$

Inoltre f è derivabile in D e, in tali punti, risulta

$$f_x(x,y) = 2x\left(\log(1+y) + y^2\right)$$

e

$$f_y(x,y) = x^2\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right).$$

Per trovare i punti critici di f in D, basta risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x\left(\log(1+y)+y^2\right) = 0 \\ \\ x^2\left(\dfrac{1}{1+y} + 2y\right) = 0\,, \end{cases}$$

le cui uniche soluzioni sono date da $(0,y)$, $y > -1$ (qui si usa il fatto che la funzione $y \mapsto \log(1+y)+y^2$ è strettamente crescente e si annulla solo in $y = 0$). Allora gli unici punti critici di f sono i punti $(0,y)$, $y > -1$.

Per classificare tali punti consideriamo le derivate seconde di f. Si ha

$$f_{xx}(x,y) = 2\left(\log(1+y) + y^2\right)$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right)$$

$$f_{yy}(x,y) = x^2\left(-\frac{1}{(1+y)^2} + 2\right).$$

Allora il determinante della matrice hessiana di f in $(0,y)$, $y > -1$, è dato da

$$|H(0,y)| = \left|\begin{pmatrix} 2\left(\log(1+y)+y^2\right) & 2x\left(\frac{1}{1+y}+2y\right) \\ 2x\left(\frac{1}{1+y}+2y\right) & x^2\left(-\frac{1}{(1+y)^2}+2\right) \end{pmatrix}\right|_{|(0,y)} = \left|\begin{pmatrix} 2\left(\log(1+y)+y^2\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0\,.$$

Poiché $|H(0,y)| = 0$, il metodo della matrice hessiana non consente di classificare i punti stazionari di f.

Si può procedere utilizzando la definizione di massimo o minimo locale, studiando la disequazione

$$f(x,y) \geq f(0,y) = 0\,.$$

Si ha

$$f(x,y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log(1+y) + y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 0\,,$$

essendo la funzione $y \mapsto \log(1+y) + y^2$ strettamente crescente e nulla in $y = 0$.

Allora si ha:

- i punti $(0,y)$ con $y > 0$ sono punti di minimo locale per f
- i punti $(0,y)$ con $-1 < y < 0$ sono punti di massimo locale per f
- il punto $(0,0)$ è un punto di sella per f .

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \Big(2x + 8y + 1\Big)\, dxdy\,,$$

dove

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 \le 1\big\}\,.$$

Svolgimento: Il dominio D è la parte di piano interna all'ellisse di equazione

$$(x-1)^2 + 4y^2 = 1\,.$$

Passando a coordinate polari con polo $(1, 0)$

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ \\ y = \frac{\rho}{2}\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1]\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

risulta

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \frac{\rho}{2}\,.$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_D \Big(2x + 8y + 1\Big)\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(2\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta + 3\Big)\frac{\rho}{2}\, d\rho\Big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[2\rho^2\sin\theta - 4\rho^2\cos\theta + 3\rho\theta\Big]_0^{2\pi}\, d\rho \\
&= 3\pi \int_0^1 \rho\, d\rho \\
&= \frac{3}{2}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$xy'' + 2y' + xy = 0\,,$$

si chiede di

determinarne, motivando la risposta, l'integrale generale

(Suggerimento: porre $z(x) = xy(x)$)

Svolgimento: Si tratta di un'equazione del secondo ordine a coefficienti variabili. Con la sostituzione $z(x) = xy(x)$, si ha (per $x \neq 0$)

$$y(x) = \frac{z(x)}{x}$$

e quindi

$$y'(x) = \frac{z'(x)x - z(x)}{x^2} = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}$$

e

$$y''(x) = \frac{z''(x)x - z'(x)}{x^2} - \frac{z'(x)x^2 - 2z(x)x}{x^4}\,.$$

Quindi, sostituendo nell'equazione data si ottiene

$$z''(x) + z(x) = 0\,. \tag{1}$$

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, il cui polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^2 + 1 = 0\,,$$

le cui uniche soluzioni sono $\lambda = \pm i$. Allora l'integrale generale di (1) è dato da

$$z(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = \frac{c_1 \sin x + c_2 \cos x}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

stabilire, motivando la risposta, se esiste una soluzione $y = y(x)$ dell'equazione data tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$

Svolgimento: La funzione $y(x) = 0$ è un integrale particolare dell'equazione data e verifica, banalmente, la condizione richiesta.

risolvere, motivando la risposta, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento: Poiché l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = \frac{c_1 \sin x + c_2 \cos x}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$y'(x) = \frac{x(c_1 \cos x - c_2 \sin x) - c_1 \sin x - c_2 \cos x}{x^2}\,.$$

Allora, per risolvere il problema di Cauchy dato, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} c_1 \\ 1 = y'(\frac{\pi}{2}) = -(\frac{2}{\pi})^2 \left(\frac{\pi}{2} c_2 + c_1\right)\,. \end{cases}$$

L'unica soluzione è data da $c_1 = 0$ e $c_2 = -\frac{\pi}{2}$, quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{\pi \cos x}{2x}\,.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 28 GIUGNO 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = 3\log(e^x - e^{-x}).$$
Si chiede di

determinare il dominio di f

Svolgimento: Per determinare il dominio, basta richiedere che l'argomento del logaritmo sia positivo. Quindi, basta risolvere la disequazione
$$e^x - e^{-x} > 0\,,$$
che, per la crescenza della funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$, equivale a
$$x > -x\,.$$
Tale disequazione è verificata se e solo se $x > 0$. Quindi il dominio della funzione data è $D = (0, +\infty)$.

