ALGEBRE LINEAIRE

ESATIC UP MATHS

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
Im	Image d'une application
$\ker$	Noyau d'une application linéaire
$\oplus$	La somme directe
$\sum$	Symbole de sommation
$\prod$	Symbole du produit
$\cap$	L'intersection
$\cup$	L'union
$\neq$	La non égalitïé
$\subset$	L'inclusion
$\in$	Appartenance
$\notin$	non Appartenance
$\forall$	Symbole universel "pour tout"
$\exists$	Symbole universel "il existe"

INTRODUCTION

La Géométrie des Grecs (et l'Arithmétique) est (sont) l'origine arbitraire de notre repère temporel, puis vint René Descartes qui, avec son système de repère et de coordonnées, a fait émergé l'algèbre de la géométrie et la géométrie de l'algèbre, le tout sous le vocable de géométrie analytique ou d'algèbre linéaire quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate. L'algèbre est la science des équations, cette science des équations consiste à :

1. ***la recherche de l'ensemble des solutions d'équations***
   (avec le constat qu'il y a stabilité de cet ensemble moyennant certaines lois de compositions internes ou externes, ce qui donnera le point **2.**) ;
2. ***Structuration de l'ensemble des solutions d'équations, c'est-à-dire munir***
   Cet ensemble de loi de composition interne ou de loi de composition externe (moyennant un ou des ensembles structurés) avec des propriétés avérées.
3. ***Etudier les applications entre des ensembles structurés de même type***
   Avec la propriété de la transparence des structures en présence, ces applications sont appelées homomorphismes ;
4. ***Structuration de l'ensemble des homomorphismes.***
   Le nom de l'algèbre est lié au nom des équations auquelles on a affaire.

   Exemple : Les équations linéaires constituent les ingrédients de l'algèbre linéaire, les équations polynômiales constituent les ingrédients de l'algèbre des polynômes. Le rôle de **l'algèbre linéaire** est de traiter pêle-mêle des équations linéaires, la structuration naturelle de l'ensemble des solutions d'équations linéaires qui est une structure d'espace vectoriel et les calculs possibles avec les vecteurs ou les homomorphismes linéaires ou leurs représentations moyennant des bases sur les espaces vectoriels en question.
   En ce qui concerne ce cours, c'est à la fois une invitation au voyage dans les contrées de l'algèbre linéaire, et un accompagnement à la gare d'où l'on embarque seul pour

   le voyage en question. Bon voyage !

Chapitre 1

MATRICES

1.1 Présentation des matrices de type (p, q) sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif. Comme exemples de corps commutatifs, vous avez : $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Définition 1.1.1.

p et q sont deux entiers tels que $p \geq 1, q \geq 1$.

- *Une **matrice** $p \times q$ ou de type (p, q) est, par définition, un tableau : de scalaires (ou nombres) appartenant à $\mathbb{K}$, rangés horizontalement ou verticalement.*
- *Une rangée horizontale est appelée **ligne** et une rangée verticale est appelée **colonne**.*
- *Les rangées figurent dans **deux parenthèses** ou **deux crochets** et la matrice est désignée par une lettre majuscule.*
- *Le nombre de rangées horizontales est le nombre de lignes p et le nombre de rangées verticales est le nombre de colonnes q.*
- *Les nombres dans le tableau sont appelés les **termes**, **coefficients** ou **composantes** de la matrice*
- *Le coefficient de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij} ou $[A]_{i,j}$:*
  - *i représente l'indice de ligne.*
  - *j représente l'indice de colonne.*

- Soit A une matrice de type (p, q).
  — On a
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$
  — On emploie aussi la notation
$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}.$$
  Ceci est la $2^{ème}$ ligne : $\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \end{matrix}$; la $4^{ième}$ colonne est : $\begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{p4} \end{matrix}$.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans ⅂ est noté $M_{n,p}($⅂$)$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés matrices réelles.

Exemple 1.1.1.

Soit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & \pi & \frac{7}{21} & -9 & -11 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 8 & 9 & 15 \\ -4 & 75 & -\frac{1}{3} & -7\pi & i & 5+i \end{bmatrix}.$$
A est une matrice de type $(4, 6)$.
Ici l'élément $a_{14} = 4$, $a_{22} = \pi$, $a_{35} = 9$, $a_{33} = 0$, $a_{43} = -\dfrac{1}{3}$, $a_{46} = 5 + i$.

1.2 Différents types de matrices

1.2.1 Matrice uniligne : $p = 1$,

Définition 1.2.1.

*Une matrice M qui n'a qu'une seule ligne ($p = 1$) est appelée **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. On la note*
$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{bmatrix}.$$
M est de type $(1, q)$.

Exemple 1.2.1.
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 & 78 \end{bmatrix}$$
est de type $(1, 4)$

1.2.2 Matrice unicolonne : $q = 1$,

Définition 1.2.2.
Une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée **matrice colonne** *ou* **vecteur colonne**. *On la note*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}.$$

M est de type $(p, 1)$.

Exemple 1.2.2.

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

est de type $(6, 1)$

1.2.3 Matrice nulle de type (p, q)

Définition 1.2.3.
La matrice nulle de type (p, q) est la matrice à p lignes et q colonnes dont les composantes sont toutes nulles.

Exemple 1.2.3.
Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A est la matrice nulle de type $(3, 2)$.

1.2.4 Matrice carrée d'ordre n

Définition 1.2.4.
Une matrice carrée d'ordre n est une matrice à n lignes et n colonnes, les termes a_{ii} sont les éléments **diagonaux** *et forment* **la diagonale principale**. *L'autre diagonale du tableau carré s'appelle la contre diagonale principale.*
L'ensemble des matrices carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 1.2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{8}{3} \\ -9 & \frac{4}{7} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre 3 *et les éléments diagonaux sont :* $a_{11} = 1$; $a_{22} = \dfrac{4}{7}$; $a_{33} = 3$. *Les éléments de la contre diagonale principale sont :* $a_{31} = 0$; $a_{22} = \dfrac{4}{7}$; $a_{13} = \dfrac{8}{3}$.

1.2.5 Matrice diagonale

Définition 1.2.5.
Une matrice diagonale est une matrice carrée telle que tous les termes en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Exemple 1.2.5.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

1.2.6 Matrice unité (ou identité) d'ordre n

Définition 1.2.6.
La matrice unité (ou identité) d'ordre n *est la matrice diagonale d'ordre* n *telle que tous les termes de la diagonale principale sont égaux à* 1 *(et les autres nuls). On la note* I_n .

Exemple 1.2.6.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.7 Matrice triangulaire supérieure :

Définition 1.2.7.
Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée telle que tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ *si* $i > j$*).*

Exemple 1.2.7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.2.8 Matrice triangulaire inférieure :

Définition 1.2.8.
Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée telle que tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls($a_{ij} = 0$ si $i < j$).

Exemple 1.2.8.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \end{bmatrix}.$$

1.2.9 Matrice en bloc

Définition 1.2.9.
Une matrice en bloc est une matrice de type (m, n) dans laquelle on trouve des matrices bien établies. Soient $M \in M_r\ (\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}\,(\mathbb{K})$, $P \in M_s\ (\mathbb{K})$ et $Q \in M_{sr}\ (\mathbb{K})$ alors

$$A = \begin{bmatrix} M & N \\ Q & P \end{bmatrix} \text{ est en bloc.}$$

Exemple 1.2.9.

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{bmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}.$$

1.2.10 Transposée d'une matrice :

Définition 1.2.10.

On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$ *la matrice*

$$A' = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1\leq i \leq q \\ 1\leq j \leq p}}$$

où $a'_{ij} = a_{ji}$.
La transposée de A *est notée* $({}^tA)$ *; c'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de* A *et vice versa.*

Exemple 1.2.10.

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$. *On a* $({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \\ 1+i & -8 \end{bmatrix}$.

1.2.11 Opposée d'une matrice :

Définition 1.2.11.

L'opposée d'une matrice A *est la matrice obtenue en prenant l'opposée de chaque terme de* A*. elle est notée* $-A$ *:*
si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$, *alors* $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$.

Exemple 1.2.11.

soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$. *On a :*

$$(-A) = \begin{bmatrix} -(-1) & -2 & -(1+i) \\ -4 & -(-6) & -(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -(1+i) \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.3 OPERATIONS SUR LES MATRICES

1.3.1 Egalité de deux matrices de même type

Définition 1.3.1.

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$ *, de type* (p, q) *sont* ***égales*** *si leurs coefficients* a_{ij} *et* b_{ij} *sont* ***égaux****, quels que soient* $i = 1, 2, ..., p$ *et* $j = 1, 2, ..., q$.

Contre-exemple 1.3.1.

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. *On a* $A \neq B$ *car*
$a_{32} = -1 \neq 0 = b_{32}$.

Remarque 1.3.1.

Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^tA) \in M_{qp}(\mathbb{K})$ et $({}^t({}^tA)) = A$.

Définition 1.3.2.

*Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^tA) = A$, on dit que A est une matrice **symétrique**.*

Exemple 1.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \textit{ est une matrice } \textbf{\textit{symétrique}}\textit{, car } ({}^tA) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Définition 1.3.3.

*Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^tA) = -A$, on dit que A est une matrice **antisymétrique**.*

Exemple 1.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ est une matrice } \textbf{\textit{antisymétrique}}\textit{, car}$$

$$({}^tA) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

1.3.2 Somme de deux matrices de même type

On définit la matrice $C = A + B$, de type (p, q), **somme** des deux matrices de type (p, q), par ses coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q$.

Exemple 1.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1+i \\ -3 & 1 & i \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+1 & 1-i+(-1+i) \\ -3+(-3) & -1+i+1 & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & i & 2+i \end{bmatrix}.$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -(-1) & -(1-i) \\ -(-3) & -(-1+i) & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.3.4.

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *alors* $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ *alors* $A + B'$ *n'est pas définie.*

On a ainsi une loi de composition interne : **l'addition,** qui fait de **l'ensemble** $M_{pq}(\mathbb{K})$ **des matrices** $p \times q$ **un groupe commutatif.** L' élément neutre est la matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dite **matrice nulle** 0 . La matrice opposée à $A = (a_{ij})$ est la matrice $(-A)$ de coefficients $(-a_{ij})$.

Remarque 1.3.2.

(i) On a une loi de composition interne $*$ *dans un ensemble* E*, si les deux opérades* a, b *et la résultante* $a * b$ *appartiennent à* E*.*

(ii) Soient $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$*, on a :* $({}^t(A + B)) = ({}^tB) + ({}^tA)$.

1.3.3 Multiplication par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice λA est par définition, la matrice de coefficient λa_{ij}, où $A = (a_{ij})$.

C'est le produit de la matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ par le scalaire λ notée λA.

Exemple 1.3.5.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1+2i & 1-i \\ -3 & -1+i & 0 \end{bmatrix}$;

$2A = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times (-1+2i) & 2(1-i) \\ 2 \times (-3) & 2(-1+i) & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2+4i & 2-2i \\ -6 & -2+2i & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque 1.3.3.

La multiplication"." par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ *d'une matrice* $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ *est telle que* $\lambda A \in M_{pq}(\mathbb{K})$*, on dit que la multiplication "." est une loi de composition* ***externe*** *dans* $M_{pq}(\mathbb{K})$ *car l'opérade* $\lambda \in \mathbb{K}$ *mais pas à* $M_{pq}(\mathbb{K})$*.*

Propriété 1.3.1 (Propriétés de la multiplication par un scalaire d'une matrice)**.**

(i) $1.A = A$*, pour tout élément* $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.1 *étant l'élément neutre de* $(\mathbb{K}^*, \times)$.

(ii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$*, pour tout élément* $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$.

(iv) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, pour tout élément* $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.

Ainsi l'addition qui fait de l'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe (qui est la multiplicationon par un scalaire, d'une matrice) vérifiant les propriétés sus-mentionnées fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Remarque 1.3.4.

Soient $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^{t}(\lambda A)) = \lambda({}^{t}A)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.3.4 Produit de deux matrices

Le produit de matrices est **sous condition :**

$A \times B$ est **possible** si le nombre de colonnes de A est **égal** au nombre de lignes de B.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,
on pose : $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$
(on dit que l'on fait li-col, c'est-à-dire ligne par colonne) est le produit de la matrice A par B. En fait pour obtenir le terme c_{ij} de la matrice $A \times B = AB$, on multiplie les composantes de la $i^{ème}$ ligne de A par celles de la $j^{ème}$ colonne de B dans l'ordre et on fait la somme des différents produits.

On a symboliquement du point de vu des types de matrices

$$(m, n)(n, p) = (m, p).$$

Remarque 1.3.5.

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \end{pmatrix} \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième...

Exemple 1.3.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2*. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient* $c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$ *(au milieu), puis les autres (à droite).*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 1.3.6.

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ *est une matrice de taille* 1×1 *dont l'unique coefficient est* $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$*. Ce nombre s'appelle le* ***produit scalaire*** *des vecteurs* u *et* v*. Calculer le coefficient* c_{ij} *dans le produit* $A \times B$ *revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la* i*-ème ligne de* A *et la* j*-ème colonne de* B*.*

Exemple 1.3.7.

Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix};$$

Déterminons si possible $A \times B$ et $B \times A$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1\times 3+3\times 1 & -1\times(-1)+3\times(-3) & -1\times 2+3\times 4 & -1\times 1+3\times 7 \\ -4\times 3+1\times 1 & -4\times(-1)+1\times(-3) & -4\times 2+1\times 4 & -4\times 1+1\times 7 \\ 0\times 3+2\times 1 & 0\times(-1)+2\times(-3) & 0\times 2+2\times 4 & 0\times 1+2\times 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} A\times B &= \begin{bmatrix} -1\times 3+3\times 1 & -1\times(-1)+3\times(-3) & -1\times 2+3\times 4 & -1\times 1+3\times 7 \\ -4\times 3+1\times 1 & -4\times(-1)+1\times(-3) & -4\times 2+1\times 4 & -4\times 1+1\times 7 \\ 0\times 3+2\times 1 & 0\times(-1)+2\times(-3) & 0\times 2+2\times 4 & 0\times 1+2\times 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & 20 \\ -11 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 8 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$B \times A$ n'est pas un produit possible car le nombre de colonnes de B égalant 4 n'est pas égal au nombre de lignes de A qui est 3.

Nous allons donner quelques **pièges à éviter**

Remarque 1.3.7 (Premier piège à éviter).

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général. En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 1.3.8.

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

on a : $AB = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & -20 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = BA$.

*Ainsi le **produit** de matrices **n'est pas commutatif**.*

Remarque 1.3.8 (Deuxième piège à éviter).

$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 1.3.9.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.3.9 (Troisième piège à éviter).

$AB = AC$ n'implique pas $B = C$. On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 1.3.10.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.3.10.

1 *$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.*
L'élément unité se note I_n . Ainsi $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $AI_n = I_nA = A$.

2 *Avec* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$ *; on a :*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ donc}$$

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau ***non intègre****.*

Définition 1.3.4.

Quand on a deux matrices carrées A et B telles que $A \times B = B \times A$ on dit que A et B commutent (ou permutent).

Exemple 1.3.11.

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$*, on constate que*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = BA$$

Ainsi A et B commutent mais le produit de matrices n'est pas commutatif.
Aussi A et B sont dites commutantes(permutantes).

Remarque 1.3.11.

1. *Formule du binôme de Newton* $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *commutant (permutant) e.i.* $A \times B = B \times A$, *on a :*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k B^{n-k} A^k;$$

$n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ *avec* $A \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$, *on a* $A^0 = I_n$.

Propriété 1.3.2.

1. $A(B+C) = AB + AC$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B, C \in M_{np}(\mathbb{K})$*; ceci est la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition.*
2. $(A+B)C = AC + BC$, $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{np}(\mathbb{K})$*; ceci est la distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition. Vu 1) et 2) la multiplication est distributive par rapport à l'addition.*
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in M_{mn}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{np}(\mathbb{K}), (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
4. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$,$\forall B \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{pr}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC) = ABC$*; ceci est l'associativitité de la multiplication des matrices.*
5. $({}^t(AB)) = ({}^tB)({}^tA)$, $\forall A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, $\forall B, \in M_{nq}(\mathbb{K})$.
6. $I_p.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, I_P, I_n *sont unitées d'ordre resp.* p, n.

1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 1.4.1.

Etant donné $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre* n *(nombre de lignes = nombre de colonnes=*n*), on définit une application* tr *de* $M_n(\mathbb{K})$ *sur* $\mathbb{K}$ *nommée* ***trace*** *telle que* $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. $M_n(\mathbb{K})$ *est l'ensemble des matrices de type* (n, n)*, dites aussi matrices carrée d'ordre* n.

Propriété 1.4.1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 11 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 74 & 9 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$,

alors $tr(A) = 7 + (-5) + (-3) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2} = tr({}^tA)$.

Propriété 1.4.2.

Etant données deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$,

i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

ii) $tr(AB) = tr(BA)$.

iii) $tr(A) = tr({}^tA)$.

Je rappelle que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Démonstration. i) Pour tout $1 \leq i \leq n$, le coefficient (i,i) de $A+B$ est $a_{ii} + b_{ii}$.

ii) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ki} B_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \\ &= tr(BA) \end{aligned}$$

iii) $tr({}^tA) = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} A_{kk} = tr(A)$.

□

1.5 Matrices inversibles

Définition 1.5.1.

*$A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. B est appelée **l'inverse** de A et se note $B = A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas. (B et A sont des matrices carrées **de même ordre**).*

Exemple 1.5.1.

Soients $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ *on a :*

$$AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi A est inversible d'inverse B et inversement ou A et B sont inverses l'une de l'autre.

Proposition 1.5.1.

le produit de matrices inversibles est inversible.

Proposition 1.5.2.

L'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe multiplicatif appelé le groupe linéaire.

Définition 1.5.2.

i) *Deux matrices* $A,\ B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ *sont* ***équivalentes*** *s'ils existent* $P \in M_p(\mathbb{K})$ *inversible et* $Q \in M_q(\mathbb{K})$ *inversible telle que* $A = PBQ \Leftrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = B$.

ii) *Deux matrices* $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ *sont* ***semblables*** *s'il existe* $P \in M_n(\mathbb{K})$ *inversible telle que* $A = P^{-1}BP \Leftrightarrow PA = BP \Leftrightarrow PAP^{-1} = B \Leftrightarrow AP^{-1} = P^{-1}B$ *ce qui entrainera que* $tr(A) = tr(B)$.

Exemple 1.5.2.

Soient $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *et* $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soit $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *avec* $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On constate que $PP' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aussi $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P *est inversible d'inverse* $P^{-1} = P'$

Soit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *avec* $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On constate que $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi Q *est inversible d'inverse* $Q^{-1} = Q'$

Aussi $PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$PAQ = R.$

On a bien $PAQ = R$ avec $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible, $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ et $Q \in M_4(\mathbb{R})$ inversible donc A et R sont équivalentes.

Exemple 1.5.3.

Soient $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *et* $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $P' = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

On a : $PP' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aussi $P'P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

On constate que :

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = D.$$

donc M et D sont sont semblables.

Remarque 1.5.1.

*Deux matrices semblables **sont équivalentes.** Mais deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement semblables, il suffit qu'elles ne soient pas carrées.*

1.6 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 1.6.1.

Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle opérations él émentaires sur A l'une des transformations suivantes :

1. *Ajouter à une colonne(resp. ligne) de A le produit par un élé ment de $\mathbb{K}^*$ d'une* ***autre*** *colonne(resp. ligne) : on parle de* ***transvection*** *sur les colonnes (resp. lignes) de A.*
2. *Permuter les colonnes(resp. lignes) de A.*
3. *Multiplier une colonne(resp. ligne) de A par un élément de $\mathbb{K}^*$: on parle de* ***dilatation*** *ou d'****affinité*** *sur A.*

Exemple 1.6.1.

soit $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ *en faisant* $C_1' = C_1 + (-2)\,C_3$ *on a :*

$B' = \begin{bmatrix} 3+(-2)\times 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1+(-2)\times 4 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -7 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$

Evidemment on a B équivalente à B', ce qui se note : $B \sim B'$ qui se lit B équivalente à B'.

Exemple 1.6.2.

soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *permutons L_1 et L_3, on a :*

$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. *Evidemment on a A équivalente à A', ce qui se note : $A \sim A'$ qui se lit A équivalente à A'.*

Exemple 1.6.3.

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ faisons } 4L_2\text{ , on a :}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -16 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Evidemment on a A équivalente à A', ce qui se note : $A \sim A'$
qui se lit A équivalente à A'.*

Définition 1.6.2.

Les matrices $E_{ij} \in M_{pq}(\mathbb{K})$ *tels que* $a_{ij} = 1$ *et* $a_{rs} = 0$, *si* $r \neq i$ *ou* $s \neq j$, *sont les matrices élé mentaires de* $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$,*on a* $A = \sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} a_{ij}E_{ij}$.

Exemple 1.6.4.

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}),\ E_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{42}(\mathbb{R})$$

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$. *On a :*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{31} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad a_{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{31}E_{31} + a_{32}E_{32} \\ &= \sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ 3 \\ 1\leq\ j\ \leq\ 2}} a_{ij}E_{ij} \in M_{32}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

1.7 Les opérations élémentaires sur les matrices avec les matrices élémentaires

D'abord, il est nécessaire de savoir que $\forall E_{ij}, E_{kl} \in M_p(\mathbb{K})$, on a : $E_{ij}.E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, où

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}.$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum\limits_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} a_{ij}E_{ij}$, et $\forall E_{kl} \in M_p(\mathbb{K})$,

$$
\begin{aligned}
E_{kl}.A &= \sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} a_{ij}E_{kl}E_{ij} = \sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} a_{ij}\delta_{li}E_{kj} \\
&= \sum_{1\leq\ j\ \leq\ q} a_{lj}E_{kj} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{l(q-1)} & a_{lq} \\ & & 0 & & \end{bmatrix} & \longleftarrow k^{ième}\text{ ligne} \end{array}
\end{aligned}
$$

Aussi $\forall E_{kl} \in M_q(\mathbb{K})$,

$$
\begin{aligned}
AE_{kl} &= \sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} a_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} a_{ij}\delta_{jk}E_{il} \\
&= \sum_{1\leq\ i\ \leq\ p} a_{ik}E_{il} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & a_{1k} & \\ & a_{2k} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{(p-1)k} & \\ & a_{pk} & \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ l^{ième}\text{ colonne} \end{array}
\end{aligned}
$$

de là, on comprend ce qui suit : Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations él émentaires* sur A l'un des produits suivants :

1 **a** Soit $r \neq s$, $A(I_q + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est ajouter à la colonne s de A le produit par un élément λ de $\mathbb{K}^*$ de la colonne r, on parle de **transvection** sur les colonnes de A.

b Soit $r \neq s$, $(I_p + \lambda E_{rs})A$, $E_{rs} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est ajouter à la ligne r de A le produit par un élément λ de $\mathbb{K}^*$ de la ligne s, on parle de **transvection** sur les lignes de A.

2 **a** Soit $r \neq s$, $(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})A$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est permuter les lignes r et s de A.

b Soit $r \neq s$, $A(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est permuter les colonnes r et s de A.

3 **a** $(I_p + (\lambda - 1)E_{rr})A$, $E_{rr} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est multiplier la ligne r de A par un élément λ de $\mathbb{K}^*$: on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.

b $A(I_q + (\lambda - 1)E_{rr})$, $E_{rr} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est multiplier la colonne r de A par un élément λ de $\mathbb{K}^*$: on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.

Pratiquement, cela se fait aisément en augmentant la matrice A par la matrice identité de même nombre de lignes que A, à la suite de la dernière colonne de A, quand l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes, à la fin des opérations sur les lignes, on obtient à la place de la matrice identité, la matrice $\mathbf{L}$ par laquelle, il faudra multiplier par A, comme suit :

$\mathbf{L.A}$ pour avoir la transformation obtenue de A.

En ce qui concerne les opérations sur les colonnes, on augmente la matrice A par la matrice identité de même nombre de colonnes que A, à la suite de la derniè re ligne de A, à la fin des opérations sur les colonnes, on obtient à la place de la matrice identité, la matrice $\mathbf{C}$ par laquelle, il faudra multiplier par A , comme suit :

$\mathbf{AC}$ pour avoir la transformation obtenue de A.

Remarque 1.7.1.

Les matrices L et C supra, sont dites matrices produit de matrices d'opé rations élémentaires sur A.

Définition 1.7.1.

Les matrices :

1. $(I_q + (\lambda - 1)\, E_{rr})$, $E_{rr} \in M_q(\mathbb{K})$;
2. $(I_p + (\lambda - 1)\, E_{rr})$, $E_{rr} \in M_p(\mathbb{K})$;
3. $r \neq s$, $(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_q(\mathbb{K})$;
4. $r \neq s$, $(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_p(\mathbb{K})$;
5. $r \neq s$, $(I_p + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_p(\mathbb{K})$;
6. $r \neq s$, $(I_q + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_q(\mathbb{K})$

sont dites matrices d'opérations élémentaires. En somme,

Définition 1.7.2.

Toute matrice par laquelle, on multiplie une matrice A pour obténir une matrice semblable à A est une matrice produit de matrices d'opérations élé mentaires sur A.

Proposition 1.7.1.

(preuve avec le chapitre II)

$\det((I_q + \lambda E_{rs})) = \det((I_p + \lambda E_{rs})) = 1 \neq 0,$

$\det(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) = \det(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) = -1 \neq 0,$

$\det(I_p + (\lambda - 1)\, E_{rr}) = \det(I_q + (\lambda - 1)\, E_{rr}) = \lambda \neq 0$ *car* $\lambda \in K^*$, *donc*

Toute matrice d'opération élémentaire est inversible.

Proposition 1.7.2.

Toute matrice carrée inversible est le produit de matrices d'opérations élé mentaires.

Démonstration. il suffit de se souvenir que toute matrice A carrée inversible est é quivalente à la matrice identité de même ordre que A, moyennant des opérations élé mentaires. □

1.8 Rang d'une matrice

Proposition 1.8.1.

Etant donnée une matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, à l'aide des opérations élémentaires sur A, A sera semblable à une matrice de la forme suivante :

$$R = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r(q-r)} \\ 0_{(p-r)r} & 0_{(p-r)(q-r)} \end{bmatrix}$$

où $r \leq \inf(p, q)$, I_r est la matrice unité d'ordre r et 0_{st} est la matrice identiquement nulle avec s lignes et t colonnes. R est la matrice échélonnée réduite de A. On appelle l'entier r le rang de la matrice A et il se note $rg(A) = r = rg({}^tA)$.

Remarque 1.8.1.

Le rang de A est indépendante des opérations élémentaires pouvant permettre d'avoir R.

Exemple 1.8.1.

Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$*, recherchons le rang de A. Nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de A en augmentant A de la matrice identité de même nombre de lignes que A, à la suite de la dernière colonne de A. Et on fait les opérations élémentaires sur la matrice augmentée. Ainsi d'entrée, on a :*

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 - \frac{3}{5}L_1 \\ L_3 - \frac{1}{5}L_1 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{R'} \middle| \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}}_{P}\right] \begin{matrix} L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{5}{4}L_2 \\ L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}$$

Evaluons :

$$PA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc : $PA = R'$.

R' est dite matrice échélonnée à lignes canoniques de A.

Remarque 1.8.2.

1. *Le meilleur choix pour opérations élémentaires sur lignes ou colonnes d'une matrice de type (p, q) : il faut choisir de travailler sur les lignes si $p < q$ sinon sur les colonnes.*

2. *Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même ligne, il faut opérer avec les colonnes.*

3. *Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même colonne, il faut opé rer avec les lignes.*

4. *4.On peut d'or et déjà compter le nombre de lignes non nulles de R' (parce qu'on a travaillé sur les lignes), et ce nombre est égal au rang de A. Il en serait de même si on avait travaillé sur les colonnes.*

Suite de ce qui précède. On continue les opérations élémentaires sur les colonnes cette fois-ci, en augmentant R' à la suite de sa troisième ligne par la matrice identité de même nombre de colonnes que R', c'est-à-dire : $C_3 - 2C_1 \quad C_4 - 3C_1$

$$C_3 + 3C_2 \quad C_4 + 4C_2 \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ici on a : $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et on pose* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Evaluons :

$$PAQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Donc $PAQ = R$.

Ainsi ayant $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a : $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de même $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Donc Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$.

Ayant $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a :

$PP' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de même $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$. Comme on a : $PAQ = R$ et que P et Q sont des matrices carrées inversibles d'ordre respectif 3 et 4 on a bien A est équivalente à R et le rang de A est 2.

Proposition 1.8.2.

*Deux matrices sont **équivalentes ssi** elles ont le même rang.*

Démonstration. Soient $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ de même rang, alors ils existent $P_1, P_2 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1, Q_2 \in GL_q(\mathbb{K})$ telles que $P_1AQ_1 = R = P_2BQ_2 \iff P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1} = B$ avec $P_2^{-1}P_1 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1Q_2^{-1} \in GL_q(\mathbb{K})$, ce qui veut dire que A et B sont semblables. $GL_P(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p inversibles. R est une matrice de la nature que la matrice R de la proposition (ci-dessus) définissant le rang d'une matrice. □

Proposition 1.8.3.

Deux matrices carrées ***semblables****, ont nécessairement la même trace et le même rang.*

Remarque 1.8.3.

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$*, Le rang de* $A =$ *le rang de* $B = 1$*, mais elles ne sont pas semblables car* $tr\,(A) = 0 \neq 1 = tr\,(B)$*, alors que si elles étaient semblables, elles devraient avoir nécessairement la même trace.*

Chapitre 2

CALCUL DE DÉTERMINANTS

Le déterminant est un simple **scalaire** (nombre) calculé à partir des é léments d'une matrice **carrée**. Ce scalaire est nul si la matrice carrée en question est non inversible.

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 2.1.1.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *On appelle **déterminant de A** le nombre* $\mathrm{ad} - \mathrm{bc}$. *On note **dét A** ou* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple 2.1.1.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -14$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de A le nombre

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

$$\text{On note } \det A \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par la méthode de Sarrus

On complète par les deux premières colonnes la suite de la troisième colonne (ou par les deux premières lignes la suite de la troisième ligne) et on fait les produits 3 à 3 parallèlement à la **diagonale principale** et les produits 3 à 3 parallèlement à la **contre-diagonale principale** ensuite, on **somme** en comptant les produits parallèles à la diagonale principale positivement et ceux de la contre-diagonale principale négativement.

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1.

*: La méthode de Sarrus ne s'applique qu'au déterminant d' **ordre 3***

2.2.2 Calcul du déterminant par le développement suivant une ligne ou une colonne.

Définition 2.2.1.

*Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq\, i,\, j\, \leq n}$ pour l'élément a_{ij} , X_{ij} le déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne de a_{ij} est son **mineur ;** le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, X_{ij}$ est son **cofacteur.***

Remarque 2.2.2.

Pour tout a_{ij} élément de A matrice carrée,

Si$(i + j)$ est paire X_{ij} et C_{ij} sont égaux sinon ils sont opposés l'un à l'autre.

Exemple 2.2.1.

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Quand on élimine la ligne et la colonne de a_{11} , on obtient X_{11} son mineur

qui est : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = X_{11}$.

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{12} , on obtient X_{12} son mineur

qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -X_{12}$

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{13} , on obtient X_{13} son mineur

qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = X_{13}$.

Methode

Developpement suivant la $1^{ère}$ ligne pour calculer $\det A$;
on a : $\det A = a_{11} \times C_{11} + a_{12} \times C_{12} + a_{13} \times C_{13}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) \\
&\quad + a_{13} \left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\
&= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) \\
&\quad - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right).
\end{aligned}$$

$\det A$ s'obtient aussi par le développement suivant une colonne,

développons $\det A$ suivant la $2^{ième}$ colonne de A qui est : $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{32} \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)
\end{aligned}$$

$$- \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$

$$\det A = a_{12} \times C_{12} + a_{22} \times C_{22} + a_{32} \times C_{32}.$$

Exemples pratiques

Exemple 2.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Développons suivant la $2^{\text{ème}}$ ligne.

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3\,(-2 \times 5 - 4 \times 3) - 1 \times (-1 \times 4 - (-1) \times (-2)) \\ &= -3\,(-22) - (-6) = 72. \end{aligned}$$

En développant $\det A$ *suivant la 1$^{\text{ère}}$ ligne on a :*

$$\begin{aligned} \det A &= (-1) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad +3 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 72. \end{aligned}$$

C'est plus long à calculer.

Exemple 2.2.3.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Développons $\det B$ *suivant la $1^{\text{ère}}$ ligne :*

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-5) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \times (-4 \times (-2) - (-1) \times 2) = -50.$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -(-4) \times (0 \times 0 - (-2) \times (-5)) + 2\,(0 \times 2 - (-1) \times (-5)) \\
&= -40 - 10 \\
&= -50
\end{aligned}$$

Le calcul de $\det B$ avec le développement suivant la $2^{ième}$ ligne

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-4)\,(10) - (10) + 0 \\
&= -50
\end{aligned}$$

C'est plus long à effectuer que les précédents.

Remarque 2.2.3.

(i) *Quand l'on a choisi une ligne ou une colonne suivant laquelle le calcul du déterminant d'une matrice sera développé,* ***le déterminant est égal à la somme des produits de chaque élément de ladite ligne ou colonne par son cofacteur****.*

(ii) *En choisissant une colonne ou une ligne où il y a plus de* ***zéros*** *, on a moins de termes dans le développé.*

(iii) *Par cette méthode du développement suivant une ligne ou une colonne, on constate que dans le déveppé l'****ordre*** *de la matrice dont on calcule le déterminant* ***s'abaisse****.*

2.3 Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordre inférieur à n en dé veloppons suivant une ligne ou une colonne.

Exemple 2.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Développons suivant la $4^{ème}$ colonne :

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 4 \left[2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right] \\
&= 4 \left[2\left(1-8\right) - 5\left(1+6\right) \right] \\
&= 4\left(-14-35\right) \\
&= 4\left(-49\right) \\
&= -196
\end{aligned}$$

Aussi det A *avec* le développement suivant la deuxième ligne de A *sera bien long à écrire en effet :*

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= 2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= +(-1) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n}$.

Déterminant de A *développé par rapport à la* i*-ième ligne :*

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}.$$

Déterminant de A *développé par rapport à la* j*-ième colonne :*

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}.$$

Remarque 2.3.1.

Pour développer suivant les lignes ou les colonnes, il vaut mieux choisir celles qui renferment le plus de zéros pour réduire le nombre de calculs.

2.4 Propriétés des déterminants

Propriété 2.4.1.

(i) *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre* n*. Alors on a :* $\det(AB) = \det A \times \det B$.

Exemple 2.4.1.

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

on a : $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \\ -6 & -14 & 13 \end{bmatrix}$

$\det(AB) = \begin{vmatrix} 14 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \\ -6 & -14 & 13 \end{vmatrix} = -3600.$

On sait aussi que $\det A = 72$ *et* $\det B = -50$ *et* $\det A \times \det B = 72 \times (-50) = -3600$.

On a bien $\det(AB) = \det A \times \det B$.

Propriété 2.4.2.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in M_n(\mathbb{K})$, *alors* $\det(\lambda A) = \lambda^{ordre(A)} \det A = \lambda^n \det A$.

Exemple 2.4.2.

$$det\left(2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = 2^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 2.4.3.

Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier celui d'une matrice diagonale, est égal au produit des éléments diagonaux (c'est-à-dire des éléments de la diagonale principale). Par conséquent le déterminant d'une matrice unité est égale à 1.

Exemple 2.4.3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-2) = -6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) \times (-5) = 30.$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Propriété 2.4.4.

Le déterminant ne change pas quand on ***ajoute*** *à une ligne une combinaison des* ***autres*** *lignes ; en particulier, on peut remplacer une ligne par la somme de toutes les lignes ou encore ajouter à une ligne* λ *multiplié par une autre ligne où* λ *est un scalaire non nul.*

Remarque 2.4.1.

Dans la propriété 2.4.4, en remplacant ligne(s) par colonne(s), on a le même résultat.

Exemple 2.4.4.

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, *en ajoutant à la* $3^{\text{ème}}$ *ligne, deux fois la* $1^{\text{ère}}$ *ligne, on a :*

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$, je développe par rapport à la $2^{ème}$ colonne,

$\det A = -(-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2(33+3) = 72.$

Remarque 2.4.2.

Il est plus intéressant de faire des manipulations (légitimes) qui font apparaître des zéros dans le déterminant afin d'en faciliter le calcul(voir supra).

Propriété 2.4.5.

Le déterminant d'une matrice dont une ligne ou une colonne est formée de zéros est un déterminant nul. Le déterminant d'une matrice dont une ligne (resp. une colonne) est une combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes) est un déterminant nul.Aussi si deux lignes(resp.deux colonnes) sont proportionnelles dans un déterminant, le déterminant est nul.

Exemple 2.4.5.

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, *car la $2^{ème}$ colonne est égale à deux fois la $1^{ère}$ colonne.*

Propriété 2.4.6.

Le déterminant est linéaire en ses lignes et colonnes respectivement. textit (pour ne pas dire multilinéaire suivant les lignes ou les colonnes) Cela signifie : étant donnée A une matrice carrée d'ordre n ; on a : $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$; $1 \leq i \leq n$.

(i) $\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i + C_i' & \cdots & C_n \end{bmatrix} =$

$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i' & \cdots & C_n \end{bmatrix}$

ou (i') $\det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$.

Exemple 2.4.6.

(i) $\begin{vmatrix} 2 & a+b & b^2 \\ a & a-b^2 & b \\ a^2 & a^3+b & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & -b^2 & b \\ a^2 & b & ab \end{vmatrix}$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

(i') $\begin{vmatrix} 2-b^2 & a+b & b^2+b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b^2 & b & b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

(ii)

$\det\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & \beta C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \beta\det\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix}$;

$\beta \in \mathbb{K}$ un corps. ou $\big((ii)'\big)$ $\det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ \gamma L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \gamma\det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ *; $\gamma \in \mathbb{K}$ un corps.*

Exemple 2.4.7.

(ii) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 17\times 3 \\ 3 & 0 & 17\times 1 \\ -3 & 0 & 17\times 11 \end{vmatrix} = \det A = 17 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$

$\big((ii)'\big)$ $\begin{vmatrix} -23\times(-1) & -23\times(-2) & -23\times 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-23) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$

Propriété 2.4.7.

