Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

5 октября 2022 г.

Содержание

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные обозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B, такие что $A \cap B = \varnothing$

***Определение* 1.1.** Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

***Определение* 1.2.** E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E.

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

***Определение* 1.3.** $\mathcal{A}$ – система подмн-в X: $A \subset 2^X$

1. (δ_0): если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0): если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ): если $A_n \in \mathcal{A}, \ \forall n \implies \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ): если $A_n \in \mathcal{A}, \ \forall n \implies \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.4.** $\mathcal{A}$ – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если $\mathcal{A}$ – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_{\alpha \in I} \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

***Определение* 1.5.** $\mathcal{A}$ – алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симметр., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и $\forall A, \ B \in \mathcal{A}: \ A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри опр. алгебры).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.6.** $\mathcal{A}$ - σ-алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симм., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множетсв; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

`Замечание.` σ-алгебра $\implies$ алгебра.

Пример.

1. 2^X - σ-алгебра.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}$ - всевозможные огр. подмн-ва. $\mathbb{R}^2$ и их дополнения. ($\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра).

   Rem: огр. множество - в метрич. пр-ве это множетсво ограниченного диаметра ($d(x, \ y) := ||x - y||$), т.е. $sup\{d(x, \ y) \ |x, \ y \in X\}$ - ограничен.
3. $\mathcal{A}$ - алгебра (σ-алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ-алгебра).

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

5. $A, B \subset X$ ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей A, B:
$\varnothing, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \vartriangle B, X \setminus (A \vartriangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$.

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X, тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра (алгебра) $\mathcal{A}$, такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что $\mathcal{A}$ – наим. по вкл. $\mathcal{A} \subset A_\alpha \ \forall \alpha \in I$.

***Определение* 1.7.** 1. Такая σ-алгебра – борелевская оболочка ϵ – $(\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ-алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ-алгебра $(\mathcal{B}^n)$.

Замечание. $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

***Определение* 1.8.** R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

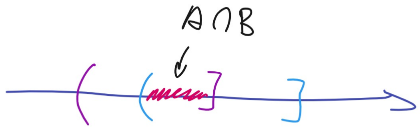
Замечание. Кольцо + $(X \in R) \implies$ алгебра.

***Определение* 1.9.** P – полукольцо, если

1. $\varnothing \in P$
2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

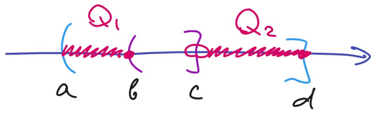
Свойство 2:



$\Rightarrow A \cap B \in P$

$(\ ] =: A \quad (\ ] =: B$

Свойство 3:



$(a; d] =: A \quad (a; b] = Q_1$

$(b; c] =: B \quad (c; d] = Q_2$

Лемма. $\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{N} \underbrace{A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)}_{B_n}$.

Доказательство. $\supset$: Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \varnothing \implies B_n \cap B_m = \varnothing$.

$\subset$: Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Возьмем наим. m, такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^{N} B_n$. □

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n. База – опр. полукольца. Переход $(n \to n+1)$:

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

2. $$\bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

□

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

***Определение* 1.10.** $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-ва X.

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-ва Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.
$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

□

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

***Определение* 1.11.** Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$

Открытый параллелепипед:

$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$

Ячейка:

$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$

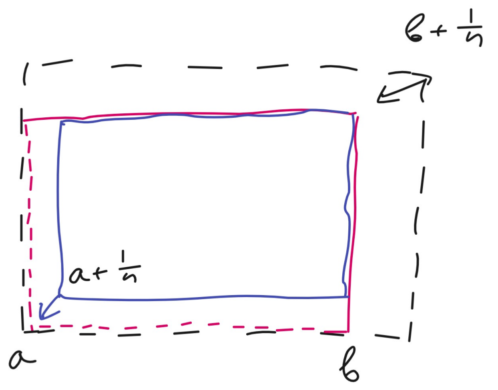
Теорема 1.5. Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$P_n \supset P_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$

$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$

$Q_n \subset Q_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$



□

Обозначения: $\mathcal{P}^m$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$.

$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами вершин.

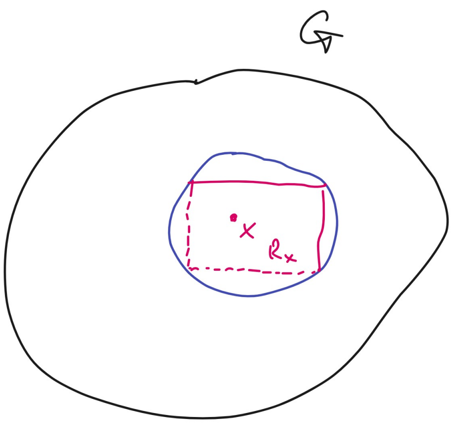
Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} = \mathcal{P}^{m-1}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{P}^1_{\mathbb{Q}}$ □

Теорема 1.7. $G \neq \varnothing$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное обьелинение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ □

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_Q \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \supset \mathcal{B}^m$ □

1.2. Объем и мера

***Определение* 1.12.** $\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n P_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

***Определение* 1.13.** μ – мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k\right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^\infty \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\varnothing = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. $\mathcal{P}^1$, $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нестрого монотонная
   (a) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).
3. $\mathcal{P}^m$ (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$, $a := (a_1, \ ..., \ a_m)$, $b := (b_1, \ ..., \ b_m)$ – классический объем.
4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} \text{a}, \ if \ x_0 \in A \\ 0, \ otherwise \end{cases} \tag{1}$$

   μ - мера.
5. $\mathcal{P}$ – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, \ if \ x_0 \in A \\ 0, \ otherwise \end{cases} \tag{2}$$

   μ - объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ - объем на полукольце $\mathcal{P}$

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$
2. (a) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
   (b) Пункт (a), но $n = \infty$

3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \le \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев типо.