studiare il segno di f e le sue intersezioni con gli assi

Svolgimento: Dalla crescenza della funzione $0 < t \mapsto \log t$ e dalla positività di $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$, risulta che
$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log(e^x - e^{-x}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{2x} - 1 - e^x}{e^x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 - e^x \geq 0\,.$$
Per risolvere la disequazione esponenziale $e^{2x} - 1 - e^x \geq 0$ basta porre $y = e^x$ e studiare la disequazione algebrica $y^2 - y - 1 \geq 0$. Si ottiene che
$$e^{2x} - 1 - e^x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$
Quindi $f \geq 0$ in $[\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ e $f < 0$ in $(0, \log\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Inoltre f interseca l'asse x nel punto $(\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$, mentre non interseca l'asse y ($x = 0 \notin D$).

studiare i limiti di f agli estremi del dominio

Svolgimento: Risulta
$$\lim_{x\to 0^+} 3\log(e^x - e^{-x}) = -\infty$$
e
$$\lim_{x\to +\infty} 3\log(e^x - e^{-x}) = +\infty\,,$$
poiché f è composizione di funzioni continue.

studiare la derivabilità di f, la sua monotonia e i suoi eventuali massimi e minimi

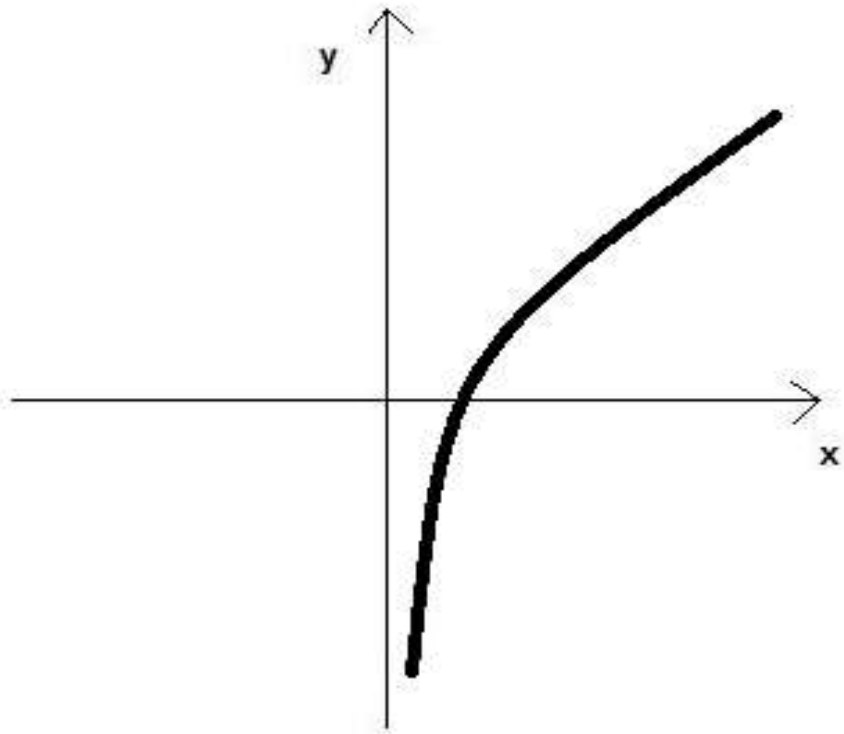
Svolgimento: Innanzitutto studiamo la derivabilità di f . Le funzioni elementari
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$$
e
$$0 < t \mapsto \log t$$
sono derivabili nel loro dominio, quindi f è derivabile in D, poiché composizione di funzioni derivabili. Inoltre, per ogni $x \in D$ si ha
$$f'(x) = \frac{3}{e^x - e^{-x}} \cdot (e^x + e^{-x})\,.$$
Ora studiamo la monotonia di f e i suoi eventuali massimi e minimi. Si ha
$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0\,,$$
essendo la funzione esponenziale sempre positiva nel suo dominio . Quindi f è strettamente crescente in D e non ammette né massimi né minimi.

studiare la concavità/convessità di f e i suoi eventuali flessi
Svolgimento: La funzione f' è derivabile in D, poiché composizione di funzioni derivabili, e si ha:

$$f''(x) = 3\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = 3\frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{12}{e^x - e^{-x}}\,.$$

Poiché $f''(x) < 0$ per ogni $x \in D$, allora la funzione f è strettamente concava in D e non ammette flessi.

disegnare il grafico di f
Svolgimento:



dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \pi$
Svolgimento: Poiché la funzione f è continua e strettamente crescente in $(0, +\infty)$, l'equazione data ammette un'unica soluzione.

Esercizio 2. Dato il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^2+3}{3x^8(\cos^2 x+2)}\,dx\,,$$

stabilire, motivando la risposta, se è convergente o divergente.

Svolgimento: La funzione

$$x \mapsto \frac{x^2+3}{3x^8(\cos^2 x+2)}$$

è continua in $(-\infty,-1)$. Quindi, l'integrale dato è improprio poiché l'intervallo di integrazione è illimitato.

Per $x \to -\infty$ si ha

$$0 \le \frac{x^2+3}{3x^8(\cos^2 x+2)} \cong \frac{x^2}{x^8(\cos^2 x+2)} = \frac{1}{x^6(\cos^2 x+2)}\,.$$

Inoltre, essendo $\cos^2 x+2 \ge 2$, si ha

$$0 \le \frac{x^2+3}{3x^8(\cos^2 x+2)} \cong \frac{1}{x^6(\cos^2 x+2)} \le \frac{1}{2x^6}$$

per $x \to -\infty$.

Poiché

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^6}\,dx \qquad \text{è convergente}\,,$$

allora, dal criterio del confronto asintotico e da quello del confronto, si ottiene che l'integrale dato è convergente.