Le déterminant une forme ***alternée :*** *cela signifie étant donnée A une matrice carrée d'oredre n à coeffients dans $\mathbb{K}$,* $\det A \in \mathbb{K}$*, et avec*

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix}; 1 \leq i,\ j \leq n.$$

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det A$$

$\det A = \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix}$
$\det A = -\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = -\det A; 1 \leq i,\ j \leq n.$
Tout ceci signifie que lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes) dans un déterminant le déterminant est changé en son opposé.

Exemple 2.4.8.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 72, \text{ mais } \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -72 = -\det A$$

car j'ai permuté la $2^{ième}$ et la $3^{ième}$ lignes.
7) *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det({}^tA)$.*
8) *Soient $M \in M_r\ (\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}(\mathbb{K})$ et $P \in M_s\ (\mathbb{K})$ alors* $\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & P \end{vmatrix} = |M|\,|P|.$
9) *Soient $A_i\ \in M_{r_i}(\mathbb{K})$ où $1 \leq i \leq n$, alors* $\begin{vmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} |A_i\ |.$

Propriété 2.4.8.

Si deux matrices $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables, i.e. $A = P^{-1}BP$.
$\forall m \in \mathbb{K}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, comme $(A + mI_n)^k = P^{-1}(B + mI_n)^k P$, alors $rang\,(A + mI_n)^k = rang\,(B + mI_n)^k$, $\det(A + mI_n)^k = \det(B + mI_n)^k$ et $trace\,(A + mI_n)^k = trace\,(B + mI_n)^k$.

Remarque 2.4.3.

1. *Lorsque deux matrices carrées sont **semblables**, elles ont **nécessairement** les mêmes trace, rang et déterminant. Mais cela ne suffit pas pour être semblables.*
2. *Aussi est-il clair que deux matrices qui n'ont pas la même trace ou pas le même rang ou pas le même déterminant, ne peuvent être semblables.*

Remarque 2.4.4.

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
On a le rang de $A =$ *au rang de* $B = 1$, $\det(A) = \det(B) = 0$,
$tr\,(A) = tr\,(B) = 0$, *mais* A *et* B *ne sont pas semblables car*

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *ce sont deux matrices inversibles et on a :* $PAQ = B$, *donc* A *et* B *sont équivalentes, mais seraient semblables si* $P^{-1} = Q$, *alors qu'avec*
$P \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times P = I_2$, *on a*
$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \neq Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *donc on peut conclure que* A *et* B *ne sont pas semblables, alors qu'elles ont le même rang, le même déterminant, et la même trace.*

En résumé : Avoir le même rang , le même déterminant, et la même trace, pour des matrices carrés de même ordre, sont des conditions **né cessaires** pour qu'elles soient semblables, mais pas **suffisantes**.

2.5 Inverse d'une matrice carrée

Définition 2.5.1.

Une matrice ***carrée*** A *d'ordre* n *est* ***inversible*** *s'il existe une matrice (carrée d'ordre* n*)* B *telle que* $A \times B = B \times A = I_n$. B *est alors appelée* ***inverse*** *de la matrice* A*.*

Exemple 2.5.1.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *On vérifie que pour* $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$,
on a : $AB = BA = I_2$.
Donc A *est inversible et* B *est inverse de la matrice* A*.*

Définition 2.5.2.

Etant données deux matrices A *et* B *tel que* $AB = BA$*, on dit que* A *et* B ***commutent****.*

Proposition 2.5.1.

Deux matrices qui commutent sont ***carrées*** *de* ***même ordre****.*

Théorème 2.5.1.
Une matrice ***carrée*** A *est inversible si et seulement si son dé terminant est non nul. Si* A *est inversible, son inverse est unique. On la note* A^{-1} *et on a :*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}.$$

Exemple 2.5.2.
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$ *donc* A *est inversible, avec* $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
on constate que : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
donc $A^{-1} = B$ *et* $\det B = \det A^{-1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{(-2)} = \frac{1}{\det A}$.

Proposition 2.5.2.
Deux matrices A *et* B *carrées de même ordre* n *tel que* $AB = I_n$ *(ou* $BA = I_n$*) sont* ***inversibles*** *et d'inverse l'une de l'autre.*

2.5.1 Propriétés de la matrice inverse

Propriété 2.5.1.
Si A *et* B *sont inversibles de même ordre, on a :*

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}.A^{-1}$, *où* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *:*
3. $\left({}^t\left(A^{-1}\right)\right) = \left({}^t(A)\right)^{-1}$;
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 2.5.1. *Montrer que :*

1. $A\left(I_n + A\right)^{-1} = \left(I_n + A\right)^{-1} A$, *Si* $\left(I_n + A\right)$ *est inversible avec* $A \in M_n(\mathbb{K})$.
2. $A\left(I_n + A\right)^{-1} + \left(I_n + A\right)^{-1} = I_n$, *Si* $\left(I_n + A\right)$ *est inversible avec* $A \in M_n(\mathbb{K})$.
3. $A\left(I_n + BA\right)^{-1} = \left(I_m + AB\right)^{-1} A$, *si* $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{nm}(\mathbb{K})$ *avec* $\left(I_n + BA\right)$ *et* $\left(I_m + AB\right)$ *sont inversibles.*
4. *En déduire que :* $\left(I_m + AB\right)^{-1} + A\left(I_n + BA\right)^{-1} B = I_m$.

Proposition de réponse.

1

$$\begin{aligned}
(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n &\Longrightarrow A(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = A.I_n = A \\
&\Longrightarrow \left(A + A^2\right)(I_n + A)^{-1} = A \\
&\Longleftrightarrow (I_n + A)A(I_n + A)^{-1} = A \\
&\Longleftrightarrow (I_n + A)^{-1}(I_n + A)A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A \\
&\Longleftrightarrow I_n.A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A \\
&\Longleftrightarrow A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A.
\end{aligned}$$

2 *Evaluons :* $(I_n + A)^{-1} + (I_n + A)^{-1}A = (I_n + A)^{-1}(I_n + A) = I_n$.

3

$$\begin{aligned}
(I_n + BA)(I_n + BA)^{-1} = I_n &\Longrightarrow A(I_n + BA)(I_n + BA)^{-1} = A.I_n = A \\
&\Longleftrightarrow (A.I_n + A(BA))(I_n + BA)^{-1} = A \\
&\Longleftrightarrow (I_m.A + (AB)A)(I_n + BA)^{-1} = A \\
&\Longleftrightarrow (I_m + AB)A(I_n + BA)^{-1} = A \\
&\Longleftrightarrow (I_m + AB)^{-1}(I_m + AB)A(I_n + BA)^{-1} = \\
&\ (I_m + AB)^{-1}A \\
&\Longleftrightarrow (I_mA)(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1}A \\
&\Longleftrightarrow A(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1}A.
\end{aligned}$$

4 *Evaluons* $(I_m + AB)^{-1} + A(I_n + BA)^{-1}B = (I_m + AB)^{-1} + (I_m + AB)^{-1}AB$, *d'après la question 3. De là, on a :*

$$\begin{aligned}
(I_m + AB)^{-1} + A(I_n + BA)^{-1}B &= (I_m + AB)^{-1} + (I_m + AB)^{-1}AB \\
&= (I_m + AB)^{-1}(I_m + AB) \\
&= I_m.
\end{aligned}$$

2.5.2 Inversion d'une matrice par sa comatrice

Définition 2.5.3.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\, i,\, j\, \leq\, n}$. *On appelle* ***cofacteur*** *de l'élément* a_{ij} *le nombre*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}X_{ij}$$

où X_{ij} *est le déterminant obtenu en éliminant la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* A.
La matrice des cofacteurs de A *est la matrice notée* $com(A) = \left((-1)^{i+j}X_{ij}\right)_{1\leq\, i,\, j\, \leq\, n} = (C_{ij})_{1\leq\, i,\, j\, \leq\, n}$ *et appelée la* ***comatrice*** *de* A. *le déterminant extrait* X_{ij} *est appelé le* ***mineur*** *de* a_{ij}.

Exemple 2.5.3.

Avec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On constate que $\forall 1 \leq i,\ j \leq n$, $C_{ij} = X_{ij}$ *si* $(i+j)$ *est pair et* $C_{ij} = -X_{ij}$ *si* $(i+j)$ *est impair.*

Exemple 2.5.4.

[Exemple pratique]

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$. *Notons* $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ 3}$.

Le cofacteur de $a_{11} = 1$ *est* $C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 9$, *on a* $X_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Le cofacteur de $a_{32} = -5$ *est* $C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, *on a*

$X_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$. *Ainsi de suite.*

La comatrice de A *est donc* $comA = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

2.5.3 Démonstration de la méthode d'inversion d'une matrice par sa comatrice

En reprenant la formule du déterminant de A développé par rapport à la i-ième ligne :

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}.$$

Remplaçons les a_{ij}, $\forall 1 \leq j \leq n$, par ceux d'une autre ligne, disons la k-ième ligne, avec $k \neq i$, nous obtenons :

$$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in} = 0,$$

car A' n'est rien d'autre que la matrice A dans laquelle la i-ième ligne est remplacer par la k-iè me ligne, avec $k \neq i$, donc A' a deux lignes identiques : la i-ième ligne et la k -ième ligne, avec $k \neq i$, ainsi $\det(A')$ développé suivant la i-ième ligne est :

$$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in}$$

et est égal à 0, car dans $\det(A')$, il y a deux lignes identiques.

En résumé,

on a : $a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} det(A) \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$.

Considérons la matrice des cofacteurs $com(A) = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$.

Evaluons $A.\left({}^tC\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I_n.$$

car dans le produit $A.\left({}^tC\right)$, l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est :

$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + ... + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} det(A) \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

On a $\left({}^tC\right).A = A.\left({}^tC\right) = \det(A)\, I_n$.

Proposition 2.5.3.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$*, on a :*

$$(\det A).I_n = A.com\left({}^tA\right) = com\left({}^tA\right).A = A\left({}^tcomA\right) = \left({}^tcomA\right).A$$

car $({}^tcomA) = com\,({}^tA)$.

Théorème 2.5.2.

Si A *est une matrice inversible alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \dfrac{1}{\det A} \times ({}^tcom\,(A))$ *où* $({}^tA)$ *désigne la transposée de* A*,* $com\,({}^tA)$ *désigne la comatrice de la transposée de* A *et* $({}^tcom\,(A))$ *désigne la transposée de la comatrice de* A*.*

Remarque 2.5.1.

En somme, si A *est inversible d'ordre* n*,* $(A^{-1})_{ji} = \dfrac{\det(A^{ij})}{\det A}$*, où* $1 \le i, j \le n$ *et* A^{ij} *est la matrice obtenue en supprimant la ligne* i *et la colonne* j *de* A*.*
Aussi $(A^{-1})_{ji} = \dfrac{\det(A^{ij})}{\det A} \Leftrightarrow (A^{-1})_{ij} = \dfrac{\det(A^{ji})}{\det A}$ *avec* $1 \le i, j \le n$ *et* A^{ji} *est la matrice obtenue en supprimant la ligne* j *et la colonne* i *de* A*.*

Définition 2.5.4.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$*, la matrice* $({}^tcomA) = com\,({}^tA)$ *s'appelle la matrice* ***adjointe*** *de* A*.*

Remarque 2.5.2.

Soit une matrice inversible A*, son inverse est notée* $A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ *qui n'existe pas.*

Exemple 2.5.5.

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$*, A est -elle inversible ?*

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$*, à la* $1^{\text{ère}}$ *colonne, j'ai fait la* $1^{\text{ère}}$ *colonne plus la* $3^{\text{ème}}$ *colonne afin d'avoir plus de zéro dans mon déterminant pour ne pas avoir beaucoup de termes à développer. Comme* $\det A = 2 \neq 0$*, alors* A *est inversible.*

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \dfrac{1}{\det A} \times ({}^tcom\,(A))$.

$({}^tA) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$,

$$com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = ({}^t com\,(A)).$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.6 Rang d'une matrice

Proposition 2.6.1.

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq m}}$. *On a* $rgA \leq \min(n, m)$.
Si $m = n$, *et que* $rgA = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

Proposition 2.6.2.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq m}}$ *alors* rgA *est le plus grand entier naturel* s *qui est tel qu'on puisse extraire de* A *une matrice d'ordre* s *de dé terminant* $\neq 0$ *(avec permutation des colonnes(resp. lignes) de* A *si necessaire).*

Exemple 2.6.1.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, *on a* $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ *comme* $2 \geq rgA$, *donc* $rgA = 2$.

Corollaire 2.6.1.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq m}}$, $rg\,({}^tA) = rgA$.

Remarque 2.6.1.

$rg\,(A) = 0 \Leftrightarrow$ *toutes les composantes de la matrice* A *sont nuls.*

Chapitre 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTEME LINÉAIRE

Définition 3.0.1.

De maniére générale, on appelle équation linéaire d'inconnues x_1 ; ... ; x_n toute égalité de la forme : $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b \Longleftrightarrow (E)$ où $a_1; ...\ ; a_n$ et b sont des nombres(réels ou complexes) Il importe d'insister ici que ces équations linéaires sont implicites, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les inconnues, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre ces inconnues.

Résoudre une équation signifie donc la rendre explicite, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les inconnues peuvent prendre. Une solution de l'équation linéaire (E) est un n-uple $(s_1; ....; s_n)$ de valeurs respectives des inconnues x_1 ; ... ; x_n qui satisfont l'é quation (E).

Autrement dit : $a_1s_1 + ... + a_ns_n = b$.

Exemple 3.0.1.

$-2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9$ *est une équation linéaire d'inconnues x_1, x_2, x_3.*

Définition 3.0.2.

*Un ensemble **fini** d'équations linéaires d'inconnues x_1 ; ... ; x_n s'appelle un système d'équations linéaires d'inconnues x_1 ; ... ; x_n.*

Exemple 3.0.2.

Le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

admet comme solution $x_1 = -18; x_2 = -6; x_3 = 1$. Par contre $x_1 = 7$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$ ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

Définition 3.0.3.

Un système d'équations est dit incompatible ou inconsistant s'il n'admet pas de solutions, c'est-à-dire que l'ensemble solution c'est l'ensemble vide.

Exemple 3.0.3.

Le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

est clairement incompatible donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{\} = \varnothing$.

Définition 3.0.4.

Soient $n, m \geq 1$. *On appelle système de* m *équations à* n *inconnues tout système* (S) *de la forme :*

$$(S) \iff \begin{cases} a_{11}\,x_1 \; + a_{12}\,x_2 \; + \ldots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \; (E_1) \\ a_{21}\,x_1 \; + a_{22}\,x_2 \; + \ldots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \; (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \; + a_{m2}\,x_2 \; + \ldots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \; (E_m) \end{cases},$$

où a_{ij} , b_i *sont des scalaires donnés ;* x_1 , x_2 , ..., x_n *sont des inconnues et* (E_i) *la* i*-ième équation de* (S) *;* $\forall 1 \leq i \leq m$.

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est la matrice associée à* (S)*(dite aussi la matrice de* (S)*).*

Il est à noter que la j*-ième colonne de* A *est composée des coéfficients de l'inconnue* x_j *dans les différentes équations du système de la première é quation*(E_1) *à la dernière équation*(E_m) *;* $\forall 1 \leq j \leq n$.

Les $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ *sont les seconds membres de* (S) *, et* (S) *est dit homogène si* $b_i = 0$ $\forall 1 \leq i \leq m$.

Ecriture matricielle de (S).

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alors $(S) \iff AX = B$.

Exemple 3.0.4.

Considérons le système linéaire

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 7 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \text{ Alors } (S) \iff AX = B$$

Exemple 3.0.5.

Considérons le système linéaire homogène

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Alors* $(S) \Longleftrightarrow AX = B = 0_{M_{31}(\mathbb{R})}$.

3.1 Résolution du système (S) avec la matrice augmentée

Je rappelle le système

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}\,x_1 \ + a_{12}\,x_2 \ + \ldots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 \ + a_{22}\,x_2 \ + \ldots + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \ + a_{m2}\,x_2 \ + \ldots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Définition 3.1.1.

Nous obtenons la matrice augmentée associée au système (S) *en adjoingnant à la dernière colonne de la matrice du système* A *une colonne constituée des* b_i*, les seconds membres des équations de* (S)*. De là : La matrice augmentée associée au système* (S) *est alors :*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Exemple 3.1.1.

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right].$$

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.
Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires : qui consiste à : au choix

(1) multiplier une équation par une constante non nulle ;

(2) permuter deux équations ;

(3) ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Les opérations (1), (2) et (3) ne changent pas l'ensemble des solutions.

Elles correspondent à des opérations élémentaires sur les **lignes** de la matrice augmentée.

Ces opérations sont les suivantes :

(1) multiplier une ligne par une constante non nulle ;

(2) permuter deux lignes ;

(3) ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Exemple 3.1.2.

Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right]$$

en faisant des opérations élémentaires sur les **lignes** *(que sur les lignes qui représentent les équations) de la matrice augmentée ; on a :*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3}L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - 4L_3 \\ L_2 - 3L_3 \\ \\ \end{array}.$$

ce qui donne matriciellement :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 2 \\ x_2 & = 4 \\ x_3 & = -1 \end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2, 4, -1)\}$. Nous remarquons que les opérations élémentaires peuvent être faites uniquement sur la matrice augmentée pour revenir à la fin au système d'équations. C'est ce que nous avons fait. On obtient ainsi l'unique solution du système : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -1$.
Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; 4; -1)\}$.

Remarque 3.1.1.

[Remarque très importante] Quand on finit de résoudre une équation ou un systéme d'équations, il faut toujours donné l'ensemble solution clairement.

Proposition 3.1.1.

Etant donné un sytème (S) de matrice A et de matrice ***augmentée*** *M, le système est compatible (c'est-à-dire n'admet pas l'ensemble vide comme solution) ssi le rang de A est égal au rang de M i.e. $rg\,(A) = rg\,(M)$.*

3.2 Méthode de résolution d'un système de Cramer

Définition 3.2.1.

Le système (S) est dit de Cramer si $m = n$ et si $\det A \neq 0$. C'est dire que dans le système (S) le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues ; aussi A est ici la matrice du système (S).

3.2.1 Résolution d'un système de Cramer par l'inversion de la matrice associée au système

Théorème 3.2.1.

Tout système de Cramer (S) admet une solution unique $X = A^{-1}B$.

Exemple 3.2.1.

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z & = & 3 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ -x - y + z & = & 0 \end{cases}$$

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

et $\det(A) = 3 \neq 0$; c'est donc un système de Cramer.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on a alors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$.

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}$.

3.2.2 Résolution d'un système de Cramer par des déterminants

Soit $(\Sigma) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}\, x_1 & + a_{12}\, x_2 & + \ldots + a_{1n}\, x_n & = & b_1 \\ a_{21}\, x_1 & + a_{22}\, x_2 & + \ldots + a_{2n}\, x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\, x_1 & + a_{n2}\, x_2 & + \ldots + a_{nn}\, x_n & = & b_n \end{cases}$,

un système de n équations à n inconnues de Cramer. On appelle déterminant du système (Σ) le nombre $\Delta = \det A$, où A est la matrice associée a (Σ).

On appelle déterminant de x_i le nombre Δ_{x_i} égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{ème}$ colonne par les éléments respectifs des seconds membres c'est-à-dire b_1 , b_2 , ..., b_n .

Théorème 3.2.2.