2. (a) $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \ge \sum_{k=1}^n \mu P_k$

   (b) $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \to \sum_{k=1}^\infty \mu P_k \le \mu P$

3. $P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ - полукольцо), $\quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\le \mu P'_k \le \mu P_k \text{ (свойство } 2(a))} \le \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

`Замечание.` 1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо и A, B $(B \subset A) \in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$

Если $\mu B \ne +\infty$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$

Теорема 1.9. $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-в X, μ – объем на $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-в Y, ν – объем на $\mathcal{Q}$

$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q$, где $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$

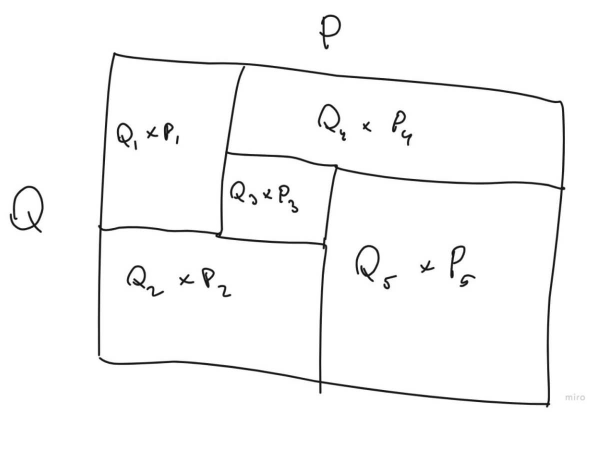
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, тогда:

$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j$, докажем, что $\underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$

Общий случай.



$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$

$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$

$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.

   (Rem: $lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множетсво, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \to \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1. $\sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(*)$.
2. $\sum_{k:\ t_k \in A} w_k$ $(**)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(***)$.

1. $\mu A = \sum_{k:\ t_k \in A} w_k$ $(**) \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(\forall i,\ j:\ i \neq j)$, то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k$ $(***) \geq \sum_{k:\ t_k \in A}$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

   Итого имеем равенство:

   $(**) = (***):\ \sum_{k:\ t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$, чтд.

   (От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

$\square$

Теорема 1.10. (О счетной аддитивности меры).

μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда μ-мера $\Leftrightarrow$ если $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ $P, P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$ (счетная полуаддитивность).

Доказательство. "$\Leftarrow$": Пусть $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, тогда нажо д-ть, что $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$: для "$\leq$" – счетная полуаддитивность, для "$\geq$" – усиленная монот. объема.

"$\Rightarrow$": $P'_n := P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n}$ – усиленная монот. объема. $\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$. $\square$

Следствие. Если μ – мера на σ-алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

Доказательство. $\mu A_n = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$. $\square$

Теорема 1.11. (О непрерывности меры снизу).

μ – объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ – мера $\Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$ – непр. меры снизу.

Доказательство. "$\Rightarrow$": $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1},\ A_0 = \varnothing$.

B_n – дизъюнктны: $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu \bigsqcup B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu B_k = \lim \mu A_n$.

"$\Leftarrow$": Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k,\ A_n \subset A_{n+1},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)} = \lim \mu A_n = \lim \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \lim \sum_{k=1}^{n} \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$$ □

Теорема 1.12. (О непрерывности меры сверху).

μ – объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$.

Тогда равносильны:

1. μ – мера
2. если $A_n \supset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu A_n$
3. если $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim \mu A_n = 0$.

Доказательство. (1) $\implies$ (2): $A_n \supset A_{n+1} \implies B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\implies \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3) $\implies$ (1): $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k,\ A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, тогда $\lim \mu A_n = 0$.

$C = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \sqcup A_n \implies \mu C = \sum_{k=1}^{n} \mu C_k + \mu A_n$. □

Следствие. Если μ – мера, то $A_n \supset A_{n+1}$ и для некоторого $m:\ \mu A_m < +\infty$

Доказательство. $X := A_n$ □

Упражнение. Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

1.3. Продолжение мер

***Определение* 1.14.** $\nu : 2^X \to [0; +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu\varnothing = 0$
2. монотонность: если $A \subset B$, $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

`Замечание.`
1. счетная полуаддитивность $\implies$ конечная.
2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности) $A \subset B,\ n = 1$.

***Определение* 1.15.** μ – полная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$.

`Замечание.` это означает, что $\mu A = 0$.

***Определение* 1.16.** ν – субмера, назовем $E \subset X$ ν-измеримым, если $\forall A \subset X$ $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

`Замечание.` Достаточен знак "$\geq$" (следует из счетной полуаддитивности).

Теорема 1.13. Каратеодори.

Пусть ν – субмера. Тогда ν-измеримое мн-во образует σ-алгебру и сужение ν на эту σ-алгебру – полная мера.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ ν-измеримые мн-ва.

1. Если $E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

   $\forall A \subset X,\ \nu A \underbrace{\geq}_{?} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

   $A \cap E \subset E,\ \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$, тогда доказали вопросик сверху.

2. $\mathcal{A}$ – симметричное семейство мн-в.