 A

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \cos x - x + 1}{x + x^3 - \sin x}\,.$$

utilizzando opportuni sviluppi di Taylor.

Svolgimento: Utilizzando lo sviluppo di Taylor al terzo ordine per le funzioni $y = log(1+x)$, $y = \cos x$ e $y = \sin x$, risulta

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

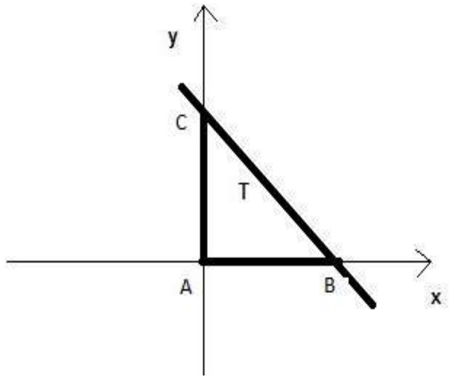
per $x \to 0$. Allora, sostituendo nel limite dato, si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \cos x - x + 1}{x + x^3 - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - x + 1}{x + x^3 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{7x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{x^3\left(\frac{7}{6} + o(1)\right)} \\
&= \frac{2}{7}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Data la funzione
$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$
e dato l'insieme
$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 4\right\},$$
si chiede di

disegnare T

Svolgimento:



stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo e minimo assoluti in T e, in caso affermativo, determinarli

Svolgimento: La funzione f è definita e continua nell'insieme $\mathbb{R}^2$. Inoltre T è un insieme chiuso e limitato. Quindi, per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo assoluti in T.
Per determinarli, osserviamo che f è derivabile in $\mathbb{R}^2$ e risulta
$$f_x(x,y) = 2xye^{-(x+y)} - x^2ye^{-(x+y)} = xy(2-x)e^{-(x+y)}$$
e
$$f_y(x,y) = x^2e^{-(x+y)} - x^2ye^{-(x+y)} = x^2(1-y)e^{-(x+y)}.$$
Per trovare i punti critici di f nell'interno di T, basta risolvere il seguente sistema
$$\begin{cases} xy(2-x)e^{-(x+y)} = 0 \\ \\ x^2(1-y)e^{-(x+y)} = 0\,, \end{cases}$$
le cui uniche soluzioni sono date da $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, e $(2,1)$. Poiché solo il punto $(2,1)$ è interno al triangolo T, allora l'unico punto critico di f interno a T è $(2,1)$.
Ora consideriamo il bordo di T: $\partial T = AB \cup BC \cup AC$, dove
$$AB : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0,4]\,,$$
$$BC : \begin{cases} x = t \\ y = 4-t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0,4]\,,$$
$$\text{e } AC : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in [0,4]\,.$$

Risulta

- $f_{|AB}(t) = 0$ con $t \in (0, 4)$.
  Quindi tutti i punti di AB sono critici;

- $f_{|BC}(t) = t^2(4 - t)e^{-4} = h(t)$ con $t \in (0, 4)$.
  La funzione h è derivabile in $(0, 4)$ e risulta

$$h'(t) = e^{-4}(8t - 3t^2)$$

  per cui $h'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$ oppure $t = \frac{8}{3}$. Poiché $t = 0 \notin (0, 4)$, allora l'unico punto critico di f su BC è $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$;

- $f_{|AC}(t) = 0$ con $t \in (0, 4)$.
  Quindi tutti i punti di AC sono critici.

Ora basta confrontare i valori assunti dalla funzione f nei punti trovati finora e nei vertici A, B e C del triangolo T. Risulta

- $f(2, 1) = 4e^{-3}$;
- $f(x, 0) = 0$ con $x \in [0, 4]$;
- $f(0, y) = 0$ con $y \in [0, 4]$;
- $f(8/3, 4/3) = \frac{256}{27}e^{-4}$,

quindi il massimo assoluto per f in T è $4e^{-3}$, mentre il minimo assoluto è 0 .

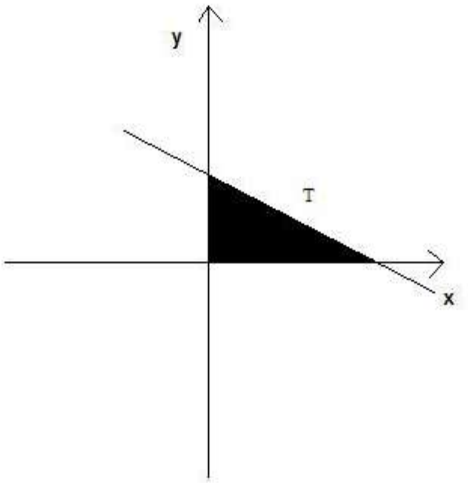
Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T (3 + 3x + y)\, dxdy\,,$$

dove

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3\,,\ 0 \le y \le -\frac{2}{3}(x - 3)\right\}.$$

Svolgimento: L'insieme T si può rappresentare come



Allora, essendo T un dominio semplice rispetto all'asse x, dalla formula di riduzione degli integrali doppi, risulta

$$\begin{aligned}
\iint_T (3 + 3x + y)\, dxdy &= \int_0^3 \left(\int_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} \big(3 + 3x + y\big)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^3 \left[3y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{-\frac{2}{3}(x-3)} dx \\
&= \int_0^3 \left(-2(x - 3) - 2\,x(x - 3) + \frac{2}{9}(x - 3)^2 \right) dx \\
&= \left[-(x - 3)^2 - \frac{2}{3}\,x^3 + 3x^2 + \frac{2}{27}(x - 3)^3 \right]_0^3 \\
&= -18 + 27 + 9 + 2 \\
&= 20\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$z' = \frac{1}{2x}\left(z^2 - 1\right) ,$$

si chiede di

determinarne, motivando la risposta, l'integrale generale

Svolgimento: Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Due integrali dell'equazioni si ottengono ponendo

$$z^2 - 1 = 0 \,,$$

che è verificata se e solo se $z(x) = 1$ oppure $z(x) = -1$.

