Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

15 сентября 2022 г.

Содержание

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные оьозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B, такие что $A \cap B = \varnothing$

***Определение* 1.1.** Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

***Определение* 1.2.** E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E.

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

***Определение* 1.3.** – система подмн-в X: $A \subset 2^X$

1. (δ_0) если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0) если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ) если $A_n \in \mathcal{A},\ \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ) если $A_n \in \mathcal{A},\ \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.4.** $\mathcal{A}$ – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если $\mathcal{A}$ – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_{\alpha \in I} \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

***Определение* 1.5.** $\mathcal{A}$ – алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симметр., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и $\forall A,\ B \in \mathcal{A}:\ A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри опр. алгебры).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.6.** $\mathcal{A}$ - σ-алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симм., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множетсв; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

Замечание. σ-алгебра $\implies$ алгебра.

Пример.

1. 2^X - σ-алгебра.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}$ - всевозможные огр. подмн-ва. $\mathbb{R}^2$ и их дополнения. ($\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра).

   Rem: огр. множество - в метрич. пр-ве это множетсво ограниченного диаметра ($d(x,\ y) := ||x - y||$), т.е. $sup\{d(x,\ y)\ |x,\ y \in X\}$ - ограничен.
3. $\mathcal{A}$ - алгебра (σ-алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ-алгебра).

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).
5. $A, B \subset X$ что есть в адгебра, содержащей A, B:
$\varnothing, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \triangle B, X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$.

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X, тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра (алгебра) $\mathcal{A}$, такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что $\mathcal{A}$ – наим. по вкл. $\mathcal{A} \subset A_\alpha$ $\forall \alpha \in I$.

***Определение* 1.7.** 1. Такая σ-алгебра – борелевская оболка ϵ – $(\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ-алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ-алгебра $(\mathcal{B}^n)$.

Замечание. континуальное – $\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$ – больше.

□

***Определение* 1.8.** R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

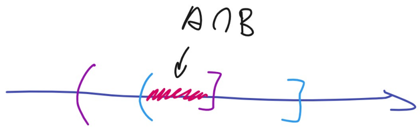
Замечание. Кольцо + $(X \in R) \implies$ алгебра.

***Определение* 1.9.** P – полукольцо, если

1. $\varnothing \in P$
2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

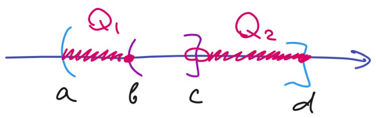
Свойство 2:



$\Rightarrow A \cap B \in P$

$(\,] =: A \qquad (\,] =: B$

Свойство 3:



$(a; d] =: A \qquad (a; b] = Q_1$

$(b; c] =: B \qquad (c; d] = Q_2$

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}$.

Доказательство. $\supset$: Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \varnothing \implies B_n \cap B_m = \varnothing$.

$\subset$: Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m, такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. □

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n. База – опр. полукольца. Переход ($n \to n+1$): $P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$

2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$

□

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

***Определение* 1.10.** $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-ва X.

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-ва Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.
$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

□

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

***Определение* 1.11.** Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$

Открытый параллелепипед:

$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$

Ячейка:

$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$

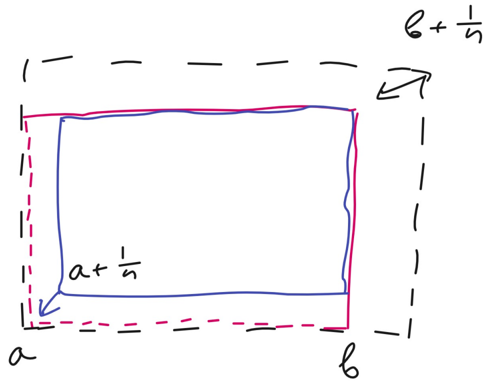
Теорема 1.5. Непустая ячейка – перечисление убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$P_n \supset P_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$

$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \dots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$

$Q_n \subset Q_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$



□

Обозначения: $\mathcal{P}^m$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$.

$\mathcal{P}^m_Q$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами вершин.

