1. Основные понятия теории динамических систем.

2. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя в случае анализа систем, заданных аналитически.

3. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя по временному ряду. Метод аналога. Фрейм-разложение.

4. Прогнозирование на основе кластеризации. Метод Уишарта.

5. Плоскость энтропия-сложность.

Рассмотрим временной ряд x_t и соответствующий ему ряд из z-векторов размерности d:

$$\vec{z}_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+d-1} \end{pmatrix}^T.$$

Каждому такому вектору сопоставляется набор логических значений $f(z) \in \Omega = \{0,1\}^{d-1}$ по следующему правилу:

$$f : z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [x_1 \le x_2] \\ [x_2 \le x_3] \\ \dots \\ [x_{d-1} \le x_d] \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Поскольку элементы временного ряда x_i можно рассматривать как наблюдения некоторого временного процесса, $f(z)$ является дискретной случайной величиной, обладающей каким-то распределением P.

Если рассматриваемый процесс является шумом, то P – это равномерное распределение U на множестве Ω. А хаотической динамической системе отвечает некое распределение $P \neq U$. [1]

Случайное распределение можно описать в терминах энтропии и неравновесности. Дадим соответствующие определения:

Опр. 1 (Информация по Шеннону)**.** Рассмотрим произвольное распределение P и событие A. Тогда **информацией Шеннона**, соответствующей этому событию, называется значение $I_A = f\left(\frac{1}{P(A)}\right)$, где f – некоторая функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- Функция f возрастает;
- Если события A, B независимы, то $I_{AB} = I_A + I_B$.

Можно показать, что этим условиям удовлетворяет только логарифмическая функция с произвольным основанием. В целях нормировки общепринято использование двоичного логарифма; единицей измерения информации в таком случае является бит. Таким образом, получаем:

$$I_A = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A).$$

Опр. 2 (Энтропия по Шеннону)**. Энтропией по Шеннону** называется среднее количество информации, получаемое в результате одного наблюдения:

$$H = \mathbb{E}_P\, I_\omega = \sum_i I_{\omega_i} p_i = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Известно, что энтропия минимальна и равна 0 в случае вырожденного распределения ($p_i = \delta_{ij}$) и максимальна в случае равномерного распределения. Также часто рассматривается **нормализованная энтропия**:

$$\bar{H}(P) = \frac{H(P)}{H_{\max}} = \frac{H(P)}{H(U)} \in [0, 1]\,.$$

Опр. 3 (Неравновесность (сложность))**.** Неравновесностью называется следующая величина:

$$S = Q\left[P, U\right] \cdot \bar{H}\left(P\right),$$

где расстояние между распределениями Q задается следующей формулой:

$$Q\left[P_1, P_2\right] = Q_0 \cdot \left(2H\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) - H(P_1) - H(P_2)\right),$$

Q_0 – нормировочный коэффициент.

[1] Регулярной динамической системе также отвечает распределение, не являющееся равномерным, но к таким системам этот метод исследования обычно не применяется.

При правильном выборе нормировочных коэффициентов возможные положения точки $(\bar{H}, S)$ на плоскости «энтропия-сложность» заключены между двумя параболами, $0 \leq H \leq 1, 0 \leq S \leq \dfrac{1}{2}$. При этом верхней части области соответствуют хаотические временные ряды, нижним областям – шум.

6. Инвариантная мера динамической системы.

7. Энтропия Колмогорова-Синая.