Se $z^2 - 1 \neq 0$, l'equazione data si può scrivere nella forma

$$\frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2x}\, dx \,.$$

Integrando membro a membro si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{z^2-1}\, dz &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{z-1}\, dz - \int \frac{1}{z+1}\, dz\right) \\ &= \frac{1}{2}\log|z-1| - \frac{1}{2}\log|z+1| + c_1 \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c_1 \,, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \,,\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\log|x| + c_1 \,, \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

e quindi,

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \frac{1}{2}\log|x| + c_1 \,, \qquad c \in \mathbb{R}$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{z-1}{z+1} = c_1 x \,, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,.$$

Ricavando z da tale equazione si ha

$$z = \frac{1 + c_1 x}{1 - c_1 x} \,, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,.$$

stabilire, motivando la risposta, se l'equazione data ammette una soluzione $z = z(x)$ tale che $\int_0^{+\infty} z(x)\, dx = +\infty$

Svolgimento: La funzione $z(x) = 1$ è una soluzione dell'equazione data ed è tale che

$$\int_0^{+\infty} 1\, dx = +\infty \,.$$

Quindi, anche in questo caso, la risposta alla domanda posta è affermativa.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 6 GIUGNO 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = |x-2|e^{-(x-2)^2}\,.$$

Si chiede di

determinare il dominio di f

Svolgimento:
$$\mathcal{D} = (-\infty, +\infty).$$

studiare il segno di f e le sue intersezioni con gli assi

Svolgimento: La funzione $f(x)$ è non negativa nel suo dominio. In particolare

- $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2;$
- $f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$

studiare i limiti di f agli estremi del dominio e determinare i suoi eventuali asintoti

Svolgimento: Risulta facilmente che
$$\lim_{x\to\pm\infty} |x-2|e^{-(x-2)^2} = 0.$$

Pertanto la retta $y = 0$ (per $x \to \pm\infty$) è un asintoto orizzontale per f. Non sono presenti asintoti verticali per f.

studiare la derivabilità di f, la sua monotonia e i suoi eventuali massimi e minimi

Svolgimento: Esplicitando il modulo si ottiene
$$f'(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)^2} + e^{-(x-2)^2}\Big(-2(x-2)^2\Big) = e^{-(x-2)^2}\Big(1-2(x-2)^2\Big), & x > 2; \\ \\ -e^{-(x-2)^2} + e^{-(x-2)^2}\Big(2(x-2)^2\Big) = e^{-(x-2)^2}\Big(-1+2(x-2)^2\Big), & x < 2. \end{cases}$$

Risulta che $x = 2$ è un punto di non derivabilità. In particolare, essendo
$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm 1,$$

$x = 2$ è un punto angoloso.
Dallo studio del segno di f' otteniamo che
$$\begin{cases} f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}+2\Big) \cup \Big(2, \frac{\sqrt{2}}{2}+2\Big); \\ \\ f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+2, 2\Big) \cup \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+2, +\infty\Big). \end{cases}$$

Quindi i punti
$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \text{ e } x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$$

sono punti di massimo relativo per f. In realtà tali punti sono di massimo assoluto per f (vedi grafico).
Il punto
$$x = 2$$

è un punto di minimo assoluto per f, essendo $f(x) \geq 0 = f(2)$ per ogni $x \in \mathcal{D}$.

studiare la concavità/convessità di f e i suoi eventuali flessi
Svolgimento:

$$f''(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-(x-2)^2}\Big(-6+4(x-2)^2\Big), & x>2; \\ \\ (x-2)e^{-(x-2)^2}\Big(6-4(x-2)^2\Big), & x<2. \end{cases}$$

Dallo studio del segno otteniamo che

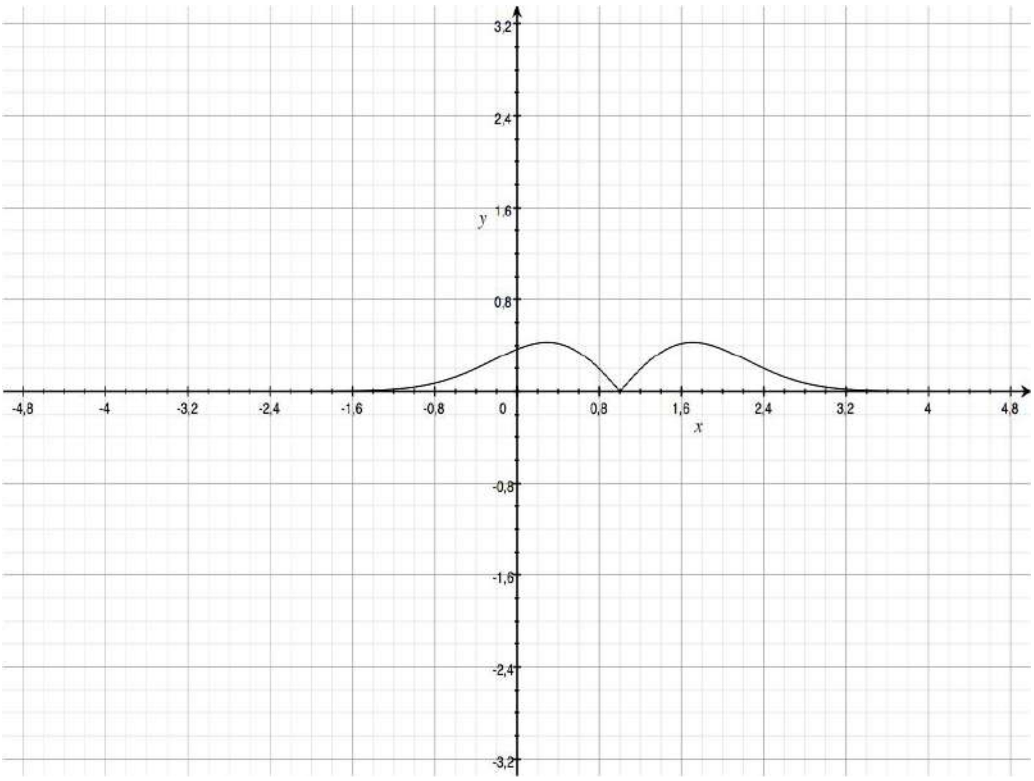
$$\begin{cases} f''(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}+2\Big) \cup \Big(\sqrt{\frac{3}{2}}+2, +\infty\Big); \\ \\ f''(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}+2, 2\Big) \cup \Big(2, \sqrt{\frac{3}{2}}+2\Big). \end{cases}$$