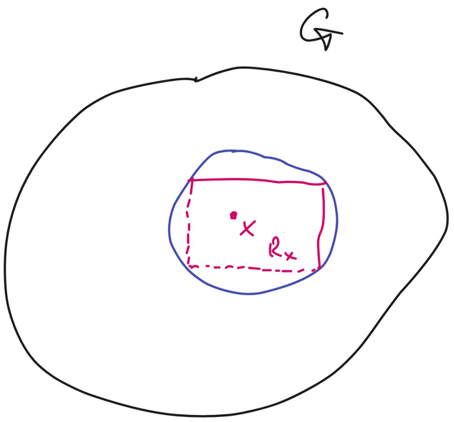
Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}^m_Q$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$\mathcal{P}^m_Q = \mathcal{P}^{m-1}_Q \times \mathcal{P}^1_Q$ □

Теорема 1.7. $G \neq \varnothing$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объелинение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ □

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_Q \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \supset \mathcal{B}^m$ □

1.2. Объем и мера

***Определение* 1.12.** $\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n P_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

***Определение* 1.13.** μ – мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \in \mathcal{P}$, то $\underbrace{\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu P_k}_{\text{счетная аддитивность}}$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\varnothing = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. $\mathcal{P}^1$, $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ – нестрого монотонная
   (a) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).
3. $\mathcal{P}^m$ (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_m - a_m)$, $a := (a_1, \ ..., \ a_m)$, $b := (b_1, \ ..., \ b_m)$ – классический объем.
4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} \text{a}, \ if \ x_0 \in A \\ 0, \ otherwise \end{cases} \tag{1}$$

   μ - мера.
5. $\mathcal{P}$ – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, \ if \ x_0 \in A \\ 0, \ otherwise \end{cases} \tag{2}$$

   μ - объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ - объем на полукольце $\mathcal{P}$

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu\tilde{P}$
2. (a) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
   (b) Пункт (a), но $n = \infty$
3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев типо.

2. (a) $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

(b) $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^{n} \mu P_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \le \mu P$

3. $P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ - полукольцо), $\quad P = \bigcup_{k=1}^{n} P'_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\le \mu P'_k \le \mu P_k \ (property\ 2(a).)} \le \sum_{k=1}^{n} \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо и A, B $(B \subset A) \in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$

Если $\mu B \ne +\infty$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$

Теорема 1.9. $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-в X, μ– объем на $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-в Y, ν– объем на $\mathcal{Q}$

$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q$, где $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$

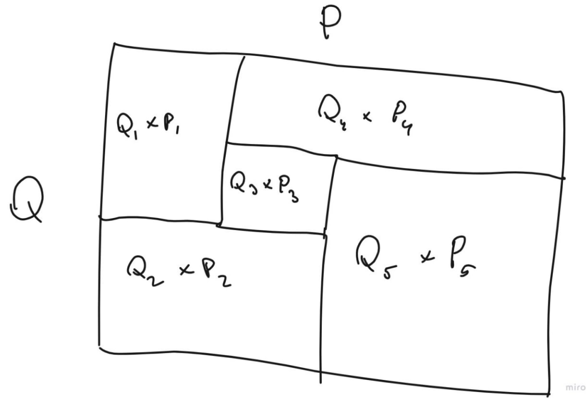
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$, тогда:

$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} P_k \times Q_j$, докажем, что $\underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^{m} \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$

Общий случай.



$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$

$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup_{k=1}^{N} P'_k$

$Q = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j = \bigsqcup_{j=1}^{M} Q'_j$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.

(Rem: $lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множетсво, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \to \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1. $\sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(*)$.

2. $\sum_{k:\ t_k \in A} w_k$ $(**)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(***)$.

1. $\mu A = \sum_{k:\ t_k \in A} w_k$ $(**) \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(\forall i,\ j:\ i \neq j)$, то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(***) \geq \sum_{k:\ t_k \in A}$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

   Итого имеем равенство:

   $(**) = (***):$ $\sum_{k:\ t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$, чтд.

   (От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

$\square$