

Examen : session normale
Durée : 1h30

Exercice 1: (5pts)

Soit X une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}(1 - \frac{x}{a}) & \text{si } 0 \leq x \leq a \text{ et } a > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité ?
2. Déterminer la fonction de répartition F_X .
3. Calculer $\frac{a}{2} < P(X) < a$.
4. Pour tout k , calculer $E(X^k)$ et en déduire $V(X)$.
5. Trouver la médiane de la loi de X .

Exercice 2: (5pts)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ de loi :

$$P(X = k) = C.k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Où C est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante C .
2. Déterminer la fonction de répartition de la loi de X ?
3. Déterminer la loi de $Y = n - X$.
4. Déterminer la loi de $Z = n + X$.

Rappel : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3: (3pts)

On a pesé 10 palettes de briques de la même fabrication ; et on a obtenu les résultats suivants (kilogrammes) :

759, 750, 755, 756, 761, 765, 770, 752, 760, 767

On admet que ces résultats sont issus d'une population distribuée selon une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

1. Donner une estimation ponctuelle de l'espérance et de la variance du poids d'une palette de brique.
2. Construire un intervalle de confiance pour μ avec les niveaux de confiance **0.90** et **0.99**.
3. Supposons maintenant que l'on connaisse la variance, donnée par le constructeur : $\sigma^2 = 42$. Que cela change-t-il sur vos intervalles de confiances ? Recalculez-les si besoin.

Exercice 4: (5pts)

Un laboratoire d'analyse chimique reçoit un lot de tubes à essai. Ces tubes sont fournis par trois sociétés différentes , A, B et C dans les proportions suivantes : 50%, 30% et 20%. 2% des tubes fabriqués par A, 3% de ceux fabriqués par B et 4% de ceux fabriqués par C présentent des défauts. On choisit au hasard un tube à essai dans le lot reçu.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
2. Sachant que le tube choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la société A ?