

1. Основные понятия теории динамических систем.

2. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя в случае анализа систем, заданных аналитически.

3. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя по временному ряду. Метод аналога. Фрейм-разложение.

4. Прогнозирование на основе кластеризации. Метод Уишарта.

5. Плоскость энтропия-сложность.

Рассмотрим временной ряд x_t и соответствующий ему ряд из z -векторов размерности d :

$$\vec{z}_i = (x_i \quad x_{i+1} \quad \dots \quad x_{i+d-1})^T.$$

Каждому такому вектору сопоставляется набор логических значений $f(z) \in \Omega = \{0, 1\}^{d-1}$ по следующему правилу:

$$f : z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [x_1 \leq x_2] \\ [x_2 \leq x_3] \\ \dots \\ [x_{d-1} \leq x_d] \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Поскольку элементы временного ряда x_i можно рассматривать как наблюдения некоторого временного процесса, $f(z)$ является дискретной случайной величиной, обладающей каким-то распределением P .

Если рассматриваемый процесс является шумом, то P – это равномерное распределение U на множестве Ω . А хаотической динамической системе отве-

чает некоторое распределение $P \neq U$.¹

Случайное распределение можно описать в терминах энтропии и неравновесности. Дадим соответствующие определения:

Опр. 1 (Информация по Шеннону). Рассмотрим произвольное распределение P и событие A . Тогда **информацией Шеннона**, соответствующей этому событию, называется значение $I_A = f\left(\frac{1}{P(A)}\right)$, где f – некоторая функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- Функция f возрастает;
- Если события A, B независимы, то $I_{AB} = I_A + I_B$.

Можно показать, что этим условиям удовлетворяет только логарифмическая функция с произвольным основанием. В целях нормировки общепринято использование двоичного логарифма; единицей измерения информации в таком случае является бит. Таким образом, получаем:

$$I_A = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A).$$

Опр. 2 (Энтропия по Шеннону). **Энтропией по Шеннону** называется среднее количество информации, получаемое в результате одного наблюдения:

$$H = \mathbb{E}_P I_\omega = \sum_i I_{\omega_i} p_i = - \sum_i p_i \log p_i.$$

Известно, что энтропия минимальна и равна 0 в случае вырожденного распределения ($p_i = \delta_{ij}$) и максимальна в случае равномерного распределения. Также часто рассматривается **нормализованная энтропия**:

$$\bar{H}(P) = \frac{H(P)}{H_{\max}} = \frac{H(P)}{H(U)} \in [0, 1].$$

Опр. 3 (Неравновесность (сложность)). Неравновесностью называется следующая величина:

$$S = Q[P, U] \cdot \bar{H}(P),$$

где расстояние между распределениями Q задается следующей формулой:

$$Q[P_1, P_2] = Q_0 \cdot \left(2H\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) - H(P_1) - H(P_2) \right),$$

Q_0 – нормировочный коэффициент.

¹Регулярной динамической системе также отвечает распределение, не являющееся равномерным, но к таким системам этот метод исследования обычно не применяется.

При правильном выборе нормировочных коэффициентов возможные положения точки (\bar{H}, S) на плоскости «энтропия-сложность» заключены между двумя параболами, $0 \leq H \leq 1, 0 \leq S \leq \frac{1}{2}$. При этом верхней части области соответствуют хаотические временные ряды, нижним областям – шум.

6. Инвариантная мера динамической системы.

Поскольку для хаотических систем сколь угодно малые отклонения в начальных условиях приводят к экспоненциально растущей ошибке предсказания, математический аппарат, описывающий эволюцию системы набором траекторий, оказывается не слишком полезным. Вместо этого используются понятия, взятые из теории вероятности.

Разобьем фазовое пространство X на ячейки, диаметры которых не превосходят $\varepsilon = \text{const}$. Для каждой ячейки вычислим долю времени, которое траектория системы проводит в этой ячейке за время T . Оказывается, что предельный результат при $T \rightarrow \infty$ не зависит от начальных условий и описывается некоторой вероятностной мерой на X . Эта мера называется **инвариантной мерой**, поскольку ее вид не меняется с течением времени.

Опр. 4 (Мера). Мерой на множестве X называется функция $\mu(A)$, определенная для некоторых подмножеств $A \subseteq X$ таким образом, что:

1. $\forall A : \mu(A) \geq 0$;
2. $\forall A, B : A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. $\mu(\emptyset) = 0$.²

Множества, на которых определено значение меры, называются **измеримыми**.