(Σ) *étant de Cramer, l'unique solution dans* $\mathbb{k}^n$ *est :* $\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \ldots; \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \right)$.

Exercice 3.2.1. $(\Sigma) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z & = & 3 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ -x - y + z & = & 0 \end{cases}$.

Réponse

La matrice associée à (Σ) *est* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \text{ (\textit{je rappelle que j'ai fait} } \mathrm{col}_3 + \mathrm{col}_2\text{)}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{3};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{3};\ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}$.

3.3 Résolution d'un système avec le rang de la matrice associée connu

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, la matrice de (S) , et soit $r = rgA$.

1er cas : $m = r < n$,

$(S) \Longleftrightarrow (S\,') \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 \ + a_{12}\,x_2 \ + \ldots + a_{1r}\,x_r & = \underbrace{b_1 \ - (a_{1r+1}\,x_{r+1} \ + a_{1r+2}\,x_{r+2} \ + \ldots + a_{1n}\,x_n\,)}_{c_1\ (x_{r+1}\,,\, x_{r+2}\,,\, \ldots,\, x_n\,)} \\ a_{21}\,x_1 \ + a_{22}\,x_2 \ + \ldots + a_{2r}\,x_r & = \underbrace{b_2 \ - (a_{2r+1}\,x_{r+1} \ + a_{2r+2}\,x_{r+2} \ + \ldots + a_{2n}\,x_n\,)}_{c_2\ (x_{r+1}\,,\, x_{r+2}\,,\, \ldots,\, x_n\,)} \\ \vdots & \vdots \ \ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \ + a_{m2}\,x_2 \ + \ldots + a_{mr}\,x_r & = \underbrace{b_m \ - (a_{mr+1}\,x_{r+1} \ + a_{mr+2}\,x_{r+2} \ + \ldots + a_{mn}\,x_n\,)}_{c_m\ (x_{r+1}\,,\, x_{r+2}\,,\, \ldots,\, x_n\,)} \end{cases}$$

Soit $A' = (a_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq r}$ avec $r = rgA'$ donc det $A' \neq 0$

$(s\,')$ est un système de Cramer qu'on doit ré soudre avec les $(x_{r+i})_{1 \leq\ i\ \leq (n-r)}$ comme inconnues secondaires(c'est-à-dire des paramètres).

2ème cas : $r < m$ (voir système échelonné à la suite).

Définition 3.3.1 (rappel).

On appelle opérations élémentaires dans un système, les opérations de l'une des formes suivantes :

1. *Echanger deux lignes du système.*
2. *Multiplier une ligne par une constante non nulle.*
3. *Rajouter à une ligne du système un multiple d'une autre ligne du système. (une ligne ici est une équation du système)*

Remarque 3.3.1.
Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent. On peut donc transformer un système linéaire par une succession d'opérations élémentaires en un système échelonné.

3.4 Systèmes échelonnés ou Méthode du pivot

On dit qu'un système est échelonné si et seulement si tous les coefficients figurant en-dessous de la diagonale sont nuls. Cela revient à dire que $\forall i > j,\ a_{ij} = 0$.
Autant dire qu'un système échelonné se présente sous l'une des trois formes suivantes :

(a) $m = n$

un tel système est dit carré et l'on dit d'un système carré échelonné qu'il est trigonal.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dans ce premier cas il est facile de résoudre le système lorsque tous les termes diagonaux sont non nuls. on utilise l'*algorithme de la remontée* : la dernière équation donne en effet la valeur $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$, puis l'avant-dernière ligne donne la valeur $x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}\, x_n\right)$ et, plus généralement, on obtient : $x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\ x_j\right)$, ce qui permet de calculer les x_k successifs par ordre décroissant de l'indice k. Le système admet une unique solution, et cela quel que puisse être le second membre.

Un système ayant cette propriété s'appelle un *système de Cramer*. Si, au cours de cet algorithme, on trouve un coefficient diagonal nul dans une ligne, par exemple la ligne k, alors on ne peut pas trouver la valeur de x_k.

La ligne correspondante introduit une *condition de compatibilité*. Si cette condition n'est pas vérifiée, le système n'admet pas de solutions ; si au contraire cette condition est vérifiée, toute solution de x_k convient et l'on peut poursuivre l'algorithme. Il y a alors une infinité de solutions, paramétrées par la valeur de x_k.

Cette situation peut d'ailleurs se rencontrer plusieurs fois au cours de la remontée, induisant une discussion plus approfondie. On voit par là l'intérêt des systèmes triangulaires dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

(b) $m < n$: on a :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{mm}x_m & = b_m \end{cases}.$$

Dans ce cas, on fixe arbitrairement les valeurs des variables x_{m+1} à x_n . On est alors ramené au cas précédent, simple à résoudre lorsque tous les coefficients diagonaux sont non nuls, nécessitant une discussion sinon.

(c) $m > n$: on a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \\ & & 0 & = b_{n+1} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & = b_m \end{cases}.$$

Dans ce cas les dernières lignes donnent directement des conditions de compatibilité. Lorsqu'elles sont vérifiées, on se ramène au cas ci-dessus. D'où, là encore, l'intérêt de l'obtention de coefficients diagonaux non nuls.

Exemple 3.4.1.

Soit $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 3x + 4y - 2z = 0 & (E_2) \\ 3x - 2y + 4z = -1 & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 6y - 6z = 1 & (E_2 - E_3) \\ y - 11z = 5 & (3E_1 - 2E_3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) & \Rightarrow x = \frac{1}{10} \\ 6y - 6z = 1 & (E_2\ ) & \Rightarrow y = -\frac{19}{60} \\ -60z = 29 & (6E_3 - E_2) & \Rightarrow z = -\frac{29}{60} \end{cases}.$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\dfrac{1}{10}; -\dfrac{19}{60}; -\dfrac{29}{60} \right) \right\}.$

3.5 Calcul de l'inverse d'une matrice par la résolution de systèmes

3.5.1 Une première méthode(mais souvent fastidieuse)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq\, i,\, j\, \leq\, n}$ une matrice inversible, $B = (x_{ij})_{1 \leq\, i,\, j\, \leq\, n}$

son inverse, alors $AB = I_n$.
Pour trouver la $1^{ère}$ colonne de B, on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la $j^{ème}$ colonne de B,on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ x_{(j+1)j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{seule la } j^{ème} \text{ coordonnée est égale à } 1.$$

3.5.2 Une deuxième méthode

Exercice 3.5.1.

:

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Réponse

$\det A = 3$; soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,

$$(S) \Leftrightarrow AX = Y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_2 \\ x_1 - x_3 &= y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 &= \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

La matrice associée à (S') est l'inverse de A donc :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Chapitre 4

ESPACES VECTORIELS

4.1 Introduction

Dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan, on a : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$
(1) $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
(2) Le vecteur $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ vérifie : $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
(3) $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, on a : $(-\overrightarrow{u}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
(4) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Aussi $\forall \alpha \in (\mathbb{R}, +, \times)$, $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \alpha . \overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ avec :
(5) $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.(1 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, \times)$)
(6) $\alpha(\beta \overrightarrow{u}) = (\alpha \times \beta) \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(7) $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha \overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{v}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
(8) $(\alpha + \beta) \overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Ainsi on dit que $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition 4.2.1.

Un groupe commutatif $(E, +)$ est un ensemble $E \neq \varnothing$ muni d'une loi de composition interne $(x + y) \in E$, définie pour tous éléments x et y de E, ayant les propriétés suivantes :
(1) *Associativité :* $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in E$
(2) *Il existe un élément neutre* $0 \in E$ *qui vérifie :* $\forall x \in E, x + 0 = 0 + x = x$.
(3) *Tout élément x de E possède un symétrique, noté $-x \in E$ tel que*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(4) *Commutativité :* $x + y = y + x$, $\forall x, y \in E$.

Définition 4.2.2.

Soit $(E,+)$ un groupe commutatif et $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif.
Nous dirons que $(E,+)$ est ***un espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$
(qui est appelé le corps de base de l'espace vectoriel)
s'il existe une loi de composition ***externe*** *"." associant à tout él ément*
$\alpha \in \mathbb{K}$ et tout élément $x \in E$, un élément de E, noté $\alpha.x = \alpha x$,avec les propriétes suivantes :
(5) $1x = x$*, tout élément $x \in E$.(1 est l'élément neutre $(\mathbb{K},\times)$)*
(6) $\alpha(\beta x) = (\alpha \times \beta)x$*, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*
(7) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$*, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$.*
(8) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$*, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.*
Aussi on dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.2.3.

1.*Un élément x de $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel(qu'on pourrait écrire $\vec{x}$) est dit* ***vecteur*** *et ceux de $\mathbb{K}$* ***scalaires****.*
2.*Deux vecteurs x et y de E sont dit* ***colinéaires*** *s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*

$$y = \lambda x.$$

Remarque 4.2.1.

Nous laissons au lecteur le soin de distinguer l'élément neutre de $(E,+)$ (qu'on pourrait écrire $\vec{0}$ ou 0_E), qui est un vecteur, appelé ***vecteur nul*** *de E, de l'élément nul 0 de $\mathbb{K}$ (qu'on pourrait écrire $0_{\mathbb{K}}$), qui est un scalaire. Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :*
Tout élément $x \in E$ $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$, d'après (8) si $\beta = -\alpha$.
Tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha.x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
On a en outre : $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x,$ tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
Et, en particulier $(-1)x = -(1.x) = -x$.

Remarque 4.2.2.

Tout ensemble non vide $(E,\top,\perp)$ muni de deux lois de composition : "$\top$" la première, une loi de composition interne tel que $(E,\top)$ soit un groupe commutatif car vérifiant les propriétés (1) jusqu'à (4) et "$\perp$" la deuxième loi étant une loi de composition externe sur E moyennant un ensemble de scalaires $\alpha \in \mathbb{K}$ un corps commutatif et vérifiant relativement les propriétés (5) jusqu'à (8) est dit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.En effet :

4.3 Définition générale d'un espace vectoriel sur un corps commutatif $(\mathbb{K},\heartsuit,\clubsuit)$

Ici $(\mathbb{K},\heartsuit,\clubsuit)$ est un corps commutatif dont l'élément neutre de la deuxième loi

est noté $e_\clubsuit$ et l'élément neutre de la première loi est $e_\heartsuit$.
Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition **interne** notée "$\oplus$", de sorte que $(E, \oplus)$ soit un **groupe commutatif** d' élément neutre $e_\oplus$**.**
Aussi, on munit E d'une loi de composition **externe** "$\otimes$" sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire
$\otimes : E \times \mathbb{K} \longrightarrow E$, $(x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x$,
Si on a :
(1) $e_\clubsuit \otimes x = x$, tout élément $x \in E$.
(2) $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \clubsuit \beta) \otimes x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
*(Ceci **semble** être l'associativité de la loi"$\otimes$ ", mais comme $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \otimes \beta$ n'a pas de sens dans $\mathbb{K}$, au vu du calcul vectoriel dans le plan, il conviendrait de poser $(\alpha \clubsuit \beta)$ au lieu de $\alpha \otimes \beta$).*
(3) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$.
(*la loi de composition externe sur E est distributive à droite (car la loi de composition externe* "$\otimes$" sur $\mathbb{K}$ *a le scalaire à gauche :* $(x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x)$ *par rapport à la loi de composition interne sur* E)
(4) $(\alpha \heartsuit \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.
(*la loi de composition externe sur E **semble** distributive de* "$\otimes$" *par rapport à la loi"$\heartsuit$" 1$^{\text{ère}}$ loi de composition interne sur $\mathbb{K}$, où dans le dévéloppé pour une question de definition "$\heartsuit$ " est remplacée par "$\oplus$" la loi de composition interne sur E, car $(\alpha \otimes x)$; $(\beta \otimes x) \in E$ et $(\alpha \otimes x) \heartsuit (\beta \otimes x)$ n'a pas de sens dans E, d'où le remplacement*).
En plus d'avoir $(E, \oplus)$ comme un **groupe commutatif,** nous dirons que $(E, \oplus, \otimes)$ a une **structure d'espace vectoriel sur le corps commutatif** $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$.

4.3.1 Tableau de simularité

$\left(\overrightarrow{\mathcal{P}},+,.\right)$; $\forall\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\forall\alpha\in(\mathbb{R},+,\times)$, $\alpha.\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$	$(E,\oplus,\otimes)$;$\forall x,y\in E, x\oplus y\in E$, $\forall\alpha\in(\mathbb{K},\heartsuit,\clubsuit)$, $\alpha\otimes\overrightarrow{u}\in E$
(1) $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$, $\forall\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$	(1) $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$, $\forall x,y,z\in E$
(2) $\overrightarrow{0}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$; $\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$.	(2) $e_\oplus\in E$; $\forall x\in E$, $x\oplus e_\oplus=e_\oplus\oplus x=x$.
(3) $\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $(-\overrightarrow{u})\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=(-\overrightarrow{u})+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.	(3) $\forall x\in E$, $symét_\oplus(x)\in E$, $x\oplus symét_\oplus(x)=symét_\oplus(x)\oplus x=e_\oplus$.
(4) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}, \forall\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$.	(4) $x\oplus y=y\oplus x, \forall x,y\in E$.
(5) $1\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}, \forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$.(1 est l'élt neutre de $(\mathbb{R},\times)$)	(5) $e_\clubsuit\otimes x=x, \forall x\in E$.
(6) $\alpha(\beta\overrightarrow{u})=(\alpha\times\beta)\overrightarrow{u}, \forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.	(6) $\alpha\otimes(\beta\otimes x)=(\alpha\clubsuit\beta)\otimes x, \forall x\in E$, $\forall\alpha,\beta\in K$.
(7) $\alpha(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}+\alpha\overrightarrow{v}$, $\forall\alpha\in K$, $\forall\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$.	(7) $\alpha\otimes(x\oplus y)=(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$, $\forall\alpha\in K, \forall x,y\in E$.
(8) $(\alpha+\beta)\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$.	(8) $(\alpha\heartsuit\beta)\otimes x=(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$, $\forall\alpha,\beta\in K, \forall x\in E$.

Définition 4.3.1.

Un élément x de $(E,\oplus,\otimes)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel(qu'on pourrait écrire $\vec{x}$) est dit ***vecteur*** *et ceux de $\mathbb{K}$* ***scalaires****.*

Définition 4.3.2.

Deux vecteurs x et y de E sont dit colinéaires s'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que

$$y=\lambda\otimes x.$$

Remarque 4.3.1.

Le vecteur nul de $(E,\oplus,\otimes)$ est l'élément neutre $e_\oplus$.

Ici $e_\heartsuit$ et $e_\clubsuit$ sont des scalaires éléments neutres respectifs de $\heartsuit,\clubsuit$.

Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :

⊡ *Tout élément $x\in E$ $\;e_\heartsuit\otimes x=e_\oplus$, d'après (4) si $\beta=symét_\heartsuit(\alpha)$.*

(Soulignons que $symét_\heartsuit(\alpha)$ est le symétrique de α par rapport à la loi $\heartsuit$.

Et que $symét_\heartsuit(\alpha)\heartsuit\alpha=\alpha\heartsuit symét_\heartsuit(\alpha)=e_\heartsuit$.)

⊡ *Tout élément $x\in E, \forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\;\alpha\otimes x=e_\oplus\Longleftrightarrow\alpha=e_\heartsuit$ ou $x=e_\oplus$.*

⊡ *On a en outre : $\alpha\otimes symét_\oplus(x)=(symét_\heartsuit(\alpha))\otimes x=symét_\oplus(\alpha\otimes x)$,*

tout élément $x\in E, \forall\alpha\in\mathbb{K}$.

⊡ *Et, en particulier $\;(symét_\heartsuit(e_\clubsuit))\otimes x=symét_\oplus(e_\clubsuit\otimes x)=symét_\oplus(x)$.*

4.3.2 Exemples

a) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.
On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des lois définies par les formules ci-dessous :
$\forall (u_1, u_2, ..., u_n), (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{K}^n,$
$(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n).$
$\forall (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{K}^n, \ \forall \alpha \in \mathbb{K},$
$\alpha (u_1, u_2, ..., u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n).$
Ces lois font de $\mathbb{K}^n$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
b) L'ensemble $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à une variable x et à coefficients dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur le corps des nombre complexes, l'addition étant celle des polynômes et la multiplication par un nombre complexe c le produit d'un polynôme par c.
Ce même ensemble est aussi un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels avec une loi externe de multiplication par un nombre réel.On dit que $\mathbb{C}[x]$ est un espace vectoriel complexe si son corps de base est $\mathbb{C}$ Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on dit qu'on a un espace vectoriel réel.

c) L'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) muni de l'addition est un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe
(qui est la multiplicationon par un scalaire complexe ou réel, d'une matrice)
fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Définition 4.3.3.

Soit une suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *de* n *vecteurs d'un* $(\mathbb{K}, +, \times)$*-espace vectoriel* $(E, +, .)$ *; une* ***combinaison linéaire*** *de cette suite est un élément de* E *de la forme :*

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *sont des scalaires de* $\mathbb{K}$ *ce sont les coéfficients de la combinaison linéaire.*
Aussi *une suite* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *de* n *vecteurs d'un* $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$*-espace vectoriel* $(E, \oplus, \otimes)$ *;une* ***combinaison liné aire*** *de cette suite est un élément de* E *de la forme :* $y = (\alpha_1 \otimes x_1) \oplus (\alpha_2 \otimes x_2) \oplus ..... \oplus (\alpha_n \otimes x_n)$ *où* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *sont des scalaires de* $\mathbb{K}$ *ce sont les coéfficients de la combinaison linéaire.*

Exemple 4.3.1.

Dans $\mathbb{R}^2$, $x = -2(1,4) + 7(-4,5) - 3(6,9)$ *est une combinaison de la suite de vecteurs*$((1,4);(-4,5),(6,9))$.

4.4 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.4.1.

Une partie non vide F d'un $(\mathbb{K},+,\times)$-espace vectoriel $(E,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1°) $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$

2°) $\forall\alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \alpha.x \in F$.

(i.e. la loi de composition externe sur E est stable dans F.)

Les opérations définies dans E sont donc également définies dans F et lui confère une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

*Aussi un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \neq \varnothing$ de E **caractérisé** par les deux propriétés suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall x,y \in F & : x+y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, & \alpha.x \in F. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall x,y \in F,\ \alpha x + \beta y \in F.$$

De même :

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall x,y \in F & : x+y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, & \alpha.x \in F. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x,y \in F,\ \alpha x + y \in F.$$

Remarque 4.4.1.

Tout sous-ensemble non vide F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui est tel que toute combinaison linéaire de ses éléments lui appartiennent est un sous-espace vectoriel de E.

4.4.1 Exemples de sous-espaces vectoriels

a) L'ensemble F des combinaisons linéaires de la suite $(x_1, x_2, \ldots.., x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Nous appellerons ce sous-espace vectoriel F le **sous-espace engendré** par la suite $(x_1, x_2, \ldots.., x_n)$.

b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble réduit au singleton vecteur nul :$\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , ainsi que E lui-même.

Le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ et E sont dit **sous-espaces vectoriels triviaux** de E.

Tout autre sous-espace vectoriel F de E est dit **sous-espace vectoriel propre** de E,et vérifie : $\{0_E\} \subset F \subset E$.

c) L'ensemble $\mathbb{C}_n[x]$ des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$, forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x]$.

4.5 Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs

Définition 4.5.1.

*Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,on dit que la suite de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est **liée** si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, **non tous nuls**, tels que :*

$$(9) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

*On dit également, par abus de langague, que les vecteurs de la suite sont lié s, ou encore **linéairement dépendants**.*

*Si la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**, ou encore que $x_1, x_2, ..., x_n$ sont libres ou **linéairement indé pendants ;***

ceci signifie que l'égalité (9) entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Si la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre , il en est de même de toute suite partielle et, en particulier, tous les éléments x_i de la suite sont distincts.

Exemples

1. Soit $x(1,4) + y(-4,5) + z(6,9) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 9z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = -\dfrac{22}{7} z; y = \dfrac{5}{7} z$

avec z réel quelconque, ainsi $((1,4);(-4,5),(6,9))$ est une suite liée.

2. Soit $x(1,4) + y(-4,5) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y &= 0 \\ 4x + 5y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$

Ainsi $((1,4);(-4,5))$ est une suite libre.

Exercice 4.5.1. *Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :*

1. $u = (1,2,-1);\ v = (1,0,1);\ w = (-1,2,-3)$

2. $u = (-1,2,5);\ v = (2,3,4);\ w = (7,0,-7)$.

Proposition de correction

1. Soit $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array} \approx \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v-u \\ w+u \end{array} \end{array}$

$A \approx \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v-u \\ w+u+2(v-u) \Rightarrow w+u+2(v-u) = \vec{0} \end{array} \end{array}$

$w + u + 2(v-u) = \vec{0} \Leftrightarrow w + u + 2(v-u) = 2v - u + w = \vec{0}$*; donc la famille* $\{u, v, w\}$ *est une famille liée et la relation de dé pendance* *liant les vecteurs :* u, v, w *est :* $2v - u + w = \vec{0}$.

2. $u = (-1, 2, 5);\ v = (2, 3, 4);\ w = (7, 0, -7)$.

$$\text{Soit } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \approx \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 14 & 28 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v+2u \\ w+7u \end{array}$$

$$B \approx \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v+2u \\ w+7u-2(v+2u) \Rightarrow w+7u-2(v+2u) = \vec{0} \end{array}$$

$w + 7u - 2(v + 2u) = \vec{0} \Leftrightarrow w + 7u - 2(v + 2u) = 3u - 2v + w = \vec{0}$*; donc la famille* $\{u, v, w\}$ *est une famille liée et la relation de dé pendance liant les vecteurs :* u, v, w *est :* $3u - 2v + w = \vec{0}$.

Propriété 4.5.1.

Pour qu'une suite de vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ *soit liée, il faut et il suffit que l'un d'eux soit une combinaison linéaire des autres.*

Théorème 4.5.1.

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *une suite de* n *vecteurs d'un espace vectoriel* E.
Soit $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ *une suite de* $(n+1)$ *combinaisons linéaires des vecteurs* $x_1, x_2, ..., x_n$*. Alors la* $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ *est liée.*

4.6 Espaces vectoriels de dimension finie

4.6.1 Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs

Définition 4.6.1.

On dit qu'un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *possède* n ***générateurs*** $x_1, x_2, ..., x_n$*, si* $x_1, x_2, ..., x_n$ *sont des vecteurs de* E *et si tout vecteur de* E *est une combinaison linéaire de* $(x_1, x_2, ..., x_n)$*. Il en résulte que* E *coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *et est donc l'espace engendré par cette suite.*

Exemple 4.6.1.

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, on a* $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$
donc $\mathbb{R}^3 = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\,; x, y, z \in \mathbb{R}\}$
ainsi la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Le **théorème**4.5.1 entraîne immédiatement :

Propriété 4.6.1.

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ayant* n *générateurs. Alors toute suite de* $(n+1)$ *vecteurs de* E *est liée.*

Proposition 4.6.1.

Tout sous ensemble non vide d'un espace vectoriel E engendré par une famille de vecteurs de E, est un sous-espace vectoriel de E , aussi tout sous-espace vectoriel de E, est un sous ensemble de E engendré par une famille de vecteurs de E.

4.6.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 4.6.2.

*Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une **base** de E, si l'on a les deux propriétés suivantes :*

1°) $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des générateurs de E.

2°) La suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

Propriété 4.6.2.

*Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour que la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit une base de E, il faut et il suffit que tout vecteur $y \in E$ s'exprime de façon **unique** sous la forme :*

$$y = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}; \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

α_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur y par rapport à la base $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Le théorème suivant exprime l'invariance du nombre d'éléments d'une base.

Théorème 4.6.1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant une base $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Toute autre base de E est formée de n éléments . Toute suite libre $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est une base de E. Aussi toute suite génératrice $(z_1, z_2, ..., z_n)$ est une base de E.

Définition 4.6.3.

*Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. On dit que E est de **dimension finie** s'il existe un entier naturel n et une base de E composée de n éléments.Alors, d'après le théorème 2, toute base de E est formée de n éléments ; cet entier naturel n s'appelle la **dimension** de E et se note*

***dim**E ou $(\dim_{\mathbb{K}} E)$.*

Remarque 4.6.1.

***a)** Si $E = \{0_E\}$, il n'y a pas de base ; on dit encore que E est de dimension nulle et on pose dim$E = 0$.*

***b)** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, admet une **infinité** de bases.*

Exemple :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $((\lambda, 0) ; (0, \lambda))$ *est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.*

***c)** Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de vecteurs de E, de cardinal strictement inférieur à n, ne peut être génératrice, avec possibilité d'indépendance linéaire.*

d) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de vecteurs de E, de cardinal strictement supérieur à n, ne peut être libre, avec possibilité d'être génératrice.
e) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, seule une famille de vecteurs de E, de cardinal égal à n, peut être une base de E.

Exemples

a°) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ a une base dite **base canonique** $(e_1, e_2, ..., e_n)$ où le vecteur e_k est le vecteur $(0, 0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$, le 1 étant la $k^{ième}$ coordonnée, toutes les autres coordonnées sont nulles.
b°) Soit $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à une variable complexes de degré inférieur ou égal à n, avec le polynôme nul. La suite de polynômes $(1, x, x^2, ..., x^n)$ forme une base de E.
Donc dim$E = n + 1$.
Plus généralement $\forall a \in \mathbb{C}$, on vérifie que $\left(1, x - a, (x - a)^2, ..., (x - a)^n\right)$ est aussi une base de E.
Ainsi il y a bien une infinité de bases de $\mathbb{C}_n[X]$.
c°) Il ne faut pas croire que tout espace vectoriel soit de dimension finie.
Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ de tous les polynômes complexes n'est pas de dimension finie ; s'il était de dimension n, $n + 1$ polynômes quelconques seraient liés ; or la suite $(1, x, x^2, ..., x^n)$ est une suite libre de $n + 1$ vecteurs.
Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**.

Proposition 4.6.2.

L'ensemble $(M_{pq}(\mathbb{K}), +, .)$ des matrices $p \times q$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une de ses bases est constituée par les matrices E_{ij} tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$, si $r \neq i$ ou $s \neq j$. Ceux sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}} a_{ij}E_{ij}$ ce qui entrainera que la dimension de $M_{pq}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ est pq.

Exemples

a°) Une base de l'espace vectoriel $M_{23}(\mathbb{R})$ est constitué par les matrices :
$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Donc la dimension de $M_{23}(\mathbb{R})$ est 6.
Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{23}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$A = 2E_{11} + 5E_{12} - 7E_{13} + 9E_{21} + 8E_{22} + 4E_{23}.$$

b°) Une matrice $1 \times q$ a la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{pmatrix}$.
on l'appelle **matrice ligne ou uniligne** appartenant à l'espace $M_{1q}(\mathbb{K})$
qui est isomorphe à $\mathbb{K}^q$, donc de dimension q.

c°) Une matrice $p \times 1$ a la forme $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.

On l'appelle **matrice colonne ou unicolonne** appartenant à l'espace $M_{p1}(\mathbb{K})$
qui est isomorphe à $\mathbb{K}^p$, donc de dimension p.
d°) Une matrice $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre** n appartenant à l'espace
vectoriel des matrices notée $M_n(\mathbb{K})$.Il est de dimension n^2 sur $\mathbb{K}$.

4.6.3 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 4.6.4.
Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit une base β, de E, le déterminant de la suite S dans la base β, est noté
$\det_\beta(S) = \begin{vmatrix} V_1^\beta & V_2^\beta & \cdots & V_n^\beta \end{vmatrix}$, *où V_j^β constituent la $j^{ième}$ colonne avec les coordonnées de V_j dans la base β. $\forall 1 \leq j \leq n$.*

Exemple 4.6.2.

Soient $V_1 = (1, -6, 8)$, $V_2 = (0, -3, 11)$, $V_3 = (0, 0, -5)$ *trois vecteurs du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$, *et* $S = (V_1, V_2, V_3)$.
Comme cardinal de (S) *noté* $Card\,(S) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *alors on peut évaluer le déterminant de* S *:*

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 15. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

on a $\det(S) = \det A = \det({}^tA)$.
On peut donc saisir les coordonnées des V_j *en* ***colonne*** *ou en* ***ligne***.

Proposition 4.6.3.

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ *une suite de* n *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n. *Soit une base* β, *de* E,
a) Si $\det_\beta(S) \neq 0$, *alors la suite* S *est libre ou linéairement indépendante et comme* $Card\,(S) = \dim E$, *donc* S *est* ***une base*** *de* E.
b) Si $\det_\beta(S) = 0$, *alors la suite* S *est liée ou liné airement dépendante.*

4.7 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

La propriété suivante nous sera utile dans cette étude.

Propriété 4.7.1.

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $n \geq 0$ *un entier naturel. Supposons que toutes les suites de* $(n+1)$ *vecteurs de* E *soient liées. Alors* E *est un espace vectoriel de dimension finie et dim*$E \leq n$.

Corollaire 4.7.1.

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $F \subset E$ *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* F *est de dimension finie et dim*$F \leq$ *dim*E. *De plus, si dim* $F =$ *dim* E, *alors* $F = E$.
Une autre conséquence de la propriété 4 est la suivante :

Corollaire 4.7.2.

Soit E *un espace vectoriel ayant* n *générateurs* $x_1, x_2, ..., x_n$, *alors* E *est un espace vectoriel de dimension finie et dim* $E \leq n$.

4.7.1 Rang d'une suite finie de vecteurs

Considérons une suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, de dimension finie ou non. Le sous-espace F engendré par cette suite admet

n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$; c'est donc, d'après le corollaire 2, un espace vectoriel de dimension finie $r \leq n$.

Définition 4.7.1.

*On appelle **rang** r d'une suite finie de n **vecteurs** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la **dimension** r de l'espace vectoriel F **engendré** par ces vecteurs. On a $r \leq n$.*

Proposition 4.7.1.

1)Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2) $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme quoi l'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
3) Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.

Remarque 4.7.1.

La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n'est pas necessairement un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4.7.2.

Soit un sous-ensemble non vide A inclus dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E,
*$vect\,(A) =< A >$ est appelé le sous-espace vectoriel engendré par A et c'est le **plus petit** sous-espace vectoriel de E contenant A.*
Aussi $vect\,(A) =< A >$ est l'intersection des tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

Remarque 4.7.2.

Si $v_1, v_2, v_3 \in E$,
$vect\,(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3\,;\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}\} =< v_1, v_2, v_3 >$

c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.

Proposition 4.7.2.

Soient A et B des parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ;
1.$vect\,(vect\,(A)) = vect\,(A)$
2. Si $A \subset B \Rightarrow vect\,(A) \subset vect\,(B)$
3. $vect\,(A \cup B) = vect\,(A) + vect\,(B)$.
4. si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $vect\,(A) = A$.

Proposition 4.7.3.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on a :
1) $F + G =< F \cup G >$=l'espace engendré par $F \cup G$.
2) $\dim\,(< F \cup G >) = \dim\,(F + G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)$.

Remarque 4.7.3.

Si dim $E = n$, n générateurs de E forment une base de E.

Exercice 4.7.1. *Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.*

1. $u = (7, 12);\ v = (18, -13);\ w = (-4, 17)$
2. $u = (-1, 0, 2);\ v = (1, 3, 1);\ w = (0, 1, -1)$
3. $u = (15, -27, -6, 12);\ v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

Proposition de correction

1. $u = (7, 12);\ v = (18, -13);\ w = (-4, 17)$

La famille $\mathcal{F} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ *et le* $Card\mathcal{F} = 3 > \dim \mathbb{R}^2 = 2$

donc la famille $\mathcal{F}$ *est liée dans* $\mathbb{R}^2$.

2. $u = (-1, 0, 2);\ v = (1, 3, 1);\ w = (0, 1, -1)$

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v+u \\ w \end{array}$

$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v+u \\ -3w+(v+u) \end{array}$ *délà on a bien :*

$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$*le rang de* A *:* $rg\,(A) = 3$

aussi la famille $\mathcal{G} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ *et le sous-espace vectoriel engendré par* $\mathcal{G} = \{u, v, w\}$ *c'est-à-dire* $< u, v, w >$ *est de dimension* $rg\,(A) = 3 = Card\mathcal{G}$ *donc la famille* $\mathcal{G}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$.

Remarque 4.7.4.

En formant une matrice A *constituée en ligne ou en colonne des coordonnées des vecteurs d'une famille donnée* $\mathcal{F}$ *; lorsque le rang de* A *est égal au cardinal de* $\mathcal{F}$*, la famille* $\mathcal{F}$ *est libre sinon elle est liée.*

3. $u = (15, -27, -6, 12);\ v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$

aussi soit

$A = \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \end{array}$

$\approx \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u \\ 6v+u \Rightarrow 6v+u = \vec{0} \end{array}$

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$ *est donc liée car il y a une relation de dépendance entre les vecteurs :* u, v *qui est :* $6v + u = \vec{0}$.

4.8 Sous-espaces supplémentaires-théorème de la base incomplete

Définition 4.8.1.

*Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont appelés **supplémentaires** si tout élément $x \in E$ s'écrit d'**une façon** et d'**une seule** sous la forme : $x = y + z,\ y \in F,\ z \in G$.*

*On dit encore que E est la **somme directe** de F et G et on é crit :*

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\} .$$

Théorème 4.8.1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux propriétés ci-dessous sont é quivalentes :

(a) F et G sont supplémentaires

(b) $F \cap G = \{0_E\}$ et dim E = dim$F$ + dim$G$.

Théorème 4.8.2 (De la base incomplète)**.**

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour toute suite libre $(y_1, y_2, ..., y_p)$ de E $(p \leq n)$, on peut trouver $q = n - p$ vecteurs $z_1, z_2, ..., z_q$ de E tels que $(y_1, y_2, ..., y_p, z_1, z_2, ..., z_q)$ soit une base de E.

2. Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G.

4.9 Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$

Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels . On peut munir l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant :

l'addition comme le produit de deux groupes additifs :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et la multiplication de (x_1, x_2) par $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha\,(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Définition 4.9.1.

*L'espace vectoriel E ainsi construit s'appelle le **produit** des espaces vectoriels E_1 et E_2 et se note : $E = E_1 \times E_2$. Le vecteur nul de E est $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2})$ où 0_{E_1} est le vecteur nul de E_1 et 0_{E_2} le vecteur nul de E_2.*

Les deux sous-espaces vectoriels de E : $F_1 = \{(x_1, 0)\,,\ x_1 \in E_1\}$; $F_2 = \{(0, x_2)\,,\ x_2 \in E_2\}$

vérifient :

Propriété 4.9.1.

F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E,

et on a donc : $E = F_1 \oplus F_2$.

Propriété 4.9.2.

Si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors E est de dimension finie et

on a : $\dim E = \dim (E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Dans la définition d'un produit, on peut avoir $E_1 = E_2$; on définit ainsi $E_1 \times E_1$ que l'on note aussi E_1^2.

La définition du produit de deux espaces vectoriels se généralise au produit $E_1 \times E_2 \times ..... \times E_n$ d'un nombre fini de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $E_1, E_2, ..., E_n$ et, en particulier on peut avoir $\underbrace{E_1 \times E_1 \times ..... \times E_1}_{n \text{ fois}} = E_1^n$.

Chapitre 5

APPLICATIONS LINÉAIRES

5.1 Image et Noyau

Définition 5.1.1.

[Application linéaire] Soient $(E, \top, \bot)$ *et* $(F, *, \heartsuit)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : E \to F$ *une application de* E *dans* F.

On dit que f *est une* ***application linéaire*** *si elle possède les deux propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in E, \forall y \in E \quad , \quad f(x \top y) = f(x) * f(y)$

(ii) $\forall x \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha \bot x) = \alpha \heartsuit f(x)$.

Remarque 5.1.1.

(i) *et* $(ii) \Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f((\alpha \bot x) \top (\beta \bot y)) = (\alpha \heartsuit f(x)) * (\beta \heartsuit f(y))$

(i) *et* $(ii) \Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f((\alpha \bot x) \top y) = (\alpha \heartsuit f(x)) * f(y)$.

Définition 5.1.2.

[Application linéaire] Soient $(E, +, .)$ *et* $(F, +, .)$ *deux* $\mathbb{K}$ *-espaces vectoriels et* $f : E \to F$ *une application de* E *dans* F. *On dit que* f *est une* ***application linéaire*** *si elle possède les deux propriétés suivantes :*

(1) $\quad \forall x \in E,\ \forall y \in E \quad , \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(2) $\quad \forall x \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Remarque 5.1.2.

Une application f *entre deux* $\mathbb{K}$ *-espaces vectoriels* E *et* F *est linéaire ssi les expressions images de* $f(x)$*, pour* $x \in E$*, sont linéaires par rapport aux coordonnées de* $x \in E$*, moyennant une base sur* E .

Exemple 5.1.1.

Cette expression : $a_1x_1 + ... + a_nx_n$ *est linéaire en* $x_1, x_2, ..., x_n$*, mais pas celle-ci*

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n + b.$$

Propriété 5.1.1.

a°) *On déduit de* (1) *en posant* $y = x = 0_E \in E,\ f(0_E) = 0_F \in F.$

On a également $f(-x) = -f(x)$.

b°) (1) *et* $(2) \Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

(1) *et* $(2) \Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

c°) ***Soit*** E ***munit d'une base*** $(e_1, e_2, \ldots.., e_n)$,

pour tout $y \in E,\ \exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_n \in K;\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$;

d'où $f(y) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$; ***et on constate que*** f ***est complètement***

déterminée par son action sur une base de E**.**

Exemple 5.1.2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ *est une application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5.1.3.

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (4, x - 9y)$ *n'est pas une application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *car* $g(0, 0) = (4, 0) \neq (0, 0)$ *vecteur nul de* $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.1.3.

[***noyau d'une application linéaire*** *] Le* ***noyau*** *d'une application linéaire* $f : E \to F$ *est l'ensemble des vecteurs* $x \in E$ *tels que* $f(x) = 0$. *Il est noté* $Ker\ f$. *D'où* $Ker\ f = \{x \in E;\ f(x) = 0_F\}$.

Exemple 5.1.4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ *une application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

$$\ker f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = (0, 0)\right\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

$\ker f = \{(x, -2x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} =< (1, -2) >\Rightarrow \dim \ker f = 1.$

Lemme 5.1.1.

Le noyau de f *est un sous-espace vectoriel de* E.

Proposition 5.1.1.

. Une application linéaire $f : E \to F$ *est injective si et seulement si* $Ker\ f = \{0_E\}$.

