Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

15 сентября 2022 г.

Содержание

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные оьозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B, такие что $A \cap B = \varnothing$

***Определение* 1.1.** Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

***Определение* 1.2.** E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E.

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

***Определение* 1.3.** – система подмн-в X: $A \subset 2^X$

1. (δ_0) если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0) если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ) если $A_n \in \mathcal{A},\ \forall n \implies \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ) если $A_n \in \mathcal{A},\ \forall n \implies \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.4.** $\mathcal{A}$ – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если $\mathcal{A}$ – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_{\alpha \in I}\mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

***Определение* 1.5.** $\mathcal{A}$ – алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симметр., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и $\forall A,\ B \in \mathcal{A}:\ A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри опр. алгебры).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.6.** $\mathcal{A}$ - σ-алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симм., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множетсв; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

`Замечание.` σ-алгебра $\implies$ алгебра.

Пример.

1. 2^X - σ-алгебра.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}$ - всевозможные огр. подмн-ва. $\mathbb{R}^2$ и их дополнения. ($\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра).

   Rem: огр. множество - в метрич. пр-ве это множетсво ограниченного диаметра ($d(x,\ y) := ||x - y||$), т.е. $sup\{d(x,\ y)\ |x,\ y \in X\}$ - ограничен.

3. $\mathcal{A}$ - алгебра (σ-алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ-алгебра).

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

5. $A, B \subset X$ что есть в адгебра, содержащей A, B:
$\varnothing, X, A, B, A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A, X\setminus A, X\setminus B, X\setminus(A\cup B), X\setminus(A\cap B), A\triangle B, X\setminus(A\triangle B), X\setminus(A\setminus B), X\setminus(B\setminus A)$.

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X, тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра (алгебра) $\mathcal{A}$, такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что $\mathcal{A}$ – наим. по вкл. $\mathcal{A} \subset A_\alpha\ \forall\alpha\in I$.

***Определение* 1.7.** 1. Такая σ-алгебра – борелевская оболка ϵ – $(\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ-алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ-алгебра $(\mathcal{B}^n)$.

Замечание. континуальное – $\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$ – больше.

$\square$

***Определение* 1.8.** R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A\cup B, A\cap B, A\setminus B \in R$.

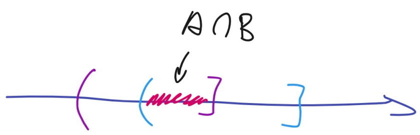
Замечание. Кольцо + $(X \in R) \implies$ алгебра.

***Определение* 1.9.** P – полукольцо, если

1. $\varnothing \in P$
2. $\forall A, B \in P \implies A\cap B \in P$
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in P$, такие что $A\setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

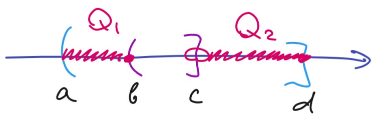
Свойство 2:



$\Rightarrow A\cap B \in P$

$(\,] =: A \quad (\,] =: B$

Свойство 3:



$(a;d] =: A \quad (a;b] = Q_1$

$(b;c] =: B \quad (c;d] = Q_2$

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)}_{B_n}$.

Доказательство. $\supset$: Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \varnothing \implies B_n \cap B_m = \varnothing$.

$\subset$: Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m, такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. □

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n. База – опр. полукольца. Переход $(n \to n+1)$: $P \setminus$

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

2. $$\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

□

`Замечание.` В (2) можно писать $n = \infty$.

***Определение* 1.10.** $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-ва X.

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-ва Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.
$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

□

`Замечание.` Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

***Определение* 1.11.** Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$

Открытый параллелепипед:

$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$

Ячейка:

$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$

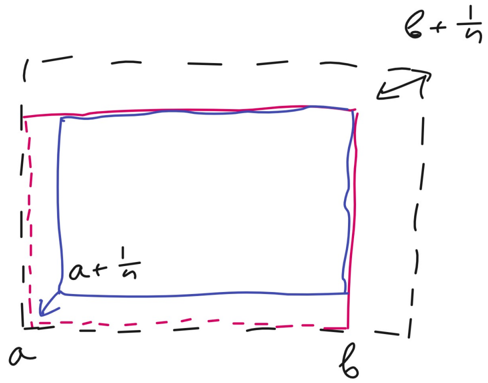
Теорема 1.5. Непустая ячейка – перечисление убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$P_n \supset P_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$

$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \dots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$

$Q_n \subset Q_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$



$\square$

Обозначения: $\mathcal{P}^m$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$.

$\mathcal{P}^m_Q$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами вершин.