   $E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$

   $A \cap E = A \setminus (X \setminus X)$

   $A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$

4. $\mathcal{A}$ – алгебра.

5. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathcal{A} \underbrace{\implies}_{?} E \in \mathcal{A}$.

   $$\nu A = \nu(A \cap \textstyle\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \underbrace{\nu(A \cap \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies$$

   $$\implies \nu A \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E).$$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}$, то $E \in \mathcal{A}$.

7. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.

8. ν– мера на $\mathcal{A}$.

   $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \underbrace{\implies}_{?} \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n$ (leq уже есть).

   Докажем, что $\nu E \geq \sum_{k=1}^{n} \nu E_k$. Знаем, что $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \nu E_k$

□

***Определение* 1.17.** μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$, $A \subset X$.

$\mu^* A := \inf\{\sum_{k=1}^\infty \mu P_k :\ P_k \in \mathcal{P}\ \wedge\ A \subset \bigcup_{k=1}^\infty P_k\}$

если покрытия нет, то $+\infty$.

– внешняя мера, порожд. μ.

`Замечание.` 1. Можно считать, что P_k – дизъюнктны

$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty P_n = \bigsqcup_{n=1}^\infty \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk},\ \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^{n=m_k} \mu Q_{nk} \le \sum_{n=1}^\infty \mu P_n$

2. Если μ задана на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то $\mu^* A = \inf\{\mu B\ :\ B \in \mathcal{A}\ \wedge\ A \subset B\}$

Теорема 1.14. Пусть μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда μ^* – субмера, совпадающая с мерой μ на полукольце $\mathcal{P}$.

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{P}$, хотим доказать, что $\mu A = \mu^* A$.

"$\ge$": очевидно, так как множество покрывает само себя. $\mu^* A = \inf\{\sum_{k=1}^\infty \mu P_k\ :\ \bigcup_{k=1}^\infty P_k \supset A\}$

"$\le$": $S \subset \bigcup_{k=1}^\infty P_k \underbrace{\implies}_{\text{счетная полуаддитивность}} \mu A_n \le \sum_{k=1}^\infty \mu P_k \implies \mu A \le \inf = \mu^* A$

2. μ^* – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \underbrace{\implies}_{?} \mu^* A \le \sum_{n=1}^\infty \mu^* A + \epsilon$

$\mu^* A_n = \inf \ldots$, берем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^\infty P_{nk}$ т.ч. $\sum_{k=1}^\infty \mu P_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^* A \le \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^\infty \mu^* A_n + \epsilon$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty P_{nk}$ – устремляем ϵ к нулю.

$\square$

***Определение* 1.18.** Стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$. μ_0^* – внешняя мера, порождающая μ_0 – субмера, и сужаем ее на все μ_0^* – измеримые мн-ва.

Получилась полная мера μ на σ-алгебра $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ для $P \in \mathcal{P}$.

Обозначение мн-ва из $\mathcal{A}$ назовем μ-измеримыми.

Теорема 1.15. Это действительно продолжение, то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$.

Доказательство. Надо доказать, что $E \in \mathcal{P}\ \wedge\ A \subset X$, $\mu_0^* A \ge \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$.

Рассмотрим случаи:

1. $A \in \mathcal{P}$.

   $\mu_0^* A = \mu_0 A,\ \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$

   $A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k,\ Q_k \in \mathcal{P}$

   $$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^* A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\ge \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2. $A \notin \mathcal{P}$.

   Если $\mu_0^* A = +\infty$, то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

   Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$. Возьмем $P_k \in \mathcal{P}$, такое что $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty P_k$ и $\sum_{k=1}^\infty \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$.

   Знаем, что $\mu_0^* P_k \ge \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\mu_0^*A + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)}$$

□

`Замечание.` 1. Дальше мера и ее продолжение обозначаем как μ.

Если A – μ-измеримое множество, то $\mu A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \ \wedge \ P_k \in \mathcal{P}\}$

2. Стандартное продолжение, примененое к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

   Упражнение. Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же врешнюю меру, что и μ.

3. Можно ли распространить меру на более широкую σ-алгебру.

4.

   ***Определение* 1.19.** ν – σ-конечная мера на полукольце $\mathcal{P}$, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \ P_n \in \mathcal{P} \ \wedge \ \mu P_n < +\infty$.

   Можно ли по-другому продолжить на σ-алгебру μ-измерим. мн-в?

   Если μ – σ-конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на μ-измеримых множествах.

   Если μ – σ-конечная мера, то обязательно.

Теорема 1.16. μ-стандартное продолжение меры с полукольца $\mathcal{P}$. μ^* – соответствующая внешняя мера, $A \subset X$, $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$, такие что $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \ C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n, C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$.

Доказательство. $\mu^* A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \ \wedge \ P_k \in \mathcal{P}\}$, берем покрытие с суммой $< \mu^* A + \frac{1}{n}$.

$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \ C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A$.

$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$ □

Следствие. μ-стандартное продолжение с полукольца $\mathcal{P}$. A – μ-измеримое мн-во и $\mu A < +\infty$. Тогда $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем $C \underbrace{\in \mathcal{B}(\mathcal{P})}_{\text{получаем автоматически}}$ из теоремы. $A \subset C$, и $\mu A = \mu C$.

$e_1 := C \setminus A, \ \mu e_1 = 0$, теперь подставляем e_1 в теорему:

найдется $e_2 : \ e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \ \wedge \ e_2 \supset e_1 \ \wedge \ \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A$.