Définition 5.1.4.

*[de l'image d'une application linéaire] L'****image*** *d'une application linéaire* $f : E \to F$ *est l'ensemble image de* E *par l'application* f *, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à* F *tels qu'il existe au moins un vecteur* $x \in E$ *avec* $f(x) = y$. *On la note* $f(E)$ *ou encore* $ImIm\ f$.

$ImIm\ f = \{y \in F, \exists x \in E\,;\ f(x) = y\} = \{\ f(x)\ ;\ x \in E\} = f(E)$.

Lemme 5.1.2.

L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque 5.1.3.

1)L'image par une application linéaire $f : E \to F$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
2) Aussi l'image reciproque de f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5.1.2.

Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $ImIm\ f = F$.

Définition 5.1.5.

*[**Isomorphisme**]*

1. *Une application linéaire $f : E \to F$ est un **isomorphisme** si elle est injective et surjective. On dit alors que E et F sont **isomorphes** par f.*
2. *Une application linéaire $f : E \to E$ est un **endomorphisme**. Un endomorphisme qui est bijectif est un **automorphisme.***
3. *Deux espaces E et F sont **isomorphes** noté$(E \simeq F)$, s'il existe au moins un isomorphisme f de E sur F.*
4. *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, il existe une application inverse f^{-1} ; et f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*
5. *$f : E \to F$ est un isomorphisme $\Longleftrightarrow Ker\ f = \{0_E\}$ et $f(E) = F$.*

Théorème 5.1.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f : E \to F$. Alors :

$$(a)\ \ f \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } F.$$
$$\Updownarrow$$
$$(b)\ \ dimE = dimF \text{ et } Kerf = \{0_E\}.$$
$$\Updownarrow$$
$$(c)\ dimE = dimF \text{ et } ImImf = F$$

Lemme 5.1.3.

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite libre de vecteurs de E et une application linéaire $f : E \to F$ injective. Alors $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$ est une suite libre dans F.

5.1.1 Le théorème noyau-image

Théorème 5.1.2.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et une application linéaire $f : E \to F$. Si la dimension de E est finie, il en est de même des dimensions de $Kerf$ et de $f(E) = ImImf$ et l'on a : $\dim E = \dim f(E) + \dim Ker\ f$.

Lemme 5.1.4.
Soient E de dimension finie et une application linéaire $f : E \to F$.
Alors $f(E) = ImImf$ est de dimension finie.

Corollaire 5.1.1.
Avec les hypothèses du théorème 5.1.2 :

$$Ker\ f = \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim ImImf = \dim f(E) = \dim E.$$

5.1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5.1.6.
*. Le **rang** d' une application liné aire $f : E \to F$.*
Avec E de dimension finie est par définition la dimension
de l'image $f(E) = ImImf$.

Exemples

a°) L'application $f : E \to F$ qui, à tout vecteur $x \in E$ associe le vecteur nul 0_F de F est linéaire. On a $ImIm\ f = \{0_F\}$ et le rang de f est nul.Le noyau $\ker f = E$.
b°) L'application f de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le vecteur x est linéaire. $Ker\ f = \{0\}$, $f(E) = E$. On l'appelle l'**identité** Id_E.
C'est un isomorphisme de E sur E,ou **automorphisme** de E.
c°) Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $a \neq 0$ un élément de $\mathbb{K}$, l'application f :$x \longmapsto ax$ est une application linéaire de E sur E et c'est un automorphisme(homothétie vectorielle).
d°) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. A tout vecteur $x \in E$, on peut faire correspondre sa composante $y \in F$ définie par :

$$x = y + z, y \in F, z \in G.$$

L'application $f : x \longmapsto y$ est une application linéaire de E dans F qu'on appelle **projection** sur F parallèlement à G. Le noyau de f est G et l'image $f(E)$ est F.
Si E est de dimension finie, on vérifie directemnet le théorème noyau-image sur les dimensions.
e°) Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n, avec le polynôme nul. L'application $f : P \longmapsto P + P'$, où P' est

le polynôme dérivé de P, est une application linéaire de E dans E, on dit encore que c'est un $\mathbb{C}$-endomorphisme de E.

On vérifie directement que $Ker\ f = \{0\}$; il résulte alors du théorème 1 que f est un automorphisme de E donc est surjective.

f°) Une application linéaire de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans $\mathbb{K}$ s'appelle une **forme linéaire** sur E ($\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même). Soit f une forme linéaire non nulle sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On a $ImIm\ f \neq \{0\}$ et $ImIm\ f \subset \mathbb{K}$;

donc l'image de f , espace de dimension 1 appelé **droite vectorielle**

(à cause de sa dimension qui est **1**) et le noyau de f est de dimension $n-1$

et on dit que c'est un **hyperplan** de E.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel.**

L'ensemble des formes linéaires de E se note E^* ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$

c'est un -espace vectoriel appelé le **dual** de E.

5.2 Opérations sur les applications linéaires

5.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Appelons $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Somme de deux applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F.

On définit $f + g : E \to F$ par : $\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

On vérifie que $f + g$ est bien une application linéaire de E dans F.

On l'appelle **somme** de f et g.

Produit de $\alpha \in \mathbb{K}$ **par** $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Il est définit par : $\forall x \in E,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

On vérifie que αf est bien une application linéaire de E dans F.

Proposition 3

Les deux opérations précédentes confèrent à l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

5.2.2 Composition des applications linéaires

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Etant donné une application linéaire $f : E \to F$ et une application linéaire $g : F \to G$, on vé rifie immédiatement que $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G. En particulier,
si $E = F = G$, nous définissons une loi de composition interne dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) =$

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = End_{\mathbb{K}}(E)$ avec la loi"$\circ$" des compositions des applications qu'on appelle la **multiplication.**

Proposition 5.2.1.

L'addition et la multiplication"$\circ$" définies dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ en font un anneau non commutatif.

Remarque 5.2.1.

Le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme et donc, en particulier, le composé de deux automorphismes de E est un automorphisme.
Si E est de dimension finie, l'ensemble des automorphismes de E constitue le groupe des unités(l'ensemble des éléments inversbles) de l'anneau $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

5.3 Espace vectoriel quotient

5.3.1 Construction de l'espace vectoriel quotient de E par F

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans E par : $x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff x - y \in F$; on montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et compatible avec l'addition dans E, c'est-à-dire : , $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}t \Rightarrow (x+z)\,\mathcal{R}\,(y+t)$. Ce qui permet de définir une opération sur l'ensemble $E/F = E/\mathcal{R}$ par : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$. où $\bar{x}$ est la classe de x modulo F. cette opération donne à E/F une structure de groupe abélien et l'application $\varphi : E \to E/F$, telle que $\varphi(x) = \bar{x}$ est un morphisme de groupe, qu'on appelle le morphisme canonique de E sur E/F. Outre leur structure de groupe, E et F ont maintenant une structure d'espace vectoriel et nous allons compléter ces résultats en définissant sur E/F une structure d'espace vectoriel.

Proposition 5.3.1.

La relation $\mathcal{R}$ est compatible avec la multiplication par un scalaire,
c'est-à-dire :$\forall\alpha \in \mathbb{K}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow \alpha x\,\mathcal{R}\,\alpha y$.
De là on définit pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\bar{x} \in E/F$, $\alpha\bar{x} = \overline{\alpha x}$, $(*)$
ce qui est une opération externe dans E/F.

Proposition 5.3.2.

Le groupe quotient E/F muni de l'opération externe $(*)$
devient un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\varphi : E \to E/F$
est linéaire et surjective.

Remarque 5.3.1.

Le noyau et l'image de φ en tant qu'application linéaire sont le noyau et l'image de φ en tant que morphisme de groupe abélien. En particulier, on a $Ker\ \varphi = F$.

Définition 5.3.1.

*L'espace vectoriel obtenu à partir de E et de son sous-espace F par la construction précédente s'appelle l'**espace vectoriel quotient** de E par F et se note E/F. L'application linéaire surjective $\varphi : E \to E/F$ s'appelle l'application linéaire **canonique** de E sur l'espace vectoriel quotient E/F.*
En particulier si $F = \{0\}$, $E/F = E$ et si $F = E$, $E/F = \{\bar{0}\}$.
La construction de l'espace vectoriel quotient de E par F est valable en dimension finie ou non. Si E est de dimension finie, E/F est aussi de dimension finie.

Problème

La construction de l'espace vectoriel quotient de E par F donne une solution au problème suivant : étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F, trouver un espace vectoriel E' sur $\mathbb{K}$ et une application linéaire surjective $f : E \to E'$ dont le noyau est F. Lorsque E est de dimension finie, on obtient aisément une solution du problème de la façon suivante : prenant un sous-espace supplémentaire G de F dans E ; la projection $p : E \to G$ de E sur G parallèlement à F est une application linéaire surjective de noyau F.

Théorème 5.3.1.

Soit $f : E \to E'$ une application linéaire surjective de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel E' et F son noyau. L'espace E' est isomorphe à l'espace quotient E/F par un isomorphisme σ tel que : $f = \sigma \circ \varphi$; où φ est l'application linéaire canonique de E sur E/F. Suivant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{\varphi}{\to} & E/F \\ & \overset{f}{\searrow} & \downarrow \sigma \\ & & E' \end{array}$$

Corollaire 5.3.1.

Toutes les solutions du problème sont des espaces vectoriels isomorphes entre eux.

Corollaire 5.3.2.

*Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, on a : dim E/F =dim $E-$dim F, et dim E/F s'appelle la **codimension** de F dans E, et se note $co\dim F$, ainsi $co\dim F = \dim E/F$.*

5.4 Matrice d'une application linéaire $f : E \to F$

Relativement à des bases données de E et de F.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et q sur $\mathbb{K}$, $\beta = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ une base de F et

$f : E \to F$ une application linéaire de E dans F; f est complè tement déterminée par son action sur la base β, c'est-à-dire que f est entièrement dé finie par les $f(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} t_i,\ a_{ij} \in \mathbb{K},\ j = 1, 2, ..., p$.Ainsi les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ constitue la matrice colonne suivante : $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$.

Proposition 5.4.1.

Etant donné $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie, muni d'une base $\beta = (e_1, ..., e_p)$, alors $ImImf =< f(e_i)$, $1 \leq i \leq p >$.

Définition 5.4.1.

*On appelle **matrice de l'application linéaire** $f : E \to F$, **relativement aux bases** β **et** β', avec $\beta = (e_1, ..., e_p)$ et $\beta' = (t_1, ..., t_q)$*
(on sait que f est entièrement définie par les $f(e_j) \in F$, pour tout $j \in [|1, p|]$),
est la matrice de type (q, p) :

$$M_{\beta'\beta}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1)\,; & f(e_2)\,; & ...; & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_q \end{array}$$

dont la $j^{ème}$ colonne $(j = 1, 2, ..., p)$ est constitué e par les coordonnées $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$
du vecteur $f(e_j)$ par rapport à la base β' . C'est pourquoi nous avons écrit $f(e_1)$ au dessus de la première colonne, ..., $f(e_p)$ au-dessus de la $p^{ième}$ colonne.
Lorsque $E = F$, l'application linéaire f est un endomorphisme de E et nous pouvons choisir $\beta = \beta'$. La matrice $M_{\beta\beta}(f)$ s'appelle la matrice de l'endomorphisme relativement à la base β de E.

Remarque 5.4.1.

De façon symbolique, on peut écrire :
$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p)) = (t_1, ..., t_q) M_{\beta'\beta}(f)$
*soit $f(\beta) = \beta' M_{\beta'\beta}(f)$, tout ceci est **symbolique**.*

Exemple 5.4.1.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$(x, y, z) \longmapsto (2x - y - z; x - z; \lambda x - y - 2z)$ *, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Soit $\beta = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.Pour trouver la matrice de f relativement à la base β associé à l'ensemble de depart et à l'ensemble d'arrivé, il faut calculer : $f(e_1) = (2; 1; \lambda)$;
$f(e_2) = (-1; 0; -1)$; $f(e_3) = (-1; -1; -2)$.

Et la matrice en question est $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Proposition 5.4.2.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives β, β',γ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$
$M_{\gamma\beta}(g \circ f) = M_{\gamma\beta'}(g) \times M_{\beta'\beta}(f)$.

Proposition 5.4.3.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et q,
Munis respectivement des bases $\beta = (e_1, ..., e_p)$ et $\beta' = (t_1, ..., t_q)$
L'application de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ dans $M_{qp}(\mathbb{K})$ définie par $f \mapsto M_{\beta'\beta}(f)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F sur l'espace vectoriel des matrices de type(q, p) sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. :

Moyennant $\beta = (e_1, ..., e_p)$ et $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ respectivement sur E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions respectives* p *et* q, il y a isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^p$ et isomorphisme entre F et $\mathbb{K}^q$.

Ainsi $\forall x \in E$, $\exists! x^\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p$ matrice colonne qui représente les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base β de sorte que symboliquement : $x = \beta \times x^\beta = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$.

Il sera de même de F c'est-à-dire :

$\forall y \in F$, $\exists! y^{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^q$ matrice colonne qui représente les coordonnées du vecteur $y \in F$ dans la base β' de sorte que symboliquement : $y = \beta' \times y^{\beta'} = \sum_{i=1}^{q} y_i t_i$.

De là l'application linéaire $f : (E, \beta) \longrightarrow (F, \beta')$ peut être définie comme suit :

a) $f(x) = y$ on n'a pas utilisé les bases en présence.

b) $f\left(x^{\beta}\right)=y^{\beta'}$on a utilisé les bases en présence, ce qui permettra de déterminée f à la donnée de $M_{\beta'\beta}(f)$ en posant : $f\left(x^{\beta}\right)=M_{\beta'\beta}(f)\times x^{\beta}=(f(x))_{\beta'}=y^{\beta'}$.
Avec les données de f , β et β' on a naturellement $M_{\beta'\beta}(f)$. □

Corollaire 5.4.1.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est de dimension finie $n=pq$.

Remarque 5.4.2.

1°) Les espaces vectoriels $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $M_{qp}(\mathbb{K})$ sont isomorphes mais cet isomorphisme dépend des bases β et β' choisies dans E et F.
On devrait le noter : $M_{\beta'\beta}:\mathcal{L}_{K}(E,F)\to M_{qp}(\mathbb{K})$.
Il est déterminé par le choix de ces bases.
2°) Il résulte de la proposition 1 qu'une matrice $q\times p$ quelconque dont les coefficients appartiennent à un corps $\mathbb{K}$ peut toujours être considé rée comme la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p sur $\mathbb{K}$ dans un espace vectoriel F de dimension q sur $\mathbb{K}$,
par exemple de $E=\mathbb{K}^{p}$ dans $F=\mathbb{K}^{q}$.

5.4.1 Changement de bases

Matrice de passage

Soient $\beta=(e_1,...,e_n)$, $\beta'=\left(e'_1,...,e'_n\right)$ deux bases de E.
On voudrait avoir la matrice de : $Id_E:(E,\beta')\longrightarrow(E,\beta)$ telle que $x\longmapsto x$.
(E,β) signifie que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, est muni de la base β.
On sait que $\forall 1\leq j\leq n,\ \exists!\,(\alpha_{1j},\alpha_{2j},...,\alpha_{nj})\in\mathbb{K}^{n}\,;\ e'_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i$.
Ainsi d'après ce qui précède en matière de la matrice d'une application linéaire relativement à des bases sur les espaces de départ et d'arrivé, on a :

$$M_{\beta\beta'}(Id_E)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e'_1 & ; & e'_2 & ; & \dots & ; & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

On appelle matrice de **passage** de la base β à la base β',
la matrice : $Mat_{\beta\beta'}(Id_E)=P=(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}=P_{\beta\beta'}$.
Comme l'application Id_E est bijective, alors $P=P_{\beta\beta'}$ est **inversible**.
En pratique donc,
la matrice $P=(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}=P_{\beta\beta'}$est telle que la $j^{-ième}$ colonne est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\beta=(e_1,...,e_n)$.

Et $P^{-1} = P_{\beta'\beta}$ est la matrice de passage de la base β' à la base β.

Formule de changement de bases

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et (E, β), (F, γ)
Soit $(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{f} (F, \gamma) \xrightarrow{Id_F} (F, \gamma')$
On a bien $f = Id_F \circ f \circ Id_E \Rightarrow$
$Mat_{\gamma'\beta'}(f) = Mat_{\gamma'\beta'}(Id_F \circ f \circ Id_E) = Mat_{\gamma'\gamma}(Id_F) \times Mat_{\gamma\beta}(f) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
Soit maintenant $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) \Longleftrightarrow u \in End_{\mathbb{K}}(E)$, on a
$(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{u} (E, \beta) \xrightarrow{Id_E} (E, \beta')$, et $u = Id_E \circ u \circ Id_E \Rightarrow$
$Mat_{\beta'\beta'}(u) = Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
Comme (Id_E) est une bijection de E dans E, alors $Mat_{\beta'\beta}(Id_E)$ est inversible et
$Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = (Mat_{\beta\beta'}(Id_E))^{-1}$. De là on a la proposition suivante :

Proposition 5.4.4.

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,
$P = P_{\beta\beta'} = Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$, $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$,
$A' = Mat(u, B') = Mat_{\beta'\beta'}(u)$
$= Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.,
or $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = (Mat_{\beta\beta'}(Id_E))^{-1}$, donc :
$A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$.

Proposition 5.4.5.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E,
muni d'une base β et $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$.
u est un automorphisme de E ssi $\det A \neq 0$ et $A^{-1} = Mat(u^{-1}, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u^{-1})$.

Exercice 5.4.1. *Montrer que les matrices* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *sont semblables.*

Proposition de solution

La solution revient à trouver quatre vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que :
$Av_1 = 0$, $Av_2 = 0$, $Av_3 = v_2$, $Av_4 = v_2 + v_3$ *et* $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0$.
Dès lors ;
$Av_1 = 0$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_1 = (0, 0, 0, 1)$
$Av_2 = 0$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_2 = (1, 0, 0, 0)$
$Av_3 = v_2$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_3 = (0, 1, 0, 0)$
$Av_4 = v_2 + v_3$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_4 = (0, 0, 1, 0)$.

$$\textit{Soit } \gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \textit{ on a } \det \gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

$$\textit{De là soit } P = P_{pass(\beta \text{ à } \gamma)} = P_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \textit{ alors on a :}$$

$$B = P^{-1}AP \Longleftrightarrow A \textit{ et } B \textit{ sont semblables.}$$

Remarque 5.4.3.

Soit $x \in E$, soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E, symboliquement on notera :

$x = \beta \times x^{\beta}$ et $\beta' = \beta P_{\beta\beta'}$ ici β est considérée comme une matrice uniligne :
$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ et β' est considérée comme une matrice uniligne :

$$\begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix}.$$

Aussi on a : $(e'_i)_{\beta} = P_{\beta\beta'} (e_i)_{\beta}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $(e'_i)_{\beta}$et $(e_i)_{\beta}$ sont les coordonnées de e'_i et e_i dans la base $\beta = (e_1, ..., e_n)$.

Proposition 5.4.6.

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E.

Soit $x \in E$, et $x^{\beta} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β.

et $x^{\beta'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β'

alors $x^{\beta} = (P_{\beta\beta'} = P) \times x^{\beta'} \Leftrightarrow x^{\beta'} = (P_{\beta'\beta} = P^{-1}) \times x^{\beta}$.

