1. Основные понятия теории динамических систем.

2. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя в случае анализа систем, заданных аналитически.

3. Ляпуновский показатель. Вычисление ляпуновского показателя по временному ряду. Метод аналога. Фрейм-разложение.

4. Прогнозирование на основе кластеризации. Метод Уишарта.

5. Плоскость энтропия-сложность.

Рассмотрим временной ряд x_t и соответствующий ему ряд из z-векторов размерности d:

$$\vec{z}_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+d-1} \end{pmatrix}^T.$$

Каждому такому вектору сопоставляется набор логических значений $f(z) \in \Omega = \{0, 1\}^{d-1}$ по следующему правилу:

$$f : z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [x_1 \leq x_2] \\ [x_2 \leq x_3] \\ \dots \\ [x_{d-1} \leq x_d] \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Поскольку элементы временного ряда x_i можно рассматривать как наблюдения некоторого временного процесса, $f(z)$ является дискретной случайной величиной, обладающей каким-то распределением P.

Если рассматриваемый процесс является шумом, то P – это равномерное распределение U на множестве Ω. А хаотической динамической системе отвечает некое распределение $P \neq U$. [1]

Случайное распределение можно описать в терминах энтропии и неравновесности. Дадим соответствующие определения:

Опр. 1 (Информация по Шеннону)**.** Рассмотрим произвольное распределение P и событие A. Тогда **информацией Шеннона**, соответствующей этому событию, называется значение $I_A = f\left(\frac{1}{P(A)}\right)$, где f – некоторая функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- Функция f возрастает;
- Если события A, B независимы, то $I_{AB} = I_A + I_B$.

Можно показать, что этим условиям удовлетворяет только логарифмическая функция с произвольным основанием. В целях нормировки общепринято использование двоичного логарифма; единицей измерения информации в таком случае является бит. Таким образом, получаем:

$$I_A = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A).$$

Опр. 2 (Энтропия по Шеннону)**. Энтропией по Шеннону** называется среднее количество информации, получаемое в результате одного наблюдения:

$$H = \mathbb{E}_P\, I_\omega = \sum_i I_{\omega_i} p_i = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Известно, что энтропия минимальна и равна 0 в случае вырожденного распределения ($p_i = \delta_{ij}$) и максимальна в случае равномерного распределения. Также часто рассматривается **нормализованная энтропия**:

$$\bar{H}(P) = \frac{H(P)}{H_{\max}} = \frac{H(P)}{H(U)} \in [0, 1]\,.$$

Опр. 3 (Неравновесность (сложность))**.** Неравновесностью называется следующая величина:

$$S = Q\,[P, U] \cdot \bar{H}\,(P)\,,$$

где расстояние между распределениями Q задается следующей формулой:

$$Q\,[P_1, P_2] = Q_0 \cdot \left(2H\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) - H(P_1) - H(P_2)\right),$$

Q_0 – нормировочный коэффициент.

[1] Регулярной динамической системе также отвечает распределение, не являющееся равномерным, но к таким системам этот метод исследования обычно не применяется.

При правильном выборе нормировочных коэффициентов возможные положения точки $(\bar{H}, S)$ на плоскости «энтропия-сложность» заключены между двумя параболами, $0 \le H \le 1, 0 \le S \le \frac{1}{2}$. При этом верхней части области соответствуют хаотические временные ряды, нижним областям – шум.

6. Инвариантная мера динамической системы.

Поскольку для хаотических систем сколь угодно малые отклонения в начальных условиях приводят к экспоненциально растущей ошибке предсказания, математический аппарат, описывающий эволюцию системы набором траекторий, оказывается не слишком полезным. Вместо этого используются понятия, взятые из теории вероятности.

Разобьем фазовое простанство X на ячейки, диаметры которых не превосходят $\varepsilon = \mathrm{const}$. Для каждой ячейки вычислим долю времени, которое траектория системы проводит в этой ячейке за время T. Оказывается, что предельный результат при $T \to \infty$ не зависит от начальных условий и описывается некоторой вероятностной мерой на X. Эта мера называется **инвариантной мерой**, поскольку ее вид не меняется с течением времени.

Опр. 4 (Мера)**. Мерой** на множестве X называется функция $\mu(A)$, определенная для некоторых подмножеств $A \subseteq X$ таким образом, что:

1. $\forall A : \mu(A) \ge 0$;
2. $\forall A, B : A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. $\mu(\emptyset) = 0$. [2]

Множества, на которых определено значение меры, называются **измеримыми**.

Если мера всего пространства $\mu(X) = 1$, то мера называется **вероятностной**.

Наиболее известна мера Лебега, соответствующая длине, площади, объему или их многомерному аналогу.

Рассмотрим некоторое вероятностное распределение на фазовом пространстве, заданное плотностью $p(x)$. Найдем вид этого распредения $q(y)$ при смене

[2] Впрочем, это равенство следует из предыдущего.