Quindi i punti

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}+2 \quad \text{e} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}+2,$$

sono punti di flesso per f.
disegnare il grafico di f

Svolgimento:



Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{x} - \log^2 x}{2x}\, dx\,.$$

Svolgimento: Utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale indefinito si ha

$$\int \frac{\sqrt{x} - \log^2 x}{2x}\, dx \;= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{\log^2 x}{x}\, dx.$$

Essendo due integrali elementari, ricaviamo

$$\int \frac{\sqrt{x} - \log^2 x}{2x}\, dx \;= \sqrt{x} - \frac{1}{6}\log^3 x + c\,, \;\; c \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 3. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2\beta^n}\,,$$

stabilire, motivando la risposta, per quali valori del parametro $\beta > 0$ è convergente.

Svolgimento: Si tratta di una serie numerica a termini positivi. Utilizzando il criterio del rapporto otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)^2\beta^{n+1}} \cdot \frac{n^2\beta^n}{4^n} = \frac{4}{\beta}.$$

Se

(*i*) Se $\frac{4}{\beta} < 1$, ovvero $\beta > 4$, la serie converge;

(*ii*) Se $\frac{4}{\beta} > 1$, ovvero $0 < \beta < 4$, la serie diverge;

(*iii*) Se $\frac{4}{\beta} = 1$, ovvero $\beta = 4$, il criterio del rapporto non dà risposta.

Studiamo la serie nel caso (*iii*), ovvero nel caso in cui $\beta = 4$. La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

che è convergente, essendo $2 > 1$.
In definitiva la serie data converge per $\beta \geq 4$ e diverge per $0 < \beta < 4$.

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3\,,$$

si chiede di

stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimi e minimi locali nel suo dominio e, in caso affermativo, determinarli

Svolgimento: La funzione f è definita in $\mathbb{R}^2$. Inoltre f è derivabile in $\mathbb{R}^2$ e risulta

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3$$

e

$$f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2\,.$$

Per trovare i punti critici di f in D, basta risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0\,, \end{cases}$$

che si può riscrivere come

$$\begin{cases} x^2y^2\,(3 - 4x - 3y) = 0 \\ \\ x^3y\,(2 - 2x - 3y) = 0\,, \end{cases}$$

le cui uniche soluzioni sono date da $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ che rappresentano tutti i punti critici di f.

Per classificare tali punti consideriamo le derivate seconde di f e scriviamo la matrice hessiana di f in (x, y):

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$H(1/2, 1/3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

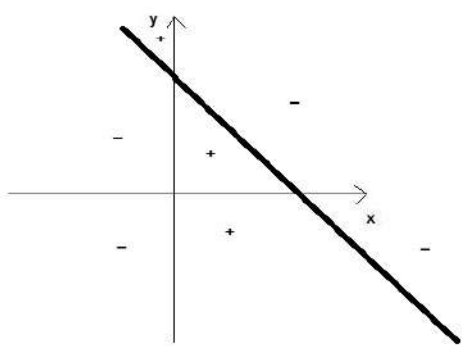
da cui segue che $|H(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})| = \frac{1}{144}$. Allora, poiché $-\frac{1}{9} < 0$, il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ è un massimo locale per f. Poiché $|H(x, 0)| = |H(0, y)| = 0$, il metodo della matrice hessiana non consente di classificare i punti $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, e $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Per questi punti si può procedere utilizzando la definizione di massimo o minimo locale. Consideriamo i punti $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, studiando la disequazione

$$f(x, y) \geq f(x, 0) = 0\,.$$

Si ha

$$f(x, y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3y^2\,(1 - x - y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{vedi disegno qui sotto}$$



Allora si ha:

- i punti $(x, 0)$ con $x < 0$ o $x > 1$ sono punti di massimo locale per f
- i punti $(x, 0)$ con $0 < x < 1$ sono punti di minimo locale per f
- i punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti di sella per f.

Ora consideriamo i punti $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso la disequazione da studiare è

$$f(x, y) \geq f(0, y) = 0\,.$$

Dal disegno precedente si evince che i punti $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$ sono punti di sella per f.

