Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

8 сентября 2022 г.

Содержание

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные оьозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B, такие что $A \cap B = \varnothing$

***Определение* 1.1.** Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

***Определение* 1.2.** E – мн-во, если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбюиение мн-ва E.

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

***Определение* 1.3.** – система подмн-в X: $A \subset 2^X$

1. (δ_0) если $\forall A, B \in A \implies A \cap B \in A$
2. (σ_0) если $\forall A, B \in A \implies A \cup B \in A$
3. (δ) если $A_n \in \mathbb{A} \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$
4. (σ) если $A_n \in \mathbb{A} \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$

***Определение* 1.4.** $\mathbb{A}$ – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathbb{A} \implies X \setminus A \in \mathbb{A}$

Утверждение 1.1. Если $\mathbb{A}$ – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$

Доказательство. $A_{\alpha \in} \mathbb{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathbb{A} implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathbb{A}$ □

***Определение* 1.5.** $\mathbb{A}$ – алгебра мн-в, если $\mathbb{A}$ – симметр., $\varnothing \notin \mathbb{A} \wedge (\delta_0) = (\sigma_0)$.

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\varnothing, X \in \mathbb{A}$
2. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$, то $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{A} \wedge \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{A}$
3. Если $A, B \in \mathbb{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathbb{A}$

***Определение* 1.6.** $\mathbb{A}$ - σ-алгебра мн-в, если $\mathbb{A}$ – симм., $\varnothing \notin \mathbb{A}$ и $(\sigma) = (\delta)$.

`Замечание.` σ-алгебра $\implies$ алгебра.

Пример.

1. 2^X - σ-алгебра.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{A}$ - всевозможные огр. подмн-ва. $\mathbb{R}^2$ и их дополнений. ($\mathbb{A}$ – алгебра, но неσ-алгебра.
3. $mathbbA$ - алгебра (σ-алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathbb{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ-алгебра).
4. Пусть $\mathbb{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).
5. $A, B \subset X$ что есть в адгебра, содержащей A, B:
$\varnothing, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \vartriangle B, X \setminus (A \vartriangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$.

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X, тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра (алгебра) $\mathbb{A}$, такая что $\epsilon \subset \mathbb{A}$.

Доказательство. $\mathbb{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathbb{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что $\mathbb{A}$ – наим. по вкл. $\mathbb{A} \subset A_\alpha\ \forall \alpha \in I$.

***Определение* 1.7.**

1. Такая σ-алгебра – борелевская оболка ϵ – $(\mathcal{B}(\epsilon))$.
2. $X = \mathbb{R}^n$ такая σ-алгебра, натянутая на все откр. мн-ва – борелевская σ-алгебра $(\mathcal{B}^n)$.

`Замечание.` континуальное – $\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$ – больше

□

***Определение* 1.8.** R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

`Замечание.` Кольцо $+$ $(X \in R) \implies$ алгебра.

***Определение* 1.9.** P – полукольцо, если

1. $\varnothing \in P$
2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

Картинка.

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)}_{B_n}$.

Доказательство. $\supset$: Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \varnothing \implies B_n \cap B_m = \varnothing$.

$\subset$: Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m, такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. □

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \ldots \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство.

1. индукция по n. База – опр. полукольца. Переход $(n \to n+1)$: $P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}}\right)$
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}\right)$

□

`Замечание.` В (2) можно писать $n = \infty$.

***Определение* 1.10.** $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-ва X.

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-ва Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

□

`Замечание.` Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

***Определение* 1.11.** Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$

Открытый параллелепипед:

$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_m, b_m)$

Ячейка:

$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_m, b_m]$

Теорема 1.5. Непустая ячейка – перечисление убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. Картинка.

$P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$P_n \supset P_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$

$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$

$Q_n \subset Q_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$ □

Обозначения: $\mathcal{P}^m$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$.

$\mathcal{P}^m_Q$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами вершин.

Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}^m_Q$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$\mathcal{P}^m_Q = \mathcal{P}^{m-1}_Q \times \mathcal{P}^1_Q$ □

Теорема 1.7. $G \neq \varnothing$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объелинение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. Картинка.

R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.

Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ □

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_Q \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \supset \mathcal{B}^m$ □

1.2. Объем и мера

***Определение* 1.12.** $\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n P_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

***Определение* 1.13.** μ – мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k\right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^\infty \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\varnothing = 0$ выполнено автоматически.

Пример.

1. $\mathcal{P}^1$, $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем).
2. $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ – нестрого монотонная
   (a) $(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).
3. $\mathcal{P}^m$, $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ – классический объем.
4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$
   $\mu A := a$ – при $x_0 \in A$, иначе 0 (блин, как выглядит сранный тех символ)
5. $\mathcal{P}$ – огр. мн-во и их дополнения $\mu A := a$ – при $x_0 \in A$, иначе 0 (это объем, но не мера)

Теорема 1.8. μ-объем на полукольце $\mathcal{P}$

1. монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$
2. (a) усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
   (b) пункты (a), но $n = \infty$
3. полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство.

1. Очев типо.
2. (a) $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$
   (b) $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \to \sum_{k=1}^\infty \mu P_k \leq \mu P$

3. $P_k'" = P \cap P_k \in \mathcal{P}, \quad P = \bigcup_{k=1}^n P_k' = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{P_k'} \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \le \sum_{k=1}^n \mu P_k$

$\square$

`Замечание.` 1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо и A, B $(B \subset A) \in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$\mu(A \subset B) + \mu B = \mu A$

Если $\mu B \neq +\infty$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$

Теорема 1.9. $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-в X, μ– объем на $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-в Y, ν– объем на $\mathcal{Q}$

$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q$, где $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$

Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$

$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j$, докажем, что $\underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$

Общий случай. Тут картинка, ага очень удобно

$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$

$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P_k'$

$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q_j'$ $\square$

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и нерперывна слева во всех точках.

   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множетсво, $w_1, w_2, \dots \ge 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^\infty A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^\infty \mu A_n$

$\sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k: t_k \in A_n} w_k$ (тут был какой-то кукарек про '$\le$' и '$\ge$' и получаем равенство, нужно рассматривать слагаемые по отдельности) $\square$