Если мера всего пространства $\mu(X) = 1$, то мера называется **вероятностной**.

Наиболее известна мера Лебега, соответствующая длине, площади, объему или их многомерному аналогу.

Рассмотрим некоторое вероятностное распределение на фазовом пространстве, заданное плотностью $p(x)$. Найдем вид этого распределения $q(y)$ при смене

²Впрочем, это равенство следует из предыдущего.

координат, заданной отображением $y = f(x)$. Отметим, что функция $q(y)$ также описывает вероятностное распределение на этом же фазовом пространстве после перемещения каждой точки x в $f(x)$. Из соображений сохранения вероятности получаем:

$$\begin{aligned} q(y) &= \sum_{x_i: f(x_i)=y} \frac{p(x_i)}{\left| \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|} = \int_X \delta(f(x) - y) p(x_i) \frac{dy}{\left| \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|} = \\ &= \int_X \delta(f(x) - y) p(x_i) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь рассмотрим хаотическую динамическую систему с дискретным временем, заданную уравнением $x_{n+1} = f(x_n)$. Если в уравнение (1) в качестве начального распределения $p(x)$ подставить инвариантную меру, то после действия отображения вид распределения не должен измениться. Таким образом, получаем **уравнение Перрона-Фробениуса** для дискретного времени:

$$p(y) = \int \delta(f(x) - y) p(x) dx. \quad (2)$$

Аналогичное уравнение для системы $\dot{x} = F(x)$ с непрерывным временем может быть получено из (2). Рассмотрим отображение $\phi^\tau(x)$, ставящее в соответствие точке x точку $\hat{x}(\tau)$, где функция $\hat{x}(t)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = F(x)$ с начальными условиями $x(0) = x$. Очевидно, что это преобразование также не должно менять вид плотности инвариантной меры. Следовательно, подставляя в (2), получаем:

$$p(y) = \int \delta(\phi^\tau(x) - y) p(x) dx.$$

Продифференцируем полученное уравнение по τ :³

$$0 = \int p(x) \nabla \delta(\phi^0(x) - y) \cdot d_\tau \phi^\tau(x) \big|_{\tau=0} dx.$$

Так как $\phi^\tau(x) = \hat{x}(\tau)$, то $d_\tau \phi^\tau(x) \big|_{\tau=0} = d_\tau \hat{x}(\tau) \big|_{\tau=0} = \dot{x}(0) = F(x)$, $\phi^0(x) = x$. В таком случае, по свойствам дельта-функции:

$$0 = \dots = \int p(x) \nabla \delta(x - y) \cdot F(x) dx = -\nabla(p(y)F(y)).$$

Таким образом, уравнение Перрона-Фробениуса свелось к хорошо изученному уравнению движения сжимаемой жидкости.

³В общем случае $p(y)$ может зависеть от времени, в таком случае в левой части получим $\partial_\tau p(y, t + \tau)$

Теор. 1 (Крылова-Боголюбова). Если существует хотя бы одно компактное множество A , инвариантное относительно $\phi^T(x)$, то для системы $\dot{x} = F(x)$ существует хотя бы одна вероятностная инвариантная мера μ .

Теор. 2 (Эргодическая теорема (не мультипликативная)). Пусть μ – инвариантная мера динамической системы, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно измеримая функция на фазовом пространстве. Тогда для почти всех x по мере μ предельное среднее значение $g(x)$ равно теоретическому матожиданию:

$$\forall t : \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(x(\tau)) d\tau = \int g(x) \mu(dx) = \text{const}$$

Однако необходимо учесть, что понятие «почти всюду» для меры μ может значительно отличаться от такового для меры Лебега. Например, для системы $\dot{x} = -x$ («черная дыра») носитель меры состоит из одной точки $x = 0$; для всех остальных точек равенство может не соблюдаться.

Теор. 3 (Теорема Пуанкаре о возвращении множеств). Пусть A – измеримое множество, инвариантная мера которого больше нуля. Тогда $\exists t > 1 : \mu(A \cap \phi^t(A)) > 0$. Иными словами, траектории, начинающиеся в данном множестве, будут бесконечно много раз возвращаться в это же множество.

Теор. 4 (Теорема Пуанкаре о возвращении траекторий). Почти все точки x по мере μ устойчивы по Пуассону. Под устойчивостью по Пуассону понимается следующее свойство: для любой окрестности $U(x) \forall T : \exists t > T : \phi^t(x) \in U$, т.е. любая траектория бесконечно много раз возвращается в окрестность своей начальной точки.

7. Энтропия Колмогорова-Синая.