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D y\,dxdy\,,$$

dove

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,, y \geq 0\,, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\Big\}\,.$$

Svolgimento: Il dominio D è la parte di corona circolare delimitata dalle circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 4$$

e contenuta nel primo quadrante. Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [1,2]\,, \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_1^2 \rho\sin\theta\rho\,d\rho\Big)\,d\theta \\ &= \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{3}\Big[\rho^3\Big]_1^2 = \frac{7}{3}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Data la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{6y}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3}\,,$$

si chiede di

determinarne, motivando la risposta, l'integrale generale

Svolgimento: L'equazione data è un'equazione differenziale del primo ordine di Bernouilli. Ponendo

$$z(x) = (y(x))^{1/3}$$

si ha

$$z'(x) = \frac{1}{3}\,(y(x))^{-2/3}\,y'(x)\,.$$

Allora, sostituendo nell'equazione data si ottiene

$$3z^2 z' = \frac{6z^3}{x} - 12x^3 e^{x^2} z^2.$$

Una soluzione di tale equazione è $z(x) = 0$, da cui si ottiene $y(x) = 0$. Mentre, se $z(x) \neq 0$, tale equazione si può scrivere come

$$z' = \frac{2z}{x} - 4x^3 e^{x^2}\,,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int 2/x dx}\left[\int \left(-4x^3 e^{x^2} e^{-\int 2/x dx}\right) dx + c\right] \\ &= -x^2\left[\int \frac{4x^3 e^{x^2}}{x^2}\,dx - c\right] \\ &= -x^2\left[4\int x e^{x^2}\,dx - c\right] \\ &= -x^2\left[2e^{x^2} - c\right] \\ &= x^2\left[c - 2e^{x^2}\right]\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Essendo $z(x) = (y(x))^{1/3}$, allora l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = (z(x))^3 = \left(x^2\left[c - 2e^{x^2}\right]\right)^3 = x^6\left[c - 2e^{x^2}\right]^3\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

stabilire, motivando la risposta, se l'equazione data ammette una soluzione costante

Svolgimento: La funzione $y(x) = 0$ risolve l'equazione data. Quindi la risposta alla domanda posta è affermativa.

trovare, motivando la risposta, una soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{6y}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Poiché $y(x) = 0$ risolve l'equazione data e verifica la condizione $y(1) = 0$, una soluzione del problema di Cauchy dato è $y(x) = 0\,.$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 3 FEBBRAIO 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(1+x)}.$$

Si chiede di

determinare il dominio di f

Svolgimento: Poiché l'indice della radice che compare nell'espressione di f è dispari, allora f è definita in tutto $\mathbb{R}$.

studiare il segno di f e le sue intersezioni con gli assi

Svolgimento: Studiamo il segno di f. Risulta

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{x^2(1+x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(1+x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1\,.$$

Quindi $f \geq 0$ in $[-1,+\infty)$ e $f < 0$ in $(-\infty,-1)$.
Per determinare le intersezioni di f con gli assi basta risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^2(1+x)} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y = \sqrt[3]{x^2(1+x)} \\ x = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema ammette come soluzioni i punti $(0,0)$ e $(-1,0)$, mentre il secondo ha come soluzione il punto $(0,0)$. Quindi f interseca gli assi nei punti $(0,0)$ e $(-1,0)$.

studiare i limiti di f agli estremi del dominio

Svolgimento: Risulta
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(1+x)} = +\infty$$
e
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(1+x)} = -\infty\,,$$
poiché f è composizione di funzioni continue, $\lim_{x\to\pm\infty} x^2(1+x) = \pm\infty$ e l'indice 3 del radicando è dispari.

studiare la derivabilità di f, la sua monotonia e i suoi eventuali massimi e minimi

Svolgimento: Innanzitutto studiamo la derivabilità di f. La funzione elementare

$$z \mapsto \sqrt[3]{z}$$

è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, mentre
$$z \mapsto z^2(z+1)$$
è derivabile in $\mathbb{R}$ (essendo un polinomio), allora f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, poiché composizione di funzioni derivabili. Inoltre, in $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2(1+x)\right)^{-2/3} \cdot (2x+3x^2) = \frac{2x+3x^2}{3\sqrt[3]{\left(x^2(1+x)\right)^2}}\,.$$

Gli unici punti del dominio in cui resta da studiare la derivabilità di f sono $x=-1$ e $x=0$. Poiché si ha che
$$\lim_{x\to-1} f'(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x+3x^2}{3\sqrt[3]{\left(x^2(1+x)\right)^2}} = +\infty\,,$$
f non è derivabile in $x=-1$. Inoltre, $x=-1$ è un punto di flesso a tangente verticale per f.

Poiché si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f'(x) &= \lim_{x\to0^+} \frac{2x+3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2(1+x))^2}} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{x(2+3x)}{3x^{2(3-1)/3}\sqrt[3]{(1+x)^2}} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{2+3x}{3x^{1-2/3}\sqrt[3]{(1+x)^2}} = +\infty\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f'(x) &= \lim_{x\to0^-} \frac{2x+3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2(1+x))^2}} \\ &= \lim_{x\to0^-} \frac{2+3x}{3x^{1-2/3}\sqrt[3]{(1+x)^2}} = -\infty\,,\end{aligned}$$

f non è derivabile in $x=0$. Inoltre, $x=0$ è un punto di cuspide per f.
Ora studiamo la monotonia di f e i suoi eventuali massimi e minimi. Si ha