$C \setminus e_2 \subset B \subset C$, $\mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \nu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A$. $e = A \setminus B \implies \mu e = 0$

□

Теорема 1.17. (Единственность продолжения).

μ – стандартное продолжение с полукольца $\mathcal{P}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}$.

ν – другая мера на $\mathcal{A}$, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$. Если μ – σ-конечная, то $\mu = \nu$.

Доказательство. Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,\ \ P_n \in \mathcal{P}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$ (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$\mu A = \inf\{\sum \mu P_n\} \geq \nu A$.

Возьмем $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$: $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если $\mu P < +\infty$, то равенство вместо неравенства.

$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$

$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k$, т.ч. $\mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$

$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A$ □

1.4. Мера Лебега

Теорема 1.18. Классический объем λ_m на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ – мера.

Доказательство. $(a; b] = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k; b_k] \underbrace{\implies}_{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(a_k; b_k]$.

$(a; b] \supset [a'; b] \supset (a'; b]$, т.ч. $\lambda(a; b] < \lambda(a'; b] + \epsilon$.

$(a_k; b_k] \subset (a_k; b'_k) \subset (a_k; b'_k],\ \ \lambda(a_k; b'_k] < \lambda(a_k; b_k] + \frac{\epsilon}{2^k}$

компакт – $[a'; b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k; b'_k)$, выбираем конечное подпокрытие.

$(a', b] \subset [a', b] \subset \sum_{k=1}^{n}(a_k; b'_k) \subset \bigcup_{k=1}^{n}(a_k; b'_k]$.

λ – объем $\implies$ конечная полуаддитивность

$\lambda(a'; b] \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(a_k; b'_k] < \sum_{k=1}^{n}(\lambda(a_k; b_k] + \frac{\epsilon}{2^k}) < \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda[a_k; b_k] + \frac{\epsilon}{2^k})$

□

***Определение* 1.20.** Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ (обозначение λ_m) – стандартное продолжение классического объема с $\mathcal{P}^m$.

σ-алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская σ-алгебра ($\mathscr{L}^m$).

`Замечание.` $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k\ :\ P_k -$ ячейки и $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$.

Можно вместо $P_k \in \mathcal{P}^m$ писать $P_k \in \mathcal{P}^m_Q$.

Свойства. Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого > 0.

   Доказательство. Пусть G - открытое, $x \in G$, B – шар, накрывающий x и $B \subset G$, вписываем ячейку в шар. □

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва $= 0$.

   Доказательство. Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по ϵ), тогда $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$. □

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

   Доказательство. Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик.

   □

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

   Доказательство. Берем все $\mathbb{R}^m$ и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$, тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$. ☐

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \ \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathscr{L}^m$.
   $A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$ и $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$, тогда $E \in \mathscr{L}^m$

   Доказательство. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathscr{L}^m$ и $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathscr{L}^m$.
   $A \subset E \subset B$, $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$.
   $\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$.
   $E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathscr{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathscr{L}^m$. ☐

6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \ \exists B_\epsilon \in \mathscr{L}^m$, такое что $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$ и $E \subset B_\epsilon$.
   Тогда $E \in \mathscr{L}^m$ и $\lambda_m E = 0$.

   Доказательство. $A_\epsilon := \varnothing \underbrace{\implies}_{\text{свойство (5)}}$ E – измеримое.

   $\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$. ☐

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

   Доказательство. Пусть $x \in IntE \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$. ☐

10. Если $\lambda e = 0$, то существуют кубические ячейки Q_j, такие что $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset e$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$.

    Доказательство. $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : \ P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \ \wedge \ \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$, нарезаем P_j на кубические ячейки. ☐

11. Если $m \geq 2$, то гиперплоскость $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : \ x_k = c\}$ имеет нулевую меру.

    Доказательство. $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$, $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Достаточно доказать, что $\lambda E_n = 0$. $E_n \subset Y := (-n, n] \times \ldots (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \ldots$.
    $\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$, так как n фиксированное, а ϵ – произвольное $\implies \lambda E_n = 0$. ☐

    Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединение таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12. $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$ – по предыдущему свойству.

`Замечание.` Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

`Замечание.` 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если $m \geq 2$, то пример это гиперплоскость $H_1(c)$ подходит.

Если $m = 1$, то подходит Канторого множество.

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0,1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{27}\cdots=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=0}$$

K – несчетно, $K = \{x \in [0,1] :$ в троичной записи нет цифр $1\}$, а у таких чисел есть биекция между $[0,1]$, просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

Теорема 1.19. (Регулярность меры Лебега).

Если E – измеримое, то найдется G – открытое, такое что оно накрывает E и мера зазора $< \epsilon$, то есть $E \subset G \ \wedge \ \lambda(G \setminus E < \epsilon)$.

Доказательство. $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : \ P_j$ – ячейка и $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$.

(1): Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем покртыие, для которого $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$.

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$, хотим $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$.

Тогда $G := \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b'_j)$ – открытое и $E \subset G$.

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}\right) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть $\lambda E = +\infty$. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, такие что $\lambda E_n < +\infty$.

Возьмем G_n – открытое $\supset E_n$, такое что $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$.

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое $G \supset E$.

$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}$. □

Следствие. 1. Если E – измеримо, то найдется $F \subset E$ – замкнутое, такое что $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$.

Доказательство. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$, такое что $\lambda\underbrace{(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E))}_{=E\setminus(\mathbb{R}^m\setminus G)=E\setminus F} < \epsilon$, где $F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое и $F \subset E$. □

2. Если E – измеримо, то

$\lambda E = \inf\{\lambda G : \ G$ – открытое и $G \supset E\}$.

