Exercices d'approfondissement

I. Types de raisonnement

Exercice 1 : Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3+2^3+...+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

Exercice 2 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$

Exercice 3 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=u_n^2$$

Démontrer la forme générale de u_n .

Exercice 4 : Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un entier impair λ_n tel que :

$$5^{2^{n-2}}=1+\lambda_n 2^n$$

Exercice 5 : Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 6 : a) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnelle est irrationnelle.
b) Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.
c) Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle. Même question pour le produit.

Exercice 7 : Soient a et b des éléments de $\mathbb{Q}$, montrer que $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ est rationnel si est seulement si a=b=0. Soit A le point du plan de coordonnées $(\sqrt{2};\sqrt{3})$. Montrer que si Γ est un cercle de centre A , Γ contient au plus un point dont les coordonnées sont rationnelles.

Exercice 8 : Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :
i) $\forall n \in A, 2n \in A$, ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$.

a) Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, 2^m \in A$
b) Montrer que $A=\mathbb{N}^*$

II. Logique mathématiques

Exercice 1 : Soit A,B et C trois plan du plan formant un triangle T.

a) Écrire une assertion portant sur AB, BC, CA et exprimant que T est un triangle équilatéral.

b) En déduire une assertion exprimant que T n'est pas équilatéral

c) Comment exprimer que T n'est pas isocèle.

Exercice 2 : Que pensez-vous de $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$

Exercice 3 : Que pensez-vous de $\exists x \in \mathbb{C}, x^2+1=0$

Exercice 4 : Soit a et b deux entiers naturels, on propose :

$\exists x \in \mathbb{N}, a=bx$ et $\exists x \in \mathbb{N}, b=ax$

Montrer que a=b.

Exercice 5 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Comment à l'aide de f(x), écrire que f est positive ?
b) Écrire la négation de cette assertion.
c) Que pensez-vous de $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) \geqslant 0 \, ou \, f(x) \leqslant 0)$
d) Que pensez-vous de $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0) ou (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 0)$

Exercice 6 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Écrire une assertion exprimant que f est majorée par un réel grand M donné.
b) Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
c) Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majoré.

III. Calculs algébriques

Exercice 1 : Montrer que pour tout entier relatif n, $n-2 | n^3-8$. En déduire les entiers relatifs n tels que $n-2 | n^3-2$

Exercice 2 : Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que l'entier naturel a^n-1 est premier :

a) Montrer que a = 2
b) Montrer que n est premier

Exercice 3 : Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que a^n+1 soit premier. Démontrer que n est une puissance de 2.

Exercice 4 : Soit r un élément de $]-1,1[$. Pour n dans $\mathbb{N}$ soit :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} r^k$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{1-r}$$

Exercice 5 : Une expérience à la probabilité $p\in]0,1[$ de réussir. On la répète n fois de manière indépendante. Soit X la variable aléatoire donnant le premier instant de réussite en convenant que $X=0$ si l'expérience de réussit jamais. Déterminer l'espérance de X . Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 : Soit x un élément de $]0,\pi[$, en remarquant que : $\forall y\in\mathbb{R}, \sin(2y)=2\sin(y)\cos(y)$ simplifier pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

En utilisant la relation $\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$ et en appliquant à $u=\frac{x}{2^n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer la limite de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 : Soient r et n deux entiers naturels, avec $r\leqslant n$. En utilisant la relation de Pascal : $\binom{k+1}{r+1}=\binom{k}{r}+\binom{k}{r+1}$, exprimer comme un coefficient binomiale la somme :

$$S=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}$$

IV. Trigonométrie

Exercice 1 : En utilisant l'égalité : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ calculer les valeurs du cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2 : Calculer $\cos(\pi/8)$ en utilisant la formule de duplication pour le cosinus.

Exercice 3 : Déterminer sans calcul maximum sur $\mathbb{R}$ de :

$$f(x)=\sin(x)\cos(x)$$

Exercice 4 : Résoudre : $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$

Exercice 5 : Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \cos(\sin(x))>\sin(\cos(x))$$

Exercice 6 : Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 2\cos(2x)+4\cos(x)+3\geqslant 0$$

Pour quelle valeur de x cette égalité est-elle est une égalité ?

Exercice 7 : Exprimer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$.

Exercice 8 : Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire $\tan(\pi/8)$.

Exercice 9 : Soit x un nombre réel non congru à $\frac{\pi}{2}(\pi)$. Quels sont les nombres réels y tels que $cotan(y)=\tan(x)$.

V. Suite de nombres réels

Exercice 1: Dans un premier temps, $\forall a, b \in \mathbb{R}, ||a|-|b|| \leqslant |a-b|$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de nombres réels. Montrer que si (u_n) converge vers γ alors $(|u_n|)$ converge aussi vers γ . Étudier aussi la réciproque.

Exercice 2 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x\in\mathbb{R}$ tel que $u_n=\frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}$. Étudier la convergence de (u_n) . En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. Ensuite, montrer que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres irrationnels.

Exercice 3 : Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $u_n=\frac{(-2)^n}{3}$
b) $v_n=2^n-3^n$
c) $w_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Exercice 4 : Démonter que la suite $((-1)^n)$ est divergente.