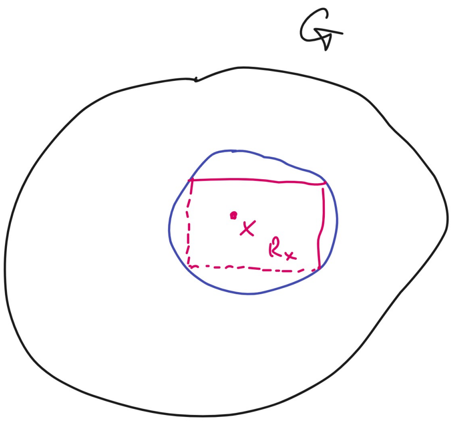
Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}^m_Q$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$\mathcal{P}^m_Q = \mathcal{P}^{m-1}_Q \times \mathcal{P}^1_Q$ $\square$

Теорема 1.7. $G \neq \varnothing$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объелинение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ $\square$

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_Q \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_Q) \supset \mathcal{B}^m$ $\square$

1.2. Объем и мера

***Определение* 1.12.** $\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n P_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

***Определение* 1.13.** μ – мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k\right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^\infty \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\varnothing = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. $\mathcal{P}^1$, $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ – нестрого монотонная

   (a) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).

3. $\mathcal{P}^m$ (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$, $a := (a_1,\ \dots,\ a_m)$, $b := (b_1,\ \dots,\ b_m)$ – классический объем.

4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} \text{a},\ if\ x_0 \in A \\ 0,\ otherwise \end{cases} \tag{1}$$

   μ - мера.

5. $\mathcal{P}$ – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1,\ if\ x_0 \in A \\ 0,\ otherwise \end{cases} \tag{2}$$

   μ - объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ - объем на полукольце $\mathcal{P}$

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu\tilde{P}$
2. (a) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$

   (b) Пункт (a), но $n = \infty$
3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев типо.

2. (a) $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

(b) $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^{n} \mu P_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \le \mu P$

3. $P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ - полукольцо), $\quad P = \bigcup_{k=1}^{n} P'_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\le \mu P'_k \le \mu P_k \ \ (property\ \ 2(a).)} \le \sum_{k=1}^{n} \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо и A, B $(B \subset A) \in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$

Если $\mu B \neq +\infty$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$

Теорема 1.9. $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-в X, μ– объем на $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-в Y, ν– объем на $\mathcal{Q}$

$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q$, где $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$

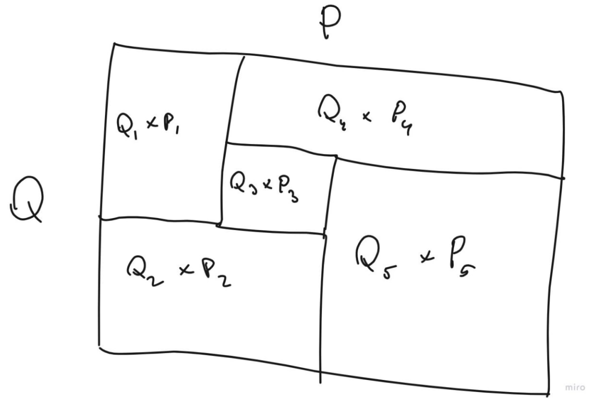
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$, тогда:

$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} P_k \times Q_j$, докажем, что $\underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^{m} \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$

Общий случай.



$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$

$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup_{k=1}^{N} P'_k$

$Q = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j = \bigsqcup_{j=1}^{M} Q'_j$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.

(Rem: $lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множетсво, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \to \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1. $\sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (*)$.

2. $\sum_{k:\ t_k \in A} w_k\ (**)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (***)$.

1. $\mu A = \sum_{k:\ t_k \in A} w_k\ (**) \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \varnothing\ (\forall i,\ j :\ i \neq j)$, то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (***) \geq \sum_{k:\ t_k \in A}$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

   Итого имеем равенство:

   $(**) = (***) :\ \sum_{k:\ t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$, чтд.

   (От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

$\square$

Теорема 1.10. О счетной аддитивности меры μ-объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда μ-мера $\Leftrightarrow$ если $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\ P, P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$ (счетная полуаддитивность).

Доказательство. "$\leftarrow$": Пусть $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, тогда нажо д-ть, что $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$: для "$\leq$" – счетная полуаддитивность, для "$\geq$" – усиленная монот. объема.

"$\to$": $P'_n := P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n}$ – усиленная монот. объема. $\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$. $\square$

Следствие. Если μ-мера на σ-алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

Доказательство. $\mu A_n = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$. $\square$

Теорема 1.11. о непрерывности меры снизу.

μ-объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ-мера $\Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$ – непр. меры снизу.

Доказательство. "$\to$": $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1},\ A_0 = \varnothing$.

