ESATIC
Licence 1 : SRIT - TWIN
Fonction d'une variable réelle

République de Côte d'Ivoire
Année académique 2023-2024

TD : Fiche N^o2

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que,*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. *Montrer que f est impaire.*
2. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.*
3. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.*
4. *Démontrer que pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*
$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$$
(on pourra écrire $p = q \times \frac{p}{q}$).
5. *Conclure qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.*

Exercice 2.

1. *En utilisant la définition, montrer que :*
   (a) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$
   (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^4} = +\infty.$
2. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-x}}{\sin 5x}$ *en utilisant la règle de l'Hospital.*
3. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \sin(3x)}{\ln(1+x)}$.
4. *Montrez que la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.*
5. *Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $]0, 1[$.*

Exercice 3.

1. *En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'entre deux solutions réelles de $e^x \sin(x) = 1$, il existe au moins une solution réelle de $e^x \cos(x) = -1$.*
2. *Montrer pour tout $x > 0$ que* $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. *Montrer que $x_0 = -\dfrac{7}{2}$ est un minimum local de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 7x + 3$.*

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\sin x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x + 2x + 1 - E(x))$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.*

1. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
3. $f(x) = (x-1)(\ln(x-1))$

Exercice 6

Calculer la dérivée

1. $f : x \mapsto \cos^7 x$
2. $x \mapsto x^x$
3. $f(x) = \sqrt{(x^4+1)^3}$
4. $f : x \mapsto x \ln|x+1|$
5. $f : x \mapsto x^4 e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.*
2. *La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?*
3. *La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 8

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, détermin[er, pour] tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

b) **Exercice 9**

- Étudier

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \qquad f(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Exercice 10. *On considère deux nombres réels a et b strictement positifs tes que $a < b$*

1. *Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.*
2. *En déduire l'existence d'un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$.*
3. *démontrer que*

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

Exercice 11.

Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x(x-1)(x-4)$.
2. *cosinus.*

Éxercice12. *On considère l'astroïde de paramétrisation* $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$

Réduire l'intervalle d'étude et tracer son support Γ.

Exercice 13. *Étudier et tracer la courbe paramétrée définie par :* $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Exercice 14. *Etudier et tracer le courbe definie par l'équation polaire :* $\rho(\theta) = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$

Exercice 15

Simplifier, quand là où elles sont définies, les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$
2. $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$
3. $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$
4. $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$
5. $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$
6. $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x)$

Exercice 16

1. *Soit $x \in [-1,1]$. Simplifier :*
   (a) $\cos(\arcsin x)$
   (b) $\sin(\arccos x)$.
2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier :*
   (a) $\cos(3\arctan x)$
   (b) $\cos^2(\frac{1}{2}\arctan x)$.