Transformee Fourier

29 avril 2018

Table des matières

1 Historique

Dans la musique, on peut retrouver des gammes 'non-dissonantes'.
Les instruments etaient accordes a l'oreille avec une note de base.
Cela creait des dissonnances.

2 Introduction

Peut on obtenir un signal elementaire avec des signaux elementaire ?

On va s'interesser aux conditions qui font qu'un signal est compose de signaux elementaires.

$$\begin{gathered} f(t) \\ f('periode')2\pi \end{gathered}$$

2.1 Definition

$$\begin{gathered} e^{\alpha z}(derivee) \to \alpha e^{\alpha z} \\ e^{\alpha z}(primitive) \to \frac{1}{\alpha} * e^{\alpha z} \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k \in Z} e_n e^{int} \\ \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt &= \int_0^{2x} \sum_{m \in Z} e_m e^{imt} e^{imt} dt \\ &= \sum_{m \in Z} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \\ &= c_n \int_0^{2\pi} + \sum_{m \neq n} e^{i(m-n)t} dt \\ &= 2\pi c_n + 0 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt$$

2.2 Definition 2

Une fonction periodique est une somme de fonction elementaires.

2.3 Definition 3

Prenons f de periode 2π
La serie de Fourier de f est :

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\inf} b_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\inf} a_n \sin(nt)$$
$$\sum_{n \in Z} c_n e^{int}$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)dt$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)dt$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

$n > 0$

$$c_n = \frac{b_n + ia_n}{2}$$
$$c_{-n} = \frac{b_n - ia_n}{2}$$

$n = 0$

$$c_0 = b_0$$

f a valeur nulle.
a_n et b_n reels

f est paire
$\forall a_n = 0$
f est impaire
$\forall b_n = 0$

Ensemble de fonctions periodiques :
- continue
- continent derivable
- Integrale
- "Pas trop de discontinuite"
- ...

Un ensemble E choisi.
Espace vectoriel.
f et $g \in$ E

$\alpha_1\beta \in C$
$\alpha f + \beta g \in E$

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g}(t)dt$$

$$\begin{aligned} < f, g > &= \frac{1}{2\pi}\int f\overline{f}(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int |f|^2 dt \end{aligned}$$

ressemble a $||f||^2$

$$< e^{int}, e^{int} > = 0$$

$n \neq m$

$$< e^{int}, e^{imt} > = 1$$

$$\sum_{n\in Z} < f, e^{in} > e^{int}$$

En dimension 3,e_1, e_2, e_3etant des espaces vectoriels, on peut exprimer $u(x, y, z)$, tq :
$u = (u.e_1)e_1 + (u.e_2)e_2 + (u.e_3)e_3$

3 Convergence

3.1 Theoreme

f classe C^2
Convergence
$f(t) = \sum c_n e^{int}$

Fonction "reguliere par morceau"
- Un nombre fini de discontinuites
- nombre fini d'extrema

Si f continu en t ; $f(t) = \sum c_n e^{int}$
Si f discontinu en t : $\sum c_n e^{int} = (\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)))$

3.2 Phenomene de Gibbs.

3.2.1 Integration et derivation

$$\begin{aligned}\sum_a^b e^{int}dt &= (b-a)c_0 + \sum_{n\neq 0} C_n \int_a^b e^{int}dt \\ &= (b-a)c_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{C_n}{in}(e^{inb} - e^{ina})\end{aligned}$$

Pour la derivation :
Hypothese f continu derivable
f' regulier par morceaux

$$\begin{aligned}\sum inc_n e^{int} &= f'(t)...continue \\ &= \frac{1}{2}(f'(t+) + f'(t-))...discontinue\end{aligned}$$

3.2.2 Exemple

$$\begin{aligned}f(t) = 1 sit \in]-a, +a[\\ 0 ailleurs sur [-\pi, \pi] \\ ... \\ f(t) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\inf} \frac{\sin(na)}{n} cos(nt)\end{aligned}$$

3.2.3 Cas particulier

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{R=0}^{\inf} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos{(2k+1)t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{2k=1} \sin((2k+1)t)$$

