**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**

**ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**

**КАФЕДРА МО ЭВМ**

**ОТЧЕТ**

**по лабораторной работе №2**

**по дисциплине «Построение и Анализ Алгоритмов»**

**Тема: Кратчайшие пути в графе: жадный алгоритм и**

**алгоритм А\***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 1303 |  | Смирнов Д. Ю. |
| Преподаватель |  | Фирсов М. А. |

Санкт-Петербург

2023

**Цель работы.**

Написать программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в ориентированном графе при помощи жадного алгоритма и алгоритма А\*.

**Задание.**

Разработайте программу, которая решает задачу построения пути в *ориентированном* графе при помощи **жадного алгоритма**. Жадность в данном случае понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. Переместиться необходимо в ту вершину, путь до которой является самым дешёвым из последней посещённой вершины. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес.  
Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0  
В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины

Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес

В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет

abcde

Разработайте программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в *ориентированном* графе **методом А\***. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес. В качестве эвристической функции следует взять близость символов, обозначающих вершины графа, в таблице ASCII.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины

Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес

В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет

ade

Вариант **6**. Реализация очереди с приоритетами, используемой в А\*, через двоичную кучу.

**Выполнение работы.**

Весь код программ представлен в приложении А.

**Описание алгоритма.**

Жадный алгоритм:

Жадный алгоритм используется поиск в глубину. На каждом шаге выбирается смежное ребро с текущей вершиной имеющее наименьший вес, к текущему пути добавляем новую вершину и снова запускаем поиск в глубину, иначе поднимаемся к прошлой вершине. Если текущая вершина является конечной выходим из поиска сохранив найденный путь.

Алгоритм *A\**:

В очередь приоритетом добавляем начальную вершину. Пока очередь не пуста, достаем из неё вершину с минимальной оценкой пути. Рассматриваем смежные с вершиной ребра рассчитываем временную цену пути в другие вершины по этим ребрам, если она меньше текущей цены или в вершину ещё не приходили обновляем её цену посещения и сохраняем как мы в неё пришли, также в очередь добавляем эту вершину и её стоимость с учетом эвристической функции (в данном случае: разница длин ASCII-кодов конечной и добавляемой вершины). Цена посещения вершины вычисляется, как сумма пути до текущей вершины + вес ребра из текущей вершины в вершину, которую хотят посетить + значение эвристической функции для вершины, которую хотят посетить. Если вершина на рассмотрении является конечной, поиск прекращаем. Если вершина является листом, то пропускаем её рассмотрение.

Минимальная куча:

Двоичная мин-куча представляет собой полное бинарное дерево, для которого выполняется основное свойство кучи: приоритет каждой вершины меньше приоритетов её потомков. Корень поддерева является минимальным из значений элементов поддерева. У каждой вершины есть не более двух потомков, а заполнение уровней вершин идет сверху вниз (в пределах одного уровня – слева направо). Куча хранится в виде одномерного массива, причем левый потомок вершины с индексом *i* имеет индекс *2\*i+1*, а правый *2\*i+2*. Корень дерева – элемент с индексом *0*.

Новый элемент добавляется на последнее место в массиве, при этом возможно будет нарушено основное свойство кучи, так как новый элемент может быть меньше родителя. В таком случае следует «поднимать» новый элемент на один уровень (менять с вершиной-родителем) до тех пор, пока не будет соблюдено основное свойство кучи.

Доставая минимальный элемент (корень дерева) делаем следующее: ставим на его место последний элемент массива (будет максимальным) и восстанавливает основное свойство кучи для дерева, для этого необходимо «опускать» вершину (менять местами с наименьшим из потомков), пока основное свойство не будет восстановлено (процесс завершится, когда не найдется потомка, большего своего родителя).

**Описание переменных, функций и минимальной кучи.**

Для представления графа используется словарь *edges*, где ключом является вершина, из которой идут, а значениями список кортежей из двух элементов – цена ребра и буква вершины куда можно прийти.

Глобальные переменные:

* *DEBUG* – Флаг отвечающий за вывод дополнительной информации.

