1. Основные понятия теории динамических систем.

2. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя в случае анализа систем, заданных аналитически.

Погрешность предсказания любого временного ряда меняется по следующему закону:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 e^{\lambda t},$$

где ε_0 – погрешность последнего известного значения ряда, ε_t – погрешность предсказания t шагов спустя, $\lambda = \mathrm{const}$ – **старший показатель Ляпунова**. В случае регулярных рядов $\lambda < 0$, в случае хаотических – $\lambda > 0$.

Отсюда следует, что для хаотических рядов существует **горизонт прогнозируемости** – количество шагов T, такое, что после него погрешность любого предсказания превышает допустимый порог $\varepsilon_{\max}$: $T \sim \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_0}$.

Пусть рассматриваемый временной ряд соответствует динамической системе $\dot{x} = f(x)$. Зафиксируем точку $x(t)$, принадлежащую какой-либо траектории. Рассмотрим малое возмущение этой траектории $x(t)+\varepsilon u(t)$, также являющееся решением уравенения $\dot{x} = f(x)$. Подставляя разность двух рассматриваемых решений в уравнение, получаем следующее соотношение (считая, что f дифференцируема):

$$\varepsilon \dot{u} = (x(t) + \varepsilon u(t)) - f\left(x(t)\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x(t)} \cdot \varepsilon u(t) + O\left(\varepsilon\right),$$

$$\dot{u}(t) = \nabla f\big|_{x(t)} \cdot u(t) = A(x(t)) \cdot u(t). \tag{1}$$

Уравнение (1) называется линеаризацией динамической системы на траектории $x(t)$. Очевидно, что тождественный ноль является решением линеаризованной системы.

Если явный вид системы известен, что бывает чуть менее, чем никогда, то для нахождения спектра показателей Ляпунова можно применить алгоритм Бенеттина:

1. Рассмотрим совместно уравнение исходной динамической системы и n линеаризованных систем с ортонормированными начальными условия-

ми. Удобно выбрать в качестве начальных условий для i-й системы вектор $e_i = \left(\delta_{ji}\right)_{j=1}^{n}$. Полученная система в сумме состоит из $n \cdot (n+1)$ скалярных уравнений.

2. Будем одновременно проводить численное интерирование всех систем, используя метод Рунге-Кутта 4 порядка.

3. После каждого шага интегрирования будем производить ОГШ для решений линеаризованных систем, так, чтобы их решения оставались ортонормированными.

4. Также на каждом шаге вычисляем весь набор **объемных показателей Ляпунова**, пользуясь любым определением скалярного произведения:

$$\hat{\kappa}_j(t) = \frac{1}{t} \ln \sqrt{\det \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_j, u_1) & \dots & (u_j, u_j) \end{pmatrix}}$$

5. В пределе при $t \to \infty$ находим значения объемных показателей Ляпунова. Так как $\kappa_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_j$, то разности соседних κ_j дают показатели Ляпунова.

3. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя по временному ряду. Метод аналога. Фрейм-разложение.

Рассмотрим временной ряд (возможно, многомерный) x_i. Тогда для данного ряда можно построить **ряд z-векторов**, каждый элемент которого определяется следующим образом:

$$\vec{z}_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+d-1} \end{pmatrix}^T,$$

$d = \mathrm{const}$ – размерность вложения.

Построенный ряд можно использовать для оценки показателей Ляпунова. Для этого находятся пары близких z-векторов, после чего один из них рассматривается как возмущенная версия другого. Рассмотрим конкретные алгоритмы.

Метод аналога:

1. Для вектора «основной траектории» z_i находим его ближайшего соседа z_{j_1};
2. Для каждой такой пары (i, j_1) траектории z_{i+t} и z_{j_1+t} расходятся. В момент t_1, когда норма разности между ними достигает некоторого порога $\varepsilon_2 = \mathrm{const}$, вектор $z_{j_1+t_1}$ заменяется на другой вектор z_{j_2}, ближайший к z_{i+t_1}. Этот вектор также в какой-то момент t_2 заменяется на z_{j_3} и так далее.
3. Оценка старшего показателя Ляпунова вычисляется по следующей формуле:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{t_n - t_0}\left(\ln\frac{\|z_{i+t_1} - z_{j_1+t_1}\|}{\|z_i - z_{j_1}\|} + \ln\frac{\|z_{i+t_2} - z_{j_2+t_2-t_1}\|}{\|z_{i+t_1} - z_{j_2}\|} + \dots + \ln\frac{\|z_{i+t_n} - z_{j_n+t_n-t_{n-1}}\|}{\|z_{i+t_{n-1}} - z_{j_n}\|}\right)$$

Метод фрейм-разложения.

4. Прогнозирование на основе кластеризации. Метод Уишарта.

5. Плоскость энтропия-сложность.

Рассмотрим временной ряд x_t и соответствующий ему ряд из z-векторов размерности d:

$$\vec{z}_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+d-1} \end{pmatrix}^T.$$

Каждому такому вектору сопоставляется набор логических значений $f(z) \in \Omega = \{0, 1\}^{d-1}$ по следующему правилу:

$$f : z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [x_1 \le x_2] \\ [x_2 \le x_3] \\ \dots \\ [x_{d-1} \le x_d] \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Поскольку элементы временного ряда x_i можно рассматривать как наблюдения некоторого временного процесса, $f(z)$ является дискретной случайной величиной, обладающей каким-то распределением P.