$\lambda E = \sup\{\lambda F : \ F$ – замкнуто и $F \subset E\}$

$\lambda E = \sup\{\lambda K : \ K$ – компакт и $K \subset E\}$

Доказательство. $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$

Возьмем F – замкнутое из второго вывода и $K_n := [-n, n]^m \cap F$ – компакт. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$ и $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если $\lambda F = +\infty$, то есть K_n со сколь угодно большой мерой.

Если $\lambda F < +\infty$, то есть K_n, такие что $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$ □

3. Если E – измеримо, то сузествует последовательность компактов K_n, такая что компакты $K_n \subset K_{n+1}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, где $\lambda e = 0$.

   Доказательство. (1) Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем $\tilde{K_n} \subset E \ \wedge \ \lambda E < \lambda\tilde{K_n} + \frac{1}{n}$

   $K_n := \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{K_j} \subset E$, $\lambda E < \lambda\tilde{K_n} + \frac{1}{n} \le \lambda K_n + \frac{1}{n}$.

   $e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $\lambda e = \lambda E - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0$.

   (2) Пусть $\lambda E = +\infty$. Берем $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \ \lambda E_j < +\infty$.

   $E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j \ (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e$, где $e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \ \wedge \ \lambda e = 0$.

   Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет). $\square$

Упражнение. E – измеримое. Д-ть, что $\exists G_n$ – открытое $\supset E$, $G_n \supset G_{n+1}$, т.ч. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$, где $\lambda e = 0$.

Теорема 1.20. При сдвиге мн-ва на верктор $\vec{v}$ измеримость сохраняется и мера не изменяется.

Доказательство. $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$, μ, λ заданы на ячейках и на них совпадают $\implies \mu = \lambda$ по елдинственности продолжения. $\square$

Теорема 1.21. μ-мера на $\mathscr{L}^m$, т.ч.

1. μ – инвариантна относительно сдвигов.
2. μ конечна на ячейках = μ конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда $\exists k \in [0; +\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$ (т.е. $\mu E = k\lambda E \ \forall E \ \in \mathscr{L}^m$)

Доказательство. $Q := (0,1]^m$, $k := \mu Q$, $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1. $k = 1$. Надо доказать, что $\mu = \lambda$, достаточно доказать, что $\mu = \lambda$ на $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \implies$ достаточно доказать на $(0, \frac{1}{n}]^m$.

   Q можно сложить из n^m сдвигов $(0, \frac{1}{n}]^m$.

   $\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m}\mu Q = \frac{1}{n^m}\lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m$.

2. $k > 0$. $\nu E := \frac{1}{k}\mu E$. Тогда $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$.

3. $k = 0$. Покажем, что $\mu \equiv 0$.

   $\mu Q = 0$, $\mathbb{R}^m$ – счетное объединение сдвигов $Q \implies \mu\mathbb{R}^m = 0$.

$\square$

Теорема 1.22. $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, $\Phi : G \to \mathbb{R}^m$ непрерыно дифференцируема. Тогда

1. Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $\Phi(e)$ – мн-во нулевой меры.

2. Если E – измеримое, то $\Phi(E)$ – измеримое.

   `Замечание.` Для Φ – непрер. или даже дифф. это неверно.

Доказательство. Пункт (1):

Случаи:

1. $e \subset P \subset CLP \subset G$, P – ячейка $\implies ||\Phi'||$ непрерывно на $G \supset Cl\ P$ – компакт $\implies ||\Phi'|| \leq M$ на $Cl\ P$ (норма ограничена на замыкании P).

   $||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq ||\Phi'(c)|| \cdot ||x - y||$, где $x, y \in P$; $c \in P \implies ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq M||x - y||$

   Существуют кубические ячейки, такие что Q_j, т.ч. $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$

   Рассмотрим $\Phi(Q_j)$

   Пусть a_j – стороная кубика Q_j. $x, y \in Q_j \implies ||x-y|| < \sqrt{m} \cdot a_j$ (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка) $\implies ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq M\sqrt{m}a_j$.

   Зафиксируем x и меняем $y \implies \Phi(Q_j)$ содержится в шаре с центром в $\Phi(x)$ и радиусом $M\sqrt{m}a_j \implies \Phi(Q_j)$ содержатся в ячейке R_j со стороной $2M\sqrt{m}a_j$.

   $\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$

   $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M\sqrt{m})^m a_j^m = (2M\sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M\sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e)$ измеримо и $\lambda(\Phi(e)) = 0$.

2. e – произвольное $\subset G$, $\lambda e = 0$. Представим G как $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, где P_j – ячейка $Cl\ P_j \subset G$.

   $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j)$ – мн-ва нулевой меры $\implies \lambda(\Phi(e)) = 0$.

Пункт (2):

E – измеримое $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, $\lambda e = 0$, K_n – компакт $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$.

$\lambda(\Phi(e)) = 0$ и $\Phi(K_n)$ – компакт $\implies$ измеримое. □

Теорема 1.23. λ – инвариантна относительно движения.

Доказательство. Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что λ не меняется. Проверим поворот:

пусть $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U \text{ – линейное отображение}}$, μ, λ – заданы на $\mathscr{L}^m$.

μ – инварианта относительно сдвига. $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$. μ конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда $\mu = k\lambda$.