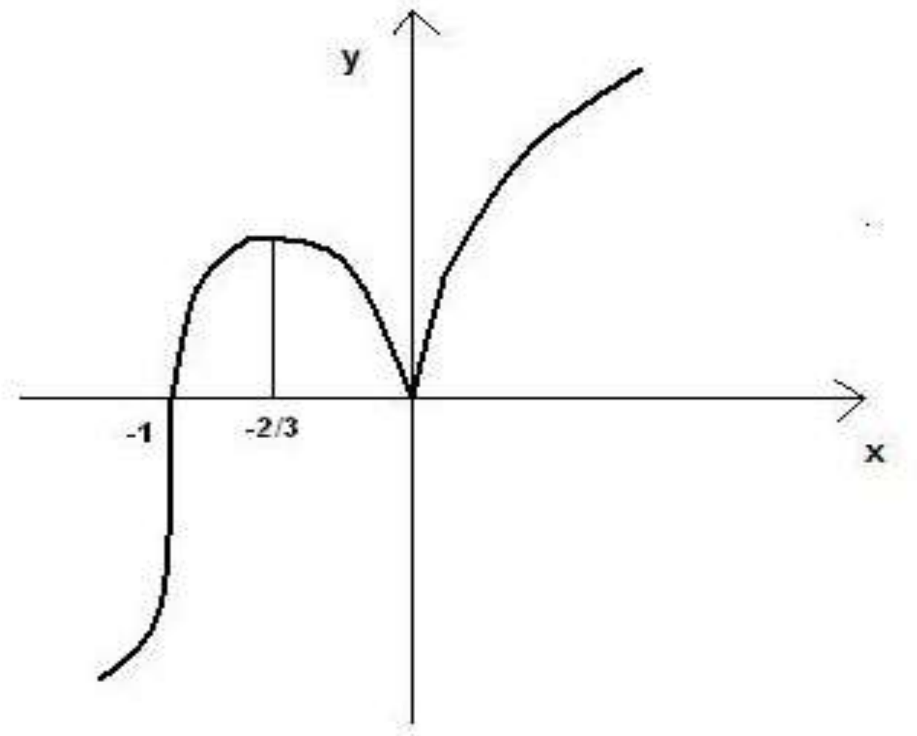
$$f'(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x+3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2(1+x))^2}}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+3x^2\geq 0\,,$$

essendo il denominatore sempre positivo in $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. Si ha

$$2x+3x^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x>0 \quad\cup\quad x\leq -\frac{2}{3}\,,$$

quindi f è crescente in $(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup(0,+\infty)$ e decrescente in $(-\frac{2}{3},0)$, mentre $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$, che risulta essere un punto di massimo relativo per f.

disegnare il grafico di f
Svolgimento:



Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 \frac{x}{(x+2)(x-1)}\,dx\,.$$

Svolgimento: Si tratta di un integrale di una funzione razionale. Risulta

$$\frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} \quad \Leftrightarrow \quad x = A(x-1)+B(x+2)\,.$$

Dal principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \\ -A+2B=0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data da $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{3}$. Allora

$$\frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}\,.$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{(x+2)(x-1)}\,dx &= \frac{2}{3}\int_2^3 \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}\log(x+2) + \frac{1}{3}\log(x-1)\right]_2^3 \\ &= \frac{2}{3}\log 5 + \frac{1}{3}\log 2 - \frac{2}{3}\log 4\,.\end{aligned}$$

Dato il seguente integrale

$$\int_0^3 \frac{x^2+3}{3\sin^2 x}\,dx\,,$$

stabilire, motivando la risposta, se è convergente o divergente.

Svolgimento: La funzione

$$x \mapsto \frac{x^2+3}{3\sin^2 x}$$

è continua in $(0,1]$ e si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3}{3\sin^2 x} = +\infty\,.$$

Quindi, l'integrale dato è improprio in 0.
Tenendo conto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

si ha che per $x \to 0$

$$0 \le \frac{x^2+3}{3\sin^2 x} \cong \frac{x^2+3}{3x^2} \cong \frac{1}{x^2}\,.$$

Poiché

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{è divergente}\,,$$

allora, dal criterio del confronto asintotico, si ottiene che l'integrale dato è divergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO 'CARLO BO'

- Prova scritta di ANALISI MATEMATICA -

Corso di Laurea in Informatica Applicata

APPELLO DEL 18 GENNAIO 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Prova Scritta di Analisi Matematica del 18 gennaio 2016

A

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x}.$$

Si chiede di

determinare il dominio di f

Svolgimento: Per determinare il dominio, basta richiedere che l'argomento della radice sia non negativo e che il denominatore sia non nullo. Quindi, basta imporre
$$2x^2+3 \geq 0\,,$$
che è sempre verificata, e
$$x \neq 0\,.$$
Quindi il dominio della funzione data è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\,.$

studiare il segno di f e le sue intersezioni con gli assi

Svolgimento: Per studiare il segno di f basta risolvere la disequazione
$$\frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x} > 0\,,$$
che è verificata se e solo se $x > 0$. Quindi $f > 0$ in $(0, +\infty)$ e $f < 0$ in $(-\infty, 0)\,.$

Poiché $x = 0 \notin D$, il grafico di f non interseca l'asse y. Inoltre, poiché $\sqrt{2x^2+3} > 0$ per ogni $x \in D$, il grafico di f non interseca neanche l'asse $x\,.$

studiare i limiti di f agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f

Svolgimento: Poiché f è dispari, basta studiare i limiti a $+\infty$ e a 0^+. Infatti, per simmetria, si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} f(x)\,.$$
Risulta
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{2x}\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x} = +\infty\,,$$
poiché f è composizione di funzioni continue.

