

Функциональное программирование

Денис Николаевич Москвин

6 сентября 2022 г.

Содержание

1. Лямбда-исчисление	2
1.1 Функциональная модель вычислений	2
1.2 Чистое λ -исчисление	3
1.3 Отношение эквивалентности на термах	4
2. Рекурсия и редукция	6
2.1 Теорема о неподвижной точке	6
2.2 Редексы и нормальная форма	7
2.3 Теорема Черча-Россела	7
2.4 Стратегии редукции	8

Все презентации можно найти тут [ТЫК](#).

1. Лямбда-исчисление

1.1. Функциональная модель вычислений

Типы программирования:

1. **Императивное** – инструкции выполняются последовательно (общение с вычислителем). Результат – выполнение последней инструкции.
2. **Функциональное** – программа это выражение, его выполнение это вычисление (редукция) выражения. Результат – отсутствие редексов (подвыражения, которые могут быть вычислены непосредственно).

Определение 1.1. Связывание – символ равенства ($a = 2 \cdot 7 + 1$), имя слева становится редексом (будет происходить подстановка наряду со встроенными правилами).

Пример.

$$z \cdot 4 + 1 \rightarrow (2 \cdot 7 + 1) \cdot 4 + 1 \rightarrow \dots$$

Определение 1.2. Рекурсивное связывание – символ равенства ($x = 2 \cdot x + 1$), имя слева становится редексом, такие выражения расходятся (так как нет терминирующего условия).

Пример.

$$x \cdot 2 \rightarrow (2 \cdot x + 1) \cdot 2 \rightarrow \dots$$

Определение 1.3. Лямбда абстракция (анонимная функция) – $\lambda \underbrace{y}_{\text{абстрактор}} \rightarrow \underbrace{2 \cdot y + 3}_{\text{тело}}$, чтобы применить функцию к аргументу, то мы записываем справа от тела аргумент.

Определение 1.4. Вычисление (β -редукция) – просто подстановка вместо абстрактора самого аргумента.

Пример. Заведем функцию:

$$f = \lambda y \rightarrow 2 \cdot y + 1$$

Стратегии редукции:

1. В Haskell используется **ленивая** стратегия: сокращается самый левый внешний редекс: $(\lambda y \rightarrow 2 \cdot y + 3)(4 + 6) \rightarrow_{\beta} 2 \cdot (4 + 6) + 3 \rightarrow (8 + 12) + 3 \rightarrow 20 + 3 \rightarrow 23$
2. Была еще **энергетическая**, но я не успел. Кто-нибудь добавьте, если хочется.

Пример. Тут был пример с факториалом.

Определение 1.5. Функция нескольких переменных – $\lambda n \rightarrow 2 \cdot m + 3 \cdot n$, тут свободная переменная это m , можно продолжить выражение, чтобы получиться замкнутое выражения (все переменные связанные): $\lambda m \rightarrow (\lambda n \rightarrow 2 \cdot m + 3 \cdot n)$.

Вызываем функцию так: $(\lambda m \rightarrow (\lambda n \rightarrow 2 \cdot m + 3 \cdot n)15)4$ – вместо m подставится 15, а вместо n – 4.

1.2. Чистое λ -исчисление

Определение 1.6. λ -терм – переменная, либо аппликация, либо абстракция.

$$x \in V \implies x \in \Lambda$$

$$M, N \in \Lambda \implies (MN) \in \Lambda$$

$$M \in \Lambda, x \in V \implies (\lambda x, M) \in \Lambda$$

Пример. λ -термы:

1. x
2. $(x\ z)$
3. $(\lambda x. (xz))$
4. $((\lambda x. (xz))\ y)$
5. ...

Каждый следующий терм содержит предыдущий как подтерм.

Замечание. Имеются следующие обозначения:

1. Внешние скобки опускаются
2. Применение ассоциативно влево: $FXYZ == ((FX)Y)Z$
3. Абстракция ассоциативна вправо: $\lambda xyz == \lambda x.(\lambda y.(\lambda z.M))$

Определение 1.7. β -редукция – $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta [x \mapsto N]M$ – подстановка N вместо x в M .

Определение 1.8. Применение вида $(\lambda x.M)N$, в которой левый аппликанд является абстракцией, называют β -редексом.

Определение 1.9. Шаг вычисления по приведенному выше правилу называют сокращением редекса.