Хотим показать, что $k = 1$. Но на единичном шаре B, $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$. □

Теорема 1.24. (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – линейное, E – измеримое. Тогда $\lambda(TE) = |detT| \cdot \lambda E$

Доказательство. $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как T – лин. отображ.}}$, μ инвариантно относительно сдвига и конечно на огр. мн-вах. $\implies \mu k \cdot \lambda$, где $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |detT|$

□

Пример. неизмеримое мн-во в $\mathbb{R}$.

$x \sim y$ если $(x - y) \in \mathbb{Q}$ – отношение эквивалентности.

Разобьем $\mathbb{R}$ на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку $(0, 1]$.

A – получившееся мн-во. Докажем, что A не может быть измеримым.

От противного. Если $\lambda A = 0$, то $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$. Но тогда $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda\mathbb{R} = 0$ – противоречие.

Если $\lambda A > 0$. $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q},\ 0 \le r \le 1} \subset (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q},\ 0 \le r \le 1} \lambda(A + r) \le 2 \implies$ противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

2. Интеграл Лебега

2.1. Измеримые функции

***Определение* 2.1.** $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, лебеговы мн-ва функции f:

$E\{f \le a\} := \{x \in E : \ f(x) \le a\} = f^{-1}([-\infty, a])$

$E\{f < a\} := \{x \in E : \ f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$

$E\{f \ge a\} := \{x \in E : \ f(x) \ge a\}$

$E\{f > a\} := \{x \in E : \ f(x) > a\}$

Теорема 2.1. E – измеримое, $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, тогда равносильны:

1. $E\{f \le a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E\{f < a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $E\{f \ge a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $E\{f > a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство.

1. $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \le a\}$
2. $(2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \ge a\}$
3. $(1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \le a - \frac{1}{n}\}$
4. $(3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \ge a + \frac{1}{n}\}$

□

***Определение* 2.2.** $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\forall a \in \mathbb{R}$ все ее лебеговы мн-ва измер.

`Замечание.` E – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

Пример.

1. $f = const$, лебеговы множества: $\varnothing, \ X$.
2. $E \subset X$ – измеримое, $f = \not{\mathbb{K}}_E(x) = 1$, если $x \in E$, иначе 0.
   Лебеговы множества: $\varnothing, X, E, X \setminus E$.
3. $\mathscr{L}^m$ – лебеговская σ-алгебра на $\mathbb{R}^m$
   $f \in C(\mathbb{R}^m)$ – измеримая.
   $f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{измеримое}})$ – открытое $\implies$ измеримое.

Свойства.

1. $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\implies$ E – измеримое.
2. Если $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ измеримая и $E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0}$ – измеримое.

   Доказательство. $E_0\{g \le c\} = E\{\underbrace{f \le c}_{\text{измеримое}}\} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}$. □

3. Если f – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.

   Доказательство. $E\{a \le f \le b\} = E\{\underbrace{a \le f}_{\text{измеримое}}\} \cap E\{\underbrace{f \le b}_{\text{измеримое}}\}$. □

4. Если f – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

   Доказательство. $U \subset \mathbb{R}$ – открытое мн-во $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}}$. □

5. Если f – измеримая, то $|f|$ и f – измеримы.

   Доказательство. $E\{-f \le c\} = E\{f \ge -c\},\ E\{|f| \le c\} = E\{-c \le f \le c\}$. □

6. Если $f, g : E \to \bar{\mathbb{R}}$ измеримы, то $max\{f, g\}$ и $min\{f, g\}$ – измеримы.
   В частности, $f_+ = max\{f, 0\}$ и $f_- = max\{-f, 0\}$ – измеримы.

   Доказательство. $E\{max\{f, g\} \le c\} = E\{f \le c\} \cap E\{g \le c\}$ □

7. Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ f|_{E_n}$ – измерима $\forall n \implies f$ – измеримая.
   $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$.

   Доказательство. $E\{f \le c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\{f \le c\}$. □

8. Если $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то найдется $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, такая что $f = g|_E$

   Доказательство. $g(x) := 0$, если $x \notin E,\ f(x)$, иначе. □

Теорема 2.2. Пусть $f_n : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций. Тогда:

1. $\sup f_n,\ \inf f_n$ – измеримые.
2. $\underline{\lim} f_n$ и $\overline{\lim} f_n$ – измеримые.
3. Если существуют $\lim f_n$, то он измеримый.

Доказательство.
1. $E\{\sup f_n \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \le c\}$
2. $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \ge n} f_k$ и $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \ge n} f_k$
3. Если существует $\lim f_n$, то $\lim f_n = \underline{\lim} f_n$.

□

Теорема 2.3. Пусть $f_1, \ldots, f_m :\ E \to H \subset \mathbb{R}$ – измеримые, $\phi \in C(H)$, тогда $g : E \to \mathbb{R},\ g(x) := \phi(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ – измеримая.

Доказательство. $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$ – открытое в $H \implies \exists G$ – открытое в $\mathbb{R}^m$, т.ч. $U = H \cap G$

$\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки $(\alpha, \beta]$, что $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$ – измерима, $\bigcup_{k=1}^{n} E\{\alpha_k < f_k \le \beta_k\}$

□

Следствие. Если в теореме ϕ – поточечный предел непрерывных, то g – измерима.