Если рассматриваемый процесс является шумом, то P – это равномерное распределение U на множестве Ω. А хаотической динамической системе отвечает некое распределение $P \neq U$. [1]

Случайное распределение можно описать в терминах энтропии и неравновесности. Дадим соответствующие определения:

Опр. 1 (Информация по Шеннону)**.** Рассмотрим произвольное распределение P и событие A. Тогда **информацией Шеннона**, соответствующей этому событию, называется значение $I_A = f\left(\frac{1}{P(A)}\right)$, где f – некоторая функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- Функция f возрастает;
- Если события A, B независимы, то $I_{AB} = I_A + I_B$.

Можно показать, что этим условиям удовлетворяет только логарифмическая функция с произвольным основанием. В целях нормировки общепринято использование двоичного логарифма; единицей измерения информации в таком случае является бит. Таким образом, получаем:

$$I_A = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A).$$

Опр. 2 (Энтропия по Шеннону)**. Энтропией по Шеннону** называется среднее количество информации, получаемое в результате одного наблюдения:

$$H = \mathbb{E}_P\, I_\omega = \sum_i I_{\omega_i} p_i = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Известно, что энтропия минимальна и равна 0 в случае вырожденного распределения ($p_i = \delta_{ij}$) и максимальна в случае равномерного распределения. Также часто рассматривается **нормализованная энтропия**:

$$\bar{H}(P) = \frac{H(P)}{H_{\max}} = \frac{H(P)}{H(U)} \in [0, 1]\,.$$

Опр. 3 (Неравновесность (сложность))**.** Неравновесностью называется следующая величина:

$$S = Q\,[P, U] \cdot \bar{H}\,(P)\,,$$

[1] Регулярной динамической системе также отвечает распределение, не являющееся равномерным, но к таким системам этот метод исследования обычно не применяется.

где расстояние между распределениями Q задается следующей формулой:

$$Q\left[P_1, P_2\right] = Q_0 \cdot \left(2H\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) - H(P_1) - H(P_2)\right),$$

Q_0 – нормировочный коэффициент.

При правильном выборе нормировочных коэффициентов возможные положения точки $(\bar{H}, S)$ на плоскости «энтропия-сложность» заключены между двумя параболами, $0 \leq H \leq 1, 0 \leq S \leq \frac{1}{2}$. При этом верхней части области соответствуют хаотические временные ряды, нижним областям – шум.

6. Инвариантная мера динамической системы.

Поскольку для хаотических систем сколь угодно малые отклонения в начальных условиях приводят к экспоненциально растущей ошибке предсказания, математический аппарат, описывающий эволюцию системы набором траекторий, оказывается не слишком полезным. Вместо этого используются понятия, взятые из теории вероятности.

Разобьем фазовое простанство X на ячейки, диаметры которых не превосходят $\varepsilon = \mathrm{const}$. Для каждой ячейки вычислим долю времени, которое траектория системы проводит в этой ячейке за время T. Оказывается, что предельный результат при $T \to \infty$ не зависит от начальных условий и описывается некоторой вероятностной мерой на X. Эта мера называется **инвариантной мерой**, поскольку ее вид не меняется с течением времени.

Опр. 4 (Мера)**. Мерой** на множестве X называется функция $\mu(A)$, определенная для некоторых подмножеств $A \subseteq X$ таким образом, что:

1. $\forall A : \mu(A) \geq 0$;
2. $\forall A, B : A \cap B = \emptyset \implies \mu\left(A \cup B\right) = \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right)$;
3. $\mu\left(\emptyset\right) = 0$. [2]

Множества, на которых определено значение меры, называются **измеримыми**.

Если мера всего пространства $\mu\left(X\right) = 1$, то мера называется **вероятностной**.

[2]Впрочем, это равенство следует из предыдущего.

Наиболее известна мера Лебега, соответствующая длине, площади, объему или их многомерному аналогу.

Рассмотрим некоторое вероятностное распределение на фазовом пространстве, заданное плотностью $p(x)$. Найдем вид этого распредения $q(y)$ при смене координат, заданной отображением $y = f(x)$. Отметим, что функция $q(y)$ также описывает вероятностное распределение на этом же фазовом простанстве после перемещения каждой точки x в $f(x)$. Из соображений сохранения вероятности получаем:

$$q(y) = \sum_{x_i : f(x_i) = y} \frac{p\left(x_i\right)}{\left|\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|} = \int_X \delta\left(f(x) - y\right) p\left(x_i\right) \frac{dy}{\left|\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|} =$$
$$= \int_X \delta\left(f(x) - y\right) p\left(x_i\right) dx. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим хаотическую динамическую систему с дискретным временем, заданную уравнением $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$. Если в уравнение (2) в качестве начального распределения $p(x)$ подставить инвариантную меру, то после действия отображения вид распределения не должен измениться. Таким образом, получаем **уравнение Перрона-Фробениуса** для дискретного времени:

$$p\left(y\right) = \int \delta\left(f(x) - y\right) p\left(x\right) dx. \tag{3}$$