Exercice 5 : Soient trois suites $(v_n),(w_n),(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ et un réel γ . On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n, v_n=\gamma$$
$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n\leq u_n\leq w_n \quad .$$

Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\gamma$.

Exercice 6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel γ . Démontrer que si $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq 0$ et que u_n converge vers γ alors $\gamma\geqslant 0$.

VI. Limite et continuité

Exercice 1 : Démontrer grâce au taux d'accroissement que la dérivée du $\ln(x)$ est $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Exercice 2 : Dériver les fonctions suivantes :

a) $a(x)=x^3\cos(5x+1)$

b) $b(x)=e^{\cos(x)}$

c) $c(x)=x\ln x$

d) $d(x)=\ln(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}})$

e) $e(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$

f) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

Exercice 3 : Soient u, v, w trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée du produit $f=uvw$.

Exercice 4 : Soient deux fonctions f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée seconde de $h=g\circ f$.

Exercice 5 : En utilisant la formule de duplication pour cos, démontrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=\frac{-1}{2}$$

Exercice 6 : Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n : N_n$ vaut 1 si $1\leqslant n\leqslant 9$, 2 si $10\leqslant n\leqslant 99$ et ainsi de suite. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n=\frac{N_n}{\ln(n)}$$

Exercice 7 : On appelle carré parfait tout nombre de la forme n^2 avec n dans $\mathbb{N}^*$. Pour x dans $[1,+\infty[$, on note $N(x)$ le nombre de carrés parfaits inférieurs ou égaux à x. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction :

$$f(x)=\frac{N(x)}{\sqrt{x}}$$

VII. Intégration

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivants :

$$I=\int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)} \quad \text{et} \quad J=\int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

Exercice 2 : Pour $p,q\in\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,dt$$

Exercice 3 : Soit pour $x\in]0,+\infty[$:

$$G(x)=\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Calculer la dérivée de G. On pourra poser, pour $x\in]0,+\infty[$.

$$F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivants :

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3}{\sqrt{t}}\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^2 (2x+3)(x^2+3x-5x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t^6}\,dt$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ¿

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivants :

a) $I=\int_0^x t^2 e^t\,dt$ et b) $J=\int_0^x t^2\sin(t)\,dt$

Exercice 6 : Soient a et b deux réels tels que $a<b$, f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}$$

Posons pour tout réel x, $S(x)=\int_a^b (f(t)+xg(t))^2\,dt$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré inférieur à 2 et à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

VII. Nombres complexes

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

$$z_1=\frac{3-2i}{2+5i} \quad , \quad z_2=\left(\frac{1+i}{i}\right)^3$$

Exercice 2 : Donner le module et l'argument du nombre suivant :

$$z=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 3 : Soit $z=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Écrire ce nombre sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.

Exercice 4 : $\forall n\in\mathbb{N}$, que vaut i^n

Exercice 6 : Soient les points A,B,C, et D d'affixes

$$a=3+2i,\ b=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i,\ c=-5-i,\ d=\frac{-5}{2}+\frac{9}{2}i$$

Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 7 : On considère le polynôme d'une variable complexe $P(z)=z^4-3z^2-4$. Dans un premier temps, trouver les racines de ce polynôme puis en déduire sa forme factorisée.

Exercice 8 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*-\{1\}$. On définit la suite (z_n) de nombres complexes par : $z=0$ et pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1}=\lambda z_n+i$. On désigne par M_n le point d'affixe z_n .

a) Calculer z_1,z_2,z_3

b) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, z_n=\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}i$$

c) On pose $\lambda=i$, justifions alors que $z_4=0$

d) Prouver donc que $\forall n\in\mathbb{N}, z_{n+4}=z_n$

e) Soit Ω le point d'affixe $\omega=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$. Prouver que pour tout entier naturel n, on a :

$$\Omega M_{n+1}=\Omega M_n \quad \text{et que} \quad (\Omega\vec{M}_n,\Omega\vec{M}_{n+1})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

VIII. Pour aller plus loin

Exercice 1 : Une certaine quantité d'une substance décroît exponentiellement en fonction du temps en obéissant à la loi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, N(t) = Ce^{-Kt}$$

où les constantes C et K sont supérieurs à 0. Déterminer le temps de demi-vie, c'est à dire l'instant t tel que $N(t) = Ce^{-Kt}$.

Exercice 2 : Une bactérie se développe avec un taux d'accroissement proportionnel à la population, c'est à dire que le nombre de bactéries à instant t obéit à l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, N'(t) = KN(t)$$

où K est une constante strictement positive. La population passe de 10^6 individus à 2×10^6 en 12 minutes. Combien faut-il de temps pour passer de 10^6 à 10^8 individus.

Exercice 3 : Déterminer la limite de $\dfrac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 4 : Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de :

$$x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x^\alpha$$

Exercice 5 : Soit ABC un triangle. On note a,b,c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB. Les demi-périmètre de ABC noté p : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

a) Établir la formule de Héron : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

b) En déduire l'inégalité : $S \leqslant \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Exercice 6 : Déterminer la fonction de y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$y'' + y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 3$$

Quel est le maximum de y ?