

**Examen : session normale**  
**Durée : 1h30**

**Exercice 1:** (5pts)

Soit  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}(1 - \frac{x}{a}) & \text{si } 0 \leq x \leq a \text{ et } a > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que  $f$  est bien une densité de probabilité ?
2. Déterminer la fonction de répartition  $F_{\mathbf{X}}$ .
3. Calculer  $\frac{a}{2} < P(\mathbf{X}) < a$ .
4. Pour tout  $k$ , calculer  $E(\mathbf{X}^k)$  et en déduire  $V(\mathbf{X})$ .
5. Trouver la médiane de la loi de  $\mathbf{X}$ .

**Exercice 2:** (5pts)

Soit  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  de loi :

$$P(\mathbf{X} = k) = C.k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ou  $C$  est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante  $C$ .
2. Déterminer la fonction de répartition de la loi de  $\mathbf{X}$  ?
3. Déterminer la loi de  $\mathbf{Y} = \mathbf{n} - \mathbf{X}$ .
4. Déterminer la loi de  $\mathbf{Z} = \mathbf{n} + \mathbf{X}$ .

Rappel :  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

**Exercice 3:** (3pts)

On a pesé 10 palettes de briques de la même fabrication ; et on a obtenu les résultats suivants (kilogrammes) :

$$759, 750, 755, 756, 761, 765, 770, 752, 760, 767$$

On admet que ces résultats sont issus d'une population distribuée selon une loi normale d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

1. Donner une estimation ponctuelle de l'espérance et de la variance du poids d'une palette de brique.
2. Construire un intervalle de confiance pour  $\mu$  avec les niveaux de confiance **0.90** et **0.99**.
3. Supposons maintenant que l'on connaisse la variance, donnée par le constructeur :  $\sigma^2 = 42$ . Que cela change-t-il sur vos intervalles de confiances ? Recalculez-les si besoin.

**Exercice 4:** (5pts)

Un laboratoire d'analyse chimique reçoit un lot de tubes à essai. Ces tubes sont fournis par trois sociétés différentes , A, B et C dans les proportions suivantes : 50%, 30% et 20%. 2% des tubes fabriqués par A, 3% de ceux fabriqués par B et 4% de ceux fabriqués par C présentent des défauts. On choisit au hasard un tube à essai dans le lot reçu.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
2. Sachant que le tube choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la société A ?