5.4.2 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie(Rappel,suite et fin)

Définition 5.4.2.

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit une base β, de E, le déterminant de la suite S dans la base β, est noté
$\det_{\beta}(S) = \begin{vmatrix} V_1^{\beta} & V_2^{\beta} & \cdots & V_n^{\beta} \end{vmatrix}$, où V_j^{β} constituent la $j^{\text{ième}}$ colonne avec les coordonnées de V_j dans la base β. $\forall 1 \leq j \leq n$.

Exemple 5.4.2.

Soient $V_1 = (1, -6, 8)$, $V_2 = (0, -3, 11)$, $V_3 = (0, 0, -5)$ *trois vecteurs du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$, *et* $S = (V_1, V_2, V_3)$.

Comme cardinal de (S) *noté* $Card\,(S) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *alors on peut évaluer le déterminant de* S *:*

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 15. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

on a $\det(S) = \det A = \det({}^tA)$.

On peut donc saisir les coordonnées des V_j *en* ***colonne*** *ou en* ***ligne***.

Proposition 5.4.7.

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ *une suite de* n *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n. *Soit une base* β, *de* E,

a) Si $\det_\beta(S) \neq 0$, *alors la suite* S *est libre ou linéairement indépendante et comme* $Card\,(S) = \dim E$, *donc* S *est* ***une base*** *de* E.

b) Si $\det_\beta(S) = 0$, *alors la suite* S *est liée ou liné airement dépendante.*

Remarque 5.4.4.

Soient deux bases $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *et* $\beta' = (t_1, t_2, ..., t_n)$ *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n.

$P_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \cdots & t_n^\beta \end{pmatrix}$ *où* t_j^β *constituent la* $j^{\text{ième}}$ *colonne avec les coordonnées de* t_j *dans la base* β. $\forall 1 \leq j \leq n$,

et $\det(P_{\beta\beta'}) = \det_\beta(\beta') = \begin{vmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \cdots & t_n^\beta \end{vmatrix}$. *Je rappelle que* $P_{\beta\beta'}$ *est la matrice de passage de la base* β *à la base* β'.

Proposition 5.4.8.

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ *une suite de* n *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n. *Soit deux base* β, β' *de* E, *alors :*

$$\det_\beta(S) = \begin{vmatrix} V_1^\beta & V_2^\beta & \cdots & V_n^\beta \end{vmatrix} = \det_\beta(\beta') \times \det_{\beta'}(S)$$
$$= \begin{vmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \cdots & t_n^\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V_1^{\beta'} & V_2^{\beta'} & \cdots & V_n^{\beta'} \end{vmatrix}$$

$\det_\beta(S) = \det(P_{\beta\beta'}) \times \det_{\beta'}(S)$.

5.4.3 Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie

Proposition 5.4.9.

Soit un endomorphisme f *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie,*

Moyennant une base β *sur* E *qui existe en pareille situation, on peut définir :*

$\det(f) = \det(M_{\beta\beta}(f)) = \det(M_{\beta'\beta'}(f))$ *et*

$Trace\,(f) = Trace\,(M_{\beta\beta}(f)) = Trace\,(M_{\beta'\beta'}(f))$.

Pour Toute autre base β' *de* E.

Démonstration. On sait que $M_{\beta'\beta'}(f) = P^{-1}_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}$ et que :

$$\det(M_{\beta'\beta'}(f)) = \det\left(P^{-1}_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}\right)$$
$$= \det\left(P^{-1}_{\beta\beta'}\right) \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det(P_{\beta\beta'})$$
$$= (\det(P_{\beta\beta'}))^{-1} \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det(P_{\beta\beta'})$$
$$= (\det(P_{\beta\beta'}))^{-1} \times \det(P_{\beta\beta'}) \times \det(M_{\beta\beta}(f))$$(car $\mathbb{K}$ est un corps commutatif)
$$= \det(M_{\beta\beta}(f)).$$

Aussi $Trace(M_{\beta'\beta'}(f)) = Trace\left(P^{-1}_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}\right)$
$$= Trace\left(P^{-1}_{\beta\beta'} \times P_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f)\right) = Trace(M_{\beta\beta}(f)). \quad \square$$

Exercice 5.4.2. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$*

définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

Soit $X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ *les coordonnées d'un vecteur x_1 dans la base β_0.*

1. Calculer $f(x_1)$ dans la base β_0.

2. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.

a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β.

c) Déterminer la matrice de passage P' de la base β à la base β_0.

d) Donner les coordonnées X_β du vecteur x_1 dans la base β de deux façons.

e) Déterminer la matrice D de f dans la base β de deux faç ons.

f) Calculer $f(x_1)$ dans la base β, de deux faç ons.

g) Donner l'expressi on de A à partir de celle de D ci-dessus.

Donner A^2, A^3, A^4 en fonction de P, D et P^{-1}.

Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Proposé de solution

1. $(f(x_1))_{\beta_0} = Mat(f, \beta_0, \beta_0)\, X_{\beta_0} = A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$

2.

a) Avec $\beta = (u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^3$ et $Card(\beta) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,

on va calculer $\det(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, *donc β est une base de $\mathbb{R}^3$.*

b) La matrice de passage P de la base β_0 à la base β est :

$P = P_{\beta_0\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) La matrice de passage P' de la base β à la base β_0 est :

$P' = P_{\beta\beta_0} = (P_{\beta_0\beta})^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

d) On a $X_\beta = P_{\beta\beta_0} \times X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ d'une façon

l'autre façon serait par exemple de noter que

$X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3$

$X_{\beta_0} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *et en résolvant le*

système on trouve bien $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$.

e) On a : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'une façon

l'autre façon est de calculer et résoudre successivement :

$(S_1) \Leftrightarrow (f(u_1))_{\beta_0} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$(S_2) \Leftrightarrow (f(u_2))_{\beta_0} = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$(S_3) \Leftrightarrow (f(u_3))_{\beta_0} = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$

je rappelle que les (S_i) pour $i = 1, 2, 3$, sont des systèmes à résoudre.

Et alors $D = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

f) $(f(x_1))_\beta = Mat(f, \beta, \beta)\, X_\beta = DX_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 14 \end{bmatrix}.$

Pour la deuxième façon, on rappelle qu'à la question 1. on a calculer

$f(x_1)$ dans la base β_0, de là on fait la mise en é quation suivante :

$$(f(x_1))_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en résolvant le système ci-dessus, on trouve bien $a = 0$, $b = -6$, $c = 14$.

g) On a $D = P^{-1}AP \Longleftrightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = PD^2P^{-1} \\ A^3 = PD^3P^{-1} \\ A^4 = PD^4P^{-1} \\ A^n = PD^nP^{-1},\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Il faut savoir que

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},\, n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi : $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 & 2^{n+1} & 3 - 2^{n+2} \\ 2^n - 2 & 2^n & 2 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 6

TRAVAUX DIRIGÉS

6.1 Calcul matriciel

Exercice 6.1.1. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB, \; BA, \; A^2, \; AC, \; CA, \; C^2, \; BC, \; \; CB, \; B^2.$$

Exercice 6.1.2. *On considère la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$ où I_3 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3 \; (\mathbb{R})$.

2. En déduire :

a) L'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}$.

b) Que A est inversible. Donner son inverse.

c) Une extension de A^n où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6.1.3. *Les matrices :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

Exercice 6.1.4. *Montrer que la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

est un diviseur de zèro sur $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$ *cela signifie :*

trouver une matrice B *non nulle telle que* $AB = 0$.

Exercice 6.1.5. **I)** *Les nombres* $204,\ 527$ *et* 255 *étant divisibles par* $17,$ *démontrer que le déterminant suivant l'est aussi sans calculer* $\triangle$.

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

.

II) *Calculer les déterminants suivants :*

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 6.1.6. *Soit* $M \in \mathcal{M}_4\ (\mathbb{R})$ *:*

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

1) Donner la transposée $({}^tM)$, *de la matrice* M.

2) Calculer $M.\left({}^tM\right)$ *et* $\left({}^tM\right).M$, *ces deux matrices commutent-elles ?*

3) Déterminer le déterminant de M *en sachant qu'il est positif.*

4) A quelle condition M *est-elle inversible ? Donner sa matrice inverse.*

Exercice 6.1.7. *Déterminer, suivant les valeurs du paramètre* a, *le rang des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1-a & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & a \\ 1 & a & a^3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & a & 3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & 0 & 1+a \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.1.8. **I)** *Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :*

$$a)\ \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{cases},\quad b)\ \begin{cases} 3x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y - 3z &= -3 \end{cases},$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z &=& 1 \\ 2x+y-2z &=& 1 \\ x+y+z &=& 3 \\ x+2y-3z &=& 1 \end{array}\right. .$$

II) *Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+(m-1)\,y-3mz &=& 2 \\ x-2\,(m-1)\,y+mz &=& 1 \\ x+(m-1)\,y-2mz &=& 2m \end{array}\right. .$$

Exercice 6.1.9. *Déterminer $\lambda \in \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ de façon que le système homogène :*

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\overline{3}-\lambda\right)x+\overline{4}y+\overline{3}z & =\overline{0} \\ \overline{3}x+\left(\overline{3}-\lambda\right)y & =\overline{0} \\ \overline{3}x\ +\ \overline{3}y\ -\ \lambda z & =\overline{0} \end{array}\right.$$

admette des solutions non nulles, et résoudre.

Exercice 6.1.10. *Discuter et résoudre le système sur $\mathbb{R}^3$:*

$$\left\{\begin{array}{ll} ax+by+cz & =1 \\ cx+ay+bz & =1 \\ bx+cy+az & =1 \end{array}\right. ;\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

Exercice 6.1.11. *Discuter et résoudre le système sur $\mathbb{C}^3$:*

$$\left\{\begin{array}{ll} x+\alpha y+\alpha^2 z & =0 \\ \overline{\alpha}x+\ y+\alpha z & =0 \\ \overline{\alpha^2}x+\alpha y+\ z & =0 \end{array}\right. \text{ où } \alpha\in\mathbb{C}.$$

6.2 Espaces vectoriels et applications linéaires

Mise en bouche

Exercice 6.2.1. *Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi de composition interne $\oplus$ définie par $a\oplus b=ab$, $\forall a,b\in\mathbb{R}_+^*$ et de la loi de composition externe $\otimes$ telle que*
$\lambda\otimes a=a^\lambda$; $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.
Montrer que $\left(\mathbb{R}_+^*,\oplus,\otimes\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 6.2.2. *Considérons les opérations suivantes : $\oplus:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et $\otimes\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.*

Dans quels cas la structure $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ est-elle un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
$\forall\,(x_1,y_1)$; $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.
1. $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=\left(\left(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}\right)^3;\left(\sqrt[5]{y_1}+\sqrt[5]{y_2}\right)^5\right)$; $(x_1,y_1)\otimes\lambda=(x_1\lambda^3,x_1\lambda^3)$;
2. $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+y_1,0)$; $(x_1,y_1)\otimes\lambda=(x_1\lambda,0)$;
3. $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(y_1+y_2,x_1+x_2)$; $(x_1,y_1)\otimes\lambda=(y_1\lambda,x_1\lambda)$.

Série A

Exercice 6.2.3. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, on pose :* $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ *et* $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$,

$\alpha \in \mathbb{R}$. *Ces deux lois de composition définissent-elles sur* $\mathbb{R}^2$ *une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$?

Exercice 6.2.4. *I) Montrer que les vecteurs suivants de* $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :*

a) $u = (1, 2, -1);\ v = (1, 0, 1);\ w = (-1, 2, -3)$

b) $u = (-1, 2, 5);\ v = (2, 3, 4);\ w = (7, 0, -7)$.

II) *Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont li és ou libres.*

a) $u = (7, 12);\ v = (18, -13);\ w = (-4, 17)$

b) $u = (-1, 0, 2);\ v = (1, 3, 1);\ w = (0, 1, -1)$

c) $u = (15, -27, -6, 12);\ v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

III) *Déterminer tous les vecteurs* (x, y, z) *de* $\mathbb{R}^3$ *tels que le système suivant soit libre :*

$$\{(1, 0, 0);\ (0, 1, 1);\ (x, y, z)\}$$

Exercice 6.2.5. *On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur* $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *de* $\mathbb{R}^4$.
Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectiriels et préciser alors leur dimension.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\};\ E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\};\ E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\};$$
$$E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\};\ E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\};\ E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}.$$

Exercice 6.2.6. *On considère* $E = \mathbb{R}_2[X]$*, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal*

à 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathfrak{B} = (1;\ x;\ x^2)$.

1. *Montrer que* $\mathfrak{B}_1 = (1;\ 1 + x;\ 1 + x + x^2)$ *est une base de* E.
2. *Ecrire* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ *dans la base* $\mathfrak{B}_1$.
3. *Soit* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathfrak{B}_1$ *; quelles sont ses composantes dans la base* $\mathfrak{B}$ *?*
4. *Le système* $S = (3 + 2x + 2x^2;\ 1 + 3x + 2x^2;\ 3 - 5x - 2x^2)$ *est-il une base de* E *? Si non, indiquer une relation qui lie les trois polynômes. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel de* E *engendré par ce système*

Exercice 6.2.7. *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :*

$$u = (2, 1, 0);\ v = (-1, 0, 1);\ w = (4, 1, -2)$$

a) *Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme géné rale d'un élément de F.*

b) *Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et une base.*

c) *Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G.*

d) *Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base de $F + G$.*

Exercice 6.2.8. *Dans le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles F et G définis comme suit :*

$F = \{(a - 3b, 2a + 3b, a)\ ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$; $G = \{(x, y, z) \in E;\ x + 2y = 0\}$.

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels on donnera une base et la dimension.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 6.2.9. *Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y, y + z, z - 1)\,; \\ g(x, y) &= (x, y, m) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.} \end{aligned}$$

Exercice 6.2.10. *Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?*

Exercice 6.2.11. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

1. Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective.

2. Donner une base du noyau de f.

Exercice 6.2.12. *Soient $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel de base canonique $\mathfrak{B} = (e_1\ ;\ e_2\ ;\ e_3\ )$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$f\,(e_1\ ) = e_1\ + 3e_2\ ;\ f\,(e_2\ ) = -2e_1\ + e_3\ ;$

$f\,(e_3\ ) = -e_1\ + 2e_2\ + e_3\ .$

1. *Déterminer la matrice A associée à f.*
2. *Déterminer une base de $Ker\,(f)$ et de $ImIm\,(f)$.*
3. *Soit $u = e_1\ + e_2\ - e_3$, montrer que $(u,\ f\,(u)\,,\ f^2\,(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$*

   et déterminer la matrice de f dans cette base.
4. *Montrer que le système $(u,\ e_1\ ,\ e_2\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.*

Exercice 6.2.13. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\beta_0\ = (e_1, e_2, e_3)$*

$$\text{définie par : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice définie par : $(A - \lambda I_3)$ où I_3 est la matrice d'ordre 3

et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Calculer le polynôme $P\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_3)$. En déduire les solutions de

l'équation $P\,(\lambda) = 0$.

3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$E_{\lambda_i}\ = \ker\,(f - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^3})$, où λ_i couvre les solutions de $P\,(\lambda) = 0$

et $Id_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

4. Soient $u_1\ = e_1\ + e_2\ + e_3\ ,\ u_2\ = e_1\ + 3e_2\ + 2e_3\ ,\ u_3\ = e_1\ + 2e_2\ + e_3\ .$

a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β.

c) Déterminer la matrice D de f dans la base β par la formule $D = P^{-1}AP$.

d) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.

Donner A^2, A^3, A^4 en fonction de P, D et P^{-1}.

Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Série B

Exercice 6.2.14. *Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ /\ \ y = 2x\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel*

de $\mathbb{R}^2$ et déterminer une base de E.

Exercice 6.2.15. *On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.*

Soient $\overrightarrow{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\overrightarrow{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\overrightarrow{w}_m = me_2 - e_3; m \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de m, $S_m = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_m\}$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$?

En déduire que S_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de passsage de la base β à la base S_1.

3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β.

4) Soit $\overrightarrow{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{H}$ dans la base S_1?

5) On considère l'application linéaire

$f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z)$.

a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β?

b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de $\mathbb{R}^3$.

c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

Exercice 6.2.16. *Soient les matrices :* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -i & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -5 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer si possible les matrices suivantes : $E = AB$ et $E' = BA$

que peut-on conclure ?

2°) Calculer si possible les matrices : $F = AD$ et $F\prime = DA$.

3°) Calculer C^3. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 6.2.17. *On considère les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que A et B Sont inversible et déterminer leur inverse.

Mêmes questions pour C=AB.

2°) Résoudre dans IR^3l'équation matricielle $CT = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.

Exercice 6.2.18. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^2 = A - I_2$.

b) Calculer A^3

c) Montrer que, si p *est un entier positif, on a :*

$A^{3p} = (-1)^p I_2$, $A^{3p+1} = (-1)^p A$, $A^{3p+2} = (-1)^p (A - I_2)$.

d) Les suites réelles (u_n) *et* (v_n) *sont d éfinies par les relations de récurrence :*

$u_{n+1} = u_n + v_n$, $v_{n+1} = -u_n$ *et par la donnée de* u_1 *et* v_1.

Calculer u_n *et* v_n *en fonction de* u_1, v_1 *et* n, *en particulier*

pour $n = 3p$; $n = 3p + 1$ *;* $n = 3p + 2, p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.2.19. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$ *- espace vectoriel de dimension 3 et* $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* E.

On considère l'application $\mathbb{R}$ *- linéaire* $u : E \to E$ *dé finie par :*

$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3$, $\quad u(e_2) = -u(e_1)$, $\quad u(e_3) = e_1 - e_2$.

Soit M *la matrice de* u *dans la base* β. *On pose :*

$f_1 = e_2 + e_3$, $\quad f_2 = e_1 + e_3$, $\quad f_3 = e_1 + e_2$ *et* $\varsigma = (f_1, f_2, f_3)$.

1) Écrire la matrice M.

2) Calculer la dimension de $Ker(u)$, *le rang de* u *et le rang de* M.

3) Montrer que ς *est une base de* E.

4) Soit P *la matrice de passage de la base* β *à la base* ς *et*

N *la matrice de* u *dans la base* ς.

4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} *et* N.

4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, *calculer* N^k *et en déduire* M^k.

Exercice 6.2.20. *1°) Inverser si possible la matrice :* $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2°) Résoudre dans IR^3 *en discutant éventuellement suivant les valeurs de* m *le système :*

$$(\textstyle\sum_1) \begin{cases} 3x + y - z = -m \\ 3x + y - mz = -3 \\ (m-4)\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(\textstyle\sum_2) \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 3x + y + z = -3 \\ -5\,x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{avec les formules de Cramer}$$

Série C

Exercice 6.2.21. *Sur l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ des polynômes à une indéterminée X de coéfficients réels,*

de degré égal à l'entier positif n, on définit l'addition de deux polynô mes P et Q par :

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

a) *Examiner si l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.*

b) *Même question pour l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes à une indéterminée X,*
de degré inférieur ou égal à l'entier n. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_n$
des polynômes P de $\mathcal{P}_n$ tels que :

$$P(X) + P(-X) = 0$$

est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.

Exercice 6.2.22. *Sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques u=(u_n)$_{n\in\mathbb{N}}$ on définit l'addition de*

deux suites u et v par $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1 *Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.*

2 *Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites de Fibonaci qui vé rifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel dont on dé terminera la dimension.*

Exercice 6.2.23. **1** *On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur*

les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectiriels et préciser alors leur dimension.