Функции:

Жадный алгоритм:

* *reader()* – Функция отвечает за считывание входных данных и сортировку ребер. Функция не принимает аргументов. Возвращает кортеж из 3-х элементов: стартовой вершины, конечной и словаря ребер графа.
* *modedDFS(path)* – внутренняя рекурсивная функция функции *greedyAlgorithm(startVertex, endVertex, edges)* осуществляет поиск в глубину. Аргумент *path* – путь на текущей итерации рекурсии. Функция ничего не возвращает.
* g*reedyAlgorithm(startVertex, endVertex, edges)* – функция отвечает за жадный алгоритм описание было выше. Аргументы: *startVertex* – начальная вершина, *endVertex* – конечная вершина, *edges* – словарь ребер графа.

Алгоритм *A\**:

* *heuristic(currentVertex, endVertex)* – эврестическая функция. Аргументы: *currentVertex* – текущая вершина, *endVertex* – конечная вершина. Функция возвращает разницу значений по таблице ASCII между буквами вершине по модулю.
* *aStarAlgorithm(startVertex, endVertex, edges) –* функция отвечает за алгоритм *A\** описанный выше. Аргументы: *startVertex* – начальная вершина, *endVertex* – конечная вершина, *edges* – словарь ребер графа. Функция возвращает словарь посещенных вершин.
* *recoverPath(map, endVertex)* – функция востанавливает найденный путь по словарю посещенных вершин. Аргументы: *map* – словарь посещенных вершин, *endVertex* – конечная вершина.
* *reader()* – Функция отвечает за считывание входных данных. Функция не принимает аргументов. Возвращает кортеж из 3-х элементов: стартовой вершины, конечной и словаря ребер графа.

Минимальная куча:

Является классом и имеет следующие методы:

* *getParent(index)* – Статический метод отвечает за вычисление индекса родителя узла. Аргумент *index* – индекс узла. Метод возвращает родительский индекс.
* *getLeft(index)* – Статический метод отвечает за вычисление индекса левого ребенка узла. Аргумент *index* – индекс узла. Метод возвращает индекс левого ребенка.
* *getRight(index)* – Статический метод отвечает за вычисление индекса правого ребенка узла. Аргумент *index* – индекс узла. Метод возвращает индекс правого ребенка.
* *\_\_siftUp(self, index)* – Приватный метод отвечает за просеивание узла вверх по куче. Аргументы *self* – указатель на объект класса, *index* – индекс узла. Метод ничего не возвращает.
* *\_\_siftDown(self, index)* – Приватный метод отвечает за просеивание узла вниз по куче. Аргументы *self* – указатель на объект класса, *index* – индекс узла. Метод ничего не возвращает.
* *extractMin(self)* – Метод отвечает за извлечения минимального элемента кучи. Аргументы *self* – указатель на объект класса, *index* – индекс узла. Метод возвращает минимальный элемент из кучи.
* *insert(self, element)* – Метод отвечает за вставку элемента в кучу. Аргументы *self* – указатель на объект класса, *element* – вставляемый элемент. Метод ничего не возвращает.
* *size(self)* – Метод отвечает за возврат размера кучи. Аргумент *self* – указатель на объект класса. Метод возвращает размер кучи.
* *\_\_repr\_\_(self)* – Метод отвечает за представления объекта класса ввиде строки. Аргумент *self* – указатель на объект класса. Метод возвращает представления объекта класса ввиде строки.

**Оценка сложности алгоритмов.**

Жадный алгоритм:

В худшем случае алгоритм проходит весь полный граф по ребрам |E| – кол-во ребер, *|V|* – кол-во вершин, так как в полном графе |*E*| = |*V*|\*(|*V*|-1)/2 ребер, каждое ребро проходят по одному разу (после того как прошли ребро удаляется), то оценка будет иметь вид O(|*V*|^2).

По памяти - использует словарь, состоящий из ребер графа, его оценка по памяти O(*|E|*), где *|E|* – кол-во рёбер в графе.

Алгоритм *A\**:

Временная сложность алгоритма А\* зависит от выбранной эвристики и от разветвлённости графа. В худшем случае количество рассматриваемых вершин на каждом шаге растёт экспоненциально по сравнению с длиной оптимального пути, то есть алгоритм работает за O(b^d), где b – коэффициент ветвления, а d – длина кратчайшего пути. Чем лучше эвристика, тем меньшие будет эффективный коэффициент ветвления b, и следовательно, меньше временная сложность.