Определение 1.10. В чистом λ -исчислении нет ничего кроме переменных, применения, абстракции и редукции.

todo

Определение 1.11. Множество $FV(T)$ свободных переменных в терме T :

$$FV(x) \implies \{x\}$$

$$FV(MN) \implies FV(M) \cup FV(N)$$

$$FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$$

Определение 1.12. Множество $BV(T)$ связанных переменных в терме T :

$$BV(x) \implies \emptyset$$

$$BV(MN) \implies BV(M) \cup BV(N)$$

$$BV(\lambda x.M) \implies BV(M) \cup \{x\}$$

Определение 1.13. M – замкнутый λ -терм (комбинатор), если $FV(M) = \emptyset$. Множество замкнутых λ -термов обозначается Λ^0 .

Пример. I – комбинатор.

$$I = \lambda x.x$$

$$IM \rightarrow_I (\lambda x.x)M \rightarrow_\beta M$$

Пример.

$$\omega = \lambda x.xx$$

$$\Omega = \omega\omega \rightarrow_\Omega (\lambda x.xx)\omega \rightarrow_\beta \omega\omega$$

Определение 1.14. α -редукция – $\lambda x.x \rightarrow_\alpha \lambda y.y$

1.3. Отношение эквивалентности на термах

Определение 1.15. Подстановка – $[x \mapsto N]M$. Правила подстановки:

1. $[x \mapsto N]x = N$
2. $[x \mapsto N]y = y$
3. $[x \mapsto N](PQ) = ([x \mapsto N]P)([x \mapsto N]Q)$
4. $[x \mapsto N](\lambda x.P) = \lambda x.P$
5. $[x \mapsto N](\lambda y.P) = \lambda y.[x \mapsto N]P : y \notin FV(N) - y$ – не свободная переменная.
6. $[x \mapsto N](\lambda y.P) = \lambda y'. [x \mapsto N]([y \mapsto y']P) : y \in FV(N) -$ иначе.

Лемма. (О подстановке) Подстановки не коммутируют, однако верна $M, N, L \in \Lambda$. Предположим, что $x \neq y$ и $x \notin FV(L)$. Тогда $[y \mapsto L]([x \mapsto N]M) \equiv [x \mapsto [y \mapsto L]N]([y \mapsto L]M)$

Доказательство. Нудная индукция по всем 6ти случаям, с разбором всех подслучаев. \square

Определение 1.16. β -эквивалентность (хотим все свойства отношения эквивалентности). $\forall M, N \in \Lambda : (\lambda x.M) =_\beta [x \mapsto N]M$.

Логические аксиомы этого правила:

1. $M =_\beta M$
2. $M =_\beta N \implies N =_\beta M$
3. $M =_\beta N, N =_\beta L \implies M =_\beta L$

Правила совместимости:

1. $M =_\beta M' \implies MZ =_\beta M'Z$
2. $M =_\beta M' \implies ZM =_\beta ZM'$

$$3. M =_{\beta} M' \implies \lambda x.M =_{\beta} \lambda x.M'$$

Если $M =_{\beta} N$ доказуемо в λ -исчислении, пишут $\lambda \vdash M =_{\beta} N$.

Определение 1.17. α -эквивалентность – $\lambda x.M =_{\alpha} \lambda y.[x \mapsto y]M$, если $y \notin FV(M)$ (переименование переменных). (там еще была табличка с аксиомами, посмотрите в презентации)

Определение 1.18. η -эквивалентность – $\lambda x.Mx =_{\eta} M$. Смысл в том, что аппликативное поведение термов слева и справа от знака равенства одинаково: для произвольного N верно: $(\lambda x.Mx)N =_{\beta} MN$.

2. Рекурсия и редукция

2.1. Теорема о неподвижной точке

Отношение β -эквивалентности, основанное на схеме β -преобразования: $(\lambda n.M)N =_\beta [n \mapsto N]M$ дает возможность решать простейшие уравнения на термы.

