

Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

8 сентября 2022 г.

Содержание

1. Теория меры	1
1.1 Система множеств	2
1.2 Объем и мера	5

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные обозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B , такие что $A \cap B = \emptyset$

Определение 1.1. Набор мн-в дизъюнктивный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

Определение 1.2. E – мн-во, если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

Определение 1.3. – система подмн-в X : $\mathcal{A} \subset 2^X$

1. (δ_0) если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0) если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ) если $A_n \in \mathcal{A} \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ) если $A_n \in \mathcal{A} \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Определение 1.4. \mathcal{A} – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

Утверждение 1.1. Если \mathcal{A} – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$

Доказательство. $A_\alpha \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

Определение 1.5. \mathcal{A} – алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симметр., $\emptyset \notin \mathcal{A} \wedge (\delta_0) = (\sigma_0)$.

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

Определение 1.6. \mathcal{A} – σ -алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симм., $\emptyset \notin \mathcal{A}$ и $(\sigma) = (\delta)$.

Замечание. σ -алгебра \implies алгебра.

Пример. 1. 2^X – σ -алгебра.

2. $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{A} – всевозможные огр. подмн-ва. \mathbb{R}^2 и их дополнений. (\mathcal{A} – алгебра, но не σ -алгебра).
3. \mathcal{A} – алгебра (σ -алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ -алгебра).
4. Пусть \mathcal{A}_α – алгебры (σ -алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ -алгебра).
5. $A, B \subset X$ что есть в алгебре, содержащей A, B :
 $\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X , тогда существует наименьшая по включению σ -алгебра (алгебра) \mathcal{A} , такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. \mathcal{A}_α – всевозможные σ -алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что \mathcal{A} – наим. по вкл. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I$.

Определение 1.7. 1. Такая σ -алгебра – борелевская оболочка $\epsilon = (\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$ такая σ -алгебра, натянутая на все откр. мн-ва – борелевская σ -алгебра (\mathcal{B}^n) .

Замечание. континуальное – $\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$ – больше

□

Определение 1.8. R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

Замечание. Кольцо $+$ $(X \in R) \implies$ алгебра.

Определение 1.9. P – полукольцо, если

1. $\emptyset \in P$

2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$

3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

Картинка.

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}$.

Доказательство. \supset : Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset$.

\subset : Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m , такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. □

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots, \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.

2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n . База – опр. полукольца. Переход $(n \rightarrow n+1)$: $P \setminus$

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \underbrace{\left(Q_j \setminus P_{n+1} \right)}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}}$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\left(P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j \right)}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}$$

□

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

Определение 1.10. \mathcal{P} – полукольцо подмн-ва X .

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-ва Y .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

□

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

Определение 1.11. Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_m, b_m]$$

Теорема 1.5. Непустая ячейка – перечисление убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. Картинка.

$$P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$

□

Обозначения: \mathcal{P}^m – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m .

\mathcal{P}_Q^m – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m с рациональными координатами вершин.

Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_Q^m$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_Q^m = \mathcal{P}_Q^{m-1} \times \mathcal{P}_Q^1$$

□

Теорема 1.7. $G \neq \emptyset$ – открытое множество в \mathbb{R}^m . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. Картинка.

$$R_x \text{ – ячейка, } \underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G, x \in R_x, \text{ получаем, что } G = \bigcup_{x \in G} R_x.$$

$$\text{Выкинем повторы: } G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$$

□

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}_Q^m) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_Q^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_Q^m)$

$$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$$

$$G - \text{открытое} \implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_Q^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_Q^m) \supset \mathcal{B}^m$$

□

1.2. Объем и мера

Определение 1.12. \mathcal{P} – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$. μ – объем, если

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ Если } P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P} \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

Определение 1.13. μ – мера, если

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ Если } P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P} \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k}_{\text{счетная аддитивность}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\emptyset = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. \mathcal{P}^1 , $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем).

2. $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ – нестрого монотонная

$$(a) \ (a, b] := g(b) - g(a) \text{ (упр. доказать, что объем).}$$

3. \mathcal{P}^m , $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ – классический объем.

4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := a - \text{при } x_0 \in A, \text{ иначе } 0 \text{ (блин, как выглядит странный тех символ)}$$

5. \mathcal{P} – огр. мн-во и их дополнения $\mu A := a - \text{при } x_0 \in A, \text{ иначе } 0$ (это объем, но не мера)

Теорема 1.8. μ -объем на полукольце \mathcal{P}

$$1. \text{ монотонность: } \mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$$

$$2. (a) \text{ усиленная монотонность: } P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}. \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$$

(b) пункты (a), но $n = \infty$

$$3. \text{ полуаддитивность: } P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P} \text{ и } P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k, \text{ тогда } \mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

Доказательство. 1. Очев тип.

$$2. (a) \ P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$(b) \ \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k = P \cap P_k \in \mathcal{P}, \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{P'_k} \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если \mathcal{P} – кольцо и A, B ($B \subset A$) $\in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

Теорема 1.9. \mathcal{P} – полукольцо подмн-в X , μ – объем на \mathcal{P}

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-в Y , ν – объем на \mathcal{Q}

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай. Тут картинка, ага очень удобно

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках.

$$\nu_g(a, b] := g(b) - g(a) - \text{мера.}$$

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множество, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k:t_k \in A} w_k$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

$\sum_{k:t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:t_k \in A_n} w_k$ (тут был какой-то кукарек про ' \leq ' и ' \geq ' и получаем равенство, нужно рассматривать слагаемые по отдельности) □