По памяти – в худшем случае ему приходится помнить экспоненциальное количество узлов O(e^|*V*|), где |*V*|– кол-во вершин.

Минимальная куча:

Оценка основных операций – нахождение минимального элемента за O(1), удаление и вставка за O(log *n*), где *n* – количество элементов кучи.

Попамяти: O*(n),* где *n –* количествоэлементов вкуче*.* **Тестирование.**

Таблица 1 – тестирование жадного алгоритма.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Входные данные | Выходные данные | Комментарий |
| 1 | a g a b 3.0 a c 1.0 b d 2.0 b e 3.0 d e 4.0 e a 1.0 e f 2.0 a g 8.0 f g 1.0 | abdeag | Верно. |
| 2 | a g a b 3.0 a c 1.0 b d 2.0 b e 3.0 d e 4.0 e a 3.0 e f 2.0 a g 8.0 f g 1.0 | abdefg | Верно. |

Таблица 2 – тестирование алгоритма *A\**.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Входные данные | Выходные данные | Комментарий |
| 1 | a e  a b 3.0  b c 1.0  c d 1.0  a d 5.0  d e 1.0 | ade | Верно. |
| 2 | a g a b 3.0 b d 2.0 b e 3.0 d e 4.0 e f 2.0 a g 60.0 f g 1.0 | abefg | Верно. |

Пример вывода дополнительной информации на примере из условия задачи для алгоритмов, представлен на рисунках 1-2 соответственно.

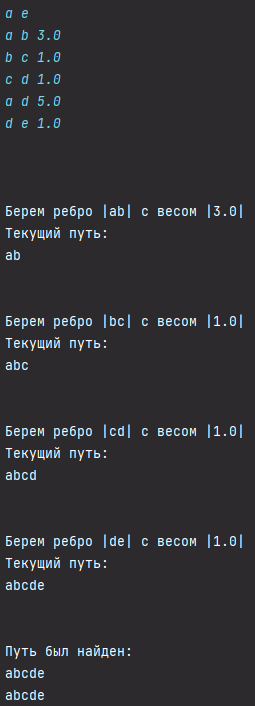
****

Рисунок 1 - Вывод дополнительной информации на примере из условия для жадного алгоритма

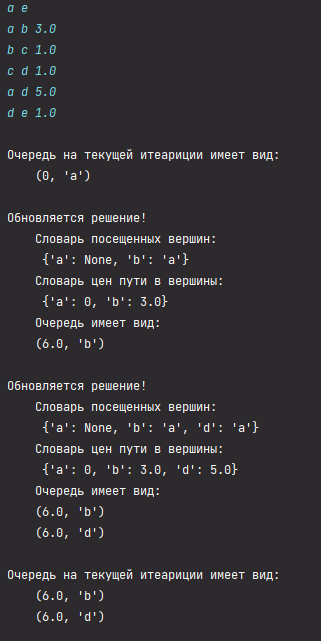
****

Рисунок 2 – Отрывок вывода дополнительной информации на примере из условия для алгоритма A\*

**Вывод.**

Написана программа, которая решает задачу построения кратчайшего пути в ориентированном графе при помощи жадного алгоритма и алгоритма А\*. Также была оценена сложность каждого алгоритма.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММ**

Название файла: greedy.py

import sys

DEBUG = False

def reader():

"""

Функция считывает стартовую и конечную вершины. После чего считывает ребра из

стандартного потока ввода, пока в него подают.

Разбивает ввод и заносить в словарь ребер ребра.

После чего происходит сортировка ребер, по их весу.

:return: кортеж из 3х элементов: стартовая вершина, конечная вершина, словарь ребер графа

"""

global DEBUG

start, end = input().split()

edges = dict()

for line in sys.stdin:

if line == '\n':

break

source, destination, weight = line.split()

if source not in edges.keys():

edges[source] = list()

edges[source].append((destination, float(weight)))

for key in edges.keys():

edges[key].sort(key=lambda edge: edge[1])

return start, end, edges

def greedyAlgorithm(startVertex, endVertex, edges):

"""

Жадный поиск пути от стартовой вершины к конечной. Используется поиск в глубину.