Доказательство. $\phi = \lim \phi_n,\ \phi_n \vec{f}$ – измер. и поточечно стремится к $\phi_0 \vec{f}$ □

Арифметические операции в $\mathbb{R}$:

1. Если $x \in \mathbb{R}$, то $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и т.д.
2. $(+\infty) + (-\infty) = 0,\ (+\infty) - (+\infty) = 0,\ (-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$, то $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, где знак $\pm : \pm = +,\ \pm : \mp = -$
4. $0 \cdot \pm\infty = 0$ и $\frac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall x \in \bar{\mathbb{R}}$, т.е. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$.
5. Делить на 0 не умеем.

Теорема 2.4.

1. Произведение и сумма измереных ф-й – измеримая.
2. Если $f : E \to \mathbb{R}$ – измеримая и $\phi \in C(\mathbb{R})$, то $\phi \circ f$ – измеримая.
3. Если $f \geq 0$ – измеримая, то f_p $(p > 0)$ – измеримая, $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$, то $\frac{1}{f}$ – измерима на $\tilde{E}$.

Доказательство.

1. $f + g$. Если $f, g : E \to \mathbb{R}$, то $\phi(x, y) = x + y \implies \phi(f, g) = f + g$ – измерима.
   $E\{f \neq \pm\infty\},\ E\{f = +\infty\},\ E\{f = -\infty\}$
   $E\{g \neq \pm\infty\},\ \underbrace{E\{g = +\infty\}}_{=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}},\ E\{g = -\infty\}$
   Для первый выражений на обеих строчках верно, что они берутся из предыдущих теор., а на остальных пересеч. константы.
2. Частный случай предыдущей теоремы.
3. $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4. $f|_{\tilde{E}}$ – измерима и $\neq 0$

$$\tilde{E}\left\{\frac{1}{f} \leq c\right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, \text{ при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, \text{ при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < c\}, \text{ при } c < 0 \end{cases} \tag{3}$$

□

Следствие.

1. Произведение конечного числа измер. – измер.
2. Натуральная степень измер. ф-и – измер.
3. Линейная комбинация измер. ф-й – измер.

Теорема 2.5. $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $f \in C(E)$. Тогда f – измер. относительно меры Лебега.

Доказательство. $U := f^{-1}(-\infty, c)$ – открытое мн-во в $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, т.ч. $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$ □

***Определение* 2.3.** Измеримая ф-я – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение X – разбиение X на конечное число измер. мн-в, т.ч. на каждом мн-ве ф-я константа.

Следствие.

1. Если X разбито на конечное число измер. мн-в и f постоянна (то есть сужение на каждом кусочке X это какая-та константа) на каждом из них, то f – простая.

2. Если f и g – простые ф-и, то у них существует общее допустимое разбиение.

   Доказательство. $X = \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k}_{\text{допуст. для } f} = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j}_{\text{допуст. для } g} \implies X = \bigsqcup_{k=1}^{m}\bigsqcup_{j=1}^{n}(A_k \cap B_j)$ – допустимое для f и g. □

3. Сумма и произведение простых ф-й – простая ф-я.

4. Линейная комбинация простых ф-й – простая ф-я.

5. max и min конечного числа простых ф-й – простая ф-я.

Теорема 2.6. (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ – неотрицательная измеримая ф-я, тогда последовательность простых ф-й $\phi_1, \phi_2 \ldots$, такие что $\phi_i \le \phi i + 1 : \ \forall i$ в каждой точке и $\lim \phi_n = f$. Более того, если f – ограничена сверху, то можно выбрать ϕ_n так, что $\phi_n \rightrightarrows f$ на X.

Доказательство. $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ при $k = 0, \ldots, (n^2 - 1)$ и $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$.

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k, \ A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$ – измер. мн-во.

ϕ_n на A_k равно $\frac{k}{n} \implies 0 \le \phi_n(x) \le f(x) \ \forall x$ и $f(x) \le \phi_n(x) + \frac{1}{n}$ при $x \notin A_{n^2}$.

$\phi_n(x) \to f(x)$:

1. если $f(x) = +\infty$, то $x \in A_{n^2}^{(n)} \ \forall n \implies \phi_n(x) = n \to +\infty = f(x)$

2. если $f(x) \ne +\infty$, то $x \notin A_{n^2}^{(n)}$ при больших $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \le \phi_n(x) \le f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое n, а только степени двойки, тогда нам нужно взять $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ (тут должна быть картинка) □

2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание. $f_n, f : E \to \mathbb{R}$.

Поточечная сходимость: f_n к f, $\forall x \in E : f_n(x) \to f(x)$

Равномерная сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на E, $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

***Определение* 2.4.** $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ – измеримые.

f_n сходится к f **почти везде**, если $\exists e \subset E, \ \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, \ f_n(x) \to f(x)$

`Замечание.` Обозначение: $\mathcal{Z}(E) = \{f : E \to \mathbb{R}, \ \text{измеримых}, \ E\{f = \pm\infty \text{ имеет меру } 0\}\}$

Пусть $f_n, f \in \mathcal{Z}(E, \mu), \ f_n$ сходится к f почти везде.

$\exists e \subset E, \ \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus x, \ f_n(x) \to f(x)$

***Определение* 2.5.** $f_n, f \in \mathcal{Z}(E,\mu),\ f_n$ сходится по мере μ к f, если $\forall\epsilon > 0$,
$\mu E\{|f_n - f| > \epsilon\} \to_{n\to\infty} 0,\ f_n \to_\mu f$

Зависимость равномерная $\implies$ (поточечная $\implies$ почти везде) | (сходимость по мере).

