Exercices d'approfondissements

I.Les types de raisonnements.

Exercice 1 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)^2$.

Exercice 2 : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $U_{n+1}=(U_n)^2$ avec $U_0\in\mathbb{R}$. Exprimer U_n en fonction de n

Exercice 3 : Soient a, b deux réels , $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $Un+1=aU_n+b$.

a) Traiter le cas a = 1

b) Soit l la solution de $x=ax+b$ et $l=\frac{b}{1-a}$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$:

$V_n=U_n-l$.

Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique puis conclure en exprimant U_n en fonction de n.

c) La suite U_n est-elle convergente ?

Exercice 4 : Soit $p\in]0,1[$. Un message binaire issu d'une source est transmise à des opérateurs successifs. À chaque étape, le message est transmis avec une probabilité correctement avec une probabilité p, incorrectement sinon. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer la probabilité p_n pour que le n-ième opérateur reçoive le message initiale. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On modélisera la situation à l'aide d'une suite arithmético-géométrique).

Exercice 5 : Soit $c\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, soit :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$$.

Calculer $f(x)$ puis $f(f(x))$ puis $f(f(f(x)))$ et généraliser.

Exercice 6 : Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 7 : Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 8 : Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)\times f(y)$$

Exercice 9 : Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=f(x)+f(y)$$

II. Calcules algébriques

Exercice 1 : Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, 13 divise $7^{2n+1}+6^{2n+1}$.

Exercice 2 : Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et [illegible] . Montrer que :

$$\frac{a^n-1}{a-1}\leqslant na^{n-1}$$

Exercice 3 : Donner une expression simple de la somme des n premiers entiers impairs :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} 2k-1$$

Exercice 4 : Donner une expression simple de :

$$C_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Puis trouver sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Donner une forme simple de :

$$\sum_{k=1}^{n}(k\times k!)$$

Exercice 6 : Simplifier :

$$A_n=\prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}$$

Même consigne :

$$B_n=\prod_{k=0}^{n}\frac{k+4}{k+2}$$

III.Les suites de nombres réels

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{2} u_n + 2 , \quad \forall \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad u_0 = 2$$

1)Montrer que $u_n \leq 3$
2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 : Dans un premier temps, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \| a| - |b\| \leqslant |a - b|$ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de nombres réels. Montrer que si (u_n) converge vers γ alors $(|u_n|)$ converge aussi vers γ .
Étudier aussi la réciproque.

Exercice 3 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$. Étudier la convergence de (u_n) .
En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. Ensuite, montrer que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres irrationnels.

Exercice 4 : Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = \frac{(-2)^n}{3}$
b) $v_n = 2^n - 3^n$
c) $w_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Exercice 5 : Démonter que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Exercice 6 : Démonter que la suite $((-1)^n)$ est divergente.

Exercice 7 : Soient trois suites $(v_n), (w_n), (u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ et un réel γ . On suppose que :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n, v_n = \gamma$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n \quad .$$

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \gamma$.

IV. Limite et continuité

Exercice 1 : Démontrer l'unicité de la limite $y \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $a : x \rightarrow e^{-\sqrt{x}}$

b) $b : x \rightarrow \frac{x+7}{4x+3}$

c) $c : x \rightarrow \frac{x^2+5}{x^3-1}$

d) $d : x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$

e) $e : x \rightarrow \cos(x^2) e^{-x}$

f) $f : x \rightarrow \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$

Exercice 3 : Trouver la limite en $+\infty$ de :

$$x \rightarrow \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

Exercice 4 : Soit H la fonction de Heaviside telle que $H(x)=0$ si $x<0$ et $H(x)=1$ si $x \geqslant 0$. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 5 : Démontrer que si une fonction est positive et qu'elle admet une limite finie alors cette limite finie est positive.

Exercice 6 : Soit un polynôme $P(X)=a_2 X^2+a_1 X+a_0$. Démontrer que le quotient de P et de $a_2 X^2$ admet une limite en 1 en $+\infty$. Généraliser ceci à tout polynômes.

V.Dérivation

Exercice 1 : Démontrer grâce au taux d'accroissement que la dérivée du $\ln(x)$ est $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Exercice 2 : Soit $a,b\in I, a<b,$, et $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$. On suppose que :

f est continue sur $[a,b]$
f est dérivable sur $]a,b[$
$f(a)=f(b)$

Démontrer qu'il existe un c tel que $f'(c)=0$.

Exercice 3 : Dériver les fonctions suivantes :

a) $a(x)=x^3\cos(5x+1)$

b) $b(x)=e^{\cos(x)}$

c) $c(x)=x\ln x$

d) $d(x)=\ln(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}})$

e) $e(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$

f) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

Exercice 4 : Soient u,v,w trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée du produit $f=uvw$.

Exercice 5 : Soient deux fonctions f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée seconde de $h=g\circ f$.

VI.Intégration

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivants :

$$I=\int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)} \quad \text{et} \quad J=\int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$$

Exercice 2 : Pour $p,q\in\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,dt$$

Exercice 3 : Soit pour $x\in]0,+\infty[$:

$$G(x)=\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Calculer la dérivée de G. On pourra poser, pour $x\in]0,+\infty[$.

$$F(x)=\int_1^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivants :

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3}{\sqrt{t}}\,dt$

b) $\displaystyle\int_0^2 (2x+3)(x^2+3x-5x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t^6}\,dt$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ¿

Exercice 5 : Calculer l'intégrale des fonctions suivantes :

a) $f(t)=te^{-2t}$ pour $t\in[0,2]$
b) $g(t)=\ln t$ pour $t\in[1,x],\forall x\in]0,+\infty[$
c) $h(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$

Exercice 6: Soit $s_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n})$ et $S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})$.
Démontrer que ces deux suites convergent vers l'intégrale de f entre a et b.

VII.Les nombres complexes

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

$$z_1=\frac{3-2i}{2+5i} \quad , \quad z_2=\left(\frac{1+i}{i}\right)^3$$

Exercice 2 : Donner le module et l'argument du nombre suivant :

$$z=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 3 : Soit $z=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Écrire ce nombre sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.

Exercice 4 : $\forall n\in\mathbb{N}$, que vaut i^n

Exercice 5 : Trouver le nombre complexe tel que $z^2+10z+169=0$

Exercice 6 : Soient les points A,B,C, et D d'affixes

$$a=3+2i,\ b=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i,\ c=-5-i,\ d=\frac{-5}{2}+\frac{9}{2}i$$

Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 7 : On considère le polynôme d'une variable complexe $P(z)=z^4-3z^2-4$. Dans un premier temps, trouver les racines de ce polynôme puis en déduire sa forme factorisée.

Exercice 8 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*-\{1\}$. On définit la suite (z_n) de nombres complexes par : $z=0$ et pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1}=\lambda z_n+i$. On désigne par M_n le point d'affixe z_n .

a) Calculer z_1, z_2, z_3

b) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, z_n=\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}i$$

c) On pose $\lambda=i$, justifions alors que $z_4=0$

d) Prouver donc que $\forall n\in\mathbb{N}, z_{n+4}=z_n$

e) Soit Ω le point d'affixe $\omega=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$. Prouver que pour tout entier naturel n, on a :

$$\Omega M_{n+1}=\Omega M_n \quad \text{et que} \quad (\Omega\vec{M}_n, \Omega\vec{M}_{n+1})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$$