Пример. Найти F , такой что $\forall M, N, L : \Lambda \vdash FMNL =_\beta ML(NL)$.

$$\begin{aligned} FMNL &= ML(NL) \\ FMNL &= (\lambda l.Ml(Nl))L \\ FMN &= \lambda l.Ml(Nl) \\ FM &= \lambda n.\lambda l.Ml(nl) \\ F &= \lambda mnl.ml(nl) \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим рекурсивное уравнение:

$$\begin{aligned} FM &= MF \\ FM &= (\lambda m.mF)M \\ F &= \lambda m.mF \\ F &= (\lambda f m.mf)F \end{aligned}$$

терм F – неподвижная точка, научившись их искать, можно решать рекурсивные уравнения.

Теорема 2.1. $\forall \lambda$ -терма $F \exists$ неподвижная точка: $\forall F \in \Lambda. \exists X \in \Lambda. \lambda \vdash FX =_\beta X$.

Доказательство. $W \equiv \lambda x, F(xx) \wedge X \equiv WW$. Тогда $X \equiv WW \equiv (\lambda x.F(xx))W =_\beta F(WW) \equiv FX - X$ - неподвижная точка. \square

Теорема 2.2. (О комбинаторе неподвижной точки)

$$\exists Y : \forall F \in \Lambda, \lambda \vdash F(YF) =_\beta YF.$$

Доказательство. $Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$. Имеем

$$YF =_\beta (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)) =_\beta F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))) =_\beta F(YF)$$

\square

Пример. Тут пример с рекурсивным вычислением факториала (todo)

2.2. Редексы и нормальная форма

Определение 2.1. Отношение редукции:

1. $KI \rightarrow_\beta K_*$ - редуцируется за один шаг.
2. $IIK_* \rightarrow_\beta K_*$ - редуцируется.
3. $KI =_\beta IIK_*$ - конвертируемо.

Определение 2.2. Бинарное отношение β -редукции за один шаг $\rightarrow_\beta \Lambda$.

$$\begin{aligned} (\lambda x.M)N &\rightarrow_\beta [x \rightarrow N]M \\ M \rightarrow_\beta N &\implies ZM \rightarrow_\beta ZN \\ M \rightarrow_\beta N &\implies MZ \rightarrow_\beta NZ \\ M \rightarrow_\beta N &\implies \lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.N \end{aligned}$$

Пример. тут пример: todo

Определение 2.3. Бинарное отношение β -редукции \rightarrow_β над Λ (индуктивно):

$$\begin{aligned} M &\rightarrow_\beta M(\text{refl}) \\ M \rightarrow_\beta N &\implies M \rightarrow_\beta N(\text{sym}) \\ M \rightarrow_\beta N, N \rightarrow_\beta L &\implies M \rightarrow_\beta L(\text{trans}) \end{aligned}$$

Определение 2.4. Бинарное отношение $=_\beta$ над Λ (индуктивно, отношение конвертируемости):

$$\begin{aligned} M \rightarrow_\beta N &\implies M =_\beta N \\ M =_\beta N &\implies N =_\beta M \\ M =_\beta N, N =_\beta L &\implies M =_\beta L \end{aligned}$$

Утверждение 2.3. Новая β -конвертируемость и старая β -эквивалентность это одно и то же: $M =_\beta N \Leftrightarrow \lambda \vdash M =_\beta N$.

Определение 2.5. λ -терм M находится в β -нормальной форме (β -NF), если нет подтермов, являющихся β -редексами.

Определение 2.6. λ -терм M имеет β -нормальной форму, если $\exists N : M =_\beta N$ и $N \in \beta\text{-NF}$.

2.3. Теорема Черча-Россела

Теорема 2.4. Если $M \rightarrow_\beta N, M \rightarrow_\beta K : \exists L : N \rightarrow_\beta L \wedge K \rightarrow_\beta L$ (свойство ромба/конфлюентность).

Следствие. Теорема о существовании общего редукта:

$$M =_\beta N : \exists L : M \rightarrow_\beta L \wedge N \rightarrow_\beta L$$

Следствие. Теорема о редуцируемости к NF:

$$\text{Если } M \text{ имеет } N \text{ в качестве } \beta\text{-NF, то } M \rightarrow_\beta N$$

Следствие. Теорема о единственности NF:

$$\lambda\text{-терм имеет не более одной } \beta\text{-NF.}$$

Утверждение 2.5. Все затевалось для того, чтобы доказывать неравенства: берем термы, сводим к нормальной форме, если не совпели, то не равны, иначе равны (Если какие-то термы расходятся, то ничего сказать нельзя).

2.4. Стратегии редукции

Духотица, читайте презу [здесь](#).