$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}$; $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\}$;
$E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$; $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\}$; $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$;
$E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}$.

Exercice 6.2.24. *Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de*

l'espace vectoriel E *des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$:
$E_1 = \{f \in E \mid f^2 = f'\}$; $E_2 = \{f \in E \mid f(x) = xf'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6.2.25. **I)** *Montrer que les vecteurs suivants de* $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement dépendants*

et préciser leur relation de dépendance :

a) $u = (1, 2, -1)$; $v = (1, 0, 1)$; $w = (-1, 2, -3)$

b) $u = (-1, 2, 5)$; $v = (2, 3, 4)$; $w = (7, 0, -7)$.

II) *Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont li és ou libres.*

a) $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$

b) $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$

c) $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

III) *Déterminer tous les vecteurs* (x, y, z) *de* $\mathbb{R}^3$ *tels que le système suivant soit libre :*

$$\{(1, 0, 0);\ (0, 1, 1);\ (x, y, z)\}$$

IV) *A partir du système libre* $\{e_1, ..., e_n\}$ *d'un espace vectoriel* E,
on construit les vecteurs :

$\epsilon_j = e_1 + e_2 + ... + e_j$ *pour* $j = 1, 2, ..., n$. *Montrer que* $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ *est aussi un système libre.*

V) *Si* $b_1 = (1, 1, 1; 1)$; $b_2 = (1, 1, -1, -1)$; $b_3 = (1, -1, 1, -1)$; $b_4 = (1, -1, -1, 1)$
constitient une base de $\mathbb{R}^4$,

déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 2, 1, 1)$ *dans cette base.*

VI) *Montrer que le sous-ensemble* E, *ci-après est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$
dont on déterminera la dimension et une base.

$$E = \{(\alpha - \beta, 2\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\},$$

VII) *Montrer que les polynômes* P_1, P_2, P_3 *définis ci-après forment une base de l'espace vectoriel des polynômes*
à une indéterminée X, *de degré inférieur ou égal à deux :*

$$P_1(X) = X^2;\ \ P_2(X) = (X-1)^2;\ \ P_3(X) = (X+1)^2.$$

Exprimer les polynômes Q et R suivants dans cette base :

$$Q(X) = 12;\ \ R(X) = 3X^2 - 10X + 1.$$

VIII) *Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et d érivables sur $\mathbb{R}$ et F l'ensemble des fonctions numériques f définies par :*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & si \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma x + \delta & si \quad 1 < x \end{cases}.$$

Exprimer les constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des trois réels $a,\ b,\ c$ pour que

F soit un sous-espace vectoriel de E. Déterminer alors la dimension et une base de F.

IX) *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :*

$$u = (2, 1, 0);\ v = (-1, 0, 1);\ w = (4, 1, -2)$$

a) *Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme géné rale d'un élément de F.*

b) *Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et une base.*

c) *Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G.*

d) *Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base de $F + G$.*

X) *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les polynômes suivants de l'indéterminée X :*

$$P_1(X) = 5+X+X^2+X^3;\ P_2(X) = -1+6X+3X^2+X^3;\ P_3(X) = -16+3X-2X^3;$$

$$P_4(X) = 3+4X+4X^2+X^3;\ P_5(X) = 6+3X+X^2;\ P_6(X) = -3+6X+10X^2+3X^3;$$

$$P_7(X) = 3 - X - 3X^2 - X^3.$$

Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G engendr é respectivement par les familles $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et $\{P_5, P_6, P_7\}$, puis des espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$.

XI) *Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés par les familles respectives $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$, où :*

$$u_1 = (1, 0, 4, 2)\,;\ u_2 = (1, 2, 3, 1)\,;\ u_3 = (1, -2, 5, 3)\,;\ v_1 = (4, 2, 0, 1)\,;\ v_2 = (1, 4, 2, 1)\,.$$

a) *Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G.*

b) *Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.*

Exercice 6.2.26. *Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :*

$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z - 1);\ g(x, y) = (x, y, m)$ *où m est un paramè tre réel.*

Exercice 6.2.27. *Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?*

Exercice 6.2.28. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective. Donner une base du noyau de f.

Exercice 6.2.29. *Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification*

a) *A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.*

b) *L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E.*

c) *Si le produit matriciel $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.*

d) *Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre inversibles, alors leur somme est inversible, avec*

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

e) *Si A est une matrice inversible, sa transposée admet comme inverse la transposée de A^{-1}.*

f) *Si $AB = I$, alors A et B sont deux matrices inverses l'une de l'autre.*

g) *Deux matrices distinctes ont deux déterminants distincts.*

h) *Pour tout entier n et toute matrice carrée A : $detA^n = (\det A)^n$.*

Exercice 6.2.30. *On considère les matrices :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et comparer avec $(A + B)^2$. Commenter.

Exercice 6.2.31. *Si M et N sont deux matrices de types respectifs (m, n) et (n, m) telles que $MN = I$,*

montrer que la matrice $P = NM$ est idempotente, c'est-à-dire que $P^2 = P$.

En déduire que P est diviseur à droite et à gauche de zéro.

Exercice 6.2.32. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB,\ BA,\ A^2,\ AC,\ CA,\ C^2,\ BC,\ \ CB,\ B^2.$$

Exercice 6.2.33. *Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$:*

$$\epsilon_1 = (1, 0, 1)\ ;\ \epsilon_2 = (-1, 1, 0)\ ;\ \epsilon_3 = (2, 1, 1).$$

On définit alors l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par les images, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$f(\epsilon_1) = (1, 1, 1, 0)\ ;\ f(\epsilon_2) = (-1, -1, -1, 0)\ ;\ f(\epsilon_3) = (0, 1, -1, -1).$$

Déterminer la matrice A qui représente f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ et la matrice B lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique.

A-t-on une relation matricielle entre A et B ?

Exercice 6.2.34. *On considère l'homomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$f(x, y, z, t) = (x + t, x + y + t, y + z + t).$$

Déterminer la matrice de cette application linéaire lorsque $\mathbb{R}^4$ est muni de la base formée des vecteurs :
$u_1 = (1,1,1,1,)\,;\ u_2 = (1,1,1,0)\,;\ u_3 = (1,1,0,0)\,;\ \ u_4 = (1,0,0,0)$
et $\mathbb{R}^3$ de la base :

$$v_1 = (0,0,1)\ ;\ v_2 = (0,1,1)\ ;\ v_3 = (1,1,1)\,.$$

Déterminer le noyau et l'image (Imf) de f.

Exercice 6.2.35. **I)** *Les nombres* $204,\ 527$ *et* 255 *étant divisibles par* 17*, démontrer que le déterminant suivant l'est aussi :*

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

.

II) *Calculer les déterminants suivants :*

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \triangle_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \text{ où } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

III) *Exprimer le déterminant d'ordre n suivant en fonction de $\triangle_{n-1}$ et $\triangle_{n-2}$:*

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

On en déduira ensuite $\triangle_n - \triangle_{n-1}$, puis $\triangle_n$.

Exercice 6.2.36. *Déterminer le rang des matrices suivantes et inverser celles qui sont inversibles*

(suivant les valeurs du paramètre réel a).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 6.2.37. **I)** *Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :*

$$a) \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 3x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y - 3z &= -3 \end{cases},$$

$$c) \begin{cases} x + y - 3z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{cases}, \quad d) \begin{cases} x + y + z + t + u &= 7 \\ 3x + 2y + z + t - 3u &= -2 \\ y + 2z + 2t + 6u &= 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u &= 12 \end{cases}$$

II) *Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les système suivants :*

$$a) \begin{cases} 2x + (m-1)y - 3mz &= 2 \\ x - 2(m-1)y + mz &= 1 \\ x + (m-1)y - 2mz &= 2m \end{cases}, \quad b) \begin{cases} mx + y + t &= m+1 \\ x + my + z &= m-1 \\ y + mz + t &= m+1 \\ x + z + mt &= m-1 \end{cases}$$

6.3 TRAVAUX DIRIGES EN CBG1 Bioscience & STRM

6.3.1 Calculs Matriciels

Exercice 6.3.1. ***1.*** *Déterminer les réels x et y tels que les matrices A et B suivantes soient égales :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2x + 3y & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -x - 1 + 2y \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

2. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & c \end{pmatrix}$. Déterminer $a,\ b$ et c pour que la matrice A^2 soit la matrice nulle.*

3. *Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & -2 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = P + I_3$.*

a. Montrer que P^2 est une matrice nulle.

b. *Exprimer* M^2 *et* M^3 *en fonction des matrices* P *et* I .

c. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $M^n = nP + I_3$.

d. *On pose* $S_n = M + M^2 + ... + M^n$, *avec* $n \geq 2$. *Exprimer* S_n *en fonction de* P, I_3 *et* n.

Exercice 6.3.2. ***I-*** *On donne la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a *Calculer :* $A^3 - 3A - 2I$.

b *En déduire que* A *est inversible et que son inverse est* $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$.

II- *On considère les matrices suivantes :* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* B^2 *et* B^3.

2. *On pose* $D = -B^2 + 4B + I$ *et* $C = -B^3 + 4B^2 + B - 4I$.

a- *Calculer* D *et* C.

b- *Montrer que* $C = BD - 4I$.

c- *En déduire que la matrice* B *est inversible et trouver sa matrice inverse* B^{-1}.

Exercice 6.3.3. ***I-*** *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- a. *Calculer* $A^3 + 3A^2 + 16A + 12I$.

b. *En déduire l'existence d'une matrice* P *telle que* $AP = I$.

c. *Donner une écriture de* P *sous forme de matrice.*

II- *On donne les matrices* $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ *et* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1- *Supposons que* $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$. *Montrer que* M *est inversible et calculer son inverse.*

2- *On pose :* $a = b = 1$ *et* $c = 0$.

a. *Déterminer la matrice* $B = A - I$ *; calculer* B^2 *et* B^3. *En déduire* B^n *pour tout* $n \geq 3$.

b. *Exprimer* A *en fonction de* B *et* I *et calculer* A^n *en fonction de* I, n *et* B *(se servir du binôme de Newton). En déduire alors* A^{20} *(donner l'expression et la forme matricielle).*

6.4 Calculs de Déterminant

Exercice 6.4.1. *Soit les matrices suivantes :*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

A- 1. *i. Déterminer les cofacteurs de tous les éléments de M.*

ii. En déduire le déterminant de M. Dire si $\det(M) \neq 0$.

iii. Si oui, Calculer la matrice $P = \frac{1}{\det(M)} Com(M)^t$, où $Com(M)$ désigne la comatrice de la matrice M.

iv. Que représente la matrice P pour la matrice M ?

v. Déterminer $B = 50M$. Montrer que $\det(B) = 50^3 \det(M)$.

2. *Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 8 & 15 & -10 & 20 & 0 \\ 9 & 5 & 40 & 10 & 0 \\ -1 & 10 & -20 & 25 & 0 \end{pmatrix}$ Montrer que $\det(N) = 5^3 \det(M)$.*

B- *Reprendre la question 1) pour la matrice A. (A ne pas traiter au TD)*

Exercice 6.4.2. *Calculer les déterminants suivants à l'aide de la méthode de développement :*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad D_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_9 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6.4.3. *Calculer à l'aide de la méthode de Sarrus les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & -21 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 12 & 7 \end{vmatrix} = -595, \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -108, \quad \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -199$$

Exercice 6.4.4. *Dire pourquoi les déterminants suivants sont nuls sans calcul formel :*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & 7 & -9 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \end{vmatrix}.$$

6.5 Système d'équations linéaires

Exercice 6.5.1. *Soit les matrices* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.5.2. *Résoudre l'équation matricielle* $AX = B$.

On considère le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} -x - 3y = a \\ x - y = b \\ x + 3y + 2z = c. \end{cases}$$

1- *Montrer que résoudre* (S)*, équivaut à résoudre une é quation de la forme :* $MX = B$ *où* M*,* X *et* B *sont des matrices à dé terminer.*

2- *a.* *Calculer* M^2 *et* M^3.

b. *Exprimer* M^3 *en fonction de* I_3.

3- *a.* *Montrer que* $MX = B \iff X = \frac{1}{8}M^2B$.

b. *En déduire la résolution de* (S).

c. *Donner les solutions de* (S) *lorsque :* $a = 3$, $b = -5$ *et* $c = 4$.

Exercice 6.5.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- *a.* *La matrice* A *est-elle inversible ? Si oui, justifier puis dé terminer son inverse.*

b. *En déduire la résolution du système suivant :*

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$$

2- *Résoudre, à partir des résultats précédent uniquement, le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{y^2z^2}{x^2} = e^4 \\ x^6y^{10}z^6 = e^2 \\ \dfrac{x^2y^2}{z^2} = e^{-6}. \end{cases}$$

Exercice 6.5.4. ***I****- On donne les vecteurs suivants :* $a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1100 & 880 & 1980 \end{pmatrix}^t$.

Soit A la matrice dans laquelle la première, la deuxième et la troisième colonne sont respectivement constituées des coordonnées de a_1, a_2 et a_3.

1) *Montrer que* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t$.

2) *Montrer que la matrice A est inversible et dé terminer A^{-1}.*

II-

1) *Résoudre le système d'équations :*

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1100 \\ x + 5y + 2z = 880 \\ 4x + y + 3z = 1980 \end{cases}$$

On pourra remarquer que dans ce système, tous les éléments du second membre sont multiples de 22.

2) *L'entreprise CBG-Technologie fabrique trois types d'articles X, Y, Z. Chaque article passe successivement dans trois ateliers : atelier 1 ; atelier 2 et atelier 3. Le temps de passage dans les ateliers sont donnés dans le tableau suivant :*

	X	Y	Z
Atelier 1	20	30	10
Atelier 2	10	50	20
Atelier 3	40	10	30

Au cours d'un programme de fonctionnement annuel, les charges horaires des ateliers ont été de 110000 *heures pour l'atelier 1, de* 88000 *heures pour l'atelier 2 et de* 198000 *heures pour l'atelier 3.*

*Déduire de la question **II-1**, déterminer le nombre de chaque type d'articles qui a été fabriqué.*

6.6 Espaces Vectoriels-Applications Linéaires

Exercice 6.6.1. **1** *On pose $E = \mathbb{R}^2$. Doté des lois suivantes, E est - il un espace vectoriel ?*

a *L'addition : $E \times E \longrightarrow E$; $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et la multiplication $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda, (x, y)) \longrightarrow (\lambda x, 0)$.*

b *L'addition : $E \times E \longrightarrow E$; $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1 - 3x_2, y_1 + x_1 y_2)$ et la multiplication $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda, (x, y)) \longrightarrow (-2x, \lambda y)$.*

2 *Soit L l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0.*
Montrer que $(L; +; \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3 *Est ce que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ?*

(a) $A =$ ensemble des fonctions polynômes.

(b) $B =$ ensemble des fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2.

(c) $C =$ ensemble des fonctions polynômes degré strictement inférieur à 2.

Exercice 6.6.2. *Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sev de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:*

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
$E_1' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y > 0\}$
$E_2' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 \leq 0\}$
$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1\}$
$E_3' = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\}$

Exercice 6.6.3. ***1)*** *Dans $\mathbb{R}^3$ déterminer les sous espaces vectoriels engendrés par $A = \{(1, 1, 1)\ ;\ (1, 0, 1)\}$.*

2) *Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x + 2y - z = 0\}$ Montrer qu'il existent deux vecteurs qui engendrent F.*

3) *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère, $F = \{(x, 0, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$*

a. *Montrer F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*

b. *Déterminer $F + G$.*

Exercice 6.6.4. ***1-*** *Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 2)$ forme un système générateur.*

2- *Montrer que $\mathbb{R}^2 = Vect\{(1, 1); (2, 3)\}$*

1 *Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? : $\mathcal{A}_1 = \{(1; 2; 3), (4; 5; 6), (-1; 2; 3)\}$; $\mathcal{A}_2 = \{1; \cos(x); \cos(2x)\}$; $\mathcal{A}_3 = \{1; 1+x; x^2\}$; $\mathcal{A}_4 = \{(1; 0; 3), (2; 1; -1), (3; 1; 2)\}$.*

Exercice 6.6.5. ***I.*** *Parmi les applications suivantes quelles sont celles qui sont linéaires ? Si oui quelles sont celles qui sont injectives, surjectives, bijectives ?*

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (2x + y; 3x - 2y)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + y; xy)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + 1; y)$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \longmapsto (x + y; x; 0)$

II. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables et φ l'application :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \longrightarrow E \\ y & \longmapsto & y'' + y' - 2y. \end{array}$$

Montrer que φ est une application linéaire.

Exercice 6.6.6. ***I.*** *Soit les systèmes $\mathcal{B}_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$ et $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ où on a : $v_1 = (1, 0, 1)$; $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ puis $e_1 = (1, 2, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$*

1) *Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.*

2) *Écrire les vecteurs $(3, 4, 5)$ puis $(a; b; c)$ en fonction des vecteurs la base $\mathcal{B}_1$.*

II. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & (0, 5, 1) = u_1 \\ f(v_2) & = & (3, 1, 2) = u_2 \\ f(v_3) & = & (1, 6, 0) = u_3. \end{array}$$

1) *Exprimer en fonction de u_1 ; u_2 et u_3 les vecteurs $f(3, 4, 5)$ et $f(a, b, c)$.*

2) *En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}^3$.*

3) *Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.*

3) *l'application est - elle bijective ? Justifier*

III. *On désir écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

1) *Exprimer chacun des vecteurs u_1 ; u_2 ; u_3 dans la base $\mathcal{B}_1$.*

2) *En déduire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.*

3) *Reécrire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$. dans la base $\mathcal{B}$.*

4) *Écrire les matrices* $A_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ *;*

$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$.

NB : P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$. Les matrices $A_{\mathcal{B}}$ et $A_{\mathcal{B}_1}$ sont les matrices de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ respectivement.

4) *Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}*

4) *Montrer que $A_{\mathcal{B}} = P^{-1}A_{\mathcal{B}_1}P$.*

Exercice 6.6.7. ***1*** *Soit k un réel.*

a *Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les vecteurs u et v sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^4$, où $u = (k, 1, k, 3)^t$ et $v = (k, 3, 2, -6)^t$.*

b *Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\|w\| = \sqrt{39}$ où $w = (1, k, -2, 5)^t \in \mathbb{R}^4$.*

c *Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $d(x, y) = 6$ où $x = (2, k, 1, -4)^t$ et $y = (3, -1, 6, -3)^t$.*

2 *Soit L la droite passant par le point $A = (2, 3, 1)$ et parallèle au vecteur $\overrightarrow{u} = (1; -4; 1)^t$. Déterminer l'équation du plan qui contient la droite L et le point $B = (1, 2, -1)$.*

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier, Algèbre MPSI, Cours et 700 Exercices Corrig és, $3^{\text{ème}}$ édition, DUNOD

[2] J.-P.Lecoutre, P. Pilibossian, Travaux Dirigés, Algèbre, $2^{\text{ème}}$ édition, DUNOD

[3] J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 1, Algèbre, $3^{\text{ème}}$ édition, DUNOD.

[4] Claude Boy, Alain Nizard, Prépas TD Algèbre, Exercices et corrigés, Armand Colin.

[5] Algèbre linéaire de Prof. Eva Bayer Fluckiger ; Dr. Philippe Chabloz