:param startVertex: стартовая вершина

:param endVertex: конечная

:param edges: словарь ребер

:return: Возвращает путь от стартовой до конечной вершины.

"""

result = "" # В данной переменной после поиска в глубину будет храниться конечное решение.

found = False # Переменная 'флаг', необходима для приостановки поиска в глубину, когда решение было найдено.

def modedDFS(path):

"""

Модифицированный поиск в глубину.

Смотрим текущую смежные ребра с текущей вершиной.

Пока они есть удаляем из них минимальное и добавляем к текущему пути

букву вершины куда ведет эторебро.

:param path: путь на текущей интерации рекурсии

:return: ничего не возвращает

"""

nonlocal result, found, endVertex, edges

global DEBUG

if found: # выход из рекурси если путь был найден

return

if path[-1] == endVertex: # нашли путь от стартовой до конечной вершины

result = path # сохраняем его

found = True # поднимаем флаг, ибо нашли путь

if DEBUG:

print('\n')

print("Путь был найден:")

print(f"{result}")

return

if edges.get(path[-1]) is None and DEBUG:

print('\n')

print(f"Вершина |{path[-1]}| является листом графа")

while edges.get(path[-1]) and edges[path[-1]] is not None: # пока есть смежные ребра с текущей вершиной

newEdge = edges[path[-1]].pop(0) # берем минимальное из них

if DEBUG and not found:

print('\n')

print(f"Берем ребро |{path[-1]}{newEdge[0]}| с весом |{newEdge[1]}|")

print("Текущий путь:")

print(path + newEdge[0])

modedDFS(path + newEdge[0]) # запускаем поиск добавив к текущему пути вершину куда это ребро ведет.

modedDFS(startVertex) # вызываем поиск в глубину из стартовой вершины

return result # возвращаем найденный путь

def main():

data = reader() # Cчитываем данные

print(greedyAlgorithm(\*data)) # Передаем их алгоритму, после чего печатаем ответ.

if \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":

main()

Название файла: binaryHeap.py

class Heap:

def \_\_init\_\_(self, arr=None):

"Инициализация объектс класса"

if arr is None:

arr = []

self.\_\_heap = []

for el in arr:

self.insert(el)

@staticmethod

def getParent(index):

"Получение индекса родителя текущей вершины"

return (index - 1) // 2

@staticmethod

def getLeft(index):

"Получение индекса левого ребенка"

return 2 \* index + 1

@staticmethod

def getRight(index):

"Получение индекса правого ребенка"

return 2 \* index + 2

def \_\_siftUp(self, index):

"""

Просеивает вверх узел

:param index: индекс вершины которую хотят просеить вверх

:return: ничего возвращает

"""

if index < 0 or index >= len(self.\_\_heap):

return

parent = self.getParent(index)

while index and not self.\_\_heap[parent] < self.\_\_heap[index]:

self.\_\_heap[parent], self.\_\_heap[index] = self.\_\_heap[index], self.\_\_heap[parent]

index, parent = parent, self.getParent(index)

def \_\_siftDown(self, index):

"""

Просеивает вниз узел

:param index: индекс вершины которую хотят просеить вниз

:return: ничего возвращает

"""

if index < 0 or index >= len(self.\_\_heap):

return

minIndex = index

while True:

left, right = self.getLeft(index), self.getRight(index)

if right < len(self.\_\_heap) and self.\_\_heap[right] < self.\_\_heap[minIndex]:

minIndex = right

if left < len(self.\_\_heap) and self.\_\_heap[left] < self.\_\_heap[minIndex]:

minIndex = left

if minIndex == index:

return

else:

self.\_\_heap[index], self.\_\_heap[minIndex] = self.\_\_heap[minIndex], self.\_\_heap[index]

index = minIndex

def extractMin(self):

"""

Достает минимальеый ставит максимальный на его место и просеивает вниз.