B_n – дизъюнктны: $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu \bigsqcup B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu B_k = \lim \mu A_n$.

"$\leftarrow$": Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k,\ A_n \subset A_{n+1},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)} = \lim \mu A_n = \lim \mu \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \lim \sum_{k=1}^{n} \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n \qquad \square$$

Теорема 1.12. о непрерывности меры сверху.

μ– объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$.

Тогда равносильны:

1. μ– мера
2. если $A_n \supset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu A_n$
3. если $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim \mu A_n = 0$.

Доказательство. (1) $\implies$ (2): $A_n \supset A_{n+1} \implies B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\implies \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3) $\implies$ (1): $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, тогда $\lim \mu A_n = 0$.

$C = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \sqcup A_n \implies \mu C = \sum_{k=1}^{n} \mu C_k + \mu A_n$. $\square$

Следствие. Если μ– мера, то $A_n \supset A_{n+1}$ и для некоторого m $\mu A_m < +\infty$

Доказательство. $X := A_n$ $\square$

Упражнение. Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

1.3. Продолжение мер

***Определение* 1.14.** $\nu : 2^X \to [0; +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu\varnothing = 0$
2. монотонность: если $A \subset B$, $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

`Замечание.` 1. счетная полуаддитивность $\implies$ конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности) $A \subset B$, $n = 1$.

***Определение* 1.15.** μ– полная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$.

`Замечание.` это означает, что $\mu A = 0$.

***Определение* 1.16.** ν – субмера, назовем $E \subset X$ ν-измеримым, если $\forall A \subset X$ $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

`Замечание.` Достаточен знак "$\geq$" (следует из счетной полуаддитивности).

Теорема 1.13. Каратеодори. Пусть ν– субмера. Тогда ν-измеримое мн-во образует σ-алгебру и сужение νна эту σ-алгебру – полная мера.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ ν-измеримые мн-ва.

1. Если $E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.
   $\forall A \subset X,\ \nu A \underbrace{\geq}_{?} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$
   $A \cap E \subset E,\ \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$, тогда доказали вопросик сверху.
2. $\mathcal{A}$ – симметричное семейство мн-в.
   $E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$
   $A \cap E = A \setminus (X \setminus X)$
   $A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$
3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$
   $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \nu(A \cap (E \cup F)) +$
   $\nu(A \setminus (E \cup F))$
4. $\mathcal{A}$ – алгебра.
5. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathcal{A} \underbrace{\implies}_{?} E \in \mathcal{A}$.
   $$\nu A = \nu(A \cap \textstyle\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \underbrace{\nu(A \cap \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies$$
   $$\implies \nu A \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E).$$
6. Если $E_n \in \mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}$, то $E \in \mathcal{A}$.
7. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.
8. ν– мера на $\mathcal{A}$.
   $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \underbrace{\implies}_{?} \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n$ (leq уже есть).
   Докажем, что $\nu E \geq \sum_{k=1}^{n} \nu E_k$. Знаем, что $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \nu E_k$

□

***Определение* 1.17.** μ– мера на полукольце $\mathcal{P}$, $A \subset X$.
$\mu^* A := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k :\ P_k \in \mathcal{P}\ \wedge\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\}$
если покрытия нет, то $+\infty$.
– внешняя мера, порожд. μ.

`Замечание.` 1. Можно считать, что P_k – дизъюнктны

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk},\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n=m_k} \mu Q_{nk} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

2. Если μ задана на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то $\mu^* A = \inf\{\mu B \ :\ B \in \mathcal{A} \ \wedge \ A \subset B\}$

Теорема 1.14. Пусть μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда μ^* – субмера, совпадающая с мерой μ на полукольце $\mathcal{P}$.

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{P}$, хотим доказать, что $\mu A = \mu^* A$.

"$\ge$": очевидно, так как множество покрывает само себя. $\mu^* A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ :\ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$

"$\le$": $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \underbrace{\implies}_{\text{счетная полуаддитивность}} \quad \mu A_n \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \le \inf = \mu^* A$

2. μ^* – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\implies}_{?} \mu^* A \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A + \epsilon$

$\mu^* A_n = \inf \ldots$, берем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^* A \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ – устремляем ϵ к нулю.

□

***Определение* 1.18.** Стандартное продолэение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$. μ_0^* – внешняя мера, порождающая μ_0 – субмера, и сужаем ее на все μ_0^* – измеримые мн-ва.

Получилась полная мера μ на σ-алгебра $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ для $P \in \mathcal{P}$.

Обозначение мн-ва из $\mathcal{A}$ назовем μ-измеримыми.

Теорема 1.15. Это действительно продолжение, то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$.

