Résolution de problème

Énoncé : Soit n un entier naturel. On appelle permutation de $[1, n]$ une applicatio bijective de $1, ..., n$ dans $1, ..., n$.
(1) Combien y a-t'il de telles permutations.
(2) Calculer l'espérance du nombre de points fixes d'une permutation

(1)On doit réorganiser un ensemble d'élément dans un certain ordre (i.e l'ordre compte). Or, pour placer le premier élément, on a n choix, pour le second $n-1$, et enfin on a 1 choix pour le dernier élément. Donc on a $n \times (n-1) \times ... \times 1 = n!$ possibilités de permutations

(2)Posons une variable aléatoire X qui compte le nombre de points fixes dans une permutation "tirée au hasard". Maintenant, on définit une autre variable aléatoire que l'on va noter $P_{k \in [[1,n]]}$ qui parcours une permutation et qui est égale à 1 quand k est un point fixe sinon 0. On remarque que P_k ne peut qu'associer à un nombre d'une permutation soit 0 soit 1. Autrement dit, P_k suit la loi de Bernouilli. Mais alors pour une permutation de $\{1, .., n\}$ tirée au hasard λ on a :

$$X = \sum_{k=1}^{n} P_k.$$

Or, on remarque que X représente le nombre de succès ou d'échec de P_k, on décrit alors une loi binomiale.Aussi, on cherche à calculer l'espérance de X autrement dit on a :

$$E[X] = E[\sum_{k=1}^{n} P_k] = E[P_1] + E[P_2] + ... + E[P_n] \text{ [par linératiré].}$$

Maintenant, il faut caractériser $P(P_k = 1)$.

Pour cela, on part de l'ensemble de base que l'on appelle $S = \{1, ..., n\}$ et on définit deux sous ensemble A_i, A_r tel que $A_1 = 1$ et le $A_i + A_r = S$. A_1 est notre ensemble "point fixe", c'est à dire qu'on ne va pas le toucher. On va se demander maintenant combien de permutations possibles on peut faire avec A_r. Cette réponse nous est donnée dans (1) comme $card(A_r) = n - 1$ alors le nombre de permutations est $(n-1)!$. Autrement dit, on a $P(P_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi, on a : $E[X] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Pour conclure, en prenant une permutation aléatoire de l'ensemble S, on a en moyenne 1 point fixe. Autrement dit, un groupe de polytechniciens satisfera en moyenne 1 personne s'ils s'amusent à mélanger leurs khâlos ;).