Allora $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un asintoto orizzontale per f a $+\infty$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un asintoto orizzontale per f a $-\infty$ e $x = 0$ è un asintoto verticale per f.

studiare la derivabilità di f, la sua monotonia e i suoi eventuali massimi e minimi

Svolgimento: Innanzitutto studiamo la derivabilità di f. Poichè $2x^2+3 > 0$ per ogni $x \in D$, la funzione $D \ni x \mapsto \sqrt{2x^2+3}$ è derivabile. Quindi, f è derivabile in D, poichè composizione di funzioni derivabili. Inoltre si ha
$$f'(x) = \frac{1}{4x^2}\left(\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}}\cdot 2x - 2\sqrt{2x^2+3}\right) = \frac{4x^2-4x^2-6}{4x^2\sqrt{2x^2+3}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{2x^2+3}}\,.$$
Ora studiamo la monotonia di f e i suoi eventuali massimi e minimi. Si ha
$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2x^2\sqrt{2x^2+3}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in D\,.$$
Quindi f è strettamente decrescente in D e non ammette né massimi né minimi.

studiare la concavità/convessità di f e i suoi eventuali flessi
Svolgimento: La funzione f' è derivabile in D, poiché composizione di funzioni derivabili, e si ha:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{2x^2+3} + x^2 \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}}}{x^4(2x^2+3)} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2x(2x^2+3) + 2x^3}{x^4(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}} \\ &= 3 \cdot \frac{2x^2+3+x^2}{x^3(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}} \\ &= 9 \cdot \frac{x^2+1}{x^3(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}} \,. \end{aligned}$$

Poiché

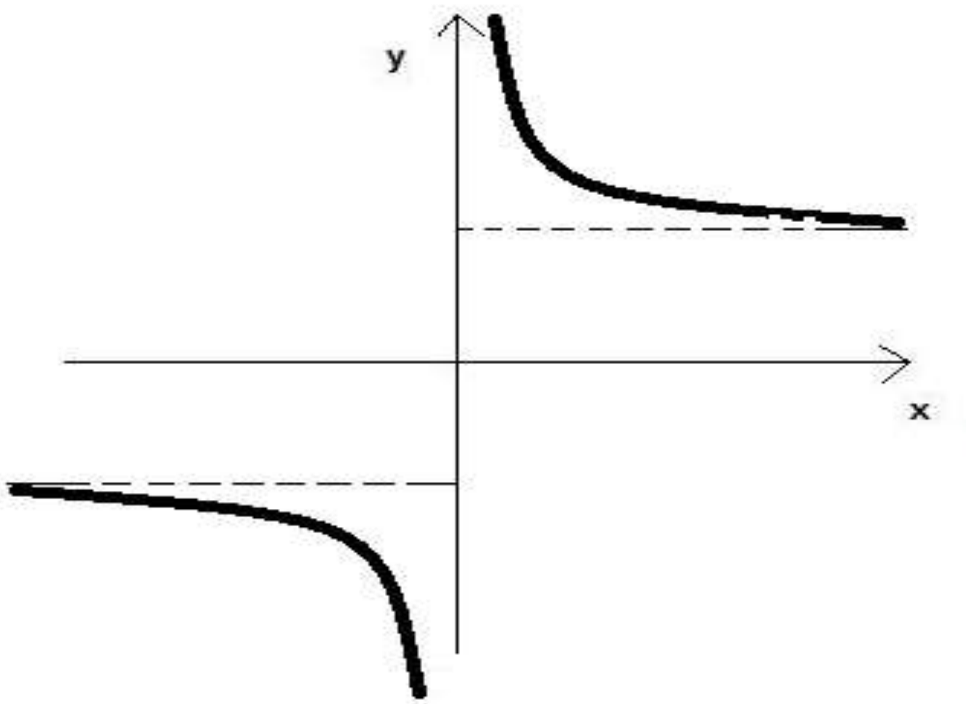
$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

e

$$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \,,$$

allora la funzione f è strettamente convessa in $(0, +\infty)$, strettamente concava in $(-\infty, 0)$ e non ammette flessi.

disegnare il grafico di f
Svolgimento:



stabilire, motivando la risposta, se f ammette massimo o minimo assoluto nel suo dominio
Svolgimento: Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x} = -\infty \,,$$

la funzione f non ammette né massimo né minimo assoluti nel suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx\,.$$

Svolgimento: Calcoliamo l'integrale con il metodo di integrazione per sostituzione, ponendo $t = \cos x$. Si ha

$$dt = -\sin x\,dx \quad \text{e} \quad t \in [-1,1]\,.$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene:

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int_1^{-1} e^t(1-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1} e^t(1-t^2)\,dt\,.$$

Per calcolare questo nuovo integrale si procede integrando per parti. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx &= \int_{-1}^{1} e^t(1-t^2)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^t\,dt - \int_{-1}^{1} e^t t^2\,dt \\
&= \left[e^t\right]_{-1}^{1} - \left[e^t t^2\right]_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1} te^t\,dt \\
&= \left[e^t - e^t t^2\right]_{-1}^{1} + 2\left[te^t\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} e^t\,dt \\
&= \left[e^t - e^t t^2 + 2te^t - 2e^t\right]_{-1}^{1} \\
&= e - e + 2e - 2e - (e^{-1} - e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}) = \frac{4}{e}\,.
\end{aligned}$$

Dato il seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(2+x^2)}{x(1+x^3)}\,dx\,,$$

stabilire, motivando la risposta, se è convergente o divergente.

Svolgimento: La funzione

$$x \mapsto \frac{\log(2+x^2)}{x(1+x^3)}$$

è continua in $(1,+\infty)$. Quindi, l'integrale dato è improprio poiché l'intervallo di integrazione è illimitato.

Tenuto conto del fatto che $\log t < t$ per ogni $t > 0$, si ha

$$0 < \frac{\log(2+x^2)}{x(1+x^3)} \cong \frac{\log x^2}{x^4} < \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

per $x \to +\infty$. Poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{è convergente}\,,$$

allora, dal criterio del confronto asintotico e da quello del confronto, si ottiene che l'integrale dato è convergente.