координат, заданной отображением $y = f(x)$. Отметим, что функция $q(y)$ также описывает вероятностное распределение на этом же фазовом простанстве после перемещения каждой точки x в $f(x)$. Из соображений сохранения вероятности получаем:

$$q(y) = \sum_{x_i : f(x_i) = y} \frac{p\left(x_i\right)}{\left|\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|} = \int_X \delta\left(f(x) - y\right) p\left(x_i\right) \frac{dy}{\left|\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|} = \\ = \int_X \delta\left(f(x) - y\right) p\left(x_i\right) dx. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим хаотическую динамическую систему с дискретным временем, заданную уравнением $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$. Если в уравнение (1) в качестве начального распределения $p(x)$ подставить инвариантную меру, то после действия отображения вид распределения не должен измениться. Таким образом, получаем **уравнение Перрона-Фробениуса** для дискретного времени:

$$p\left(y\right) = \int \delta\left(f(x) - y\right) p\left(x\right) dx. \quad (2)$$

Аналогичное уравнение для системы $\dot{x} = F(x)$ с непрерывным временем может быть получено из (2). Рассмотрим отображение $\phi^\tau(x)$, ставящее в соответствие точке x точку $\widehat{x}(\tau)$, где функция $\widehat{x}(t)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = F(x)$ с начальными условиями $x(0) = x$. Очевидно, что это преобразование также не должно менять вид плотности инвариантной меры. Следовательно, подставляя в (2), получаем:

$$p\left(y\right) = \int \delta\left(\phi^\tau(x) - y\right) p\left(x\right) dx.$$

Продифференцируем полученное уравнение по τ: [3]

$$0 = \int p(x) \nabla\delta\left(\phi^0\left(x\right) - y\right) \cdot d_\tau \phi^\tau(x)\big|_{\tau=0} dx.$$

Так как $\phi^\tau(x) = \widehat{x}(\tau)$, то $d_\tau \phi^\tau(x)\big|_{\tau=0} = d_\tau \widehat{x}(\tau)\big|_{\tau=0} = \dot{x}(0) = F(x)$, $\phi^0(x) = x$. В таком случае, по свойствам дельта-функции:

$$0 = \cdots = \int p(x) \nabla\delta\left(x - y\right) \cdot F(x) dx = -\nabla\left(p(y)F(y)\right).$$

Таким образом, уравнение Перрона-Фробениуса свелось к хорошо изученному уравнению движения сжимаемой жидкости.

[3] В общем случае $p(y)$ может зависеть от времени, в таком случае в левой части получим $\partial_\tau p(y, t + \tau)$

Теор. 1 (Крылова-Боголюбова)**.** *Если существует хотя бы одно компактное множество* A*, инвариантное относительно* $\phi^\tau(x)$*, то для системы* $\dot{x} = F(x)$ *существует хотя бы одна вероятностная инвариантная мера* μ*.*

Теор. 2 (Эргодическая теорема (не мультипликативная))**.** *Пусть* μ *– инвариантная мера динамической системы,* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– непрерывно измеримая функция на фазовом пространстве. Тогда для почти всех* x *по мере* μ *предельное среднее значение* $g(x)$ *равно теоретическому матожиданию:*

$$\forall t : \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g\left(x(\tau)\right) d\tau = \int g(x) \mu\left(dx\right) = \text{const}$$

Однако необходимо учесть, что понятие «почти всюду» для меры μ *может значительно отличаться от такового для меры Лебега. Например, для системы* $\dot{x} = -x$ *(«черная дыра») носитель меры состоит из одной точки* $x = 0$*; для всех остальных точек равенство может не соблюдаться.*

Теор. 3 (Теорема Пуанкаре о возвращении множеств)**.** *Пусть* A *– измеримое множество, инвариантная мера которого больше нуля. Тогда* $\exists t > 1 :$ $\mu\left(A \cap \phi^t\left(A\right)\right) > 0$*. Иными словами, траектории, начинающиеся в данном множестве, будут бесконечно много раз возвращаться в это же множество.*

Теор. 4 (Теорема Пуанкаре о возвращении траекторий)**.** *Почти все точки* x *по мере* μ *устойчивы по Пуассону. Под устойчивостью по Пуассону понимается следующее свойство: для любой окрестности* $U(x)$ $\forall T : \exists t > T : \phi^t(x) \in U$*, т.е. любая траектория бесконечно много раз возвращается в окрестность своей начальной точки.*

7. Энтропия Колмогорова-Синая.

Опр. 5 (Энтропия Колмогорова-Синая)**.** Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем $x_{n+1} = f(x_n)$ или с дискретизованным непрерывным временем $x(t+\tau) = \phi^\tau(x(t))$. Разобьем фазовое пространство на непересекающиеся множества A_i, такие, что $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ по любой метрике, например, Евклидовой.

Тогда введем следующую последовательность разбиений:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \bigcap_{j=1}^{k} f^{1-j}\left(A_{i_j}\right),$$

то есть отнесем точку x к множеству $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$, если изначально она находится в множестве A_{i_1}, после одного временного шага в множестве A_{i_2} и так далее до A_{i_k}. Заметим, что некоторые из построенных множеств (или даже подавляющее большинство) могут быть пустыми.

Для каждого разбиения глубины k подсчитаем энтропию Шеннона, соответствующую инвариантной мере системы μ:

$$H\left(k\right) = - \sum_{i \in \{1,\dots,N\}^k} \mu\left(A_{*i}\right) \log \mu\left(A_{*i}\right)$$

Тогда **метрической энтропией** или **энтропией Колмогорова-Синая** называется предельное приращение $H(k)$ при росте k:

$$K = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \left(H(k+1) - H(k)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \frac{H(k)}{k}$$

Для хаотических систем $K > 0$, что означает, что любое конечное количество информации о системе в начальный момент времени постепенно перестает быть хоть сколько-нибудь полезным в силу нарастания неопределенности. О таких системах говорят, что они производят информацию. Для регулярных динамических систем $K = 0$.