:return: возвращает минимальный элемент

"""

if not self.\_\_heap:

return

min\_element = self.\_\_heap[0]

self.\_\_heap[0] = self.\_\_heap[-1]

del self.\_\_heap[-1]

self.\_\_siftDown(0)

return min\_element

def insert(self, element):

"""

Добавляет элемент ставит в конец и просеивает вверх его.

:return: ничего возвращает

"""

self.\_\_heap.append(element)

self.\_\_siftUp(len(self.\_\_heap) - 1)

def size(self):

"""

:return: возвращает размер кучи

"""

return len(self.\_\_heap)

def \_\_repr\_\_(self):

representation = ""

for item in self.\_\_heap:

representation += '\t' + str(item) + "\n"

return representation

Название файла: aStar.py

import sys

from binaryHeap import Heap

DEBUG = False

def heuristic(currentVertex, endVertex):

"""

Эврестическая функция - близость символов,

обозначающих вершины графа, в таблице ASCII.

Считается следующим образом: разница кодов конечной вершины с текущей по модолю.

:param currentVertex: текущая вершина

:param endVertex: конечная вершина

:return: возвращает значение эврестической функции

"""

return abs(ord(endVertex) - ord(currentVertex))

def aStarAlgorithm(startVertex, endVertex, edges):

"""

Функция реализует алгоритм A\*. Создает словарь расстояний, и словарь корней.

Создает очередь с приоритетом на куче.

Пока куча не пустая, достаем вершину с минимальной ценной из очереди. Если это конечная прекращаем поиск,

если эта вершина лист пропускаем рассмотрение этой вершины,

иначе рассматриваем ребра смежные с этой вершиной, берем вершину куда ведет это ребро, считаем вес пути в данную вершину

если такую вершину не рассматривали или вес получился более оптимальный обновляем словари и добавляем в очередь эту вершину.

:param startVertex: начальная вершина

:param endVertex: конечная вершина

:param edges: словарь ребер графа

:return: словарь корней (ключ - куда пришли, значение - откуда)

"""

global DEBUG

distances = dict({startVertex: 0})

roots = dict({startVertex: None})

queue = Heap([(0, startVertex)])

while queue.size() != 0:

if DEBUG:

print("Очередь на текущей итеариции имеет вид:")

print(queue)

current = queue.extractMin()[1]

if current == endVertex:

if DEBUG:

print('Дошли до конечной вершины!')

break

if current not in edges:

if DEBUG:

print(f"Вершина |{current}| является листом графа")

continue

for nextVertex, weight in edges[current]:

temp\_dist = distances[current] + weight

if nextVertex not in distances or temp\_dist < distances[nextVertex]:

roots[nextVertex] = current

distances[nextVertex] = temp\_dist

queue.insert((temp\_dist + heuristic(nextVertex, endVertex), nextVertex))

if DEBUG:

print(f"Обновляется решение!")

print("\tСловарь посещенных вершин:")

print("\t", roots)

print("\tСловарь цен пути в вершины:")

print("\t", distances)

print("\tОчередь имеет вид:")

print(queue)

return roots

def recoverPath(map, endVertex):

"""

Функция востанавливает путь пройденный А\*. Начинает востанавливать с конечной вершины по старт.

:param map: словарь путей

:param endVertex: конечная вершина

:return: возвращает путь от стартовой вершины до конечной

"""

path = ''

current = endVertex

while current: # пока существует вершина из которой пришли

path += current # к пути добавляем текущую

current = map[current] # берем вершину откуда пришли в текущую

return path[::-1] # переворачиваем путь

def reader():

"""

Функция считывает стартовую и конечную вершины. После чего считывает ребра из

стандартного потока ввода, пока в него подают.

Разбивает ввод и заносить в словарь ребер ребра.

:return: кортеж из 3х элементов: стартовая вершина, конечная вершина, словарь ребер графа

"""

start, end = input().split()

edges = dict()

for line in sys.stdin:

if line == '\n':

break

source, destination, weight = line.split()

if source not in edges.keys():

edges[source] = list()

edges[source].append((destination, float(weight)))

return start, end, edges

if \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":

data = reader() # считываем данные

"""

Предаем данные в алгоритм A\*,

после чего востанавливаем путь проёденный алгоритмом,

печатаем результат

"""

print(recoverPath(aStarAlgorithm(\*data), data[1]))