Доказательство. Надо доказать, что $E \in \mathcal{P} \ \wedge \ A \subset X$, $\mu_0^* A \ge \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$.

Рассмотрим случаи:

1. $A \in \mathcal{P}$.

   $\mu_0^* A = \mu_0 A,\ \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$

   $A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^{n} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{P}$

   $$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} Q_k \implies \mu_0^* A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu_0 Q_k}_{\ge \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2. $A \notin \mathcal{P}$.

   Если $\mu_0^* A = +\infty$, то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

   Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$. Возьмем $P_k \in \mathcal{P}$, такое что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$.

   Знаем, что $\mu_0^* P_k \ge \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

   $$\mu_0^* A + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \ge \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\ge \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(P_k \setminus E)) \ge \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\ge \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(P_k \cap E)) \ge \mu_0^*(A \cap E)}$$

□

`Замечание.` 1. Дальше мера и ее продолжение обозначаем как μ.

Если A – μ-измеримое множество, то $\mu A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \ \land \ P_k \in \mathcal{P}\}$

2. Стандартное продолжение, применеое к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

   Упражнение. Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же врешнюю меру, что и μ.

3. Можно ли распространить меру на более широкую σ-алгебру.

4.

   ***Определение* 1.19.** ν – σ-конечная мера на полукольце $\mathcal{P}$, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \ P_n \in \mathcal{P} \ \land \ \mu P_n < +\infty$.

   Можно ли по-другому продолжить на σ-алгебру μ-измерим. мн-в?

   Если μ – σ-конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на μ-измеримых множествах.

   Если μ – σ-конечная мера, то обязательно.

Теорема 1.16. μ-стандартное продолжение меры с полукольца $\mathcal{P}$. μ^* – соответствующая внешняя мера, $A \subset X$, $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$, такие что $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \ C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n, C \supset A \land \mu^* A = \mu C$.

Доказательство. $\mu^* A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \ \land \ P_k \in \mathcal{P}\}$, берем покрытие с суммой $< \mu^* A + \frac{1}{n}$.

$\mu C_n \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \ C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A$.

$\mu^* A \le (\mu^* C = \mu C) \le \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$ □

Следствие. μ-стандартное продолжение с полукольца $\mathcal{P}$. A – μ-измеримое мн-во и $\mu A < +\infty$. Тогда $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем $C \underbrace{\in \mathcal{B}(\mathcal{P})}_{\text{получаем автоматически}}$ из теоремы. $A \subset C$, и $\mu A = \mu C$.

$e_1 := C \setminus A, \ \mu e_1 = 0$, теперь подставляем e_1 в теорему:

найдется $e_2 : \ e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \ \land \ e_2 \supset e_1 \ \land \ \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A$.

$C \setminus e_2 \subset B \subset C$, $\mu C = \mu C - \mu e_2 \le \nu B \le \mu C \implies \mu B = \mu A$. $e = A \setminus B \implies \mu e = 0$

□

Теорема 1.17. Единственность продолжения μ-стандартное продолжение с полукольца $\mathcal{P}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}$.

ν – другая мера на $\mathcal{A}$, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$. Если μ – σ-конечная, то $\mu = \nu$.

Доказательство. Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \ P_n \in \mathcal{P}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \ge \nu A$ (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$\mu A = \inf\{\sum \mu P_n\} \ge \nu A$.

Возьмем $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$: $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \le \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если $\mu P < +\infty$, то равенство вместо неравенства.

$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$

$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k$, т.ч. $\mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$

$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A$ $\square$

1.4. Мера Лебега

Теорема 1.18. Классический объем λ_m на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ – мера.

Доказательство. $(a;b] = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k;b_k] \underbrace{\implies}_{?} \lambda(a;b] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(a_k;b_k]$.

$(a;b] \supset [a';b] \supset (a';b]$, т.ч. $\lambda(a;b] < \lambda(a';b] + \epsilon$.

$(a_k;b_k] \subset (a_k;b_k') \subset (a_k;b_k'],\ \lambda(a_k;b_k'] < \lambda(a_k;b_k] + \frac{\epsilon}{2^k}$

компакт – $[a';b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k;b_k')$, выбираем конечное подпокрытие.

$(a',b] \subset [a',b] \subset \sum_{k=1}^{n}(a_k;b_k') \subset \bigcup_{k=1}^{n}(a_k;b_k']$.

λ – объем $\implies$ конечная полуаддитивность

$\lambda(a';b] \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(a_k;b_k'] < \sum_{k=1}^{n}(\lambda(a_k;b_k] + \frac{\epsilon}{2^k}) < \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda[a_k;b_k] + \frac{\epsilon}{2^k})$

$\square$