

FICHE DE T D N° 1

Exercice 1.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$A = \frac{x^5 + x^2 + 2}{(x+2)^4} \quad B = \frac{x^3 + 7x^2 + 6x + 2}{x^2(x-2)^2(x^2+1)}.$$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$C = \frac{2x^2 - 5x}{(x+2)(x^2+x+2)^2}$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}.$
2. $I_2 = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2 \tan^2 x}.$
3. $I_3 = \int \frac{6x^4 - 4x^3 + 3x^2}{2x^2 - x + 1} dx$
4. $I_4 = \int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$
5. $I_5 = \int \sqrt{\frac{1+2x}{x-3}} dx$
6. $I_6 = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x+x^2}}$
7. $I_7 = \int \sqrt{3+x+x^2} dx$
8. $I_8 = \int \sin^3(x) \cos^5(x) dx$
9. $I_9 = \int \sin^2(x) \cos^4(x) dx$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int 2x\sqrt{2x-1} dx$
2. $I_2 = \int x^2 e^{2x} dx$

3. $I_3 = \int \cos x e^x dx$
4. $I_4 = \int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos x}$
5. $I_5 = \int \frac{1}{\cos(t)} dt.$
6. $I_6 = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{25 - 9x^2}} dx$

Exercice 4.

1. Calculer la limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$ des suites (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$)

- (a) $t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \sqrt{\frac{k}{k+n}};$
- (b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right);$
- (c) $v_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}.$

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n-k}{n^3 + n^2 k}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

Exercice 5.

Considérons les équations

1. $(E_1) : y'(x)y(x) = ay''(x) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$
2. $(E_2) : y''(t) = f$ où f est une fonction fixée.
3. $(E_3) : (y''(x))^2 + a^4 y'(x) - 5x = 0, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$
4. $(E_4) : y'(t) = \frac{y(t)}{e^t}.$

Pour chaque Equation, dire si elle est linéaire, dire si est-elle homogène et donner son ordre. (On mettra les réponses dans le tableau suivant que l'on recopiera sur la feuille de composition)

| Equation | est linéaire | est homogène | son ordre est |
|----------|--------------|--------------|---------------|
| (E_1) | | | |
| (E_2) | | | |
| (E_3) | | | |
| (E_4) | | | |

Exercice 6. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 3y(x) = 4$ pour $x \in \mathbb{R}.$
2. $\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1}{x}$ pour $x > 0.$

3. $y' + 2y = x - (x + 1)e^{-2x} + \cos 3x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. $y'(x) - \tan(x)y(x) = \sin(x)$ pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
5. $x^2 y'(x) - (2x - 1)y(x) = x^2$, $y(1) = 1$, $x > 0$.

Exercice 7. Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 5y' + 4y = e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
3. $y'' + y' - 2y = x \exp(-2x)$
4. $y'' + 2y' + 5y = [3 \cos(2x) - 2 \sin(2x)] \exp(-x)$