4 Formulaire

4.1 Identite de Parseval

http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/parseval.html

4.2 Densite Gausienne

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} \\ F(f)(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}\end{aligned}$$

4.3 Translation

$$F(f(x-a))(u) = e^{iau}F(f)(u)$$

4.4 Modulation

$$F(e^{i\omega_0 x}f(u)) = F(u-\omega_0)$$

4.5 Changement d'echelle

$$F(f(ux)) = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

4.6 Conjugaison

$$F(\overline{f}(x)) = \overline{F(f)}(-u)$$

4.7 Derivation

$$F(f)(u) = \int f(x)e^{-iux}dx$$
$$F(f')(u) = iuF(f)(u)$$

4.8 Theoreme de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G}(u)du$$

4.9 Convolution

$$f * g(x) = \int_{x\in R} f(u)g(x-a)du$$
$$F(f*g)(u) = F(f)(u).F(g)(u)$$

De plus si $f, g \in L^2$

$$F(fg) = F(f) * F(g)$$

4.10 fonction "porte"

$$F(\pi_a)(u) = 2\frac{\sin(au)}{u}$$

4.11 Distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)dt = 1$$

δ_0 : Distribution de Dirac

$$F(\delta_0)(u) = \int e^{iux}\delta_0(x)dx = 1$$
$$\int f(x)\delta_a(x)dx = f(a)$$
$$F(\delta_a)(u) = e^{-iau}$$

5 Transformée de Fourier

5.1 Introduction

Définition :

$$\forall f \in L^1, \quad \mathcal{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iux}\,\mathrm{d}t$$

Attention à la normalisation !

Condition d'existence :
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ est
— Continue
— Croissante
— $\lim_{u\to\infty} \mathcal{F}(f)(u) = 0$
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, c'est plus compliqué.

5.2 Densité Gaussienne

Avec $\sigma > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$
$$\mathcal{F}(f)(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$$

5.3 Linéarité

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g)$$

5.4 Translation

$$F(f(x-a)(u) = e^{iau}\mathcal{F}(f)(u)$$

5.5 Modulation

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 x} f(u)) = \mathcal{F}(u - \omega_0)$$

5.6 Conjugaison

$$\mathcal{F}(\overline{f}(x)) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-u)$$

5.7 Changement d'échelle

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(\frac{u}{a}\right)$$

5.8 Dérivation

$$\mathcal{F}(f')(u) = iu\mathcal{F}(f)(u)$$

On peut dériver en faisant une multiplication !

5.9 Inversion

On a f prériodique et :

$$f(t) = \sum c_n e^{int}$$

Et

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2x} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$$

On a donc :

$$\mathcal{F}(u) = \int f(t)e^{-iut}\mathrm{d}t$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{F}(u)e^{-iux}\mathrm{d}t$$

5.10 Convolution

Si on a :

$$f \times g(x) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(u)g(x-a)\mathrm{d}u$$

Alors :

$$F(f \cdot g)(u) = F(f)(u) \cdot F(g)(u)$$

De plus si $f, g \in L^2$

$$F(fg) = F(f) * F(g)$$

5.11 Théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \mathrm{d}u$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G}(u) du$$

6 Exemples

6.1 Fonction "porte"

$$F(\Pi_a)(u) = 2\frac{\sin(au)}{u}$$

On notera que

$$\int_{\infty}^{+\infty} \Pi_a^2 dx = 2a$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{+\infty} 4\frac{\sin(au)^2}{u^2} du = 2a$$
$$\int_{\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(u)}{u^2}\right)^2 du = \frac{2}{4} \times 2\pi = \pi$$

6.2 Distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\sigma(t) dt = 1$$

Où σ petit.
δ_0 : Distribution de Dirac

$$F(\delta_0)(u) = \int e^{iux} \delta_0(x) dx = 1$$
$$\int f(x)\delta_a(x) dx = f(a)$$
$$F(\delta_a)(u) = e^{-iau}$$

6.3 Fonction de Lorentz

On a

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Donc :

$$\mathcal{F}(f)(u) = e^{-a|u|}$$