Утверждение 2.7.
1. Если f_n сходится к f п.в. (почти везде) и f_n сходится к g п.в., то $f = g$ (за исключением мн-ва нулевой меры)
2. Если $f_n \to_\mu f$ и $f_n \to_\mu g$, то $f = g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство.
1. Берем $e \subset E,\ \mu e = 0$ и $\lim f_n(x) = f(x),\ \forall x \in E \setminus e$

   $\tilde{e} \subset E, \mu\tilde{e} = 0$ и $\lim f_n(x) = g(x),\ \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

   Из этого следует, что $f(x) = g(x)$ при $x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$
2. $\mu E\{f \neq g\} \underbrace{=}_{?} 0,\ E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^\infty E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}$.

   Достаточно доказать, что $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$.

   $E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

   $$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0\ ?} \cup \bigcap_{n=1}^\infty E\{|f_n - g| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\}$$

   Знаем, что $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \to 0$

   $\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ вложены по убыванию

   $\implies \bigcap_{n=1}^\infty \dots = \lim_N \left(\mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}\right) \leq \lim_N \left(\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}\right) = 0$

□

Теорема 2.8. Лебега.

Пусть $\mu E < +\infty$ и f_n сходится к f почти везде, $f_n, f : E \to \bar{\mathbb{R}}$.

Тогда f_n сходится к f по мере μ.

Доказательство. Найдется $e \subset E,\ \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in\subset E \setminus e,\ f_n(x) \to f(x)$.

Выкинем e и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\},\ \mu A_n \to 0$.

1. Частный случай ($f_n \searrow 0$): $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$.

   $\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \mu\varnothing = 0$.

   Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n \implies 0 \leftarrow f_n(x) > \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N} \implies$ таких x не существует.
2. Общий случай: $g_n(x) := \sum_{k\geq n}\{|f_k(x) - f(x)|\}$

   $\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k\geq n}\{\dots\} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$

   $\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\to 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$

   $E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$

□

`Замечание.` 1. Условие $\mu E < +\infty$ существенно.

$E = \mathbb{R},\ \mu = \lambda,\ f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty)} \underbrace{\to}_{\text{поточечно}} f \equiv 0$

$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\to 0.$

2. Обратное неверно: $E = [0,1),\ \mu = \lambda$

$\mathbb{1}_{[0,1)}\ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}\ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3})}\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}\ \mathbb{1}_{[\frac{2}{3},1)}$ – ни для какого аргумента нет предела: $[0,\frac{1}{n})\ [\frac{1}{n},\frac{2}{n})\ldots[\frac{n-1}{n},1)$

Теорема 2.9. Рисса.

Если $f_n \to_\mu f$, то существует подпоследовательность f_{n_k}, т.ч. f_{n_k} сходится к f почти везде.

Доказательство. $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

Выберем n_k так, что $n_k > n_{k-1}$, и $\mu \underbrace{E\{|f_{n_k} - f| > \dfrac{1}{k}\}}_{=:A_k} < \frac{1}{2^k}$

$B_n := \bigcup_{k=n}^\infty A_k,\ \mu B_n \le \sum_{k=n}^\infty \mu A_k < \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$

$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \implies \underbrace{\mu B}_{\mu B_n \to 0} = 0$, проверим, что если $x \notin B$, то $f_{n_k}(x) \to f(x)$, где $B := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$

$x \notin B \implies \exists m$, т.ч. $x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^\infty A_k$

$\implies x \notin A_k\ \forall k \ge m \implies \forall k \ge m\ \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\to_{k\to 0} 0} \le \frac{1}{k}$ ☐

Следствие. Если $f_n \le g$ и $f_n \underbrace{\to}_{\mu} f$, то $f \le g$за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. Выберем f_{n_k} сходится к f почти везде. Пусть e – исключ. мн-во $\mu e = 0$.

$\lim \underbrace{f_{n_k}}_{\le g(x)} = f(x) :\ \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \le g(x)$ при $x \in E \setminus e$ ☐

Теорема 2.10. Фреме.

Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ измерима относительно λ_m (мера Лебега), то $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. f_n сходится к f почти везде.

Теорема 2.11. Егорова.

Пусть $\mu E < +\infty,\ f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mu)$. Если f_n сходится к f почти везде, то найдется $e \subset E,\ \mu e < \epsilon$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus e$.

Теорема 2.12. Лузина.

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо, $f : E \to \mathbb{R}$ – измерима (относительно λ_m – мера Лебега). Тогда найдется $e \subset E,\ \mu e < \epsilon$, т.ч. $f|_{E|_e}$ – непрерывна.

Фреше + Егоров $\implies$ Лузин:

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – измеримое $\underbrace{\implies}_{\text{Фреше}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, f_n сходится к f почти везде $\underbrace{\implies}_{\text{Егоров}} \exists e :\ \lambda_m e < \epsilon$, т.ч. $f_n \underbrace{\rightrightarrows}_{\mathbb{R}^m \setminus e} f$, равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

2.3. Определение интеграла

Лемма. Пусть $f \geq 0$ простая функция $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_m$ – допустимые разбиения.

$a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ значения f на соответственных мн-вах.

Тогда $\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(E \cap B_j)$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^{m} b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

$(1) \underbrace{=}_{?} (2)$.

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если $A_k \cap B_j \neq \varnothing$, то $a_k = b_j$, если $A_k \cap B_j = \varnothing$, то $\mu(\ldots) = 0$. $\square$

***Определение* 2.6.** $f \geq 0$ простая $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E \cap A_k)$, где $A_1, \ldots, A_n$ – допустимые разбиения, $a_1, \ldots, a_n$ – соответст. значения.