Аналогичное уравнение для системы $\dot{x} = F(x)$ с непрерывным временем может быть получено из (3). Рассмотрим отображение $\phi^\tau(x)$, ставящее в соответствие точке x точку $\hat{x}(\tau)$, где функция $\hat{x}(t)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = F(x)$ с начальными условиями $x(0) = x$. Очевидно, что это преобразование также не должно менять вид плотности инвариантной меры. Следовательно, подставляя в (3), получаем:

$$p\left(y\right) = \int \delta\left(\phi^\tau(x) - y\right) p\left(x\right) dx.$$

Продифференцируем полученное уравнение по τ: [3]

$$0 = \int p(x) \nabla \delta\left(\phi^0\left(x\right) - y\right) \cdot d_\tau \phi^\tau(x)\big|_{\tau=0} dx.$$

[3] В общем случае $p(y)$ может зависеть от времени, в таком случае в левой части получим $\partial_\tau p(y, t+\tau)$

Так как $\phi^\tau(x) = \hat{x}(\tau)$, то $d_\tau \phi^\tau(x)\big|_{\tau=0} = d_\tau \hat{x}(\tau)\big|_{\tau=0} = \dot{x}(0) = F(x)$, $\phi^0(x) = x$. В таком случае, по свойствам дельта-функции:

$$0 = \dots = \int p(x) \nabla \delta\left(x-y\right) \cdot F(x) dx = -\nabla\left(p(y)F(y)\right).$$

Таким образом, уравнение Перрона-Фробениуса свелось к хорошо изученному уравнению движения сжимаемой жидкости.

Теор. 1 (Крылова-Боголюбова)**.** *Если существует хотя бы одно компактное множество A, инвариантное относительно $\phi^\tau(x)$, то для системы $\dot{x} = F(x)$ существует хотя бы одна вероятностная инвариантная мера μ.*

Теор. 2 (Эргодическая теорема (не мультипликативная))**.** *Пусть μ – инвариантная мера динамической системы, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно измеримая функция на фазовом пространстве. Тогда для почти всех x по мере μ предельное среднее значение $g(x)$ равно теоретическому матожиданию:*

$$\forall t : \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g\left(x(\tau)\right) d\tau = \int g(x) \mu\left(dx\right) = \text{const}$$

Однако необходимо учесть, что понятие «почти всюду» для меры μ может значительно отличаться от такового для меры Лебега. Например, для системы $\dot{x} = -x$ («черная дыра») носитель меры состоит из одной точки $x = 0$; для всех остальных точек равенство может не соблюдаться.

Теор. 3 (Теорема Пуанкаре о возвращении множеств)**.** *Пусть A – измеримое множество, инвариантная мера которого больше нуля. Тогда $\exists t > 1 : \mu\left(A \cap \phi^t\left(A\right)\right) > 0$. Иными словами, траектории, начинающиеся в данном множестве, будут бесконечно много раз возвращаться в это же множество.*

Теор. 4 (Теорема Пуанкаре о возвращении траекторий)**.** *Почти все точки x по мере μ устойчивы по Пуассону. Под устойчивостью по Пуассону понимается следующее свойство: для любой окрестности $U(x)$ $\forall T : \exists t > T : \phi^t(x) \in U$, т.е. любая траектория бесконечно много раз возвращается в окрестность своей начальной точки.*

7. Энтропия Колмогорова-Синая.

Опр. 5 (Энтропия Колмогорова-Синая)**.** Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем $x_{n+1} = f(x_n)$ или с дискретизованным непрерывным временем $x(t+\tau) = \phi^{\tau}(x(t))$. Разобьем фазовое пространство на непересекающиеся множества A_i, такие, что $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ по любой метрике, например, Евклидовой.

Тогда введем следующую последовательность разбиений:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \bigcap_{j=1}^{k} f^{1-j}\left(A_{i_j}\right),$$

то есть отнесем точку x к множеству $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$, если изначально она находится в множестве A_{i_1}, после одного временного шага в множестве A_{i_2} и так далее до A_{i_k}. Заметим, что некоторые из построенных множеств (или даже подавляющее большинство) могут быть пустыми.

Для каждого разбиения глубины k подсчитаем энтропию Шеннона, соответствующую инвариантной мере системы μ:

$$H(k) = -\sum_{i \in \{1,\dots,N\}^k} \mu(A_{*i}) \log \mu(A_{*i})$$

Тогда **метрической энтропией** или **энтропией Колмогорова-Синая** называется предельное приращение $H(k)$ при росте k:

$$K = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \left(H(k+1) - H(k)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \frac{H(k)}{k}$$

Для хаотических систем $K > 0$, что означает, что любое конечное количество информации о системе в начальный момент времени постепенно перестает быть хоть сколько-нибудь полезным в силу нарастания неопределенности. О таких системах говорят, что они производят информацию. Для регулярных динамических систем $K = 0$.