TD3 : variables aléatoires

Exercice 1:

Soit l'exéerience aléatoire consistant à jeter un dé jusqu'à ce qu'un six apparaisse pour la première fois et soit X la v.a. «nombre de jets nécessaires». Déterminer la fonction de probabilité de X. Vérifier que la somme des probabilités sur l'ensemble des valeurs possibles est bien égale à 1.

1. Calculer $P(1 < X \leq 3)$.
2. Ecrire et dessiner la fonction de répartition de X.

Aide : calculer d'abord $P(X > k)$.

Exercice 2:

Soit la fonction $f(x) = cx(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$ et 0 sinon.
Pour quelle valeur de c, f est-ce une densité de probabilité ? Déterminer alors la fonction de répartition de cette loi et sa médiane.

Exercice 3:

Soit X de densité $f_x(t) = 2t$ pour $t \in [0, 1]$ et 0 sinon.
Déterminer la fonction de répartition et la densité de $1/X$. Même question pour $ln(1/X)$.

Exercice 4: Soit la v.a. X de densité $f_X(t) = 3t^2$ si $t \in [0, 1]$ et 0 sinon.

1. Calculer $E(1/X)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $Y = 1/X$ et en déduire sa densité.
3. Calculer $E(Y)$ et vérifier ainsi le résultat obtenu au point précédent.

Exercice 5:

1. Montrer que la covariance entre la somme et la différence de deux v.a. indépendantes et de même loi est toujours nulle.
2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. Donner la loi de $X + Y$. Calculer $P(X + Y = 0)$, $P(XY = 0)$ et $P(X + Y = 0, XY = 0)$. Les deux v.a. $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ? Que vaut leur covariance en application de la première question ? Quelle conclusion générale en tirez-vous ?

Exercice 6: Soit X une v.a. de densité :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(x-\eta)} \text{ si } x > \eta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où η est un nombre réel donné.

1. Déterminer la fonction de répartition F et la médiane de cette loi.
2. Soit X_1, ... , X_n des v.a. indépendantes et de même loi que X et posons $m_n = min X_1, ..., X_n$. Déterminer la fonction de répartition, puis la densité, de la v.a. m_n.

Exercice 7:

Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$ est une loi binomiale.

Exercice 8:

Grâce à une importante étude épidémiologique on constate que la distribution des poids des individus dans une population adulte donnée peut être convenablement modélisée par une loi log-normale. Considérant que le poids moyen est de 70 kg et que l'écart-type des poids est de 12 kg
résoudre les deux équations permettant de déterminer les valeurs des paramètres μ et σ^2 de la loi log-normale.